

Algebra lineare su moduli e algoritmo di Buchberger

Letizia D'Achille

Sommario

Nel presente lavoro si dà un'interpretazione dell'algoritmo di Buchberger come generalizzazione dell'algoritmo di Gauss e dell'algoritmo euclideo, e come strumento per il calcolo delle operazioni elementari tra moduli. Riprendendo alcuni lavori presenti in letteratura, se ne fornisce una trattazione unitaria unificando le notazioni e rielaborando alcune dimostrazioni al fine di renderle più immediate. Per la descrizione dell'algoritmo di Buchberger per moduli si impiega la notazione matriciale per chiarire l'analogia con l'algoritmo di Gauss e per esprimere le operazioni di base dell'algebra lineare su moduli in forma compatta ed espressiva. La trattazione comprende un'introduzione agli ordinamenti di modulo e al calcolo delle basi di Gröbner, con particolare attenzione agli ordinamenti di eliminazione delle componenti di modulo. Utilizzando questi ultimi, è possibile descrivere una procedura per il calcolo di una semplice forma normale per le matrici che descrivono i moduli, che tornerà poi utile per il calcolo delle operazioni elementari tra moduli. Si descrive il parallelismo tra tale procedura e l'algoritmo di eliminazione di Gauss, e si discutono le similarità e differenze tra i due concetti di forma normale. Questo paragone permette di interpretare diverse operazioni base dell'algebra lineare su moduli come particolari applicazioni dirette dell'algoritmo di Buchberger. Si confronta poi l'algoritmo di Buchberger con l'algoritmo euclideo, mostrando che il primo può essere visto come una generalizzazione del secondo. Si arriva quindi a discutere l'esistenza e la determinazione esplicita delle soluzioni di sistemi di equazioni diofantee a variabili polinomiali utilizzando una notazione matriciale compatta. Questi confronti permettono di analizzare tramite sperimentazioni la stabilità numerica dell'algoritmo di Buchberger in relazione a quella degli algoritmi di Gauss ed euclideo. Il lavoro è corredato di esempi atti a chiarire le notazioni e le procedure utilizzate, che sono stati svolti impiegando il sistema di algebra computazionale CoCoA.