МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Отчет по практикуму на ЭВМ

Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа:

Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями

Студент 4 курса:	Нагорных Я.В.
Преподаватель:	Попов А.В.

Москва

2018

Содержание

1 Постановка задачи

Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = 0, \\
\dfrac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = \mu\Big(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\Big) + \rho f_1, \\
\dfrac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = \mu\Big(\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x_2}\Big) + \rho f_2, \\
p = p(\rho).
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Здесь μ – коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), p – давление газа (известная функция), f – вектор внешних сил (известная функция).

Неизвестные функции ρ и u, плотность и скорость соответственно, – функции от двух переменных t и x (переменные Эйлера), причем

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega.$$

В качестве граничных условий берется следующее:

$$\rho|_{\Gamma^-} = \rho_\gamma = 1, \quad u_1|_{\Gamma^-} = \omega \in \{0{,}1;\ 1\}, \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma^+} = 0. \tag{1.2}$$

На оставшейся границе компоненты скорости равны нулю, а функция плотности считается неизвестной.

Для решения задачи введем равномерную сетку ω_h с шагом h_x по оси x, с шагом h_y по оси y и с шагом τ по оси t. Введем константы M_x, M_y и N, такие что $X = Mh$, $Y = My$ и $T = N\tau$.

2 Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности систему дифференциальных уравнений можно преобразовать к виду

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(u_k\dfrac{\partial g}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k g}{\partial x_k} + (2-g)\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = f_0,\\
\dfrac{\partial u_k}{\partial t} + \dfrac{1}{3}(u_k\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k^2}{\partial x_k}) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=1, m\neq k}^{2}\left(u_m\dfrac{\partial u_k}{\partial x_m} + \dfrac{\partial u_m u_k}{\partial x_m} - u_k\dfrac{\partial u_m}{\partial x_m}\right) + p'_\rho\dfrac{\partial g}{\partial x_k} =\\
\qquad = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \displaystyle\sum_{m=1, m\neq k}^{2}\left(\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m}\right)\right) + f_k, \qquad k = 1\ldots s,\\
p = p(\rho), \quad g = \ln\rho.
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

Сеточную функцию, разностное приближение для плотности ρ, обозначим H. Аналогично, разностные аналоги g и u обозначим через G и V. Для поиска численного решения задачи используется следующая разностная схема:

$$
G_t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(V_k\hat{G}_{\overset{\circ}{x}_k} + (V_k\hat{G})_{\overset{\circ}{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} - G(V_k)_{\overset{\circ}{x}_k}\right) = f_0, \qquad x \in \Omega_{\bar{h}}; \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_t + \frac{1}{2}\left((V_k\hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k}\right) - \frac{1}{2}h_k\left((GV_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - \frac{1}{2}(GV_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k} + \right.\\
&\qquad \left. +(2-G)\left((V_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - \frac{1}{2}(V_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k}\right)\right) = f_0, \qquad x \in \gamma_k^-,\ k = 1,\ 2;
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_t + \frac{1}{2}\left((V_k\hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k}\right) + \frac{1}{2}h_k\left((GV_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - \frac{1}{2}(GV_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k} + \right.\\
&\qquad \left. +(2-G)\left((V_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - \frac{1}{2}(V_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k}\right)\right) = f_0, \qquad x \in \gamma_k^+,\ k = 1,\ 2;
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&(V_k)_t + \frac{1}{3}\left(V_k(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} + (V_k\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m=1,\, m\neq k}^{2}\left(V_m(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_m} + (V_m\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_m} - V_k(\hat{V}_m)_{\overset{\circ}{x}_m}\right) + p'_\rho(e^G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}_m} = \\
&\quad = \tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,\, m\neq k}^{2}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) - \left(\tilde{\mu} - \mu e^{-G}\right)\times \\
&\quad \times\left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,\, m\neq k}^{2}(V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) + \frac{\mu e^{-G}}{3}\sum_{m=1,\, m\neq k}^{2}(V_m)_{\overset{\circ}{x}_k\overset{\circ}{x}_m} + f_k,\\
&\qquad\qquad\qquad \text{где } x \in \Omega_{\bar{h}};
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\hat{V}_k = 0, \qquad x \in \gamma_{\bar{h}}, \qquad k = 1,\ 2. \tag{2.6}
$$

Распишем уравнения схемы в поточечном виде и преобразуем их, приведя подобные слагаемые при неизвестных значениях с верхнего слоя. Получим:

$$
\begin{aligned}
&4\cdot G^{n+1}_{m_1,m_2}-\frac{\tau}{h_x}G^{n+1}_{m_1-1,m_2}\left({V_1}^n_{m_1,m_2}+{V_1}^n_{m_1-1,m_2}\right)+\frac{\tau}{h_x}G^{n+1}_{m_1+1,m_2}\left({V_1}^n_{m_1,m_2}+{V_1}^n_{m_1+1,m_2}\right)-\\
&\quad-\frac{\tau}{h_y}G^{n+1}_{m_1,m_2-1}\left({V_2}^n_{m_1,m_2}+{V_2}^n_{m_1,m_2-1}\right)+\frac{\tau}{h_y}G^{n+1}_{m_1,m_2+1}\left({V_2}^n_{m_1,m_2}+{V_2}^n_{m_1,m_2+1}\right)-\\
&\quad\quad-\frac{2\tau}{h_x}{V_1}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\frac{2\tau}{h_x}{V_1}^{n+1}_{m_1+1,m_2}-\frac{2\tau}{h_y}{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2-1}+\frac{2\tau}{h_y}{V_2}^{n+1}_{m_1,m_2+1}=\\
&\quad\quad\quad=\;4\cdot G^n_{m_1,m_2}+\tau G^n_{m_1,m_2}\left(\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2}-{V_1}^n_{m_1-1,m_2}}{h_x}+\frac{{V_2}^n_{m_1,m_2+1}-{V_2}^n_{m_1,m_2-1}}{h_y}\right)+\;4\tau f_0,
\end{aligned}
$$

где $x\in\Omega_h$

$$
\begin{aligned}
&G^{n+1}_{0,m_2}\left(2-\frac{\tau}{h_x}{V_1}^n_{0,m_2}\right)+G^{n+1}_{1,m_2}\frac{\tau}{h_x}{V_1}^n_{1,m_2}+\frac{2\tau}{h_x}{V_1}^{n+1}_{1,m_2}-\frac{2\tau}{h_x}{V_1}^{n+1}_{0,m_2}=\\
&\quad=2\cdot G^n_{0,m_2}+\frac{\tau}{h_x}G^n_{0,m_2}\left({V_1}^n_{1,m_2}-{V_1}^n_{0,m_2}\right)+2\tau f_0+\\
&\quad\quad+\frac{\tau}{h_x}\Bigg(G^n_{0,m_2}{V_1}^n_{0,m_2}-\frac{5}{2}\cdot G^n_{1,m_2}{V_1}^n_{1,m_2}+2\cdot G^n_{2,m_2}{V_1}^n_{2,m_2}-\\
&\quad\quad\quad-\frac{1}{2}\cdot G^n_{3,m_2}{V_1}^n_{3,m_2}+\left(2-G^n_{0,m_2}\right)\cdot\left({V_1}^n_{0,m_2}-2.5\cdot{V_1}^n_{1,m_2}+2{V_1}^n_{2,m_2}-0.5{V_1}^n_{3,m_2}\right)\Bigg),
\end{aligned}
$$

где $x\in\gamma_k^-$

$$
\begin{aligned}
&G^{n+1}_{M,m_2}\left(2+\frac{\tau}{h_x}{V_1}^n_{M,m_2}\right)-G^{n+1}_{M-1,m_2}\frac{\tau}{h_x}{V_1}^n_{M-1,m_2}+\frac{2\tau}{h_x}{V_1}^{n+1}_{M,m_2}-\frac{2\tau}{h_x}{V_1}^{n+1}_{M-1,m_2}=\\
&\quad=2\cdot G^n_{M,m_2}+\frac{\tau}{h_x}G^n_{M,m_2}\left({V_1}^n_{M,m_2}-{V_1}^n_{M-1,m_2}\right)+2\tau f_0-\frac{\tau}{h_x}\times\Bigg[G^n_{M,m_2}{V_1}^n_{M,m_2}-\\
&\quad\quad-\frac{5}{2}\cdot G^n_{M-1,m_2}{V_1}^n_{M-1,m_2}+2\cdot G^n_{M-2,m_2}{V_1}^n_{M-2,m_2}-\frac{1}{2}\cdot G^n_{M-3,m_2}{V_1}^n_{M-3,m_2}+\\
&\quad\quad\quad+\left(2-G^n_{M,m_2}\right)\cdot\left({V_1}^n_{M,m_2}-\frac{5}{2}\cdot{V_1}^n_{M-1,m_2}+2\cdot{V_1}^n_{M-2,m_2}-\frac{1}{2}\cdot{V_1}^n_{M-3,m_2}\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

где $x\in\gamma_k^+$

$$
\begin{aligned}
&{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2}\left(6+4\cdot\tau\tilde{\mu}\left(\frac{4}{h_x^2}+\frac{3}{h_y^2}\right)\right)+{V_1}^{n+1}_{m_1-1,m_2}\left(-\frac{\tau}{h_x}\left({V_1}^n_{m_1,m_2}+{V_1}^n_{m_1-1,m_2}\right)-\tilde{\mu}\frac{8\tau}{h_x^2}\right)+\\
&\quad+{V_1}^{n+1}_{m_1+1,m_2}\left(\frac{\tau}{h_x}\left({V_1}^n_{m_1,m_2}+{V_1}^n_{m_1+1,m_2}\right)-\frac{8\tau}{h_x^2}\right)\cdot\tilde{\mu}+\\
&\quad\quad+{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2-1}\left(-\frac{3\tau}{2h_y}\left({V_2}^n_{m_1,m_2}+{V_2}^n_{m_1,m_2-1}\right)-\frac{6\tau}{h_y^2}\right)\cdot\tilde{\mu}+\\
&\quad\quad\quad+{V_1}^{n+1}_{m_1,m_2+1}\left(\frac{3\tau}{2h_y}\left({V_2}^n_{m_1,m_2}+{V_2}^n_{m_1,m_2+1}\right)-\frac{6\tau}{h_y^2}\right)\cdot\tilde{\mu}-\\
&\quad\quad\quad\quad-3\cdot\frac{\tau}{h_x}\cdot p'_\rho G^{n+1}_{m_1-1,m_2}+3\cdot\frac{\tau}{h_x}\cdot p'_\rho G^{n+1}_{m_1+1,m_2}=\\
&=6\cdot{V_1}^n_{m_1,m_2}+6\cdot\tau f_1+\frac{3}{2}\cdot\frac{\tau}{2h_y}{V_1}^n_{m_1,m_2}\left({V_2}_{m_1,m_2+1}-{V_2}_{m_1,m_2-1}\right)-\\
&\quad-6\cdot\tau\cdot\left(\tilde{\mu}-\mu e^{-G}\right)\cdot\left(\frac{4}{3h_x^2}\left({V_1}^n_{m_1+1,m_2}-2{V_1}^n_{m_1,m_2}+{V_1}^n_{m_1-1,m_2}\right)\right.\\
&\quad\quad\left.+\frac{1}{h_y^2}\left({V_1}^n_{m_1,m_2+1}-2{V_1}^n_{m_1,m_2}+{V_1}^n_{m_1,m_2-1}\right)\right)+\\
&\quad\quad\quad+\mu e^{-G}\frac{\tau}{2h_xh_y}\left({V_2}^n_{m_1+1,m_2+1}-{V_2}^n_{m_1-1,m_2+1}-{V_2}^n_{m_1+1,m_2-1}+{V_2}^n_{m_1-1,m_2-1}\right),
\end{aligned}
$$

где $\tilde{\mu}=\mu\|e^{-G}\|$.