МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Отчет по практикуму на ЭВМ

Студент 4 курса:	Дамир Салахов
Преподаватель:	Ченцова Н.Н.

Москва
2018

Содержание

1 Постановка задачи

Дано уравнение в частных производных с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u^3 - \cos\dfrac{\pi x}{2} \\ x = 0: \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ x = 1: \qquad u = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Неизвестная функция – u от двух переменных t и x (переменные Эйлера), причем

$$(t, x) \in Q = [0, 1] \times [0, 1].$$

Само уравнение можно перепиать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f, \tag{1.2}$$

где f – данная функция.

Для начального момента времени задана функция u_0, значения которой совпадают со значениями u на отрезке $x \in [0; 1]$:

$$u|_{t=0} = u_0 = 0.9 \cdot (1 - x^2), \tag{1.3}$$

Для решения задачи введем равномерную сетку ω_h с шагом h по оси x и с шагом τ по оси t. Введем константы M и N, такие что $X = Mh$ и $T = N\tau$.

2 Описание явной схемы схемы

Чтобы свести дифференциальное уравнение к неявной схеме, заменим производные на разности на этом же слое сетки (за исключением производной по t). Получим схему:

$$V_t = V_{x\hat{x}} + f, \qquad x \in \omega_h, \tag{2.1}$$

$$V_{x,0} = 0 \tag{2.2}$$

$$V_M^n = 0 \tag{2.3}$$

Исходя из 1.3, в качестве значений решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функции u_0, т.е.

$$V_m^0 = (u_0)_m, \qquad \text{где} \quad m = 0, 1, \dots M.$$

2.1 Уравнение 2.1

Распишем основные обозначения:

$$V_t = \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} \tag{2.4}$$

$$V_{x\hat{x}} = \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2} \tag{2.5}$$

Подставим 2.4 и 2.5 в 2.1, получим:

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} = \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2}. \tag{2.6}$$

Приведем подобные и выразим V_m^{n+1}:

$$V_m^{n+1} = V_{m-1}^n \cdot \frac{\tau}{h^2} + V_m^n \cdot \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) + V_{m+1}^n \cdot \frac{\tau}{h^2}.$$

Для ускорения дальнейших вычислений и улучшения точности введем переменную $\gamma = \tau / h$ и получим

$$V_m^{n+1} = V_{m-1}^n \cdot \frac{\gamma}{h} + V_m^n \cdot \left(1 - \frac{2\gamma}{h}\right) + V_{m+1}^n \cdot \frac{\gamma}{h}. \tag{2.7}$$

2.2 Уравнения 2.2 и 2.3

Из 2.2 следует:

$$V_1^n = V_0^n.$$

Из 2.3 следует, что весь последний слой сетки равен нулю:

$$V_M^n = 0.$$

2.3 Алгоритм

Заметим, что из 2.7 V_m^{n+1} для $m = 1 \dots N-1$ на $n+1$-ом слое выражается через три точки предыдущего n-ого слоя (на рисунке: может заполнить любой столбец, зная его соседний столбец слева). Для $m = M$ все также известно (они нулевые). Уровень $m = 0$ можно вычислить, зная уровень $m = 1$.

Предзаполним в таблице первый столбец и последнюю строчку. Далее, используя 2.7 можем заполнить все оставшиеся клетки, идя сверху вниз, слева направо.

$m \backslash n$	0	1	2	$\cdots$	N
0	$u_0(0)$	$V_0^1 := V_1^1$	$V_0^2 := V_1^2$	$\cdots$	$V_0^N := V_1^N$
1	$u_0(h)$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
2	$u_0(2h)$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
$\vdots$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\ddots$	$\uparrow$
$M-1$	$u_0((M-1)h)$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
M	$u_0(Mh) \equiv 0$	0	0	$\cdots$	0

2.4 Сходимость схемы

Для того, чтобы понять, при каких разбиениях сходится данная схема, будем использовать спектральный признак устойчивости.

Подставим в 2.6 $V_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$. Тогда согласно признаку схема устойчива, если $\exists c : \quad |\lambda| < 1 + c\tau \quad \forall \varphi$.

Получим:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi}-\lambda^n e^{im\varphi}}{\tau}=\frac{\lambda^n e^{i(m+1)\varphi}-2\lambda^n e^{im\varphi}+\lambda^n e^{i(m-1)\varphi}}{h^2}$$
$$\frac{\lambda e^{i\varphi}-e^{i\varphi}}{\tau}=\frac{e^{2i\varphi}-2e^{i\varphi}+1}{h^2}$$
$$\lambda-1=\frac{\tau}{h^2}\cdot\left(\frac{e^{2i\varphi}+1}{e^{i\varphi}}-2\right)$$
$$\lambda=1+\frac{\tau}{h^2}\cdot(2\cos\varphi-2)$$
$$\lambda=1-\frac{4\tau}{h^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2} \tag{2.8}$$

Для устойчивости схемы нужно $|\lambda|\leqslant 1$. Перепишем 2.8:

$$\left|1-\frac{4\tau}{h^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\right|\leqslant 1$$
$$\left|\frac{4\tau}{h^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\right|\leqslant 2$$
$$0\leqslant\frac{\tau}{h^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\leqslant\frac{1}{2}$$

Очевидно, что квадрат синуса больше нуля. Так как правое неравенство должно быть верно для любых φ, то зная, что $\sin^2\frac{\varphi}{2}\leqslant 1$, получаем необходимое условие:

$$\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2} \tag{2.9}$$

Графики, подверждающие визуально, что схема расходится при определенных условиях на τ и h, приведены в Приложении C

3 Описание неявной схемы схемы

Для поиска численного решения задачи 4.1 будем использовать разностную схему, в которой при аппроксимации членов используются односторонние разности:

$$V_t=\hat{V}_{x\hat{x}}+f,\qquad x\in\omega_h, \tag{3.1}$$
$$\hat{V}_{x,0}=0 \tag{3.2}$$
$$\hat{V}^n_M=0 \tag{3.3}$$

Так же как и в предыдущей схеме 2 на нулевом слоне возьмем проекции на сетку:

$$V^0_m=(u_0)_m,\qquad \text{где}\quad m=0,1,\dots M.$$

Коэффициенты перед элементами V в уравнении 3.1 задают элементы матрицы и правой части. Таким образом с помощью этих уравнений можно получить матричное, решив которое, можно найти значения для функции u на новом слое сетки. Распишем уравнения системы для нахождения элементов матрицы.

3.1 Уравнение 3.1

Вспомним обозначения:

$$V_t = \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} \tag{3.4}$$

$$\hat{V}_{x\hat{x}} = \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} \tag{3.5}$$

Перепишем само уравнение:

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} = \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f$$

Приводя подобные и домножая обе части на τ и взяв $\gamma = \tau/h$

$$V_{m+1}^{n+1} \cdot \frac{\gamma}{h} + V_m^{n+1} \cdot \left(-1 - \frac{2\gamma}{h}\right) + V_{m-1}^{n+1} \cdot \frac{\gamma}{h} = -V_m^n - f \cdot \tau \tag{3.6}$$

3.2 Уравнения 3.2 и 3.3

Из уравнения 3.2 получаем коэффициенты для нулевой строки матрицы и правой части алгебраической задачи.

$$\hat{V}_{x,0} = \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h}$$

Итого, домножив на h получим

$$-V_0^{n+1} + V_1^{n+1} = 0 \tag{3.7}$$

Из уравнения 3.3 получаем последню строку матрицы (она нулевая).

3.3 Алгоритм

На каждом шаге итерации сначала будем строить матрицу размера $M + 1$ и правую часть для нового слоя V^{n+1}, используя уравнения 3.6, 3.7, 3.3. Решив полученную систему линейное уравнение, найдем новое приближение для u.

Заметим, из итоговых уравнений видно, что в алгебраической задаче получились трехдиагональные матрицы. Таким образом, полученную СЛУ можно решить методом прогонки.

3.4 Сходимость схемы

Действуем также, как и в 2.4 Подставим в схему $V_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$. Получим:

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} = \frac{\lambda^{n+1}e^{i(m+1)\varphi} - 2\lambda^{n+1}e^{im\varphi} + \lambda^{n+1}e^{i(m-1)\varphi}}{h^2}$$

$$\frac{e^{i\varphi} - \dfrac{e^{i\varphi}}{\lambda}}{\tau} = \frac{e^{2i\varphi} - 2e^{i\varphi} + 1}{h^2}$$

$$1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\tau}{h^2} \cdot \left(\frac{e^{2i\varphi} + 1}{e^{i\varphi}} - 2\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{\tau}{h^2} \cdot (2\cos\varphi - 2)$$

$$\lambda = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{-1} \tag{3.8}$$

Для устойчивости схемы нужно $|\lambda| \leqslant 1$. Из 3.8 следует:

$$\left|1 + \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right| \geqslant 1 \tag{3.9}$$

Заметим, в силу положительности второго слагаемого это неравенство всегда верно. Следовательно, данная схема устойчива.

В Приложении A и B приведены графики для неявной схемы к нашей дифференциальной задаче.

4 Тестирование на известных условиях

4.1 Условия

Чтобы проверить правильность реализованной схемы модифицируем изначальную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u^3 + f \\ x = 0: \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ x = 1: \qquad u = 0 \\ f = 1.8 - u^3 \end{cases} \tag{4.1}$$

С известным начальным условием

$$u|_{t=0} = 0.9 \cdot (1 - x^2)$$

Заметим, что в таком случае решением будет являться $u = 0.9 \cdot (1 - x^2)$ – параболоид.

4.2 Тестирование неявной схемы

При известном решении мы можем вычислить погрешность нашей схемы. В Приложении 5 представлены графики для такого параболоида и невязки. Из этих графиков видно, что для каждого разбиения погрешность нарастает с увеличением номера итерации.

Для осознания сходимости и правильности схемы приведем вычисленные нормы невязки. В следующих таблицах приведены нормы $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_{v_1^2}$.

$\|u-V\|_C$				
$\tau\backslash h$	0.010000	0.005000	0.002500	0.001250
0.010000	1.580672e-02	7.963878e-03	3.997309e-03	2.002528e-03
0.002500	1.597577e-02	8.051159e-03	4.041659e-03	2.024882e-03
0.000625	1.601862e-02	8.073291e-03	4.052908e-03	2.030553e-03
0.000156	1.602937e-02	8.078843e-03	4.055730e-03	2.031976e-03

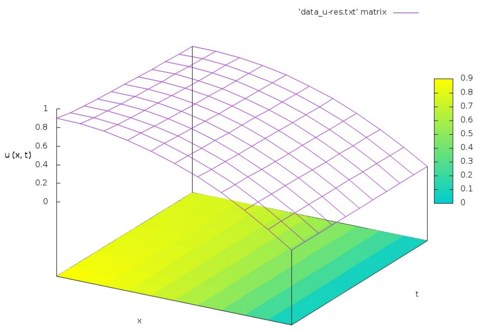
$\|u-V\|_{L_2}$				
$\tau\backslash h$	0.010000	0.005000	0.002500	0.001250
0.010000	9.796435e-03	4.918536e-03	2.464433e-03	1.233518e-03
0.002500	9.912456e-03	4.978151e-03	2.494652e-03	1.248732e-03
0.000625	9.941862e-03	4.993269e-03	2.502317e-03	1.252592e-03
0.000156	9.949239e-03	4.997062e-03	2.504241e-03	1.253560e-03

$\|u-V\|_{v_2^1}$				
$\tau\backslash h$	0.010000	0.005000	0.002500	0.001250
0.010000	1.875896e-02	9.442011e-03	4.736889e-03	2.372447e-03
0.002500	1.897098e-02	9.551257e-03	4.792344e-03	2.400386e-03
0.000625	1.902473e-02	9.578968e-03	4.806415e-03	2.407476e-03
0.000156	1.903821e-02	9.585920e-03	4.809945e-03	2.409255e-03

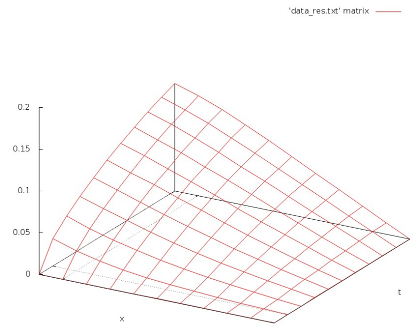
Заметим, что при изменении разбиения по времени, погрешность почти не изменяется, что логично. Кроме того, при уменьшении шага сетки, во столько же раз уменьшается невязка. Таким образом, при увеличении M мы добиваемся большей точности.

Строго говоря, сходимость схемы к решению не зависит от разбиения по времени, а имеет порядок $o(h)$.

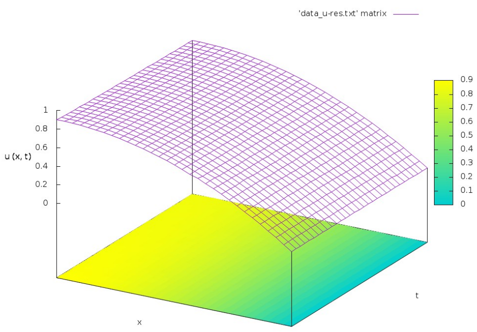
5 Графики функции и невязки в условиях 4.1



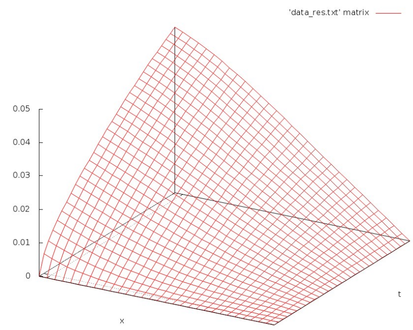
$N = 10; M = 10$



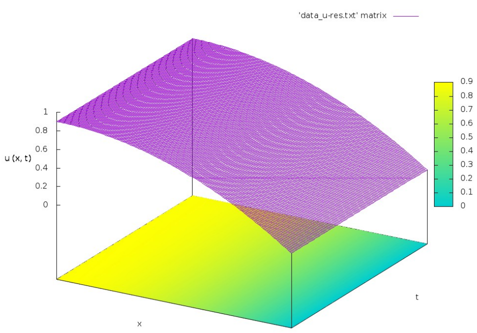
Невязка



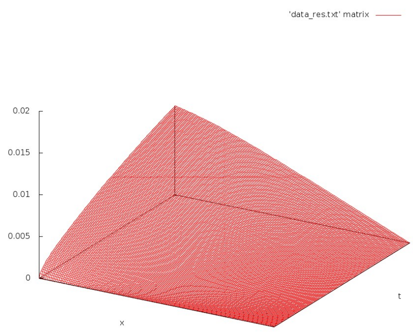
$N = 30; M = 30$



Невязка

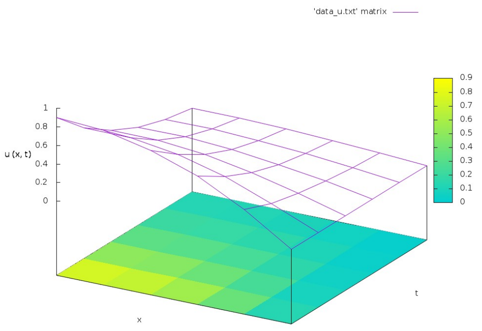


$N = 150; M = 150$

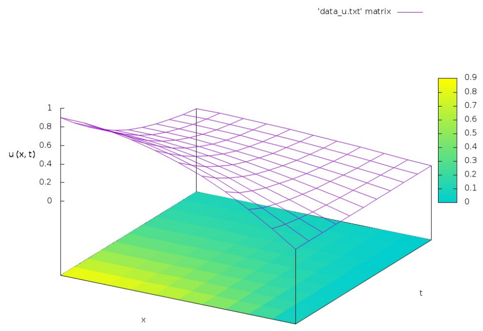


Невязка

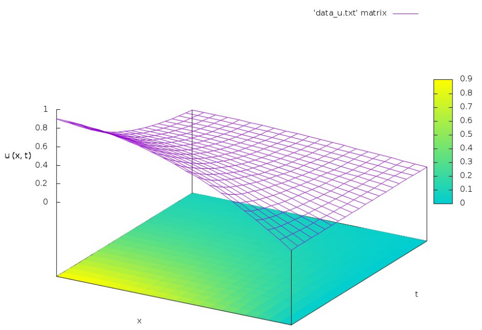
A Графики для $f = u^3$



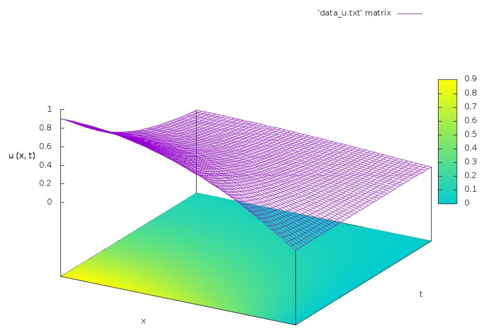
$N = 5; M = 5$



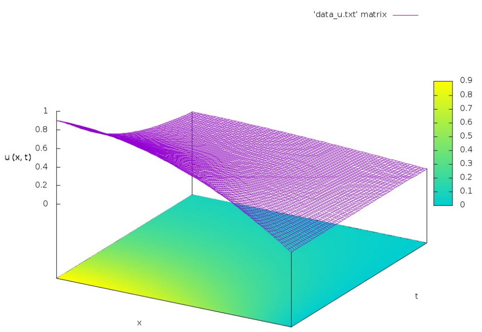
$N = 10; M = 10$



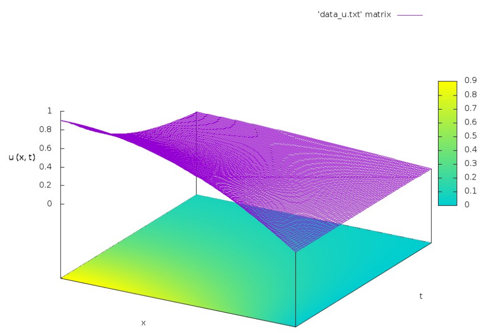
$N = 20; M = 20$



$N = 50; M = 50$

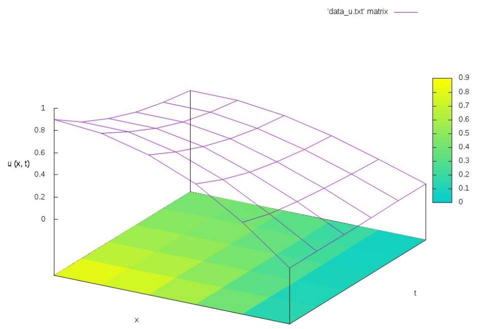


$N = 70; M = 70$

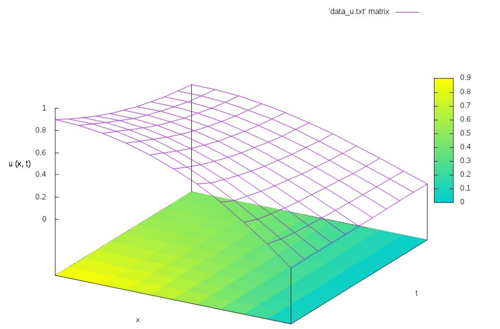


$N = 100; M = 100$

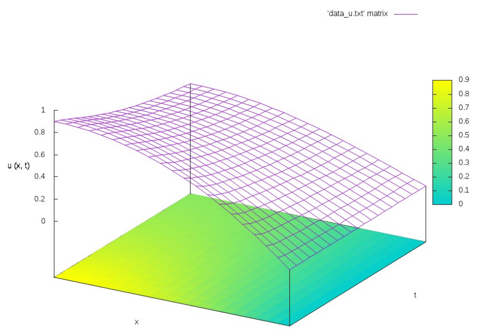
B Графики для $f = u^3 - \cos\frac{\pi x}{2}$



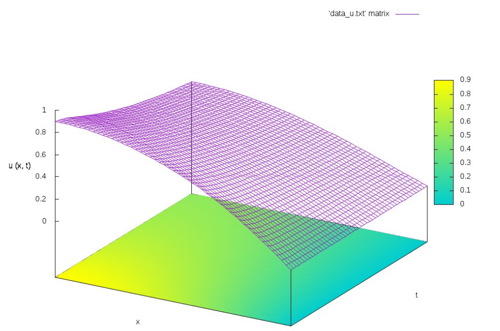
$N = 5; M = 5$



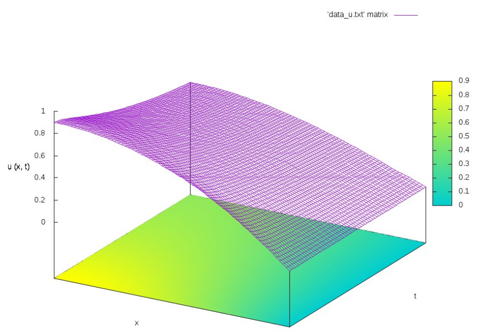
$N = 10; M = 10$



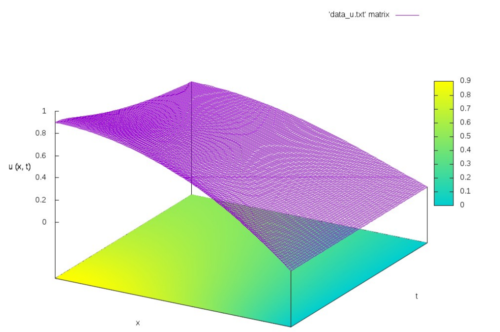
$N = 20; M = 20$



$N = 50; M = 50$

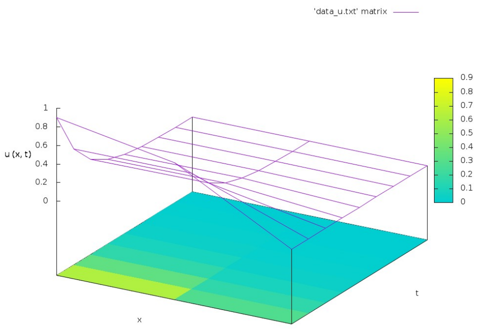


$N = 70; M = 70$

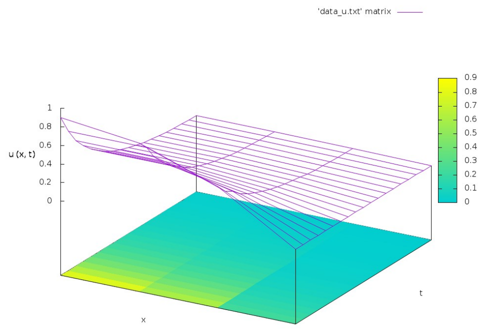


$N = 100; M = 100$

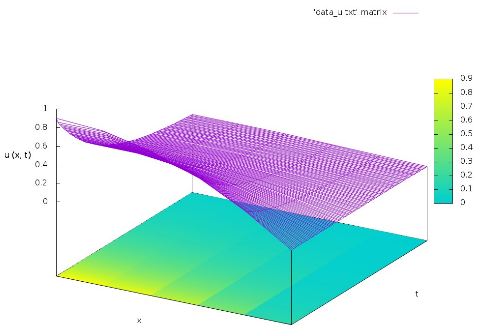
C Графики для явной схемы для $f = u^3$



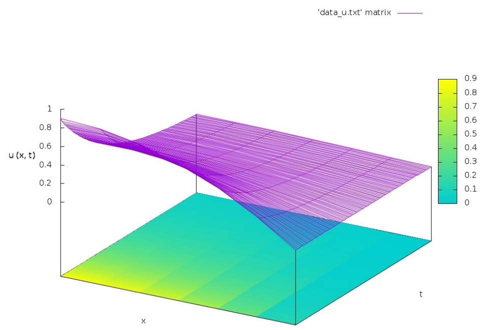
$$N = 8; M = 2;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$$



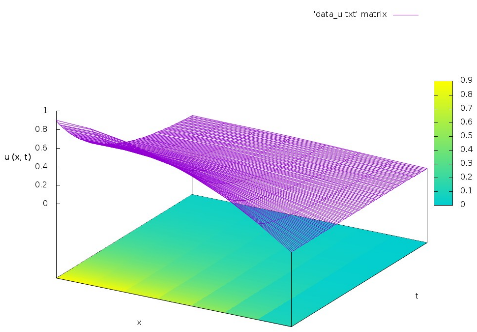
$$N = 18; M = 3;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$$



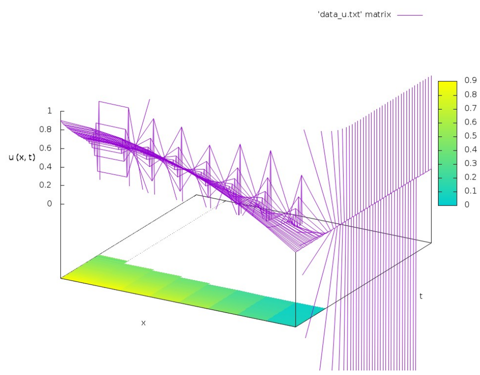
$$N = 100; M = 5;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$



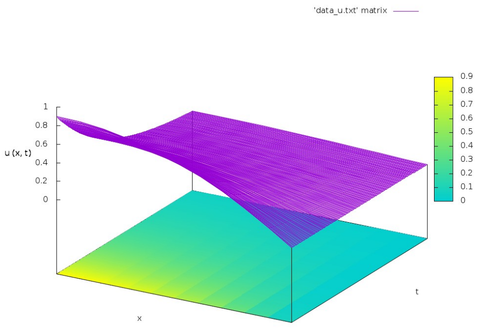
$$N = 100; M = 6;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{9}{25} < \frac{1}{2}$$



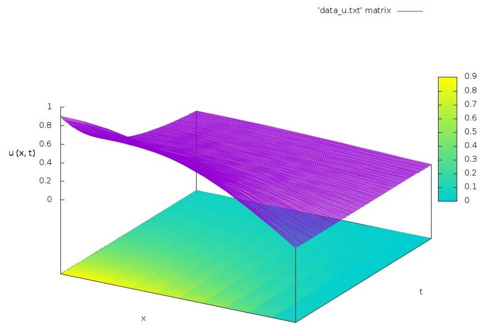
$$N = 100; M = 7;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{49}{100} < \frac{1}{2}$$



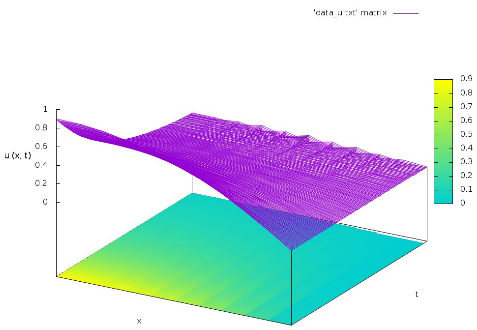
$$N = 100; M = 8;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{16}{25} > \frac{1}{2} \text{ – неустойчива}$$



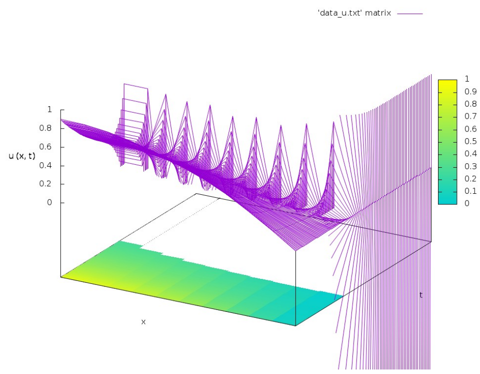
$$N = 210; M = 10;$$
$$\frac{\tau}{h^2} > \frac{1}{2}$$



$$N = 200; M = 10;$$
$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$$



$$N = 190; M = 10;$$
$\frac{\tau}{h^2} = \frac{10}{19} > \frac{1}{2}$ – неустойчива



$$N = 180; M = 10;$$
$\frac{\tau}{h^2} = \frac{10}{18} > \frac{1}{2}$ – неустойчива