МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Отчет по практикуму на ЭВМ
ЕБОТНЯ КАКАЯ-ТО

Студент 4 курса:	Дамир
Преподаватель:	Ченцова

Москва
2017

Содержание

1 Постановка задачи

Дано уравнение в частных производных с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u^3 - \cos\dfrac{\pi x}{2} \\ x = 0: \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ x = 1: \qquad u = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Неизвестная функция – u от двух переменных t и x (переменные Эйлера), причем

$$(t, x) \in Q = [0, 1] \times [0, 1].$$

Само уравнение можно перепиать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f, \tag{1.2}$$

где f – данная функция.

Для начального момента времени задана функция u_0, значения которой совпадают со значениями u на отрезке $x \in [0; 1]$:

$$u|_{t=0} = u_0 = 0.9 \cdot (1 - x^2), \tag{1.3}$$

Для решения задачи введем равномерную сетку ω_h с шагом h по оси x и с шагом τ по оси t. Введем константы M и N, такие что $X = Mh$ и $T = N\tau$.

2 Описание схемы

Для поиска численного решения задачи 1.1 будем использовать разностную схему, в которой при аппроксимации членов используются односторонние разности:

$$V_t = V_{x\hat{x}} + f, \qquad x \in \omega_h, \tag{2.1}$$

$$V_{x,0} = 0 \tag{2.2}$$

$$V_M^n = 0 \tag{2.3}$$

Исходя из 1.3, в качестве значений решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функции u_0, т.е.

$$V_m^0 = (u_0)_m, \qquad \text{где} \quad m = 0, 1, \ldots M.$$

Коэффициенты перед элементами V в уравнении 2.1 задают элементы матрицы и правой части. Таким образом с помощью этих уравнений можно получить матричное, решив которое, можно найти значения для функции u на новом слое сетки. Распишем уравнения системы для нахождения элементов матрицы.

2.1 Уравнение 2.1

Вспомним обозначения:

$$V_t = \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} \tag{2.4}$$

$$V_{x\hat{x}} = \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} \tag{2.5}$$

Перепишем само уравнение:

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} = \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f$$

Приводя подобные и домножая обе части на τ и взяв $\gamma = \tau/h$

$$V_{m+1}^{n+1} \cdot \frac{\gamma}{h} + V_m^{n+1} \cdot \left(-1 - \frac{2\gamma}{h}\right) + V_{m-1}^{n+1} \cdot \frac{\gamma}{h} = -V_m^n - f \cdot \tau \tag{2.6}$$

2.2 Уравнение 2.2

Из уравнения 2.2 получаем коэффициенты для нулевой строки матрицы и правой части алгебраической задачи.

$$V_{x,0} = \frac{V_1^{n+1} - H_0^{n+1}}{h}$$

Итого, домножив на h получим

$$-V_0^{n+1} + V_1^{n+1} = 0 \tag{2.7}$$

2.3 Уравнение 2.3

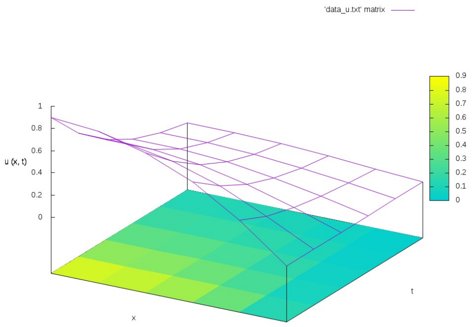
Из этого уравнения получаем последню строку матрицы (она нулевая).

2.4 Алгоритм

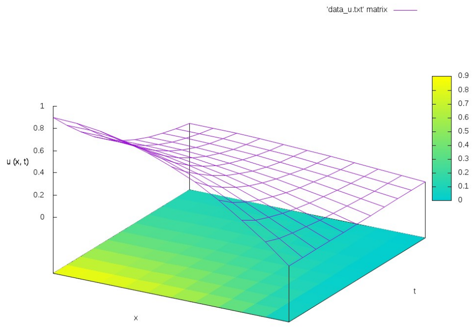
На каждом шаге итерации сначала будем строить матрицу размера $M + 1$ и правую часть для нового слоя V^{n+1}, используя уравнения 2.6, 2.7, 2.3. Решив полученную систему линейное уравнение, найдем новое приближение для u.

Заметим, из итоговых уравнений видно, что в алгебраической задаче получились трехдиагональные матрицы. Таким образом, полученную СЛУ можно решить методом прогонки.

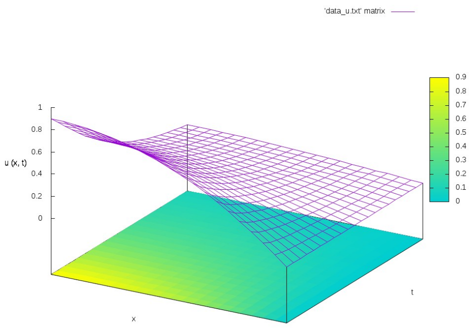
A Для $f = u^3$



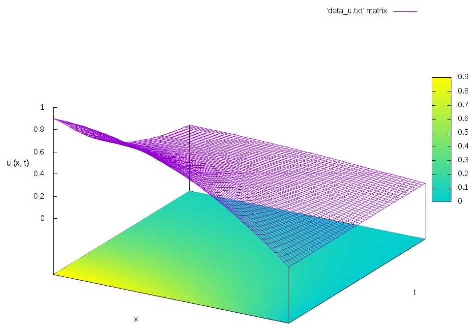
$N = 5; M = 5$



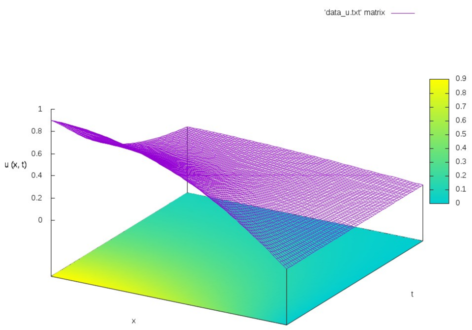
$N = 10; M = 10$



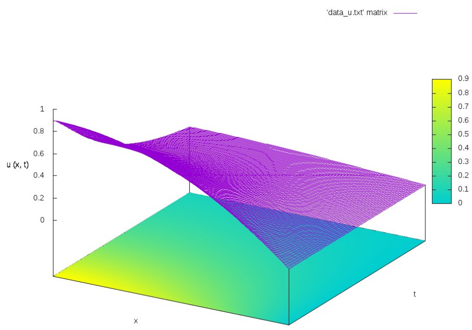
$N = 20; M = 20$



$N = 50; M = 50$

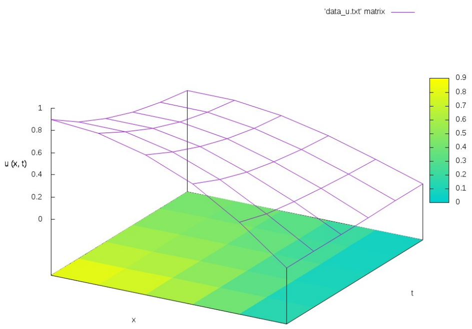


$N = 70; M = 70$

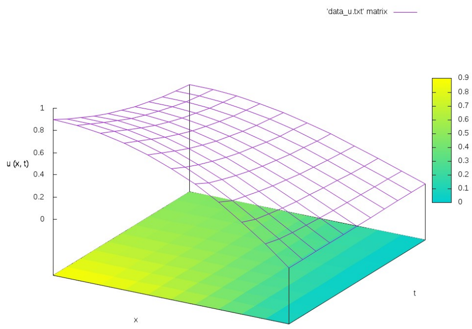


$N = 100; M = 100$

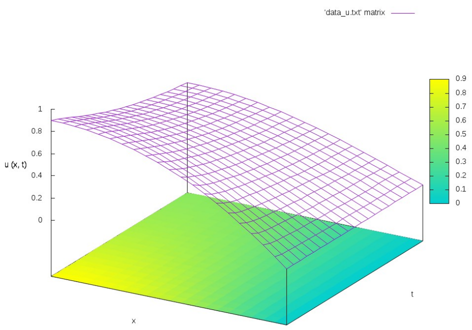
B Для $f = u^3 - \cos \frac{\pi x}{2}$



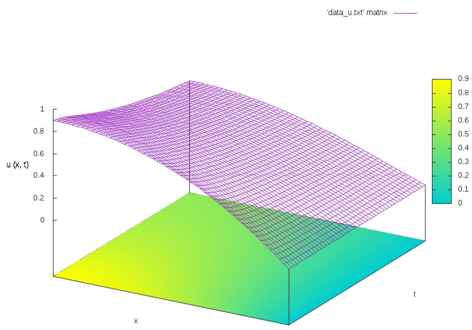
$N = 5; M = 5$



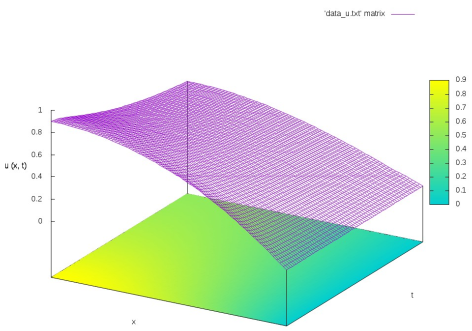
$N = 10; M = 10$



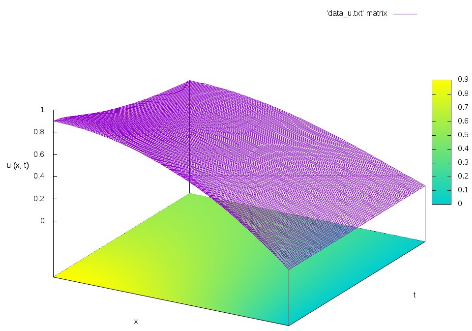
$N = 20; M = 20$



$N = 50; M = 50$



$N = 70; M = 70$



$N = 100; M = 100$