

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.  
ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИКУМУ НА ЭВМ

Студент 4 курса:  
Преподаватель:

Дамир Салахов  
Ченцова Н.Н.

Москва  
2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Описание явной схемы</b>	<b>2</b>
2.1	Уравнение 2.1 . . . . .	2
2.2	Уравнения 2.2 и 2.3 . . . . .	3
2.3	Алгоритм . . . . .	3
2.4	Сходимость схемы . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Описание неявной схемы</b>	<b>4</b>
3.1	Уравнение 3.1 . . . . .	5
3.2	Уравнения 3.2 и 3.3 . . . . .	5
3.3	Алгоритм . . . . .	5
3.4	Сходимость схемы . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Тестирование на известных условиях</b>	<b>6</b>
4.1	Условия . . . . .	6
4.2	Тестирование неявной схемы . . . . .	6
<b>A</b>	<b>Графики функции и невязки в условиях 4.1</b>	<b>8</b>
<b>B</b>	<b>Графики для <math>f = u^3</math></b>	<b>9</b>
<b>C</b>	<b>Графики для <math>f = u^3 - \cos \frac{\pi x}{2}</math></b>	<b>10</b>
<b>D</b>	<b>Графики для явной схемы для <math>f = u^3</math></b>	<b>11</b>

# 1 Постановка задачи

Дано уравнение в частных производных с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u^3 - \cos \frac{\pi x}{2} \\ x = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ x = 1 : \quad u = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Неизвестная функция –  $u$  от двух переменных  $t$  и  $x$  (переменные Эйлера), причем

$$(t, x) \in Q = [0, 1] \times [0, 1].$$

Само уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f, \quad (1.2)$$

где  $f$  – данная функция.

Для начального момента времени задана функция  $u_0$ , значения которой совпадают со значениями  $u$  на отрезке  $x \in [0; 1]$ :

$$u|_{t=0} = u_0 = 0.9 \cdot (1 - x^2), \quad (1.3)$$

Для решения задачи введем равномерную сетку  $\omega_h$  с шагом  $h$  по оси  $x$  и с шагом  $\tau$  по оси  $t$ . Введем константы  $M$  и  $N$ , такие что  $X = Mh$  и  $T = N\tau$ .

## 2 Описание явной схемы

Чтобы свести дифференциальное уравнение к неявной схеме, заменим производные на разности на этом же слое сетки (за исключением производной по  $t$ ). Получим схему:

$$V_t = V_{x\hat{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \quad (2.1)$$

$$V_{x,0} = 0 \quad (2.2)$$

$$V_M^n = 0 \quad (2.3)$$

Исходя из 1.3, в качестве значений решения на нулевом слое берутся проекции на сетку  $\bar{\omega}_h$  функции  $u_0$ , т.е.

$$V_m^0 = (u_0)_m, \quad \text{где } m = 0, 1, \dots M.$$

### 2.1 Уравнение 2.1

Распишем основные обозначения:

$$V_t = \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} \quad (2.4)$$

$$V_{x\hat{x}} = \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2} \quad (2.5)$$

Подставим 2.4 и 2.5 в 2.1, получим:

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} = \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2}. \quad (2.6)$$

Приведем подобные и выразим  $V_m^{n+1}$ :

$$V_m^{n+1} = V_{m-1}^n \cdot \frac{\tau}{h^2} + V_m^n \cdot \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) + V_{m+1}^n \cdot \frac{\tau}{h^2}.$$

Для ускорения дальнейших вычислений и улучшения точности введем переменную  $\gamma = \tau/h$  и получим

$$V_m^{n+1} = V_{m-1}^n \cdot \frac{\gamma}{h} + V_m^n \cdot \left(1 - \frac{2\gamma}{h}\right) + V_{m+1}^n \cdot \frac{\gamma}{h}. \quad (2.7)$$

## 2.2 Уравнения 2.2 и 2.3

Из 2.2 следует:

$$V_1^n = V_0^n.$$

Из 2.3 следует, что весь последний слой сетки равен нулю:

$$V_M^n = 0.$$

## 2.3 Алгоритм

Заметим, что из 2.7  $V_m^{n+1}$  для  $m = 1 \dots N-1$  на  $n+1$ -ом слое выражается через три точки предыдущего  $n$ -ого слоя (на рисунке: может заполнить любой столбец, зная его соседний столбец слева). Для  $m = M$  все также известно (они нулевые). Уровень  $m = 0$  можно вычислить, зная уровень  $m = 1$ .

Предзаполним в таблице первый столбец и последнюю строчку. Далее, используя 2.7 можем заполнить все оставшиеся клетки, идя сверху вниз, слева направо.

$m \backslash n$	0	1	2	...	$N$
0	$u_0(0)$	$V_0^1 := V_1^1$	$V_0^2 := V_1^2$	...	$V_0^N := V_1^N$
1	$u_0(h)$	↑	↑		↑
2	$u_0(2h)$	↑	↑		↑
⋮		↑	↑	⋱	↑
$M-1$	$u_0((M-1)h)$	↑	↑		↑
$M$	$u_0(Mh) \equiv 0$	0	0	...	0

## 2.4 Сходимость схемы

Для того, чтобы понять, при каких разбиениях сходится данная схема, будем использовать спектральный признак устойчивости.

Подставим в 2.6  $V_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ . Тогда согласно признаку схема устойчива, если  $\exists c: |\lambda| < 1 + c\tau \quad \forall \varphi$ .

Получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} &= \frac{\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} - 2\lambda^n e^{im\varphi} + \lambda^n e^{i(m-1)\varphi}}{h^2} \\
\frac{\lambda e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{\tau} &= \frac{e^{2i\varphi} - 2e^{i\varphi} + 1}{h^2} \\
\lambda - 1 &= \frac{\tau}{h^2} \cdot \left( \frac{e^{2i\varphi} + 1}{e^{i\varphi}} - 2 \right) \\
\lambda &= 1 + \frac{\tau}{h^2} \cdot (2 \cos \varphi - 2) \\
\lambda &= 1 - \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для устойчивости схемы нужно  $|\lambda| \leq 1$ . Перепишем 2.8:

$$\begin{aligned}
\left| 1 - \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right| &\leq 1 \\
\left| \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right| &\leq 2 \\
0 &\leq \frac{\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Очевидно, что квадрат синуса больше нуля. Так как правое неравенство должно быть верно для любых  $\varphi$ , то зная, что  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1$ , получаем необходимое условие:

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

### 3 Описание неявной схемы

Для поиска численного решения задачи 4.1 будем использовать разностную схему, в которой при аппроксимации членов используются односторонние разности:

$$V_t = \hat{V}_{x\hat{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \tag{3.1}$$

$$\hat{V}_{x,0} = 0 \tag{3.2}$$

$$\hat{V}_M^n = 0 \tag{3.3}$$

Так же как и в предыдущей схеме 2 на нулевом слое возьмем проекции на сетку:

$$V_m^0 = (u_0)_m, \quad \text{где } m = 0, 1, \dots, M.$$

Коэффициенты перед элементами  $V$  в уравнении 3.1 задают элементы матрицы и правой части. Таким образом с помощью этих уравнений можно получить матричное, решив которое, можно найти значения для функции  $u$  на новом слое сетки. Распишем уравнения системы для нахождения элементов матрицы.

### 3.1 Уравнение 3.1

Вспомним обозначения:

$$V_t = \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} \quad (3.4)$$

$$\hat{V}_{x\hat{x}} = \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} \quad (3.5)$$

Перепишем само уравнение:

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} = \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f$$

Приводя подобные и домножая обе части на  $\tau$  и взяв  $\gamma = \tau/h$

$$V_{m+1}^{n+1} \cdot \frac{\gamma}{h} + V_m^{n+1} \cdot \left(-1 - \frac{2\gamma}{h}\right) + V_{m-1}^{n+1} \cdot \frac{\gamma}{h} = -V_m^n - f \cdot \tau \quad (3.6)$$

### 3.2 Уравнения 3.2 и 3.3

Из уравнения 3.2 получаем коэффициенты для нулевой строки матрицы и правой части алгебраической задачи.

$$\hat{V}_{x,0} = \frac{V_1^{n+1} - H_0^{n+1}}{h}$$

Итого, домножив на  $h$  получим

$$-V_0^{n+1} + V_1^{n+1} = 0 \quad (3.7)$$

Из уравнения 3.3 получаем последнюю строку матрицы (она нулевая).

### 3.3 Алгоритм

На каждом шаге итерации сначала будем строить матрицу размера  $M + 1$  и правую часть для нового слоя  $V^{n+1}$ , используя уравнения 3.6, 3.7, 3.3. Решив полученную систему линейное уравнение, найдем новое приближение для  $u$ .

Заметим, из итоговых уравнений видно, что в алгебраической задаче получились трехдиагональные матрицы. Таким образом, полученную СЛУ можно решить методом прогонки.

### 3.4 Сходимость схемы

Действуем также, как и в 2.4 Подставим в схему  $V_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$ . Получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda^{n+1} e^{im\varphi} - \lambda^n e^{im\varphi}}{\tau} &= \frac{\lambda^{n+1} e^{i(m+1)\varphi} - 2\lambda^{n+1} e^{im\varphi} + \lambda^{n+1} e^{i(m-1)\varphi}}{h^2} \\
 \frac{e^{i\varphi} - \frac{e^{i\varphi}}{\lambda}}{\tau} &= \frac{e^{2i\varphi} - 2e^{i\varphi} + 1}{h^2} \\
 1 - \frac{1}{\lambda} &= \frac{\tau}{h^2} \cdot \left( \frac{e^{2i\varphi} + 1}{e^{i\varphi}} - 2 \right) \\
 \frac{1}{\lambda} &= 1 - \frac{\tau}{h^2} \cdot (2 \cos \varphi - 2) \\
 \lambda &= \left( 1 + \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для устойчивости схемы нужно  $|\lambda| \leq 1$ . Из 3.8 следует:

$$\left| 1 + \frac{4\tau}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right| \geq 1 \tag{3.9}$$

Заметим, в силу положительности второго слагаемого это неравенство всегда верно. Следовательно, данная схема устойчива.

## 4 Тестирование на известных условиях

### 4.1 Условия

Чтобы проверить правильность реализованной схемы модифицируем изначальную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u^3 + f \\ x = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ x = 1 : \quad u = 0 \\ f = 1.8 - u^3 \end{cases} \tag{4.1}$$

С известным начальным условием

$$u|_{t=0} = 0.9 \cdot (1 - x^2)$$

Заметим, что в таком случае решением будет являться  $u = 0.9 \cdot (1 - x^2)$  – параболоид.

### 4.2 Тестирование неявной схемы

При известном решении мы можем вычислить погрешность нашей схемы. В Приложении 4.2 представлены графики для такого параболоида и невязки. Из этих графиков видно, что для каждого разбиения погрешность нарастает с увеличением номера итерации.

Для осознания сходимости и правильности схемы приведем вычисленные нормы невязки. В следующих таблицах приведены нормы  $\|\cdot\|_C$ ,  $\|\cdot\|_{L_2}$ ,  $\|\cdot\|_{v_1^2}$ .

$\ u - V\ _C$				
$\tau \backslash h$	0.010000	0.005000	0.002500	0.001250
0.010000	1.580672e-02	7.963878e-03	3.997309e-03	2.002528e-03
0.002500	1.597577e-02	8.051159e-03	4.041659e-03	2.024882e-03
0.000625	1.601862e-02	8.073291e-03	4.052908e-03	2.030553e-03
0.000156	1.602937e-02	8.078843e-03	4.055730e-03	2.031976e-03

$\ u - V\ _{L_2}$				
$\tau \backslash h$	0.010000	0.005000	0.002500	0.001250
0.010000	9.796435e-03	4.918536e-03	2.464433e-03	1.233518e-03
0.002500	9.912456e-03	4.978151e-03	2.494652e-03	1.248732e-03
0.000625	9.941862e-03	4.993269e-03	2.502317e-03	1.252592e-03
0.000156	9.949239e-03	4.997062e-03	2.504241e-03	1.253560e-03

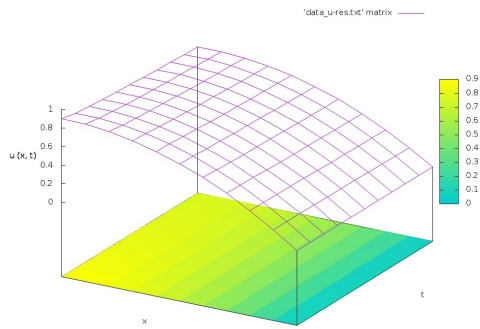
$\ u - V\ _{v_2^1}$				
$\tau \backslash h$	0.010000	0.005000	0.002500	0.001250
0.010000	1.875896e-02	9.442011e-03	4.736889e-03	2.372447e-03
0.002500	1.897098e-02	9.551257e-03	4.792344e-03	2.400386e-03
0.000625	1.902473e-02	9.578968e-03	4.806415e-03	2.407476e-03
0.000156	1.903821e-02	9.585920e-03	4.809945e-03	2.409255e-03

Заметим, что при изменении разбиения по времени, погрешность почти не изменяется, что логично. Кроме того, при уменьшении шага сетки, во столько же раз уменьшается невязка. Таким образом, при увеличении  $M$  мы добиваемся большей точности.

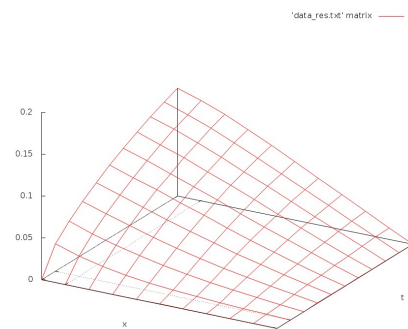
Строго говоря, сходимость схемы к решению не зависит от разбиения по времени, а имеет порядок  $o(h)$ .



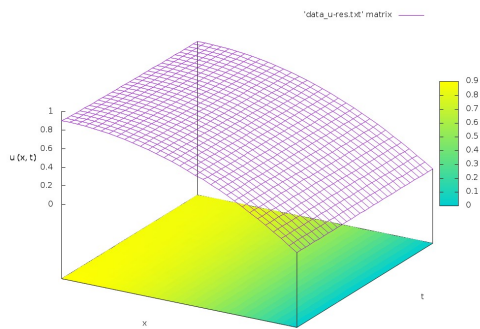
## А Графики функции и невязки в условиях 4.1



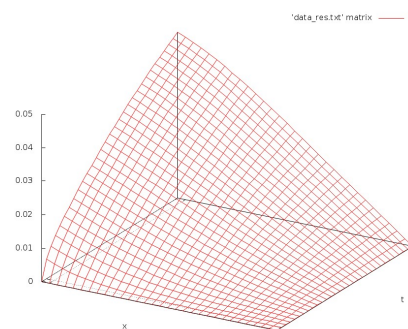
$N = 10; M = 10$



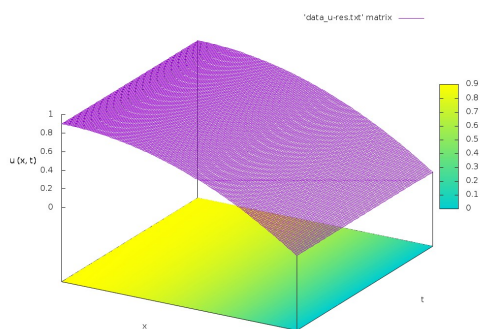
*Невязка*



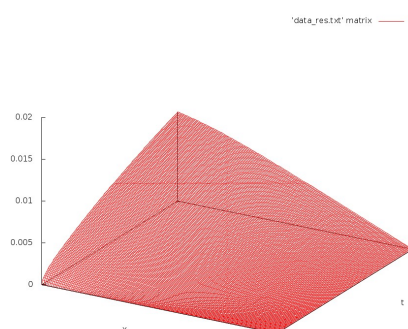
$N = 30; M = 30$



*Невязка*

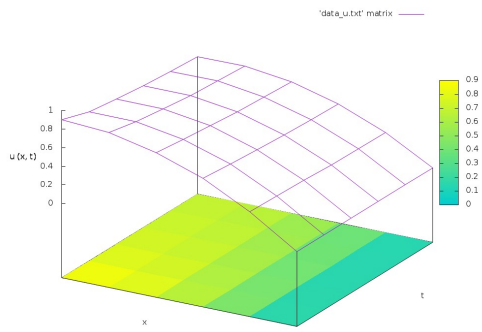


$N = 150; M = 150$

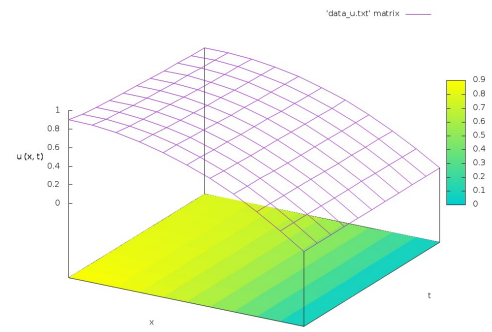


*Невязка*

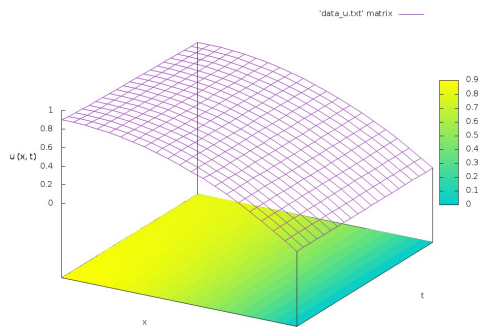
## В Графики для $f = u^3$



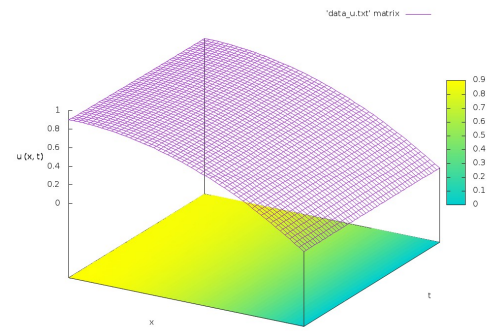
$N = 5; M = 5$



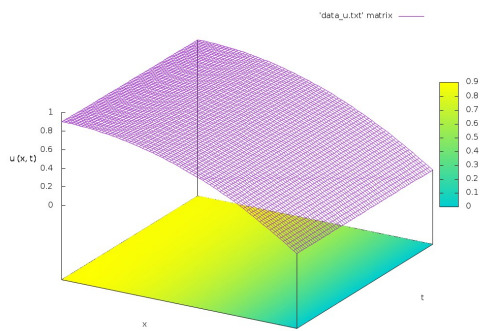
$N = 10; M = 10$



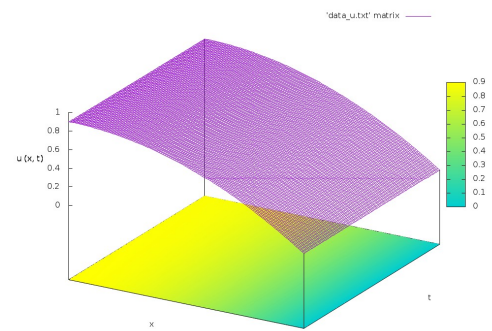
$N = 20; M = 20$



$N = 50; M = 50$

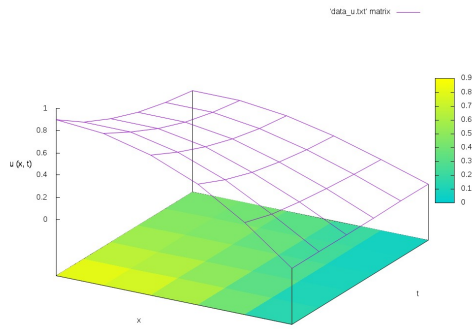


$N = 70; M = 70$

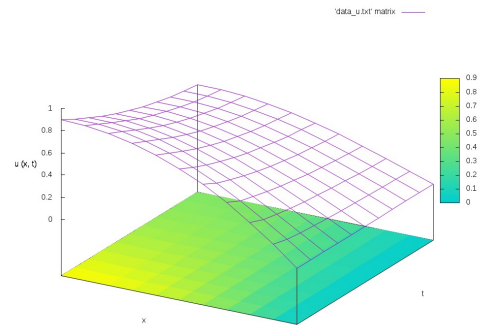


$N = 100; M = 100$

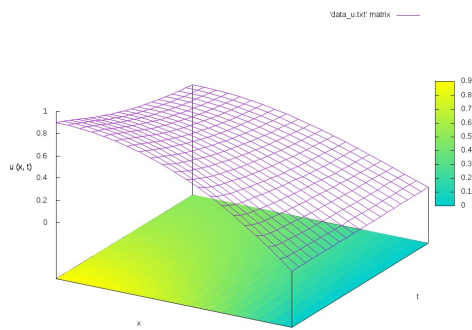
# С    Графики для $f = u^3 - \cos \frac{\pi x}{2}$



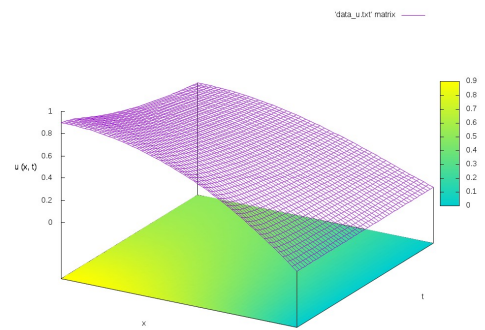
$N = 5; M = 5$



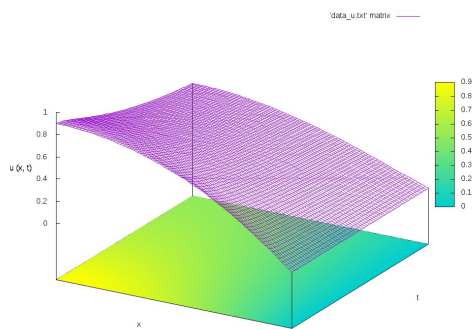
$N = 10; M = 10$



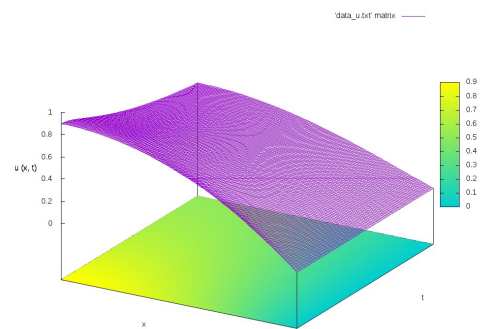
$N = 20; M = 20$



$N = 50; M = 50$

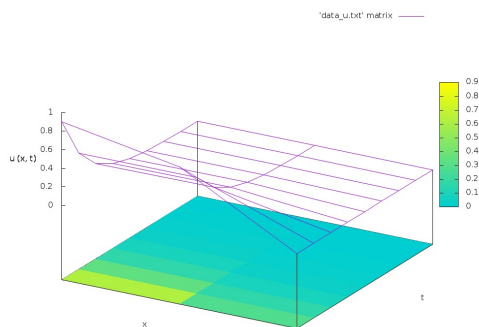


$N = 70; M = 70$



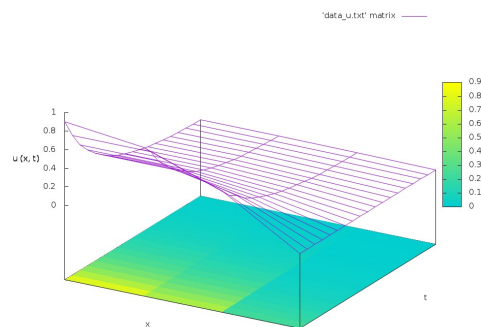
$N = 100; M = 100$

## D Графики для явной схемы для $f = u^3$



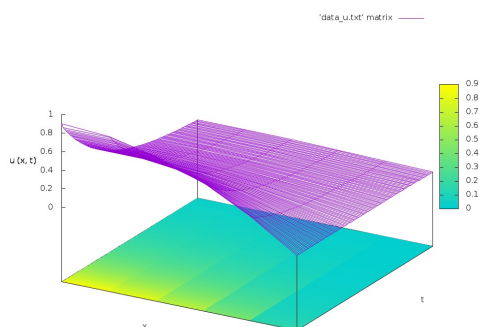
$$N = 8; M = 2;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$$



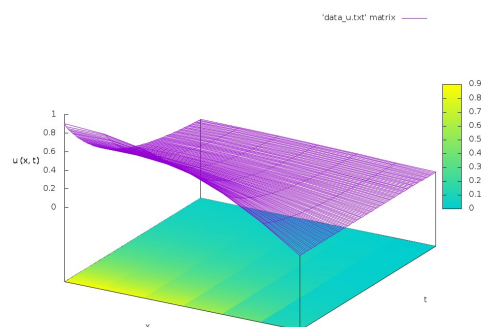
$$N = 18; M = 3;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$$



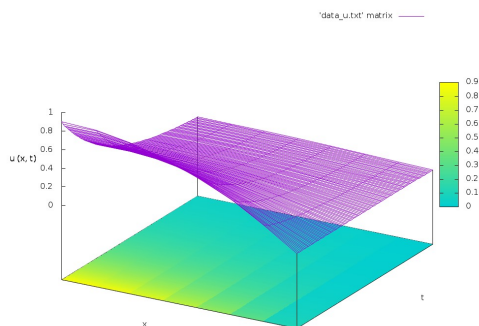
$$N = 100; M = 5;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$



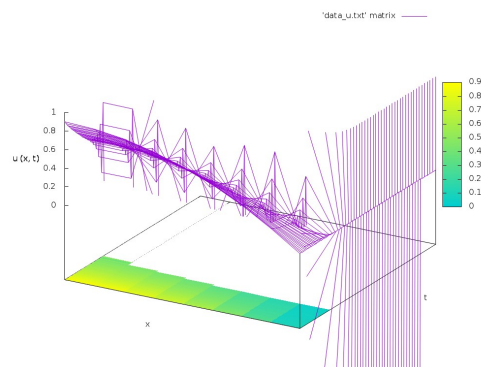
$$N = 100; M = 6;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{9}{25} < \frac{1}{2}$$



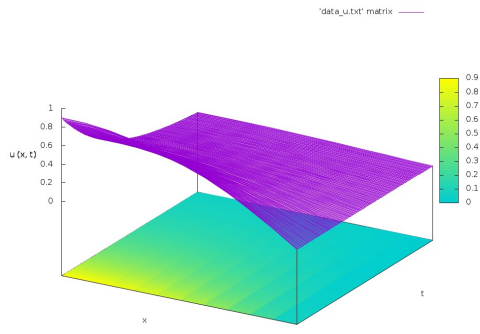
$$N = 100; M = 7;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{49}{100} < \frac{1}{2}$$



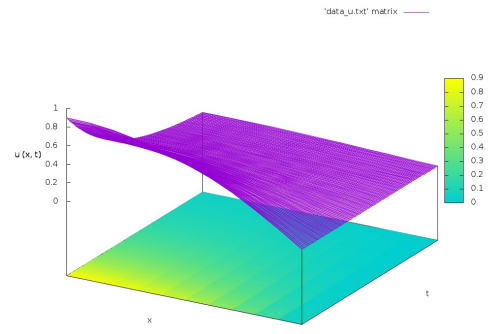
$$N = 100; M = 8;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{16}{25} > \frac{1}{2} - \text{неустойчива}$$



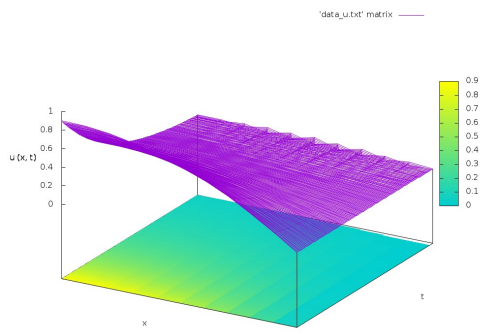
$$N = 210; M = 10;$$

$$\frac{\tau}{h^2} > \frac{1}{2}$$



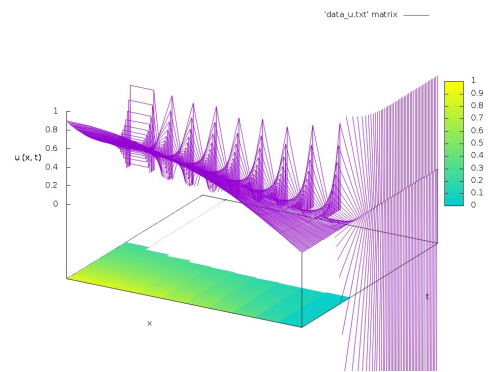
$$N = 200; M = 10;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$$



$$N = 190; M = 10;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{10}{19} > \frac{1}{2} - \text{неустойчива}$$



$$N = 180; M = 10;$$

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{10}{18} > \frac{1}{2} - \text{неустойчива}$$