

A propos d'une curieuse famille de fonctions récursives imbriquées dues à Hofstadter

Pierre Letouzey

9 octobre 2023

Avertissement : la préparation de cet exposé a subi. . .

La loi d'Hofstadter : il faut toujours plus longtemps que prévu, même en tenant compte de la loi d'Hofstadter.

Code Coq + cet exposé + ancien rapport technique

https://github.com/letouzey/hofstadter_g

(branche: `generalized`)

La fonction G d'Hofstadter (OEIS A5206)

Douglas Hofstadter, "Gödel, Escher, Bach", chapitre 5 (p.135)

$$G(0) = 0$$

$$G(n) = n - G(G(n-1)) \quad \text{pour tout entier } n > 0$$

Etude préliminaire de G

$$G(n) = n - G(G(n - 1))$$

- ▶ Existence et premier encadrement: $0 \leq G(n) \leq n$
- ▶ $G(0) = 0$, $G(1) = 1$ puis $1 \leq G(n) < n$
- ▶ G “monte” par pas de $+0$ ou $+1$
- ▶ Jamais deux $+0$ de suite
- ▶ Jamais trois $+1$ de suite

Etude préliminaire de G

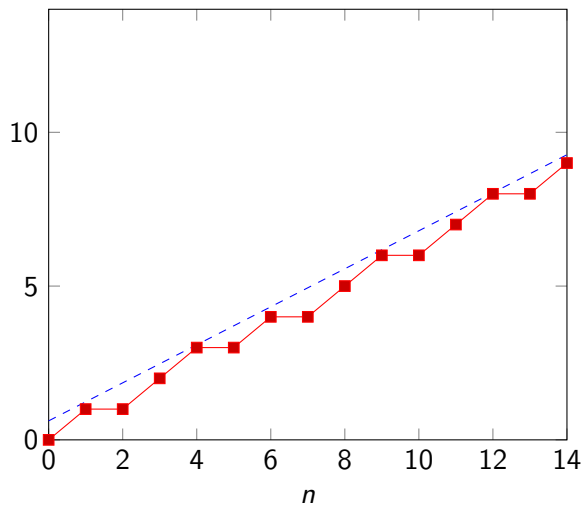
$$G(n) = n - G(G(n-1))$$

- ▶ Existence et premier encadrement: $0 \leq G(n) \leq n$
- ▶ $G(0) = 0$, $G(1) = 1$ puis $1 \leq G(n) < n$
- ▶ G “monte” par pas de $+0$ ou $+1$
- ▶ Jamais deux $+0$ de suite
- ▶ Jamais trois $+1$ de suite

Ici en fait : $G(n) = \lfloor (n+1)/\phi \rfloor$ où ϕ est le nombre d'or

Etude préliminaire de G

Graphes de $G(n)$ et $(n+1)/\phi$:



Généralisons : la fonction H (OEIS A5374)

Comme Hofstadter, varions le nombre d'appels imbriqués:

$$H(0) = 0$$

$$H(n) = n - H(H(H(n-1))) \quad \text{pour tout entier } n > 0$$

Mêmes propriétés de base que G , sauf que:

- ▶ Au plus trois $+1$ successifs
- ▶ Pas d'équation simple et exacte à base de $\lfloor \rfloor$
- ▶ Par contre: $H(n) = \lfloor \tau n \rfloor + 0$ ou 1

avec τ racine réelle de $X^3 + X - 1$ ($\tau = 0.6823$)

Généralisons encore : une famille f_k de fonctions

Notons $k + 1$ le nombre d'appels récursifs:

$$f_k(0) = 0$$

$$f_k(n) = n - f_k^{(k+1)}(n - 1)) \quad \text{pour tout entier } n > 0$$

où $f_k^{(p)}$ note p itérations de f_k : $f_k^{(0)} = id$ et $f_k^{(p+1)} = f_k \circ f_k^{(p)}$

On retrouve en particulier $G = f_1$ et $H = f_2$

NB: ce k est choisi pour éviter le cas “0 appel récursif” (sans intérêt et non uniforme avec le reste)

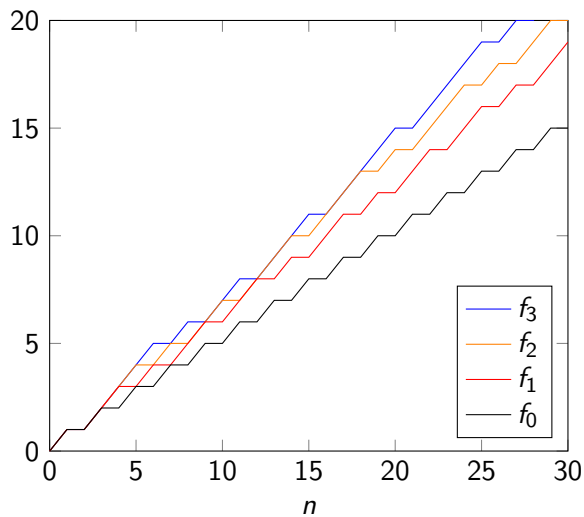
Le cas initial f_0 : un seul appel récursif

$$f_0(n) = n - f_0(n - 1)$$

On alterne +0 et +1, c'est en fait une fonction moitié :

$$f_0(n) = \lfloor (n + 1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$$

Graphes



Premières propriétés de f_k

$$f_k(n) = n - f_k^{(k+1)}(n - 1))$$

- ▶ Existence et premier encadrement: $0 \leq f_k(n) \leq n$
- ▶ $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$ puis $1 \leq f_k(n) < n$
- ▶ f_k “monte” par pas de +0 ou +1
- ▶ Jamais deux +0 de suite
- ▶ Au plus $k + 1$ pas de +1 de suite

NB: Pour $k > 1$, $f_k(n)$ n'a pas d'expression simple via $\lfloor \rfloor$.

Deux équations intéressantes pour G puis f_k

Surjectivité “explicite”

- ▶ $G(n + G(n)) = n$
- ▶ $f_k(n + f_k^{(k)}(n)) = n$

Deux équations intéressantes pour G puis f_k

Surjectivité “explicite”

- ▶ $G(n + G(n)) = n$
- ▶ $f_k(n + f_k^{(k)}(n)) = n$

Equation “renversée”

- ▶ $G(n) + G(G(n + 1) - 1) = n$
- ▶ $f_k(n) + f_k^{(k)}(f_k(n + 1) - 1) = n$

Et en Coq ?

Cf `FunG.v` `FunG_prog.v` `GenG.v` :

- ▶ Décroissance non structurelle : pas de `Fixpoint` Coq ainsi
- ▶ Spécification via un prédicat inductif
- ▶ `recf` : une définition remaniée avec un compteur `p`
- ▶ Possibilité d'utiliser `Program Fixpoint` (mais lourd)
- ▶ Plus rapide : `fopt` fonctionnant par table

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Conjecture: $\forall k, \forall n, f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Conjecture: $\forall k, \forall n, f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$

Ici, on comparera toujours les fonctions via l'ordre produit.

Donc formulation alternative : (f_k) est une suite croissante.

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Conjecture: $\forall k, \forall n, f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$

Ici, on comparera toujours les fonctions via l'ordre produit.

Donc formulation alternative : (f_k) est une suite croissante.

Preuve générale ??

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Quelques éléments préliminaires:

- Facile: $\forall k, f_0 \leq f_k$

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Quelques éléments préliminaires:

- ▶ Facile: $\forall k, f_0 \leq f_k$
- ▶ Preuves ad-hoc (et dures) : pour $k \leq 9$, $f_k \leq f_{k+1}$.

Utilise une forme de quasi-additivité (et des calculs!)

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Quelques éléments préliminaires:

- ▶ Facile: $\forall k, f_0 \leq f_k$
- ▶ Preuves ad-hoc (et dures) : pour $k \leq 9$, $f_k \leq f_{k+1}$.
Utilise une forme de quasi-additivité (et des calculs!)
- ▶ “Petits” n : $\forall k, \forall n \leq (k+4)(k+5)/2 - 3, f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$.
Cf le “bas” des arbres à venir juste après

Conjecture: croissance des f_k point-à-point

Quelques éléments préliminaires:

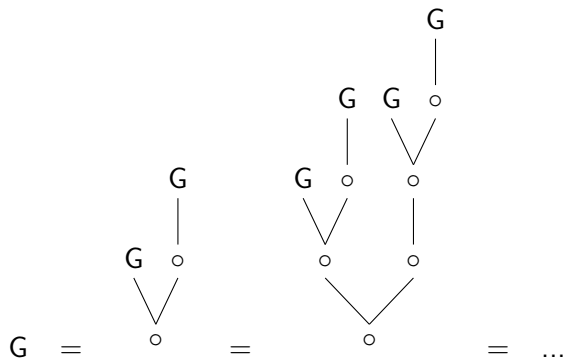
- ▶ Facile: $\forall k, f_0 \leq f_k$
- ▶ Preuves ad-hoc (et dures) : pour $k \leq 9$, $f_k \leq f_{k+1}$.
Utilise une forme de quasi-additivité (et des calculs!)
- ▶ “Petits” n : $\forall k, \forall n \leq (k+4)(k+5)/2 - 3, f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$.
Cf le “bas” des arbres à venir juste après
- ▶ “Grands” n : $\forall k, \exists N, \forall n \geq N, f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$
Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a l'équivalent $f_k(n) \sim n \cdot \tau_k$
où τ_k est la racine réelle positive de $X^{k+1} + X - 1$

Arbres rationnels

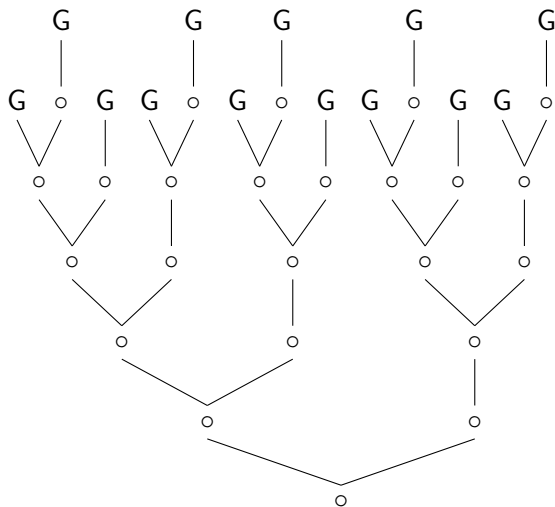
Un arbre infini rationnel

$$G = \begin{array}{c} G \\ | \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ G \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array}$$

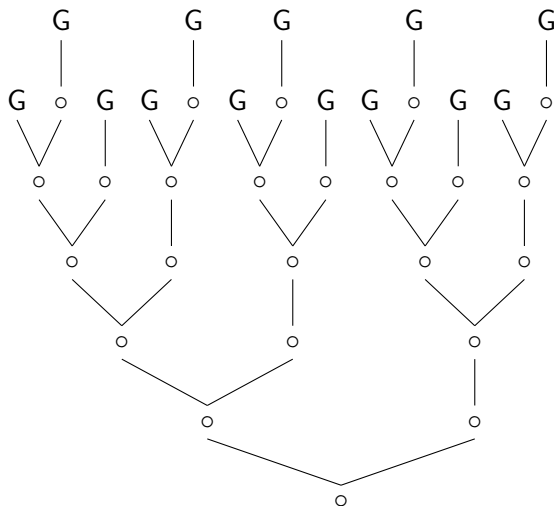
Un arbre infini rationnel



Un arbre infini rationnel



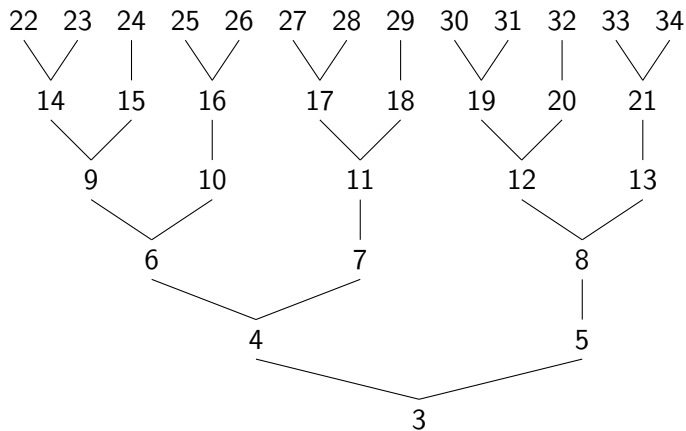
Un arbre infini rationnel



Combien de noeuds par niveau ?

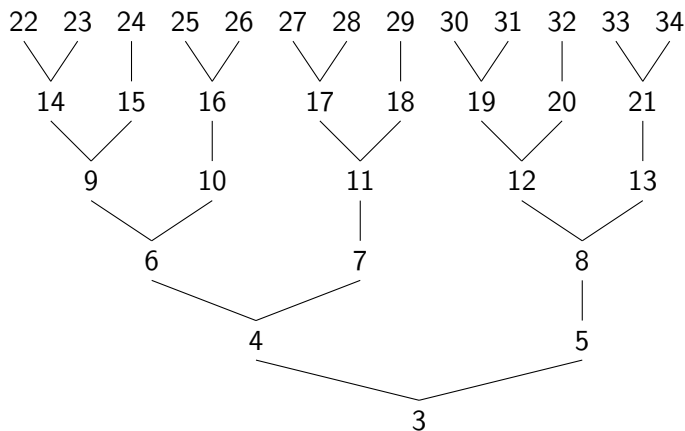
Numérotions !

Parcours en largeur, de gauche à droite



Numérotions !

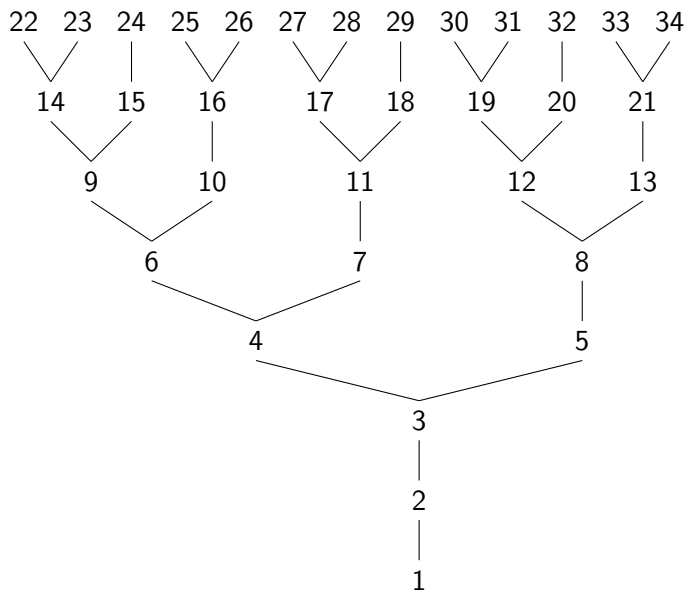
Parcours en largeur, de gauche à droite



Départ à 3 ? Pour expliciter les nombres de Fibonacci...

Et ainsi, le noeud n a $G(n)$ comme parent.

Ajout d'une racine ad-hoc : l'arbre de G



Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

Soit un arbre:

- ▶ infini
- ▶ dont les noeuds ont des arités finies non nulles
- ▶ numéroté via un parcours en largeur

Que peut-on dire de sa fonction parent ?

Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

Soit un arbre:

- ▶ infini
- ▶ dont les noeuds ont des arités finies non nulles
- ▶ numéroté via un parcours en largeur

Que peut-on dire de sa fonction parent ?

Recip. que faut-il sur une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pour qu'elle soit la fonction parent d'un et un seul tel arbre ?

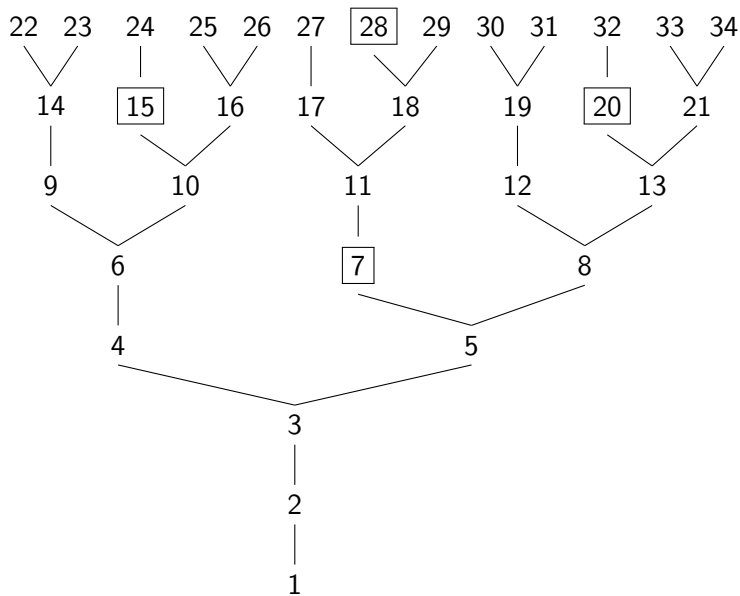
Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

- ▶ f croissante
- ▶ $f(n) < n$ hormis à la racine
- ▶ f surjective
- ▶ f ne stationne pas (i.e. tend vers $+\infty$)

Hofstadter: A problem for curious readers is...

Suppose you flip diagram G around as if in a mirror, and label the nodes of the new tree so that they increase from left to right. Can you find a recursive *algebraic* definition for this “flip-tree” ?

Arbre miroir \overline{G}



Solution ?

- ▶ Il y avait une conjecture sur <https://oeis.org/A123070>
- ▶ Mais pas de preuve. . .
- ▶ Hofstadter devait probablement avoir au moins cette formule

$$\overline{G}(n) = n + 1 - \overline{G}(\overline{G}(n - 1) + 1) \quad (n > 3)$$

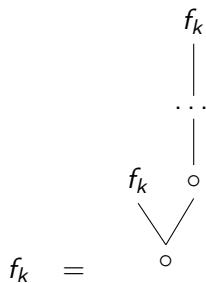
$$\overline{G}(n) = n \quad (n = 0, 1)$$

$$\overline{G}(n) = n - 1 \quad (n = 2, 3)$$

- ▶ Preuve papier pénible, multiples cas (vive Coq! cf fichier FlipG.v)

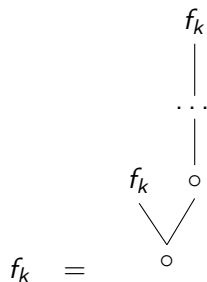
Arbre généralisé

On allonge la branche de droite ($k + 1$ segments)



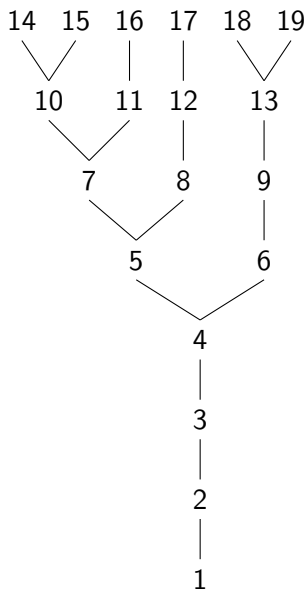
Arbre généralisé

On allonge la branche de droite ($k + 1$ segments)

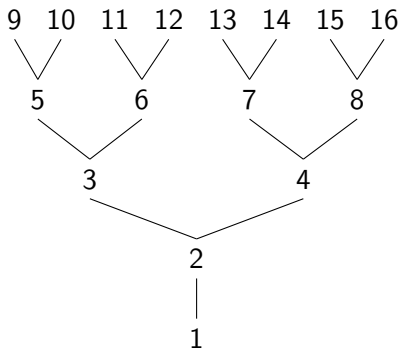


Et toujours une racine ad-hoc (1 puis $k + 1$ segments)

Arbre pour f_2 (H de Hofstadter)



Arbre pour f_0



Equation de l'arbre miroir \bar{f}_k ?

Quasiment comme pour \bar{G} :

$$\bar{f}_k(n) = n + 1 - \bar{f}_k^{(k)}(\bar{f}_k(n-1) + 1) \quad (n > k+2)$$

$$\bar{f}_k(n) = n \quad (n = 0, 1)$$

$$\bar{k}_k(n) = n - 1 \quad (2 \leq n \leq k+2)$$

Fibonacci généralisé et numération

Fibonacci

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = 2$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Fibonacci

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = 2$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

NB: indices décalés pour éviter 0 et un double 1

Théorème de Zeckendorf

Une décomposition $n = \sum F_i$ est *canonique* si elle est :

- (1) sans doublons
- (2) sans termes consécutifs

Décomposition *relachée* : (1) mais pas forcément (2)

Théorème de Zeckendorf

Une décomposition $n = \sum F_i$ est *canonique* si elle est :

- (1) sans doublons
- (2) sans termes consécutifs

Décomposition *relachée* : (1) mais pas forcément (2)

Thm: tout entier naturel a une unique décomposition canonique.

Zeckendorf, variante

Def: le *rang* d'une décomposition est l'indice du plus petit terme.

Algo: canonisation d'une décomposition relachée de n

- ▶ le nombre de termes décroît ou stagne
- ▶ le rang augmente (par pas de 2) ou stagne

Tableau de Wythoff / Zeckendorf (k=1)

Colonne c: les nombres de rang c par ordre croissant

1	2	3	5	8	13	21	...
4	7	11	18	29	47	76	...
6	10	16	26	42	68	110	...
9	15	24	39	63	102
12	20	32	52	84
14	23	37	60	97
17	28	45	73	118
...

G et Fibonacci

- ▶ $G(F_i) = F_{i-1}$ (avec la convention $F_{0-1} = F_0 = 1$)

G et Fibonacci

- ▶ $G(F_i) = F_{i-1}$ (avec la convention $F_{0-1} = F_0 = 1$)
- ▶ Plus généralement: $G(\Sigma F_i) = \Sigma F_{i-1}$

G et Fibonacci

- ▶ $G(F_i) = F_{i-1}$ (avec la convention $F_{0-1} = F_0 = 1$)
- ▶ Plus généralement: $G(\Sigma F_i) = \Sigma F_{i-1}$
- ▶ Cela marche même pour des décompositions relâchées
- ▶ Preuve selon le rang de la décomposition (0, pair > 0, impair).
- ▶ Nombreuses conséquences concernant G et le rang.

Au passage, différences entre \overline{G} et G

Def: n est de rang 1-impair si sa décomposition canonique commence par $F_1 + F_{2p+1} + \dots$

Thm: $\overline{G}(n) = 1 + G(n)$ si n est de rang 1-impair, sinon $\overline{G}(n) = G(n)$.

Au passage, différences entre \overline{G} et G

Def: n est de rang 1-impair si sa décomposition canonique commence par $F_1 + F_{2p+1} + \dots$

Thm: $\overline{G}(n) = 1 + G(n)$ si n est de rang 1-impair, sinon $\overline{G}(n) = G(n)$.

Preuve: encore pire que pour l'équation de \overline{G} , pléthore de cas.

Cor: \overline{G} et G diffèrent pour $7 = F_1 + F_3$, puis tous les 5 ou 8 entiers.

Fibonacci généralisé

Soit k un entier naturel.

$$A_0^k = 1$$

$$A_1^k = 2$$

...

$$A_k^k = k + 1$$

$$A_{n+1}^k = A_n^k + A_{n-k}^k$$

pour $n \geq k$

Fibonacci généralisé

- ▶ A^0 : 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512
- ▶ A^1 : 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89
- ▶ A^2 : 1 2 3 4 6 9 13 19 28 41
- ▶ A^3 : 1 2 3 4 5 7 10 14 19 26

NB: A^2 est nommé Narayana's Cows, cf. OEIS A930

Zeckendorf généralisé

Soit k fixé.

k -décomposition $n = \sum A_i^k$ est *canonique* : indices distants $\geq (k + 1)$

k -décomposition *relâchée* : indices distants d'au moins k

Zeckendorf généralisé

Soit k fixé.

k -décomposition $n = \sum A_i^k$ est *canonique* : indices distants $\geq (k + 1)$

k -décomposition *relachée* : indices distants d'au moins k

Thm: tout entier naturel a une unique k -décomposition canonique.

Algo: on peut “renormaliser” une k -décomposition relachée.

Un peu d'arithmétique avec ces décompositions

La décomposition de $n + 1$ et $n - 1$ peut s'obtenir raisonnablement bien à partir de celle de n .

Par contre pas d'addition, multiplication, etc.

f_k et Fibonacci généralisé

- ▶ $f_k(A_i^k) = A_{i-1}^k$ (avec la convention $A_{0-1}^k = A_0^k = 1$)

f_k et Fibonacci généralisé

- ▶ $f_k(A_i^k) = A_{i-1}^k$ (avec la convention $A_{0-1}^k = A_0^k = 1$)
- ▶ Plus généralement: $f_k(\Sigma A_i^k) = \Sigma A_{i-1}^k$

f_k et Fibonacci généralisé

- ▶ $f_k(A_i^k) = A_{i-1}^k$ (avec la convention $A_{0-1}^k = A_0^k = 1$)
- ▶ Plus généralement: $f_k(\Sigma A_i^k) = \Sigma A_{i-1}^k$
- ▶ Cela marche pour des décompositions canoniques ou relachées
- ▶ Important : f_k “stagne” en n lorsque le rang de n est 0 (i.e. lorsque n a 1 dans sa décomposition)

Quasi-additivité de f_k ?

Un exemple d'utilisation des décompositions:

```
Lemma additivity_bounded k p : k <> 0 ->  
  forall n, exists m,  
    m < add_bound k p /\  
    f k (p+n) - f k n = f k (p+m) - f k m.
```

```
Lemma decide_additivity k p a b : k <> 0 ->  
  calc_additivity k p (add_bound k p) = (a,b) ->  
  forall n, a + f k n <= f k (p+n) <= b + f k n.
```

Quasi-additivité de f_k ?

Un exemple d'utilisation des décompositions:

```
Lemma additivity_bounded k p : k <> 0 ->  
  forall n, exists m,  
    m < add_bound k p /\  
    f k (p+n) - f k n = f k (p+m) - f k m.
```

```
Lemma decide_additivity k p a b : k <> 0 ->  
  calc_additivity k p (add_bound k p) = (a,b) ->  
  forall n, a + f k n <= f k (p+n) <= b + f k n.
```

Ceci a permis de prouver $f_1 \leq f_2$ jusqu'à $f_9 \leq f_{10}$ (en Coq: seulement jusqu'à $f_5 \leq f_6$).

Lien avec des mots morphiques

Une substitution de lettres

Soit k un entier naturel. On utilise $\mathcal{A} = [0..k]$ comme alphabet.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}^* \\ \sigma_k(n) &= (n+1) && \text{pour } n < k \\ \sigma_k(k) &= k.0\end{aligned}$$

Ceci engendre un mot infini m_k à partir de la lettre k (on parle de mot *morphique*)

Par exemple $m_2 = 20122020120122012202\dots$

Equation réursive

m_k est la limite de $\sigma_k^n(k)$ quand $n \rightarrow \infty$

Mais aussi la limite de préfixes finis $M_{k,n}$ définis ainsi:

- ▶ $M_{k,n} = k.0...(n-1)$ pour $n \leq k$
- ▶ $M_{k,n+1} = M_{k,n}.M_{k,n-k}$ pour $k \leq n$

Equation réursive

m_k est la limite de $\sigma_k^n(k)$ quand $n \rightarrow \infty$

Mais aussi la limite de préfixes finis $M_{k,n}$ définis ainsi:

- ▶ $M_{k,n} = k.0...(n-1)$ pour $n \leq k$
- ▶ $M_{k,n+1} = M_{k,n}.M_{k,n-k}$ pour $k \leq n$

Remarque : $|M_{k,n}| = A_n^k$

Lien avec f_k

La n -ième lettre $(m_k)_n$ du mot infini m_k est le rang de la k -decomposition de n (ou k si ce rang est plus de k).

En particulier cette lettre est 0 si $f_k(n) = f_k(n+1)$

En cumulant : le nombre de 0 dans m_k entre 0 et n est $n - f_k(n)$.

Plus généralement, compter les lettres au dessus de p donne $f_k^{(p)}$.

En particulier le nombre de k est $f_k^{(k)}$.

Fréquences ?

Quelle limite pour $f_k(n)/n$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

- ▶ Si elle existe, facile à déterminer, racine positive de $X^{k+1} + X - 1$.
- ▶ Preuve d'existence non triviale

Cf. K. Saari, *On the Frequency of Letters in Morphic Sequences*.

En Coq, il fallait déjà parler de racines, et d'équivalent infini de suites linéaires comme A^k .

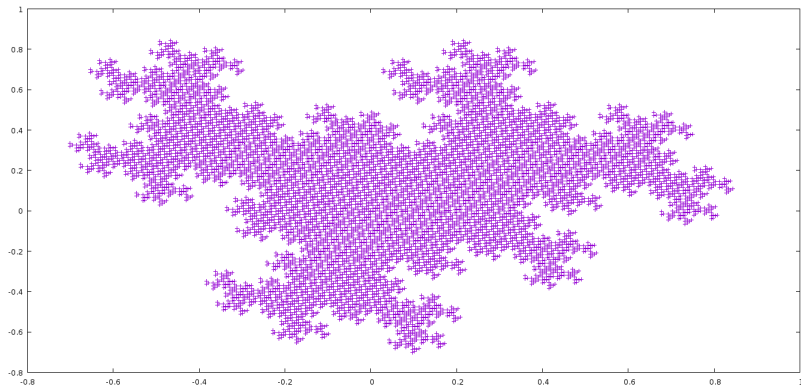
De fil en aiguille, preuve de la formule de Leibniz du déterminant et déterminant des matrices de Vandermonde. . .

Assure la croissance des f_k pour n suffisamment grand.

Cas $k=2$ (i.e. H)

Surprise il y a quelques années

Affichage des points $(\delta(i), \delta(H(i)))$ avec $i=0..10000$ et
 $\delta(n) = H(n) - n.\tau_2$



Fractale de Rauzy et variante

Apparemment, la fractale précédente est nommée Jacobi-Perron, proche de la fractale de Rauzy.

G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, 1982

- ▶ Dans son cas, suites de Tribonacci additionnant les trois derniers termes
- ▶ Ici on additionne dernier et avant-avant-dernier termes

L'étude est très similaire.

Application ici

On obtient finalement:

- ▶ $|H(n) - n.\tau_2| < 0.996 < 1$
- ▶ Et donc $H(n) = \lfloor n.\tau_2 \rfloor + 0$ ou 1
- ▶ Et quasi-additivité de H :
$$\forall nm, -2 \leq H(n+m) - H(n) - H(m) \leq 2$$

Nombres de Pisot

Dixit Wikipédia: En mathématiques, un nombre de Pisot-Vijayaraghavan est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1, dont tous les éléments conjugués ont un module strictement inférieur à 1.

Ici la limite τ_2 de $H(n)/n$ est la racine positive de $X^3 + X - 1$ mais aussi l'inverse de la racine positive de $X^3 - X^2 - 1$ qui est le nombre de Pisot P_3 .

Cas $k=3$, Pisot sans jolie fractale...

Résultat principal pour $k=3$

En suivant le même cheminement (pas encore formalisé en Coq)

- ▶ $|f_3(n) - n.\tau_3| < 1.998$
- ▶ Et donc $-1 \leq f_3(n) - \lfloor n.\tau_3 \rfloor \leq 2$
- ▶ Et quasi-additivité de f_3 :
 $\forall nm, -5 \leq H(n+m) - H(n) - H(m) \leq 5$

Cas $k > 3$, $f_k(n) - n \cdot \tau_k$ diverge

Conclusions & Perspectives

- ▶ On trouve encore des conjectures “abordables” sur OEIS
- ▶ Et aussi parfois des petites choses fausses. . .

Conclusions & Perspectives

- ▶ On trouve encore des conjectures “abordables” sur OEIS
- ▶ Et aussi parfois des petites choses fausses. . .
- ▶ Des preuves étonnamment délicates pour de “simples” entiers.
- ▶ Merci Coq !
- ▶ Peut-on éviter ces “détours” via \mathbb{R} et \mathbb{C} ?
- ▶ Quid de la conjecture ?
- ▶ Des questions restantes concernant l'irréductibilité des polynômes rencontrés