Trường: Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TPHCM.
Lớp: 22TTH1TN.
MSSV: 22110245.
Học và tên: Lê Phú Trường.

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2A

Bài tập 2.3.

Chứng minh.

1. Do (E_1, δ_1) là không gian metric nên δ_1 là metric thỏa mãn ba tính chất $(M_1), (M_2), (M_3)$.
   Ta cần chứng minh d là một metric.

(M_1) Do $\delta_1(x, y) \geq 0, \forall x, y \in E_1$ nên $\min\{1, \delta_1(x, y)\} \geq 0, \forall x, y \in E_1$.
Xét $d(x, y) = 0$ ta có

$$\min\{1, \delta_1(x, y)\} = 0 \Leftrightarrow \delta_1(x, y) = 0$$

mà $\delta_1(x, y)$ là metric thỏa tính chất $(M_1), \forall x, y \in E_1$ nên $x = y, \forall x, y \in E_1$.

(M_2) Do $\delta_1(x, y)$ là metric thỏa tính chất $(M_2), \forall x, y \in E_1$ nên $\delta_1(x, y) = \delta_1(y, x), \forall x, y \in E_1$, ta được

$$d(x, y) = \min\{1, \delta_1(x, y)\} = \min\{1, \delta_1(y, x)\} = d(y, x)$$

(M_3) Do $\delta_1(x, y)$ là metric thỏa tính chất (M_3), nên $\forall x, y, z \in E_1$ ta được

$$\delta_1(x, y) \leq \delta_1(x, z) + \delta_1(z, y)$$

Cần làm rõ

$$\min\{1, \delta_1(x, y)\} \leq \min\{1, \delta_1(x, z)\} + \min\{1, \delta_1(z, y)\} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Trường hợp 1: $\delta_1(x, y) \leq \delta_1(x, z) + \delta_1(z, y) < 1$.
Suy ra

$$\begin{cases} \delta_1(x, y) < 1 \Rightarrow d(x, y) = \delta_1(x, y) \\ \delta_1(x, z) + \delta_1(z, y) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \delta_1(x, z) < 1 \Rightarrow d(x, z) = \delta_1(x, z) \\ \delta_1(z, y) < 1 \Rightarrow d(z, y) = \delta_1(z, y) \end{cases} \end{cases}$$

Từ $(*)$ ta được

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 1$$

Trường hợp 2: $\delta_1(x,z) + \delta_1(z,y) \geq 1$.
Trường hợp 2.1: Cả $\delta_1(x,z)$ và $\delta_1(z,y)$ đều lớn hơn hoặc bằng 1.
Ta được

$$d(x,z) + d(z,y) \geq \min\{1, \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)\} = 1 \quad (**)$$

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = 1$ thì từ $(**)$ ta được $d(x,z)+d(z,y) \geq d(x,y)$.

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = \delta_1(x,y)$ thì từ $(**)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \geq 1 > d(x,y)$.
  Trường hợp 2.2: Chỉ một trong hai hoặc $\delta_1(x,z)$ hoặc $\delta_1(z,y)$ lớn hơn hoặc bằng 1.
  Ta có cả $\delta_1(x,z)$ và $\delta_1(z,y)$ đều lớn hơn hoặc bằng 0, suy ra

$$d(x,z) + d(z,y) \geq 1 = \min\{1, \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)\} \quad (***)$$

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = 1$ thì từ $(***)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$.

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = \delta_1(x,y)$ thì từ $(***)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \geq 1 > d(x,y)$.
  Vậy d là một metric trên E_1.

2. Do $\delta_i, i \in [1,n]$ là n metric nên thỏa mãn ba tính chất $(M_1), (M_2), (M_3)$.
   Ở tính chất (M_1) ta có $\delta_i \geq 0$ và $\delta_i(x_i,y_i) = \delta_i(y_i,x_i), \forall i \in [1,n]$. $(*)$
   Cần chứng minh $(E, d_i), i = \{1,2,3\}$, với $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là không gian metric.

a. $d_1(X,Y) = \sqrt{\delta_1^2(x_1,y_1) + \delta_2^2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n^2(x_n,y_n)}$

(M_1) Do $(*)$ nên ta có $\delta_1(x_1,y_1) + \delta_2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n(x_n,y_n) \geq 0$ nên $\sqrt{\delta_1^2(x_1,y_1) + \delta_2^2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n^2(x_n,y_n)}$ thỏa mãn và lớn hơn hoặc bằng 0. Ta có

$$d_1(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)} \Leftrightarrow d_1^2(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)$$

Xét

$$d_1(X,Y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)}=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)=0$$

Do $(*)$ nên

$$\delta_1(x_1,y_1)=\delta_2(x_2,y_2)=\ldots=0\Leftrightarrow X=Y$$

(M_2) Do $(*)$ nên ta có

$$d_1(X,Y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(y_i,x_i)}=d_1(Y,X)$$

(M_3) Ta cần chứng minh

$$d_1(X,Y)\leq d_1(X,Z)+d_1(Z,Y)$$

hay

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,z_i)}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(z_i,y_i)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(z_i,y_i)+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(z_i,y_i)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(z_i,y_i)+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,z_i)\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(z_i,y_i)}\quad(*)$$

Tóm lại ta sẽ chứng minh $(*)$.
Do $\delta_i, i\in[1,n]$ là n metric nên ta có

$$\delta_i(x_i,y_i)\leq\delta_i(x_i,z_i)+\delta_i(z_i,y_i)$$

$$\Leftrightarrow\delta_i^2(x_i,y_i)\leq\delta_i^2(x_i,z_i)+\delta_i^2(z_i,y_i)+2\delta_i(x_i,z_i)\delta_i(z_i,y_i)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,y_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2(z_i,y_i)+2\sum_{i=1}^{n}\delta_i(x_i,z_i)\delta_i(z_i,y_i)\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_i, z_i)\delta_i(z_i, y_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)} \qquad (2)$$

Từ $(1), (2)$ ta được

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i)+\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_i, z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i(z_i, y_i)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i)+\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i)\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)}$$

b. $d_2(X, Y) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\}$

(M_1)

$$d_2(X, Y) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\} \geq \delta_1(x_1, y_1) \geq 0$$

$$\begin{aligned} d_2(X, Y) = 0 &\Leftrightarrow \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \delta_i(x_i, y_i) = 0, \forall i \in [1, n] \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in [1, n] \\ &\Leftrightarrow X = Y \end{aligned}$$

(M_2) $d_2(X, Y) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\} = \max\{\delta_1(y_1, x_1), \delta_2(y_2, x_2), \ldots, \delta_n(y_n, x_n)\} = d_2(Y, X)$.

(M_3) Cần chứng minh: $d_2(X, Y) \leq d_2(X, Z) + d_2(Z, Y)$.
Ta có

$$\delta_i(x_i, y_i) \leq \delta_i(x_i, z_i) + \delta_i(z_i, y_i), \forall i \in [1, n]$$

$\Rightarrow \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\} \leq \max\{\delta_1(x_1, z_1), \delta_2(x_2, z_2), \ldots, \delta_n(x_n, z_n)\}+ \max\{\delta_1(z_1, y_1), \delta_2(z_2, y_2), \ldots, \delta_n(z_n, y_n)\}$

$$\Rightarrow d_2(X, Y) \leq d_2(X, Z) + d_2(Z, Y)$$

c. $d_3(X, Y) = \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n)$

(M_1) Ta có

$$\begin{cases} \delta_1(x_1, y_1) \geq 0 \\ \delta_1(x_2, y_2) \geq 0 \\ \vdots \\ \delta_i(x_i, y_i) \geq 0, \forall i \in [1, n] \end{cases}$$

Suy ra

$$d_3(X, Y) = \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n) \geq 0$$

Lại có

$$\begin{cases} \delta_1(x_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \\ \delta_1(x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = y_2 \\ \vdots \\ \delta_i(x_i, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in [1, n] \end{cases}$$

Cộng theo vế ta được

$$\delta_1(x_1, y_1) + \ldots + \delta_i(x_i, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n \Leftrightarrow X = Y$$

(M_2)

$$d_3(X, Y) = \delta_1(x_1, y_1) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n) = \delta_1(y_1, x_1) + \ldots + \delta_n(y_n, x_n) = d_3(Y, X)$$

(M_3) Ta có

$$\begin{cases} \delta_1(x_1, y_1) \leq \delta_1(x_1, z_1) + \delta_1(z_1, y_1) \\ \delta_2(x_2, y_2) \leq \delta_2(x_2, z_2) + \delta_2(z_2, y_2) \\ \vdots \\ \delta_n(x_n, y_n) \leq \delta_n(x_n, z_n) + \delta_n(z_n, y_n) \end{cases}$$

Cộng hai vế ta được

$$\delta_1(x_1, y_1) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n) \leq \delta_1(x_1, z_1) + \delta_1(z_1, y_1) + \ldots + \delta_n(x_n, z_n) + \delta_n(z_n, y_n)$$

$$\Leftrightarrow \delta_1(x_1, y_1) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n) \leq \delta_1(x_1, z_1) + \ldots + \delta_n(x_n, z_n) + \delta_1(z_1, y_1) + \ldots + \delta_n(z_n, y_n)$$

$$\Rightarrow d_3(X, Y) \leq d_3(X, Z) + d_3(Z, Y)$$

$\square$

Bài tập 2.4.

Chứng minh.

1) Cho $B'(a, r)$ là một quả cầu đóng nên là một tập đóng. Dễ thấy $B(a, r) \subset B'(a, r)$. Mặt khác theo tính chất của bao đóng, ta đã biết $\overline{B(a, r)}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa $B(a, r)$. Dó đó ta suy ra $\overline{B(a, r)} \subset B'(a, r)$.

2) Lấy a trong X bất kỳ.
Theo định nghĩa metric δ, ta có $\delta(a, x) < 1$ khi và chỉ khi $\delta(a, x) = 0$, nghĩa là $x = a$. Do đó $B(a, 1) = \{x \in X : \delta(a, x) < 1\} = \{a\}$ và $\overline{B(a, 1)} = \{a\}$.
Mặt khác X là không gian metric có ít nhất hai phần tử. Suy ra X chứa ít nhất một phần tử $x \neq a$. Nếu $\delta(a, x) < 1$ thì $x = a$ suy ra $\delta(a, x) = 1$. Như vậy, quả cầu đóng $B'(a, 1)$ chứa $x \neq a$.
Suy ra $B'(a, 1) \neq B(a, 1)$.

3) Theo *(1)* ta có $\overline{B(a, r)} \subset B'(a, r)$, vậy ta cần chứng minh thêm $B'(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$ là xong.
Lấy $x \in B'(a, r)$ bất kì, ta sẽ chứng minh $x \in \overline{B(a, r)}$. Do $B(a, r) \subset \overline{B'(a, r)}$ nên ta chỉ cần chứng minh $\delta(x, a) \leq r$.
Với $\delta(x, a) < r$ thì $x \in B(a, r) \subset \overline{B'(a, r)}$ và với $\delta(x, a) = r$ thì x là điểm dính của $B(a, r)$ nên $x \in \overline{B(a, r)}$. Ta sẽ tìm một dãy $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ chứa trong $B(a, r)$ thỏa $x_m \to x$.
Chọn $x_m = a + \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - a)$. Ta có nhận xét sau:

i) Khi $m \to \infty$ suy ra $x_m \to x$.

ii) Hơn nữa, vì $x_m - a = \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - a)$ nên $x_{m \times k} - a_k = \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x_k - a_k)$, với mọi $k = \overline{1, n}$.
Ta có

$$\delta(a, x_m) = \sqrt{(x_{m\times 1} - a_1)^2 + (x_{m\times 2} - a_2)^2 + \ldots + (x_{m\times n} - a_n)^2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m}\right)\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m}\right)\delta(a, x) < \delta(a, x) < r, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \delta(a, x_m) < r \Rightarrow \delta(a, x) < r$$

Suy ra $x \in B(a, r)$.

$\square$

Bài tập 2.5.

Chứng minh.

1. Ta có $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Suy ra

$$\left|\vec{a} \pm \vec{b}\right|^2 = \left(\sqrt{\vec{a} \pm \vec{b} \cdot \vec{a} \pm \vec{b}}\right)^2 = \left(\vec{a} \pm \vec{b}\right)\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có

$$\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right)\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{a} \pm \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \qquad (2)$$

Do tính giao hoán của phép nhân vector nên ta được

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} \pm \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{a} \pm \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

Từ $(1), (2), (3)$ ta có được điều cần chứng minh.

2. Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector vuông góc với nhau. Điều này có nghĩa là $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Từ chứng minh trên ta được

$$\left|\vec{a} \pm \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

Đây chính là công thức của Định lý Pythagore trong không gian vector.

$\square$

Bài tập 2.6.

Chứng minh.

a) Ta có $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$. Suy ra

$$0 \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||$$

b) Ta có $||(x,y)||^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |x^2+y^2|$. Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho x, y ta được

$$x + y \geq 2\sqrt{x \times y} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4|xy| \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 2|xy| - xy$$

$$\Rightarrow |xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq |x^2+y^2| = ||(x,y)||^2$$

c) Áp dụng kết quả ở câu *(b)*, suy ra

$$|\sin(xy)| \leq |xy| \leq ||(x,y)||^2$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} ||(h,k)||^3 &= \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 \\ &= (h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2} \\ &= h^2\sqrt{h^2+k^2} + k^2\sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}$$

Xét $|hk^2| = \sqrt{h^2} \times k^2 = k^2\sqrt{h^2} \leq k^2\sqrt{h^2+k^2} \leq h^2\sqrt{h^2+k^2} + k^2\sqrt{h^2+k^2}$. Suy ra $|hk^2| \leq ||(h,k)||^3$.

e) Ta có $||(x,y)||^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |x^2+y^2|$. Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho x, y ta được

$$x+y \geq 2\sqrt{x \times y} \Rightarrow x^2+2|xy|+y^2 \geq 4|xy| \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy| \geq |xy| \quad (1)$$

Hiển nhiên ta có $x^2+y^2 \geq x^2-y^2$ và $x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{x^2+y^2}$. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra

$$\left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq x^2+y^2 = ||(x,y)||^2$$

□

Bài tập 2.7.

Chứng minh.

1. $d(x, x') = |x - x'|$, với $x, x' \in \mathbb{R}$.

(M_1) Ta có $|x - x'| \geq 0$ và $|x - x'| = 0 \Leftrightarrow x = x'$.

(M_2) $d(x, x') = |x - x'| = |x' - x| = d(x', x)$.

(M_3)

$$\begin{aligned} d(x, x') = |x - x'| &= |x - x'' + x'' - x'| \\ &\leq |x - x''| + |x'' - x'| = d(x, x'') + d(x'', x') \end{aligned}$$

2. $d(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$, với $M, N \in \mathbb{R}^2$.
   Ta có định nghĩa sau: Khoảng cách Minkowski bậc $p \in \mathbb{N}$ giữa hai điểm $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là

$$d\left(X, Y\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

   với $p \geq 1$, khoảng cách Minkowski là một metric được rút ra từ hệ quả của bất đẳng thức Minkowski.
   Xét $X = M, Y = N, n = 2, p = 2$ ta được điều cần chứng minh.

3. $d(M, N) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k')^2}$, với $M(x_1, \ldots, x_n), N(x_1', \ldots, x_n')$.

   Áp dụng định nghĩa khoảng cách Minkowski ở phần *(2)* với $p = 2, k = i$ ta được điều cần chứng minh.

□

Bài tập 2.8.

Chứng minh.

1. Xét từng vế, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot (b_2c_3 - b_3c_2; b_3c_1 - b_1c_3; b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \end{aligned}$$

$$VP = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Suy ra ta được $VT = VP$.

2. Xét từng vế, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = |(a_2b_3 - a_3b_2; -a_1b_3 + a_3b_1; a_1b_2 - a_2b_1)|^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (-a_1b_3 + a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2) + (a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2) + (a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2) \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 \\ &\quad +2a_2b_2a_3b_3 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VP &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + b_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1^2b_1b_2 + 2a_1^2b_1b_3 + 2a_2^2b_2b_3 \\ &\quad -(a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + a_2^2b_2^2 + 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_3^2) \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \end{aligned}$$

Vậy ta được $VT = VP$.

3. Xét từng vế, ta có

$$\begin{aligned}
VT &= \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\\
&= \vec{a}\times((b_2c_3-b_3c_2)+(b_3c_1-b_1c_3)+(b_1c_2-b_2c_1))\\
&= (a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3))\\
&\quad +(a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1))\\
&\quad +(a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2))\\
&= (a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3)\\
&\quad +(a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1)\\
&\quad +(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VP &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3\\
&\quad -((a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3)\\
&= (a_1b_1c_1+a_2b_1c_2+a_3b_1c_3)+(a_1b_2c_1+a_2b_2c_2+a_3b_2c_3)+(a_1b_3c_1+a_2b_3c_2+a_3b_3c_3)\\
&\quad -(a_1b_1c_1+a_2b_2c_1+a_3b_3c_1)-(a_1b_1c_2+a_2b_2c_2+a_3b_3c_2)\\
&\quad -(a_1b_1c_3+a_2b_2c_3+a_3b_3c_3)
\end{aligned}$$

Qua so sánh bất đẳng thức ta được $VT = VP$.

□

Bài tập 2.9.

Chứng minh.

(M_1) Ta có $(x(t)-y(t))^2 \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt \geq 0$
$\Rightarrow \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt} = d(x,y) \geq 0$
Xét

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt}=0 \Leftrightarrow x(t)-y(t)=0 \Leftrightarrow x(t)=y(t)$$

(M_2)

$$d(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt}=\sqrt{\int_a^b (y(t)-x(t))^2 dt}=d(y,x)$$

(M_3) Ta cần chứng minh

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt} + \sqrt{\int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt \leq \int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt + \int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt$$
$$+2\sqrt{\int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt} \quad (*)$$

Xét

$$2\sqrt{\int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt} \overset{\text{Bất đẳng thức Hölder}}{\geq} 2\int_a^b |x(t)-z(t)||y(t)-z(t)|dt$$
$$\geq 2\int_a^b (x(t)-z(t))(z(t)-y(t))dt$$

Từ vế phải của $(*)$ suy ra

$$\int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt + \int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt + 2\sqrt{\int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt} \geq$$

$$\int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt + \int_a^b (z(t)-y(t))^2 dt + 2\int_a^b (x(t)-z(t))(z(t)-y(t))dt$$

$$= \int_a^b [x(t)^2 - 2x(t)z(t) + z(t)^2 + y(t)^2 - 2y(t)z(t) + z(t)^2 - 2x(t)y(t) + 2x(t)z(t) + 2y(t)z(t) - 2z(t)^2] dt$$

$$= \int_a^b \left[x(t)^2 - 2x(t)y(t) + y(t)^2\right] = \int_a^b (x(t)-y(t))^2 = d(x,y)$$

□

Bài tập 2.10.

Chứng minh.

(M_1) $|x(t)-y(t)| \geq 0 \Rightarrow \int_a^b |x(t)-y(t)|dt = d(x,y) \geq 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)-y(t)|dt = 0 \Leftrightarrow x(t)-y(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t)$.

(M_2) $d(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt = \int_a^b |y(t)-x(t)|dt = d(y,x)$

(M_3) Ta có

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt = \int_a^b |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|dt \leq \int_a^b |x(t)-z(t)|dt$$

$$+ \int_a^b |z(t)-y(t)|dt = d(x,z) + d(y,z)$$

□

Bài tập 2.11.

Chứng minh.

(M_1) Ta có

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \geq |x(t)-y(t)| \geq 0$$

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)-y(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t)$$

(M_2) $d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)-x(t)| = d(y,x)$.

(M_3) Với mọi $t \in [a,b]$, ta có

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &= |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)| \\ &\leq |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-z(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |z(t)-y(t)| \end{aligned}$$

Suy ra $\sup_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-z(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |z(t)-y(t)|$. □