Họ và tên: Lê Phú Trường.
MSSV: 22110245.
Lớp: 22TTH1.
Trường: Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TPHCM.

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 4A

Bài tập điểm cộng 10/09/2023. Chứng minh Định lý sau:

Định lí về sự tồn tại nghiệm (Peano). *Xét bài toán Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

trong đó $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *là hàm cho trước xác định trong tập mở* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ *và hàm* y *xác định trên một đoạn* I *chứa* x_0 *(dĩ nhiên* $I \subset [x_0 - a, x_0 + a]$*) thỏa mãn* $(1), \forall x \in I$.
Ngoài ra, hàm $f(x, y)$ *trong* (1) *là hàm:*

ĐK1: là hàm liên tục tại mọi điểm trong miền

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ thỏa } |x - x_0| < a \text{ và } |y - y_0| < b\}$$

với a, b là hai số thực dương được cho trước.

ĐK2: là hàm bị chặn trong R, nghĩa là tồn tại $K \in \mathbb{R}^+$

$$|f(x, y)| < K, \forall (x, y) \in R$$

thì bài toán Cauchy (1) *có ít nhất một nghiệm và nghiệm này tồn tại (ít nhất) trong miền* $|x - x_0| < \alpha = \min\left(a, \dfrac{b}{K}\right)$

Chứng minh.

- Ta sẽ chứng minh bổ đề sau vì điều này có ích trong việc chứng minh định lí Peano.

Bổ đề 1. *y là nghiệm của bài toán Cauchy* (1) *khi và chỉ khi y là nghiệm của phương trình tích phân sau*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \forall x \in I. \qquad (2)$$

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Do y là nghiệm của bài toán Cauchy (1) nên với $(x_0, y_0) \in \Omega, y(x_0) = y_0$.

Từ (1) ta có:

$$y' = f(x, y)$$
$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} y' dy = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$
$$\Leftrightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$
$$\Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \forall x \in I.$$

Chứng minh xong ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$) Ta có y là nghiệm của phương trình vi phân

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \forall x \in I$$

Ngoài ra, ta được $y(x_0) = y_0$ dựa vào lập luận sau: Giả sử tồn tại $y_0' \in \mathbb{R}$ sao cho $y(x_0) = y_0'$ và $y_0' \neq y_0$. Không mất tính tổng quát, ta xét $y_0' > y_0$ (có thể xét tương tự trường hợp bé hơn).

Thay x_0' vào phương trình vi phân (2) ta được

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))dt, \forall x_0 \in I$$
$$\Leftrightarrow y_0' = y_0$$
$$\Rightarrow y(x_0) = y_0' = y_0 > y_0 \qquad \text{(vô lý)}$$

Vậy nên $y(x_0) = y_0 \qquad (*)$.

Tiếp theo,ta đạo hàm hai vế phương trình vi phân (2)

$$y'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right)', \forall x \in I$$
$$\Leftrightarrow y'(x) = \left(\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right)', \forall x \in I$$
$$\Leftrightarrow y'(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I \qquad (**)$$

Từ $(*), (**)$ thỏa mãn bài toán Cauchy (1).

Chứng minh xong ($\Leftarrow$).

$\square$

- Ta sẽ chứng minh R là một tập compact.

Chứng minh. Xét $(\mathbb{R}^2, \delta)$ là một không gian metric với $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$, ta có

$$\delta(u, v) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Do $R \subset (\mathbb{R}^2, \delta)$ là không gian metic hữu hạn chiều nên để chứng minh R là một tập compact, ta chứng minh R là tập đóng và bị chặn.

- Chứng minh R là tập đóng.
  Lấy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R$ sao cho $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\delta} u \in \mathbb{R}^2$.Với $u_n = (x_n, y_n), u = (x, y)$, ta sẽ chứng minh $u \in R$.
  Vì $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\delta} u$ nên ta có

  $$\delta(u_n, u) = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

  Suy ra

  $$\begin{cases} 0 \leq |x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ 0 \leq |y_n - y| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases}$$

  Do đó, ta được

  $$\begin{cases} 0 \leq |x_n - x| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ 0 \leq |y_n - y| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \\ y_n \xrightarrow{n\to\infty} y \end{cases}$$

  Mặt khác, vì $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R$ nên $|x_n - x_0| < a$ và $|y_n - y_0| < b$.
  Mà giới hạn là duy nhất nên ta thu được $|x - x_0| < a$ và $|y - y_0| < b$.
  Vậy $u \in R$, tức là R là tập đóng.
- Chứng minh R là tập bị chặn.
  Tìm $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, tìm $r > 0$ sao cho $R \subset B(a, r)$.
  Nói cách khác, nếu $z = (z_1, z_2) \in R$ thì $\delta(z, a) < r$.
  Với $z = (z_1, z_2) \in R$, ta có $|z_1 - x_0| < a$ và $|z_2 - y_0| < b$. Suy ra

  $$|z_1 - x_0| + |z_2 - y_0| < a + b$$

  $$\Leftrightarrow \sqrt{(z_1 - x_0)^2 + (z_2 - y_0)^2} \leq |z_1 - x_0| + |z_2 - y_0| \leq a + b$$

  Chọn $a_1 = x_0, a_2 = y_0, r = a + b$ ta được điều cần chứng minh.

$\square$

- Do R là tập compact và f là hàm liên tục tại mọi điểm trong miền R, chúng ta có f là hàm bị chặn trong R và $\forall (x,y) \in R$ thì $|f(x,y)| < K$ suy ra $\sup_R |f(x,y)| \le K < \infty$.
  Theo định lý Stone-Weierstrass tồn tại dãy hàm Lipschitz $f_k : R \to \mathbb{R}$ theo biến y trong R hội tụ đều về f trong R. Khi đó tồn tại hằng số $L \ge 0$ sao cho
  $$|f_k(x, y_{k,n}) - f_k(x, y_{k,n-1})| \le L|y_{k,n} - y_{k,n-1}|, \forall k, n \in \mathbb{N} \qquad (***)$$
  Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử $\sup_R |f_k| \le 2K, \forall k \in \mathbb{N}$.

- Theo **Bổ đề 1** thì Bài toán Cauchy (1) tương đương với một phương trình tích phân (2).
  Xét dãy hàm $\{y_{k,n}\} := [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ cho bởi công thức quy nạp
  $$\begin{cases} y_{k,0}(x) = y_{k,0} = y_0, \forall x \in I \text{ (hàm hằng)}, \\ y_{k,1}(x) = y_{k,0} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt, \forall x \in I, \\ y_{k,2}(x) = y_{k,0} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{k,1}(t))dt, \forall x \in I, \\ \vdots \\ y_{k,n}(x) = y_{k,0} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{k,n-1}(t))dt, n \ge 1, \forall x \in I. \end{cases} \qquad (3)$$
  Đặt $\delta = \min\left(a, \frac{b}{2K}\right)$.

- Ta sẽ chứng minh thêm bổ đề sau.

  Bổ đề 2. *Dãy hàm $\{y_{k,n}\}$ cho bởi (3) có các tính chất:*

  i) $|y_{k,n}(x) - y_{k,0}| < b, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

  ii)
  $$|y_{k,n}(x) - y_{k,n-1}(x)| \le 2KL^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \le 2K\frac{L^{n-1}\delta^n}{n!}, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \qquad (4)$$

  iii) Dãy hàm $y_{k,n}(x)$ hội tụ đều về một hàm y trên $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *iv) Đánh giá sai số*

$$|y_{k,n}(x) - y(x)| \leq \frac{2K}{L} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!}, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \tag{5}$$

v) y là nghiệm của phương trình tích phân (2).

Chứng minh. $i)$ Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ta có

$$\begin{aligned} |y_{k,n}(x) - y_{k,0}| &= \left| \int_{x_0}^{x} f_k(t, y_{k,n-1}(t))dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_k(t, y_{k,n-1}(t))|dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \sup_R |f_k| \right| = 2K|x - x_0| \\ &\leq 2K\delta \leq b \end{aligned}$$

Chứng minh xong $i)$.

$ii)$ Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

– Với $n = 1$, (4) trở thành

$$|y_{k,1}(x) - y_{k,0}(x)| \leq 2K|x - x_0| \leq 2K\delta, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Vậy với $n = 1$ thì (4) đúng.

– Giả sử (4) đúng với $n = m$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = m + 1$. Ta có

$$
\begin{aligned}
|y_{k,m+1}(x) - y_{k,m}| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f_k(t, y_{k,m}(t)) - f_k(t, y_{k,m-1}(t))] dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_k(t, y_{k,m}(t)) - f_k(t, y_{k,m-1}(t))| dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_{k,m}(t) - y_{k,m-1}(t)| dt \right| \qquad \text{(Do (***))} \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \left| 2KL^{m-1} \frac{|t - x_0|^m}{m!} \right| dt \right| \qquad \text{(Do giả thiết quy nạp)} \\
&= \frac{2KL^m}{m!} \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^m dt \right| \\
&= \frac{2KL^m |x - x_0|^{m+1}}{m!(m+1)} = \frac{2KL^m |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \\
&\leq \frac{2KL^m \delta^{m+1}}{(m+1)!}
\end{aligned}
$$

Vậy (4) đúng với $n = m + 1$. Chứng minh xong ii).

iii) Ta có

$$
y_{k,n}(x) = \sum_{m=1}^{n} [y_{k,m}(x) - y_{k,m-1}(x)] + y_{k,0}(x) \qquad (6)
$$

Ta xét sự hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{m=1}^{\infty} [y_{k,m}(x) - y_{k,m-1}(x)]$.

Theo ii) ta có

$$
|y_{k,m}(x) - y_{k,m-1}(x)| \leq 2K \frac{L^{m-1}\delta^m}{m!}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \qquad (****)
$$

Đặt $a_m = 2K \frac{L^{m-1}\delta^m}{m!} = \frac{2K(L\delta)^m}{Lm!}$.
Khảo sát sự hội tụ: $\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m}$, ta có

$$
\lim_{m \to +\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{2K(L\delta)^{m+1}}{L(m+1)!} \frac{Lm!}{2K(L\delta)^m} \right) = \lim_{m \to +\infty} \frac{L\delta}{m+1} = 0
$$

Theo tiêu chuẩn d'Alembert thì chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ hội tụ.

Từ (∗∗∗∗) suy ra $\sum_{m=1}^{\infty} |y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)|$ hội tụ trên $[x_0-\delta, x_0+\delta]$,

suy ra $\sum_{m=1}^{\infty}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)]$ hội tụ tuyệt đối trên $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Do các hàm $y_{k,m}(x)$ liên tục trên $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ nên tổng của chuỗi hàm $\sum_{m=1}^{\infty}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)]$ là một hàm liên tục trên $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, gọi hàm đó là $g(x)$.

Khảo sát sự hội tụ của (6), ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_{k,n}(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)] + y_{k,0}(x)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)] + y_{k,0}(x)\\
&= g(x) + y_{k,0}(x)
\end{aligned}$$

Do $g(x)$ và $y_{k,0}(x)$ đều là hàm liên tục nên tổng của chúng cũng sẽ là một hàm liên tục, gọi hàm đó là $y(x)$ liên tục trên $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Chứng minh xong *iii*).

iv) Theo *iii*) ta có

$$\begin{aligned}
y(x) &= g(x) + y_{k,0}(x)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)] + y_{k,0}(x)\\
&= \sum_{m=1}^{n}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)] + \sum_{m=n+1}^{\infty}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)] + y_{k,0}(x)\\
&= y_{k,n}(x) + \sum_{m=n+1}^{\infty}[y_{k,m}(x)-y_{k,m-1}(x)]
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|y(x) - y_{k,n}(x)| &= \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} [y_{k,m}(x) - y_{k,m-1}(x)] \right| \\
&\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |y_{k,m}(x) - y_{k,m-1}(x)| \\
&\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} 2K \frac{L^{m-1}\delta^m}{m!} = \frac{2K}{L} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!}
\end{aligned}$$

Chứng minh xong iv).

v) Từ cách xây dựng (3), ta có

$$y_{k,n}(x) = y_{k,0} + \int_{x_0}^{x} f_k(t, y_{k,n-1}(t))dt, n \geq 1, \forall x \in I$$

Từ định nghĩa (3) ta có $y_{k,0} = y_0$ (hàm hằng) và từ iii) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k,n} = y(x)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh điều sau là sẽ thỏa yêu cầu bài toán v)

$$\int_{x_0}^{x} f_k(t, y_{k,n-1}(t))dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_k(t, y(t))dt \qquad (7)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_0}^{x} f_k(t, y_{k,n-1}(t))dt - \int_{x_0}^{x} f_k(t, y(t))dt \right| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_k(t, y_{k,n-1}(t))dt - f_k(t, y(t))dt| \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_{k,n-1}(t) - y(t)| dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{2K}{L} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!} dt \right| \\
&= 2K \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!} |x - x_0| \\
&\leq 2K\delta \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!}
\end{aligned}$$

Dựa vào cách đặt và chứng minh tương tự ở $iii)$ ta được $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!}$hội tụ nên $\sum_{m=n}^{\infty} \frac{(L\delta)^m}{m!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Từ chứng minh trên suy ra (7) đúng.
Chứng minh xong $v)$ và **Bổ đề 2**.

$\square$

Từ việc chứng minh xong **Bổ đề 2**, ta có được y là nghiệm của phương trình tích phân (2), $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
Với mọi $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ta có $|x - x_0| < \delta$. Nếu $\delta = a$ thì $|x - x_0| < a$ (hiển nhiên), nếu $\delta = \frac{b}{2K}$ thì $|x - x_a| < \frac{b}{2K} < \frac{b}{K}$.
Đặt $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$.
Từ lập luận trên và mở rộng từ **Bổ đề 2.** $v)$ ta được y là nghiệm của bài toán Cauchy (1) và nghiệm này tồn tại (ít nhất) trong miền $|x - x_0| < \alpha = \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$.

$\square$