GIẢI TÍCH VÀ VI TÍCH PHÂN 2A

Sinh viên: **LÊ PHÚ TRƯỜNG**

Khoa Toán - Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TPHCM

VI TÍCH PHÂN 2A

Câu 0.1. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Đặt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ và $b_n = \frac{1}{n}$. Do $\sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ nên $a_n \geq b_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên theo Tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

Câu 1.1. Kiểm tra tính liên tục của $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $\forall \mathrm{x} \in [1;+\infty)$, $p > 0$.

Ta cần chứng minh hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ liên tục trên tập $[1;\ +\infty)$ nếu f liên tục tại mọi điểm $a \in [1;+\infty)$ hay

Cho tùy ý $a \in [1;+\infty)$ và $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\mathrm{a},\ \varepsilon){>}0$ sao cho với mọi $x \in [1;+\infty)$, $0 < |x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Chúng ta có: $|f(x) - f(a)| = \left|\dfrac{1}{x^p} - \dfrac{1}{a^p}\right| = \dfrac{|a^p - x^p|}{a^p.x^p}$.

Do $x, a \geq 1$ và $x \neq a$ nên ta có:

$$|a^p - x^p| = |(a - x)(a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1})|$$

$$= |a - x||a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| = \frac{|a^p - x^p|}{a^p.x^p}$$

$$= \frac{|a - x||a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}|}{a^p.x^p}$$

Do $x, a \geq 1$ và $p > 0$ nên $|a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}| \in \mathbb{R}$ và $|a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}| \geq 0$.
Đặt $\alpha = |a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}| + 10^{100}$.
$\Rightarrow |a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}| < \alpha$.
Vì vậy ta có:

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{|a - x||a^{p-1} + a^{p-2}x + ... + ax^{p-2} + x^{p-1}|}{a^p.x^p} < \frac{|a - x|.\alpha}{a^p.x^p}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{|a - x|.\alpha}{a^p} < |a - x|\alpha$$

Chọn $\delta(a, \varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$, ta có:

$$|f(x) - f(a)| < |a - x|\alpha \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}\alpha = \varepsilon.$$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ liên tục trên tập $[1; +\infty)$, $\forall$x $\in$ $[1; +\infty)$, p>0.

Định lí (1.1)

Cho f là một hàm số dương, giảm, liên tục trên $[1;+\infty)$ và đặt $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ $\Leftrightarrow$ Tích phân $\int_1^{\infty} f(x)dx$ tồn tại.

Câu 1.2. Chứng minh định lý trên.

$(\Leftarrow)$ Ta có f là một hàm số dương, giảm, liên tục trên $[1;+\infty)$ và đặt $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$. Cần chứng minh $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Do f là hàm liên tục trên $[1;+\infty)$ nên cũng liên tục $[i, i+1], \forall i \in \mathbb{N}$.

Do f là hàm dương, giảm nên:

$f(i+1) \leq f(x) \leq f(i), \forall x \in [i, i+1]$.

$\Leftrightarrow \int_i^{i+1} f(i+1)dx \leq \int_i^{i+1} f(x)dx \leq \int_i^{i+1} f(i)dx, \forall x \in [i, i+1]$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f(i+1) \leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^n f(i)$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f(i+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx, \forall x \in [i, i+1]$
Ta có: $\int_1^\infty f(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t f(x)dx = a \in \mathbb{R}, \forall t \in [1; +\infty)$
$\Rightarrow \int_1^t f(x)dx$ bị chặn
$\Rightarrow \exists M, m \in \mathbb{R} : m \leq \int_1^t f(x)dx \leq M, \forall t \in [1; +\infty).$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f(i+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq M, \forall x \in [i, i+1]$
$\Rightarrow \sum_{i=2}^{n+1} f(i) \leq M \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n+1} f(i) + f(1) - f(n+1) \leq$
$M + f(1) - f(n+1)$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f(i) \leq M + f(1) - f(n+1) \leq M + f(1)$
Vậy S_n bị chặn trên và theo **Bổ đề 1.3.b** suy ra $\sum_{n=1}^\infty a_n$ hội tụ. ■

($\Rightarrow$) Ta có f là một hàm số dương, giảm, liên tục trên $[1;+\infty)$ và đặt $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$. Cần chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ.
Do f là hàm liên tục trên $[1;+\infty)$ nên cũng liên tục $[i, i+1], \forall i \in \mathbb{N}$.
Do f là hàm dương, giảm nên:
$f(i+1) \le f(x) \le f(i), \forall x \in [i, i+1]$.
$\Leftrightarrow \int_i^{i+1} f(i+1)dx \le \int_i^{i+1} f(x) \le \int_i^{i+1} f(i), \forall x \in [i, i+1]$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(i+1) \le \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f(x)dx \le \sum_{i=1}^{n} f(i), \forall x \in [i, i+1]$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{i=1}^{n} a_n, \forall x \in [i, i+1]$
Theo Quy tắc kẹp, do $\sum_{i=1}^{n} a_{n+1}$ và$\sum_{i=1}^{n} a_n$ hội tụ nên $\int_1^{n+1} f(x)dx$ hội tụ.
hay $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx = a \in \mathbb{R}$, nói cách khác $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ. $\blacksquare$

Câu 1.2.1. Tính liên tục của $f(x)$ trong định lý trên có cần thiết hay không?

Ta cần tính liên tục của $f(x)$ để có tích phân trên f và để có được điều sau cần cho chứng minh ở **Câu 1.2**

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(Tham khảo: Nguyễn Thành Long (2022). Chương 7: Tích phân Riemann; Định lý 2. *Giải tích 1A và Vi tích phân 1A*, Thành phố Hồ Chí Minh, trang 111).
Nhưng đôi khi tính liên tục ấy lại không cần mà vẫn có thể có được tích phân.
Ta xét ví dụ sau:

Xét hàm

$$f(n) = \frac{1}{(n(\ln n - 1))^2}$$

Đặt $a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(\ln n - 1))^2}$.
Do $(n(\ln n - 1))^2 \geq 1, \forall n \geq 1$ nên $a(n) > 0$ hay $a(n)$ là hàm số dương.
$\forall n_2 > n_1 \geq 1$ và $n_1 \neq n_2$ ta có

$$\ln n_2 > \ln n_1, \forall n_2 > n_1 \geq 1, n_1 \neq n_2$$

$$\Leftrightarrow \ln n_2 - 1 > \ln n_1 - 1, \forall n_2 > n_1 \geq 1, n_1 \neq n_2$$

$$\Leftrightarrow n(\ln n_2 - 1) > n(\ln n_1 - 1), \forall n_2 > n_1 \geq 1, n_1 \neq n_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n(\ln x_2 - 1))^2} < \frac{1}{(n(\ln x_1 - 1))^2}, \forall n_2 > n_1 \geq 1, n_1 \neq n_2$$

Suy ra $a(n)$ là hàm giảm.

Ta có $\lim_{n\to n_0} \frac{1}{(n(\ln n-1))^2} = \frac{1}{(n_0(\ln n_0-1))^2}$. Với $D = [1;+\infty)\backslash\{e\}$ là tập xác định của hàm số $f(n) = \frac{1}{(n(\ln n-1))^2}$ nên $f(n)$ không liên tục tại e.
Ta có $0 < f(n) < 1$ và có e là điểm gián đoạn trên $[1;+\infty)$ nên $f(n)$ vẫn khả tích trên $[1;+\infty)$ (Tham khảo: Bùi Xuân Diệu (2009). Chương 2: Phép tính tích phân một biến số; Định lý 2.13. *Giải tích I*, Hà Nội, trang 49).
Vậy ta không cần đến điều kiện liên tục để có được sự khả tích. Tiếp theo ta cần xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(\ln n-1))^2}$ và $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x(\ln x-1))^2}dx$ tồn tại để sáng tỏ hơn.
Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(\ln n-1))^2}$ ta có

$$\frac{1}{(n(\ln n-1))^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(\ln n-1))^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo Tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n(\ln n-1))^2}$ cũng hội tụ.
Xét $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x(\ln x-1))^2}dx$ ta có $f(n)$ liên tục trên mọi đoạn đóng chứa trong D.
Đặt $A(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{(t(\ln t-1))^2}dt$.
Đặt $u = \ln t - 1 \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow dt = tdu$ và $t = e^{u+1}$ ta có

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{tu^2}du = \int_1^x \frac{1}{e^{u+1}.u^2}dt = \frac{-e^{u+1}.u^2 - 2ue^{u+1}}{(e^{u+1}.u^2)^2}\Big|_1^x$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \frac{-e^{\ln x-1}.(\ln x-1)^2-2(\ln x-1)e^{\ln x}}{(e^{\ln x}(\ln x-1)^2)^2} - 2.367879, \forall x \in [1;+\infty) \setminus e$$

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{\ln x-1}.(\ln x-1)^2 - 2(\ln x-1)e^{\ln x}}{(e^{\ln x}(\ln x-1)^2)^2} - 2.367879$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-1}-2}{e^{\ln x}(\ln x-1)^2} - 2.367879$$

Đặt $P(x) = \frac{1}{(\ln x-1)^2}$.
Với $x = 1$ thì $P(1) = 1, x = 2$ thì $P(2) = \frac{1}{(\ln 2-1)^2} > 1, x = 3$ thì $P(3) = \frac{1}{(\ln 3-1)^2} > 1$, khi $x > 3$ và $x \to \infty$ thì $P(x) \to 0$.
Hay nói một cách tổng quát hơn $P(x) \to 0$ với $x \to \infty$ (Vì trường hợp $x = 1, 2, 3$ thì $P(x) \geq 1$ là không đáng kể).
Từ đó ta được $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = 0 - 2.367879 = -2.367879$.
Vậy $\lim\limits_{x\to\infty} A(x)$ tồn tại hay $\int_1^\infty \frac{1}{(x(\ln x-1))^2}dx$ tồn tại.

Câu 1.3. Xét hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ với $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$.

Ta có,

i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ,

ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

(Tiêu chuẩn so sánh 1)

Chứng minh tiêu chuẩn so sánh trên.

Ta cần chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề (1.3.a)

Mọi dãy Cauchy đều bị chặn.

Cho $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.
Theo định nghĩa ta có:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, m \geq n \geq \mathbb{N}(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Với $m \geq n \geq \mathbb{N}(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n - \varepsilon < x_m < x_n + \varepsilon.$
Xét $\varepsilon = 10^{-10}, \exists N(10^{-10}) \in \mathbb{N}, n \geq N(10^{-10}) \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x_n - 10^{-10} < x_m < x_n + 10^{-10}$
Xét $X = \max(x_1, x_2, x_3, ..., x_{m-1})$
Chọn $M = \max(X, 10^{-10} + x) \Rightarrow x_m \leq M, \forall m \in \mathbb{N}$
Xét $Y = \min(x_1, x_2, x_3, ..., x_{m-1})$
Chọn $m = \min(Y, -10^{-10} + x) \Rightarrow x_m \geq m, \forall m \in \mathbb{N}$
Ta được điều cần chứng minh. ■

Xét mệnh đề sau (Tham khảo: Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân (2007). Chương 6: Chuỗi trong không gian Banach. *Giáo trình Giải tích 2*, tái bản lần thứ nhất, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh, Thành phố Hồ Chí Minh, trang 141):

Mệnh đề (1.3.b)

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *là một chuỗi số dương. Ta có* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *hội tụ nếu và chỉ nếu dãy tổng riêng phần* (S_n) *của nó bị chặn (trên) nghĩa là*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} c_k \leq M$$

Áp dụng bổ đề và mệnh đề trên, ta chứng minh **Câu 1.3** như sau:

i) Chúng ta có $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ nên $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} b_k \leq M$
Lại có $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq M$
Vậy tồn tại $M > 0$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

ii) Chúng ta có $e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ nên
$\forall M > 0, \exists n(M) \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} a_k > M$
Lại có $a_n \leq b_n \Rightarrow M < \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$
Vậy với mọi $M > 0$, luôn có $n(M) \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} b_k > M$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

Câu 1.4. Xét sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$.

Xét chuỗi số dương $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ *(Đã chứng minh)*.

Đặt $a_n = \dfrac{5}{2n^2+4n+3}$ và $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Ta có: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{2n^2+4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2(2+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2})} =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5}{2+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{5}{2} > 0$

Vậy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ là chuỗi hội tụ.

Câu 1.5. Chứng minh chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, tức là $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.
Cần chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
Đặt $S_k = \sum_{k=1}^{n} a_n$ và $P_k = \sum_{k=1}^{n} |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.
Do $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ về một số $a \in \mathbb{R}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_n| = a$ hay $\sum_{k=1}^{n} |a_n| \to a$ khi $n \to \infty$ hay $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ $\Rightarrow (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.
Do đó: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall m, p \in \mathbb{N}, m \geq p \geq N(\varepsilon)$ có:

$$|P_m - P_p| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^{m} |a_n| - \sum_{k=1}^{p} |a_n| \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=p+1}^{m} |a_n| \right| < \varepsilon$$

Ta có $\sum_{k=p+1}^{m} a_n \leq \sum_{k=p+1}^{m} |a_n|$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{m} a_n\right| \le \left|\sum_{k=p+1}^{m} |a_n|\right| < \varepsilon, \forall m, p \in \mathbb{N}, m \ge p \ge N(\varepsilon)$

$\forall m, p \in \mathbb{N}, m \ge p \ge N(\varepsilon)$ có:

$$|S_m - S_p| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_n - \sum_{k=1}^{p} a_n\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Vậy $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy nên $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ hay $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.

Câu 1.5.1. Chuỗi hội tụ có là chuỗi hội tụ tuyệt đối hay không? Nếu không hãy cho ví dụ.

Chuỗi hội tụ chưa chắc đã là chuỗi hội tụ tuyệt đối, bởi vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ hội tụ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Để làm rõ hơn, ta đặt $h_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Ta cần chứng minh thêm $S_{2n} = h_{2n} - h_n$. Đặt $P(n) = S_{2n} = h_{2n} - h_n$.

Với n=1 ta được $P(1) = S_2 = h_2 - h_1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}) - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (luôn đúng).

Giả sử với n=k thì P(k) đúng. Ta cần chứng minh rằng với n=k+1 thì P(k+1) cũng đúng.

Với n=k+1 ta có $P(k+1) = S_{2(k+1)} = h_{2(k+1)} - h_{k+1}$

$$= h_{2n+2} - h_{n+1} = h_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(h_n + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$
$= S_{2n+2} = S_{2(n+1)}$ *(điều phải chứng minh).*

Theo Hằng số Euler-Mascheroni ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$

hay $h_n - \ln n \to \gamma$ khi $n \to \infty \Rightarrow h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma$ khi $n \to \infty$

Ta có: $S_{2n} = h_{2n} - h_n - \ln(2n) + \ln(2n) + \ln n - \ln n$
$= (h_{2n} - \ln(2n)) - (h_n - \ln n) + \ln(2n) - \ln n.$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}[(h_{2n} - \ln(2n)) - (h_n - \ln n) + \ln(2n) - \ln n]$
$$= \gamma - \gamma + \lim_{n\to\infty}[\ln(2n) - \ln n] = \ln 2 \text{ hay } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Định lí (1.2)

a) *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ *hội tụ tại* $x = x_0$ *(i.e,* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_0-a)^n$ *hội tụ) thì nó hội tụ tại mọi điểm* x *thỏa* $0 < |x-a| < |x_0-a|$.

b) *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ *phân kỳ tại* $x = x_1$ *thì nó phân kỳ tại mọi điểm* x *thỏa mãn* $|x-a| > |x_1-a|$.

Câu 1.6. Chứng minh định lý trên.

a) Giả sử $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_0$ hay $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_0-a)^n$ hội tụ.
Đặt $a_n = C_n(x_0-a)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Ta cần xem xét kết quả sau: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, hay

$$\text{Cho trước } \varepsilon > 0, \text{ tìm } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \forall n \in \mathbb{N},$$
$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{n!}\right| < \varepsilon$$

Với $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{n!}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2.3.4\ldots(n-1)n}\right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.2.3.4\ldots(n-1)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon.2.3.4\ldots(n-1)}$$

Chọn $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon.2.3.4...(n-1)+100}$ ta được kết quả trên.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n(x_0-a)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x_0-a)^n = 0$

Nên a_n là dãy Cauchy, theo **Bổ đề 1.3.a** thì a_n bị chặn.

Do đó $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$.

Tại mọi điểm x thỏa $0 < |x-a| < |x_0-a|$ ta có:

$$|C_n(x-a)^n| \leq |C_n||x-a|^n = |C_n||x_0-a|^n \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$$

$$\leq M\left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dễ dàng nhận thấy $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x-a}{x_0-a}\right|^n$ là chuỗi hình học và $\left|\dfrac{x-a}{x_0-a}\right| < 1$ (do $|x-a| < |x_0-a|$) nên sẽ hội tụ về $\dfrac{M}{1-\left|\dfrac{x-a}{x_0-a}\right|}$

Suy ra: $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x-a)^n|$ hội tụ (**theo Tiêu chuẩn so sánh 1**) và $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ hội tụ **(theo Bài 1.5)**.

b) Ta sẽ dùng phản chứng để tìm điều vô lý: Giả sử tồn tại điểm x_2 sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ phân kỳ tại $x = x_1$ thì nó không phân kỳ tại điểm x_2 thỏa mãn $|x_2 - a| > |x_1 - a|$.

Đều đó đồng nghĩa với chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_2$ (i.e, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x_2-a)^n$ hội tụ) thỏa mãn $|x_2 - a| > |x - a|$.

Chứng minh điều trên tương tự với câu a) ta được chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_2$ (i.e, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x_2-a)^n$ hội tụ) thì nó hội tụ tại mọi điểm x thỏa $0 < |x-a| < |x_2 - a|$.
Suy ra tại $x = x_1$ cũng hội tụ (vô lý). $\blacksquare$

Câu 1.7. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương.
Giả sử: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$

a) Nếu $L < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ
b) Nếu $L > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ
c) Nếu $L = 1$ thì không kết luận

(**theo Tiêu chuẩn d'Alembert**)
Hãy chứng minh tiêu chuẩn trên.

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương suy ra $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và ta cũng có được $a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$ nên cho bất kỳ $\varepsilon > 0, \exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon, \forall n > m(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon, \forall n > m(\varepsilon)$$

Thay thế n lần lượt bởi $m(\varepsilon), m(\varepsilon) + 1, m(\varepsilon) + 2, \ldots, n - 1$ (Theo thứ tự tăng dần) trong bất đẳng thức trên, ta có

$$L - \varepsilon < \frac{a_{m(\varepsilon)+1}}{a_{m(\varepsilon)}} < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{m(\varepsilon)+2}}{a_{m(\varepsilon)+1}} < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{m(\varepsilon)+3}}{a_{m(\varepsilon)+2}} < L + \varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$L-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n-1}}<L+\varepsilon$$

Nhân các bất đẳng thức ở trên với $(n-m(\varepsilon))$ lần ta có

$$(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}<\frac{a_n}{a_{m(\varepsilon)}}<(L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)} \qquad (*)$$

a) Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L<1$

Với $0\leq L<1$, ta chọn $0<\varepsilon$ thỏa mãn $L+\varepsilon<1$

Từ $(*)$ ta có

$$\frac{a_n}{a_{m(\varepsilon)}}<(L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow a_n<a_{m(\varepsilon)}(L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < a_{m(\varepsilon)} \left[(L+\varepsilon)^{-m(\varepsilon)} + \ldots + \sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty} (L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)} \right]$$

Ta nhận thấy rằng $\sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty}(L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}$ là chuỗi hình học và với $L+\varepsilon < 1$.
Vậy $\sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty}(L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}$ là chuỗi hội tụ nên
$a_{m(\varepsilon)} \left[(L+\varepsilon)^{-m(\varepsilon)} + \ldots + \sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty}(L+\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)} \right]$ hội tụ suy ra
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ.

b) Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$
Với $L > 1$, ta chọn $\varepsilon > 0$ thỏa mãn $L - \varepsilon > 1$
Từ $(*)$ ta có

$$(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)} < \frac{a_n}{a_{m(\varepsilon)}}$$

$$\Leftrightarrow a_{m(\varepsilon)}(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)} < a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{m(\varepsilon)}\left[(L-\varepsilon)^{-m(\varepsilon)}+\ldots+\sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty}(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}\right]<\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

Ta nhận thấy rằng $\sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty}(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}$ là chuỗi hình học với $L-\varepsilon>1$.
Vậy $\sum_{n=0}^{\infty}(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}$ là chuỗi phần kỳ nên $a_{m(\varepsilon)}\left[(L-\varepsilon)^{-m(\varepsilon)}+\ldots+\sum_{n=m(\varepsilon)}^{\infty}(L-\varepsilon)^{n-m(\varepsilon)}\right]$ phân kỳ suy ra $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ phân kỳ.

c) Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L=1$

Ta sẽ xem xét hai ví dụ sau:

+ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ với $a_n = \frac{1}{n}$ và $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = 1$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, nên với L=1 thì chuỗi số phân kỳ.

+ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ với $a_n = \frac{1}{n^2}$ và $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = 1$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, nên với L=1 thì chuỗi số hội tụ.

Vậy với hai ví dụ trên thì ta có thể kết luận rằng
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L = 1$ thì chuỗi số có thể hội tụ và có thể phân kỳ.
Vì thế chúng ta không thể đưa ra kết luận nào khi gặp trường hợp này.

Định lí (2.1)

Với mỗi chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ *cho trước thì chỉ có một trong ba khả năng sau xảy ra:*

a) *Chuỗi hội tụ khi* $x = a$ $(R = 0)$

b) *Chuỗi hội tụ với mọi* $x \in \mathbb{R}$ $(R = +\infty)$

c) $\exists R > 0$ *(R hữu hạn) sao cho*

$$\begin{aligned} &c.1)\ \text{Chuỗi hội tụ nếu } |x-a| < R \\ &c.2)\ \text{Chuỗi phân kỳ nếu } |x-a| > R \end{aligned}$$

Câu 2.1. Chứng minh định lý trên.

Giả sử rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ có điểm tập trung $a = 0$ (Nếu chuỗi có điểm tập trung tại giá trị a khác 0, thì kết quả được liên kết bởi cách đặt $y = x - a$ và xem xét chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n$). Chúng ta cần nhận định sau

Nhận định (2.1)

Nếu tồn tại một số thực $d \neq 0$ sao cho $\sum_{n=0}^{\infty} C_n d^n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ hội tụ tuyệt đối với mọi x sao cho $|x| < |d|$.

Ta cần làm rõ nhận xét sau

Nhận xét

Khi chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ hội tụ, thì giới hạn của các số hạng của chuỗi đó khi n tiến đến vô cùng là bằng 0. Khi đó, ta nói rằng dãy $C_n x^n$ tiến đến 0 khi n tiến đến vô cùng.

Chứng minh. Ta có $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ hội tụ khi và chỉ khi tổng riêng phần $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ hay $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$ hội tụ khi n tiến đến vô cùng. Do $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ nên tồn tại L sao cho $S_n \to L$ khi $n \to \infty$.
Khi đó ta có thể viết

$$C_n x^n = S_n - S_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = L - L = 0$$

Vậy dãy $C_n x^n$ tiến đến 0 khi n tiến đến vô cùng. ■
Vì $\sum_{n=0}^{\infty} C_n d^n$ hội tụ, nên giới hạn của các số hạng của chuỗi $C_n x^n \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $|C_n x^n| \le 1$ với mọi $n \ge N$.

Với kết quả trên, xem xét chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Đặt S là tập các số thực sao cho chuỗi trên hội tụ hay $S = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$. Giả sử $S = 0$, vậy chuỗi số trên rơi vào trường hợp a). Giả sử S là tập hợp tất cả các số thực sao cho chuỗi trên hội tụ hay $S = \{\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$. Vậy chuỗi số trên rơi vào trường hợp b).

Giả sử $S \neq 0$ và S không phải tập các số thực. Như vậy, tồn tại một số thực $0 \neq x' \in S$ sao cho chuỗi số không hội tụ. Do đó, chuỗi số này sẽ không hội tụ với mỗi $|x| > |x'|$.

Vì vậy, tập S bị chặn trên. Gọi R là chặn trên nhỏ nhất của S. Vậy nên, để chuỗi số trên hội tụ với mọi x khi và chỉ khi $|x| < |R|$, trường hợp này rơi vào trường hợp c).

Định lí (Quy tắc tìm bác kính hội tụ)

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \rho$ *hay* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \rho$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ *là*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & , \quad 0 < \rho < \infty \\ 0 & , \quad \rho = \infty \\ \infty & , \quad \rho = 0 \end{cases}$$

Câu 2.2. Chứng minh định lý trên.

- Áp dụng tiêu chuẩn d'Alembert vào chuỗi trên ta được

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}(x-a)^{n+1}}{C_n(x-a)^n}\right| = |x-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$$

Giả sử $0<\rho<\infty$ thì giới hạn trên bằng $|x-a|\rho$. Nếu $|x-a|\rho<1$, tức là $|x-a|<\frac{1}{\rho}$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$ hội tụ. Nếu $|x-a|\rho>1$, tức là $|x-a|>\frac{1}{\rho}$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$ phân kỳ. Vậy theo **Định lý 2.1, c.1, c.2** thì $R=\frac{1}{\rho}$.
Giả sử $\rho=\infty$ thì giới hạn trên bằng $|x-a|\infty$. Suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$ hội tụ khi và chỉ khi $|x-a|=0$ hay $x=a$. Vậy theo **Định lý 2.1, a** thì $R=0$.
Giả sử $\rho=0$ thì lúc đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$ hội tụ với mọi x. Vậy theo **Định lý 2.1, b** thì $R=\infty$.

- Áp dụng tiêu chuẩn căn thức vào chuỗi trên ta được

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n(x-a)^n|} = |x-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n(x-a)^n|}$$

  Tới đây vấn đề tương tự với vấn đề ở trên nên chứng minh tương tự.

Định lí (Tiêu chuẩn căn thức)

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *là chuỗi số dương. Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$

a) *Nếu* $R < 1$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

b) *Nếu* $R > 1$ *hoặc* $L = \infty$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ*

c) *Nếu* $R = 1$ *thì ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Câu 2.3. Chứng minh tiêu chuẩn trên.

Do $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương suy ra
$a_n > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a_n} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ hay

Cho bất kỳ $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi
$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - R| < \varepsilon$$
$$\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - R| < \varepsilon \Leftrightarrow R - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < R + \varepsilon \qquad (*)$$

a) Ta xét trường hợp sau: Với $0 \leq R < 1$ hay R có dạng $\frac{1}{x}, \forall x > 1$.
Tồn tại $c \in \mathbb{R}, 0 < c < 1$ hay c có dạng $\frac{1}{x'}, \forall x' > 1$ sao cho
$2^{\frac{n-1}{n}} = 1 + c = 1 + \frac{1}{x'}$. Suy ra
$1 - \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{x'}) \Rightarrow 1 - (\frac{1}{x} + \frac{1}{x.x'}) > 0 \Leftrightarrow 1 - R.2^{\frac{n-1}{n}} > 0$
Ta có $R < 1 \Leftrightarrow 1 - R > 0$, chọn $\varepsilon = \frac{1-R.2^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-1}{n}}}$.
Từ $(*)$ suy ra $\sqrt[n]{a_n} < R + \frac{1-R.2^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \Leftrightarrow a_n < \frac{1}{2^{n-1}}$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Xét chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ với $a = 1, r = \frac{1}{2}$ suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ tại $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ do $|\frac{1}{2}| < 1$. Theo tiêu chuẩn so sánh ta được $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

b) Do $R > 1, n \geq 1$ nên $Rn - 1 > 0$. Chọn $\varepsilon = \frac{Rn-1}{n} > 0$
Từ $(*)$ ta có $R - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \Leftrightarrow R - \frac{Rn-1}{n} < \sqrt[n]{a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt[n]{a_n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ nên theo Tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

c) Xét hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ. Nên nếu $R = 1$ thì ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Câu 2.4. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$

a) Áp dụng quy tắc tìm bán kính hội tụ với $C_n = \frac{1}{n}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Vậy bán kính hội tụ là 1.

b) Áp dụng quy tắc tìm bán kính hội tụ với $C_n = \frac{1}{n^n}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Vậy bán kính hội tụ là ∞.

GIẢI BÀI TẬP VI TÍCH PHÂN 2A I

Câu 2.5. Biểu diễn $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ bằng hình học trong $\mathbb{R}^2$.

Đặt $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ với $0 < x_1 < 2$ và $1 < x_2 < 3$, $\mathbf{y} = (y_1; y_2)$ với $x_1 < y_1 < 5$ và $x_2 < y_2 < 5$.
Ta có $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$ với $0 < x_1 < x_1 + y_1 < 7$ và $0 < 1 + x_2 < x_2 + y_2 < 8$.
Biểu diễn hình học $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ như sau

D:/Code/LateX/Hinh bai 2.6.png

Hình: *Biểu diễn hình học $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$*

Mệnh đề (Kiểm tra $||.||$ là chuẩn trong $\mathbb{R}^n$)

Với mọi $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$, ta gọi $||.||$ chuẩn nếu $||.||$ thỏa 3 tính chất sau:

i) $||x|| \geq 0$
$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Câu 2.6. Chứng minh mệnh đề trên

i) Ta có $||x|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Do $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \geq 0$.
Suy ra $||x|| \geq 0$.
Ta có $||x|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Suy ra $||x|| = 0$ thì
$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$
$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_n^2$ hay $x_i^2 = 0, \forall i \in [1, n] \Rightarrow x = 0$

ii) Ta có

$$||\alpha x|| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2}, \text{ với}$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\Leftrightarrow ||\alpha x|| = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}, \text{ với } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\Leftrightarrow ||\alpha x|| = |\alpha|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \text{ với } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\Leftrightarrow ||\alpha x|| = |\alpha|.||x||, \text{ với } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

iii) Cần chứng minh $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
Hay ta cần chứng minh

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2 \leq x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+ 2\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)}+y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwars cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n (n \geq 2)$ ta có

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)} \geq |x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n|$$

Suy ra

$$x_1^2+\ldots+x_n^2+2\sqrt{(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)}+y_1^2+\ldots+y_n^2 \geq x_1^2+\ldots+x_n^2+2|x_1y_1+\ldots+x_ny_n|+y_1^2+\ldots+y_n^2 \geq x_1^2+\ldots+x_n^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+y_1^2+\ldots+y_n^2 = (x_1+y_1)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2 \quad \blacksquare$$

Câu 2.7. Cho $a = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ và $b = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ là các chuỗi lũy thừa với bán kính hội tụ lần lượt là ρ_a và ρ_b. Đặt $\rho := \min(\rho_a, \rho_b)$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{K}$ sao cho $|x| < \rho$, ta có

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) x_k,$$

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k.$$

Nói riêng, bán kính hội tụ ρ_{a+b} và $\rho_{a.b}$ của chuỗi lũy thừa $a+b$ và $a.b$ thỏa $\rho_{a+b} \geq \rho$ và $\rho_{a.b} \geq \rho$.

Từ **Nhận định 2.1**, với $\rho := \min(\rho_a, \rho_b)$ thì $\rho \in [0, +\infty)$. Vậy tồn tại một số thực $\rho \neq 0$ sao cho $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k$ và $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \rho^k$ hội tụ, khi đó $a = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ và $b = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ sẽ lần lượt hội tụ với mọi $|x| < |\rho| = \rho$.
Suy ra

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) x_k$$

Cần kiểm tra kết quả

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k \quad (*)$$

Xét $(*)$, ta có

$$(*) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$$

Ta cần tính hệ số của x^k trong tích của hai dãy số này. Để làm điều này, ta sẽ lấy một số hạng từ $\sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k$ và một số hạng từ $\sum_{k=0}^{+\infty} b_kx^k$, rồi tính tích của chúng. Số hạng được lấy từ $\sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k$ có thể được biểu diễn dưới dạng a_jx^j, trong khi số hạng được lấy từ $\sum_{k=0}^{+\infty} b_kx^k$ có thể được biểu diễn dưới dạng b_mx^m. Tích của hai số hạng này sẽ có hệ số a_jb_m và sẽ là số hạng của $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_jb_m\right) x^{m+j}$. Do đó, hệ số của x^k trong tích của hai dãy số là $\sum_{j=0}^{k} a_jb_m$.
Đặt $m = k - j$ ta được

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}\right) x^{k-j+j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}\right) x^k = (*) \quad \blacksquare$$

Nói riêng, do các chuỗi $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ hội tụ nên ta có $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)x_k$ và $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k$ cũng hội tụ. Từ đó ta suy ra bán kính hội tụ ρ_{a+b} và $\rho_{a.b}$ của chuỗi lũy thừa $a+b$ và $a.b$ thỏa $\rho_{a+b} \geq \rho$ và $\rho_{a.b} \geq \rho$.

Định lí (4.1)

Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên D thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i x_j}} = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j x_i}}$$

với mọi $i, j \in [1, n]$.

Câu 4.1. Chứng minh định lí trên.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $n = 2, i = 1, j = 2$. Khi đó $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp hai $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_2 x_1}}$ liên tục trên D. Với $x = (x_1, x_2) \in D$ bất kì, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{h_1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \lim_{h_2 \to 0} \lim_{h_1 \to 0} \frac{\frac{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)}{h_1} - \frac{f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2)}{h_1}}{h_2}$$

$$= \lim_{h_2 \to 0} \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)+f(x_1,x_2)}{h_1 h_2} \qquad (**)$$

Đặt

$$A = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) + f(x_1, x_2) \qquad (*)$$

Nhắc lại kết quả sau ở học phần Vi tích phân 1A

Định lí (Giá trị trung bình Lagrange)

Cho hàm số $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Hàm $\Phi(t) = f(t, x_2 + h_2) - f(t, x_2)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên mọi điểm $x_1 \in D$ nên áp dụng Định lí giá trị trung bình Lagrange, ta thấy rằng tồn tại $\theta_1 \in (0, 1)$ sao cho

$$A = \Phi(x_1 + h_1) - \Phi(x_1) = h_1 \Phi'(x_1 + \theta_1 h_1)$$

Mặt khác, do định nghĩa của đạo hàm riêng, ta có

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2)$$

và do định lý giá trị trung bình

$$\Phi'(x_1 + \theta_1 h_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2)$$

$$= h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2)$$

với $0 < \theta_2 < 1$ và $(**)$, do đó

$$A = h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2) \quad (1)$$

Lập luận tương tự, ta xét hàm $\Psi(t) = f(x_1 + h_1, t) - f(x_1, t)$ ta tìm được $\theta_1', \theta_2' \in (0,1)$ sao cho

$$A = h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \theta_1' h_1, x_2 + \theta_2' h_2) \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta suy ra

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \theta_1' h_1, x_2 + \theta_2' h_2)$$

Vì $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ liên tục trên D nên khi $(h_1, h_2) \to (0,0)$, ta được

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \quad \blacksquare$$

Định lí (4.2)

Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in D$ thì f liên tục tại x.

Câu 4.2. Chứng minh định lí trên.

Vì f khả vi tại $x \in D$ nên ta có với $y = x + z \in D$, ta có

$$f(y) = f(x) + \langle y - x, \nabla f(x) \rangle + ||y - x||\varepsilon(y - z)$$

$$\Leftrightarrow f(y) - f(x) = \langle y - x, \nabla f(x) \rangle + ||y - x||\varepsilon(y - z) \quad (*)$$

với $\lim\limits_{y-x\to 0} \varepsilon(y - x) = 0$.

Để chứng minh f liên tục tại $x \in D$, ta đi chứng minh $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$.

Từ $(*)$ ta có

$$0 < |f(y) - f(x)| = |\langle y - x, \nabla f(x)\rangle + ||y - x||\varepsilon(y - z)|$$

$$\leq |\langle y - x, \nabla f(x)\rangle| + ||y - x||.|\varepsilon(y - z)|$$

$$\leq ||y-x||.||\nabla f(x)|| + ||y-x||.|\varepsilon(y-z)| = ||y-x||(||\nabla f(x)|| + |\varepsilon(y-x)|)$$

Ta có $\lim\limits_{y-x\to 0} ||y - x||(||\nabla f(x)|| + |\varepsilon(y - x)|) = 0.$

Áp dụng định lý kẹp ta được $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$.

Câu 4.3. Cho $A = (2, 4, -3), B = (3, -1, 1)$. Tìm phương trình tham số của đường thẳng đi qua A, B với vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}$.

Với $A = (2, 4, -3), B = (3, -1, 1)$, ta có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1, -5, 4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua A, B nhận $\overrightarrow{AB}$ là vector chỉ phương là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

Câu 4.4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $P(1,3,2), Q(3,-1,6), R(5,2,0)$.

Ta có $\overrightarrow{PQ} = (2,-4,4), \overrightarrow{PR} = (4,-1,-2)$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right] = (12,20,14)$. Gọi $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (PQR) ta có:
$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{PQ} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{PR} \end{cases}$ nên $\vec{n}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right] = (12,20,14)$.
Chọn $\vec{n} = (12,20,14)$ ta được mặt phẳng (PQR) là:

$$12(x-5) + 20(y-2) + 14z = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x + 20y + 14z - 100 = 0$$

Câu 4.5. Chứng minh $B(x,r)$ là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và với $y \in \mathbb{R}^d$ thỏa $||y-x|| = r$ thì y là điểm dính của $B(x,r)$.

- Lấy $y \in B(x,r)$, tìm δ_y sao cho $B(y,\delta_y) \subset B(x,r)$.
  Ta có: Cho bất kỳ $z \in B(y,\delta_y)$ thì $z \in B(x,r)$, hay $||z-y|| < \delta_y$ thì $||z-x|| < r$.
  Xét $||z-x|| = ||z-y+y-x|| \leq ||z-y|| + ||y-x|| \leq \delta_y + ||y-x||$.
  Chọn $\delta_y = r - ||y-x|| - 1$. ∎
- Ta cần chứng minh với bất kỳ $\varepsilon > 0$ thì $B(y,\varepsilon) \cap B(x,r) \neq \varnothing$.
  Ta có $||y-x|| = r$ nên $y \in S(x,r)$ và $S(x,r) \cap B(x,r) \neq \varnothing$.
  Do đó với mọi $y \in S(x,r)$ thì $y \in B(x,r)$. Vậy tồn tại ít nhất một điểm $y \in B(y,\varepsilon)$ sao cho $y \in B(x,r)$. Suy ra $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$.
  Từ đó ta được $B(y,\varepsilon) \cap B(x,r) \neq \varnothing$. ∎

Câu 5.1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3+y^3)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Trên tập $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0,0\})$, ta thấy rằng $f(x,y) = (x^3+y^3)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ có công thức là các hàm sơ cấp nên f liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0,0\})$.

Tiếp theo ta khảo sát tính liên tục của f tại $(0,0)$. Hay ta khảo sát giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+y^3)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ $(*)$

Ta có: $0 \leq \left|(x^3+y^3)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x^3+y^3|$

Do $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x^3+y^3| = 0$ nên $(*)$ hội tụ về 0.

Suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Do đó hàm f liên tục tại $(0,0)$. Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 5.2. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ tại điểm ứng với $(x, y) = (1, 2)$

Ta có $f(1, 2) = 5$ và

$$f'_x(x, y) = 2x \Rightarrow f'_x(1, 2) = 2$$

$$f'_y(x, y) = 2y \Rightarrow f'_y(1, 2) = 4$$

Do đó, phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại điểm ứng với $(x, y) = (1, 2)$ là

$$z = f(1, 2) + f'_x(1, 2)(x - 1) + f'_y(1, 2)(y - 2)$$

$$= 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) = 2x + 4y - 5$$

Mệnh đề

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của D. Nếu tất cả các đạo hàm riêng này đều liên tục tại điểm $x \in D$ thì f khả vi tại x.

Câu 6. Chứng minh mệnh đề trên.

Ta sẽ dựa vào Định lý giá trị trung bình Lagrange đã nhắc lại ở **Câu 4.1** để chứng minh.
Không mất tính tổng quát, ta xét trường hợp $n = 2$ (với $n > 2$ chứng minh tương tự).
Cần chứng minh f khả vi tại $x \in D$, nghĩa là với $x = (x_1, x_2)$ và $z = (z_1, z_2)$ ta cần chứng minh

$$f(x + z) = f(x) + \langle z, \nabla f(x) \rangle + ||z||\varepsilon(z)$$

với $\lim\limits_{z\to 0}\varepsilon(z)=0.$

Ta viết lại

$$\varepsilon(z)=\frac{1}{||z||}[f(x+z)-f(x)-\langle z,\nabla f(x)\rangle]$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(z_1,z_2)=\frac{1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}\left[f(x_1+z_1,x_2+z_2)-f(x_1,x_2)-\left(z_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+z_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\right]\ (1)$$

Vậy ta cần chứng minh $\lim\limits_{(z_1,z_2)\to(0,0)}\varepsilon(z_1,z_2)=0.$

Ta xét

$$f(x_1+z_1,x_2+z_2)-f(x_1,x_2)=f(x_1+z_1,x_2+z_2)-f(x_1,x_2+z_2)+f(x_1,x_2+z_2)-f(x_1,x_2)\quad (2)$$

Đặt $g(x_1)=f(x_1,x_2+z_2), l(x_2)=f(x_1,x_2).$

Vì f có đạo hàm riêng theo các biến tại mọi điểm của D nên áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange, ta thấy tồn tại $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ sao cho

$$g'(x_1 + \theta_1 z_1) = \frac{g(x_1 + z_1) - g(x_1)}{z_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 z_1, x_2 + z_2) = \frac{f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) - f(x_1, x_2 + z_2)}{z_1} \quad (3)$$

và

$$l'(x_2 + \theta_2 z_2) = \frac{l(x_2 + z_2) - l(x_2)}{z_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 z_2) = \frac{f(x_1, x_2 + z_2) - f(x_1, x_2)}{z_2} \quad (4)$$

Thay $(3), (4)$ vào (2) ta được

$$f(x_1+z_1, x_2+z_2) - f(x_1, x_2) = z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 z_1, x_2+z_2) + z_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\theta_2 z_2) \quad (5)$$

Thay (5) vào (1) ta được

$$\varepsilon(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}\left[z_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 z_1, x_2+z_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)+z_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2+\theta_2 z_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\right]$$

Suy ra

$$0 \le |\varepsilon(z_1,z_2)| \le \frac{|z_1|}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 z_1, x_2+z_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right| + \frac{|z_2|}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2+\theta_2 z_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right| \quad (6)$$

Vì tất cả các đạo hàm riêng của f đều liên tục tại $x \in D$ nên

$$\lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 z_1, x_2+z_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)$$

$$\lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\theta_2 z_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

Vậy từ (6) ta được

$$0 \leq \lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} |\varepsilon(z_1, z_2)| \leq 0$$

Theo định lý kẹp ta được $\lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} |\varepsilon(z_1, z_2)| = 0$, do $\varepsilon(z_1, z_2)$ hội tụ tuyệt đối nên $\varepsilon(z_1, z_2)$ cũng hội tụ hay $\lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} \varepsilon(z_1, z_2) = 0$. ■

GIẢI TÍCH 2A

Câu 1. Đặt $X = \mathbb{R}^2, a = (0,0), u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$ và các metric

$$d_1(u,v) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d_2(u,v) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

$$d_3(u,v) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|).$$

Hãy kiểm tra lại metric và tìm $B_{d_1}(a,1), B_{d_2}(a,1), B_{d_3}(a,1)$.

Ta sẽ kiểm tra metric như sau

a. $d_1(u,v) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$
Ta có định nghĩa sau: Khoảng cách *Minkowski* bậc $p \in \mathbb{N}$ giữa hai điểm $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là

$$d\left(X,Y\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

với $p \geq 1$, khoảng cách *Minkowski* là một metric được rút ra từ hệ quả của bất đẳng thức *Minkowski*.
Xét $X = u, Y = v, n = 2, p = 2$ ta được điều cần chứng minh.

$$B_{d_1}(a,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$$

Vậy $B_{d_1}(a,1)$ là hình tròn tâm $O(0,0)$, bán kính $r = 1$ và không bao gồm biên.

b. $d_2(u,v) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

(M_1) Ta có $|x_1 - y_1| \geq 0$ và $|x_2 - y_2| \geq 0$ suy ra
$d_2(u,v) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$.
Mặt khác, ta có

$$d_2(u,v) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - y_1| = 0 \\ |x_2 - y_2| = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow u = v$$

(M_2) Ta có

$$d_2(u,v) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_2(v,u)$$

(M_3) Xét $t = (z_1, z_2) \in X$, ta có

$$\begin{aligned} d_2(u,v) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\ &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2| \\ &= d_2(u,t) + d_2(t,v) \end{aligned}$$

Suy ra $d_2(u,v)$ là một metric.

$$B_{d_2}(a,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 0| + |y - 0| < 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left[\begin{array}{l} x + y < 1 \\ -x + y < 1 \\ x - y < 1 \\ -x - y < 1 \end{array} \right. \right\}$$

Vậy $B_{d_2}(a,1)$ là hình thoi và không bao gồm biên.

c. $d_3(u,v) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

(M_1) Ta có $|x_1 - y_1| \geq 0$ và $|x_2 - y_2| \geq 0$ suy ra $d_3(u,v) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \geq 0.$
Mặt khác, ta có

$$d_3(u,v) = 0 \Leftrightarrow \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - y_1| = 0 \\ |x_2 - y_2| = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow u = v$$

(M_2) Ta có

$$d_3(u,v) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) = \max(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|) = d_3(v,u)$$

(M_3) Xét $w = (z_1, z_2) \in X$. Ta có

$$\begin{cases} |x_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \\ |x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \max(|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|) &\leq \max(|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|; |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|) \\ &\leq \max(|x_1 - z_1|; |x_2 - z_2|) + \max(|z_1 - y_1|; |z_2 - y_2|) \\ \Rightarrow d_3(u, v) &\leq d_3(u, w) + d_3(w, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{d_3}(a, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x - 0|, |y - 0|) < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|)\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \right\}$$

Vậy $B_{d_3}(a,1)$ là hình vuông không bao gồm biên.

Câu 2. Cho $(E_1, \delta_1), (E_2, \delta_2), \ldots, (E_n, \delta_n)$ là n không gian metric.
i) Đặt

$$d : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = \min\{1, \delta_1(x, y)\}$$

Chứng minh rằng: d là một metric trên E_1.
ii) Đặt $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ và $d_i : E \times E \to \mathbb{R}$, với

$$d_1(X, Y) = \sqrt{\delta_1^2(x_1, y_1) + \delta_2^2(x_2, y_2) + \ldots + \delta_n^2(x_n, y_n)},$$

$$d_2(X, Y) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\},$$

$$d_3(X, Y) = \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n).$$

Với $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
Chứng minh $(E, d_i), i = \{1, 2, 3\}$ là không gian metric.

i) Do (E_1, δ_1) là không gian metric nên δ_1 là metric thỏa mãn ba tính chất $(M_1), (M_2), (M_3)$.
Ta cần chứng minh d là một metric.

(M_1) Do $\delta_1(x,y) \geq 0, \forall x, y \in E_1$ nên $\min\{1, \delta_1(x,y)\} \geq 0, \forall x, y \in E_1$.
Xét $d(x,y) = 0$ ta có

$$\min\{1, \delta_1(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow \delta_1(x,y) = 0$$

mà $\delta_1(x,y)$ là metric thỏa tính chất $(M_1), \forall x, y \in E_1$ nên $x = y, \forall x, y \in E_1$.

(M_2) Do $\delta_1(x,y)$ là metric thỏa tính chất $(M_2), \forall x, y \in E_1$ nên $\delta_1(x,y) = \delta_1(y,x), \forall x, y \in E_1$, ta được

$$d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = \min\{1, \delta_1(y,x)\} = d(y,x)$$

(M_3) Do $\delta_1(x,y)$ là metric thỏa tính chất (M_3), nên $\forall x,y,z \in E_1$ ta được

$$\delta_1(x,y) \le \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)$$

Cần làm rõ

$$\min\{1,\delta_1(x,y)\} \le \min\{1,\delta_1(x,z)\} + \min\{1,\delta_1(z,y)\} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

Trường hợp 1: $\delta_1(x,y) \le \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y) < 1.$
Suy ra

$$\begin{cases} \delta_1(x,y) < 1 \Rightarrow d(x,y) = \delta_1(x,y) \\ \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \delta_1(x,z) < 1 \Rightarrow d(x,z) = \delta_1(x,z) \\ \delta_1(z,y) < 1 \Rightarrow d(z,y) = \delta_1(z,y) \end{cases} \end{cases}$$

Từ $(*)$ ta được

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 1$$

Trường hợp 2: $\delta_1(x,z) + \delta_1(z,y) \ge 1$.
Trường hợp 2.1: Cả $\delta_1(x,z)$ và $\delta_1(z,y)$ đều lớn hơn hoặc bằng 1.
Ta được

$$d(x,z) + d(z,y) \ge \min\{1, \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)\} = 1 \quad (**)$$

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = 1$ thì từ $(**)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \ge d(x,y)$.

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = \delta_1(x,y)$ thì từ $(**)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \geq 1 > d(x,y)$.
  Trường hợp 2.2: Chỉ một trong hai hoặc $\delta_1(x,z)$ hoặc $\delta_1(z,y)$ lớn hơn hoặc bằng 1.
  Ta có cả $\delta_1(x,z)$ và $\delta_1(z,y)$ đều lớn hơn hoặc bằng 0, suy ra

$$d(x,z) + d(z,y) \geq 1 = \min\{1, \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)\} \quad (***)$$

- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = 1$ thì từ $(***)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$.
- Nếu $d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\} = \delta_1(x,y)$ thì từ $(***)$ ta được $d(x,z) + d(z,y) \geq 1 > d(x,y)$.

Vậy d là một metric trên E_1. ■

ii) Do $\delta_i, i \in [1,n]$ là n metric nên thỏa mãn ba tính chất $(M_1), (M_2), (M_3)$.

Ở tính chất (M_1) ta có $\delta_i \geq 0$ và $\delta_i(x_i, y_i) = \delta_i(y_i, x_i), \forall i \in [1,n]$. $(*)$

Cần chứng minh $(E, d_i), i = \{1,2,3\}$, với $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là không gian metric.

1) $d_1(X,Y) = \sqrt{\delta_1^2(x_1,y_1) + \delta_2^2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n^2(x_n,y_n)}$

(M_1) Do $(*)$ nên ta có $\delta_1(x_1,y_1) + \delta_2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n(x_n,y_n) \geq 0$ nên $\sqrt{\delta_1^2(x_1,y_1) + \delta_2^2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n^2(x_n,y_n)}$ thỏa mãn và lớn hơn hoặc bằng 0. Ta có

$$d_1(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)} \Leftrightarrow d_1^2(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)$$

Xét

$$d_1(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i) = 0$$

Do $(*)$ nên

$$\delta_1(x_1,y_1) = \delta_2(x_2,y_2) = \ldots = 0 \Leftrightarrow X = Y$$

(M_2) Do $(*)$ nên ta có

$$d_1(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(y_i,x_i)} = d_1(Y,X)$$

(M_3) Ta cần chứng minh

$$d_1(X,Y) \leq d_1(X,Z) + d_1(Z,Y)$$

hay

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,z_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i,y_i)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,z_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i,y_i) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i,y_i)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,z_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i,y_i) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i,z_i)\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i,y_i)} \quad (*)$$

Tóm lại ta sẽ chứng minh $(*)$.

Do $\delta_i, i \in [1, n]$ là n metric nên ta có

$$\delta_i(x_i, y_i) \leq \delta_i(x_i, z_i) + \delta_i(z_i, y_i)$$

$$\Leftrightarrow \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \delta_i^2(x_i, z_i) + \delta_i^2(z_i, y_i) + 2\delta_i(x_i, z_i)\delta_i(z_i, y_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i) + 2\sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_i, z_i)\delta_i(z_i, y_i) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_i, z_i)\delta_i(z_i, y_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)} \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$ ta được

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(x_i, z_i) \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(z_i, y_i)} \quad \blacksquare$$

2) $d_2(X, Y) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\}$

(M_1)

$$d_2(X, Y) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\} \geq \delta_1(x_1, y_1) \geq 0$$

$$d_2(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \max\{\delta_1(x_1, y_1), \delta_2(x_2, y_2), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta_i(x_i, y_i) = 0, \forall i \in [1, n]$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in [1, n]$$

$$\Leftrightarrow X = Y$$

(M_2) $d_2(X,Y) = \max\{\delta_1(x_1,y_1), \delta_2(x_2,y_2), \ldots, \delta_n(x_n,y_n)\} = \max\{\delta_1(y_1,x_1), \delta_2(y_2,x_2), \ldots, \delta_n(y_n,x_n)\} = d_2(Y,X)$

(M_3) Cần chứng minh: $d_2(X,Y) \leq d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)$.
Ta có $\delta_i(x_i,y_i) \leq \delta_i(x_i,z_i) + \delta_i(z_i,y_i), \forall i \in [1,n]$
$\Rightarrow \max\{\delta_1(x_1,y_1), \delta_2(x_2,y_2), \ldots, \delta_n(x_n,y_n)\} \leq \max\{\delta_1(x_1,z_1), \delta_2(x_2,z_2), \ldots, \delta_n(x_n,z_n)\} + \max\{\delta_1(z_1,y_1), \delta_2(z_2,y_2), \ldots, \delta_n(z_n,y_n)\}$
$\Rightarrow d_2(X,Y) \leq d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)$

3) $d_3(X,Y) = \delta_1(x_1,y_1) + \delta_2(x_2,y_2) + \ldots + \delta_n(x_n,y_n)$

(M_1) Ta có

$$\begin{cases} \delta_1(x_1, y_1) \geq 0 \\ \delta_1(x_2, y_2) \geq 0 \\ \vdots \\ \delta_i(x_i, y_i) \geq 0, \forall i \in [1, n] \end{cases}$$

Suy ra

$$d_3(X, Y) = \delta_1(x_1, y_1) + \delta_2(x_2, y_2) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n) \geq 0$$

Lại có

$$\begin{cases} \delta_1(x_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \\ \delta_1(x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = y_2 \\ \vdots \\ \delta_i(x_i, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in [1, n] \end{cases}$$

Cộng theo vế ta được

$$\delta_1(x_1, y_1)+\ldots+\delta_i(x_i, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1+\ldots+x_n = y_1+\ldots+y_n \Leftrightarrow X = Y$$

(M_2)

$$d_3(X,Y) = \delta_1(x_1,y_1)+\ldots+\delta_n(x_n,y_n) = \delta_1(y_1,x_1)+\ldots+\delta_n(y_n,x_n) = d_3(Y,X)$$

(M_3) Ta có

$$\begin{cases} \delta_1(x_1,y_1) \le \delta_1(x_1,z_1) + \delta_1(z_1,y_1) \\ \delta_2(x_2,y_2) \le \delta_2(x_2,z_2) + \delta_2(z_2,y_2) \\ \vdots \\ \delta_n(x_n,y_n) \le \delta_n(x_n,z_n) + \delta_n(z_n,y_n) \end{cases}$$

Cộng hai vế ta được

$$\delta_1(x_1,y_1)+\ldots+\delta_n(x_n,y_n) \le \delta_1(x_1,z_1)+\delta_1(z_1,y_1)+\ldots+\delta_n(x_n,z_n)+\delta_n(z_n,y_n)$$

$$\Leftrightarrow \delta_1(x_1, y_1) + \ldots + \delta_n(x_n, y_n) \leq \delta_1(x_1, z_1) + \ldots + \delta_n(x_n, z_n) + \delta_1(z_1, y_1) + \ldots + \delta_n(z_n, y_n)$$

$$\Rightarrow d_3(X, Y) \leq d_3(X, Z) + d_3(Z, Y) \qquad \blacksquare$$

Câu 3. Chứng minh rằng $\mathbb{R}^n$ là không gian định chuẩn với chuẩn là

$$||.||_p : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ta cần chứng minh $||.||_p$ thỏa các tính chất sau:

(N_1) *Phân biệt dương:* Lấy bất kỳ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Do $|x_i|^p \geq 0, \forall i \in [1, n]$ nên

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

Xét

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i|^p = 0, \forall i \in [1, n]$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \in [1, n]$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

(N_2) *Chuẩn vector bội:* Với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Suy ra

$$||\lambda x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| ||x||_p$$

(N_3) *Bất đẳng thức tam giác:*

Với $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Áp dụng bất đẳng thức $Minkowski$ ta được

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay $||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$. ■

Câu 4. Chứng minh rằng:

a) $||.||_\infty$ và $||.||_2$ là hai chuẩn tương đương trên $\mathbb{R}^n$.

b) $||.||_1$ và $||.||_2$ là hai chuẩn tương đương trên $\mathbb{R}^n$.

Trước tiên, ta sẽ chứng minh mệnh đề sau

Mệnh đề

Cho $x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó:*

i) $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$.

ii) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$.

Chứng minh.

i) Với $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$||x||_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$$

Suy ra tồn tại $j \in \overline{1,n}$ sao cho $||x||_\infty = |x_j|$.
Bên cạnh đó, với $j \in \overline{1,n}$, $||x||_\infty = |x_j|$ ta có

$$|x_j| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Rightarrow |x_j|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Rightarrow |x_j| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |x_j| = ||x||_\infty \leq ||x||_2 \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có

$$|x_i| \leq \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| = ||x||_\infty, \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow |x_i|^2 \leq ||x||_\infty^2, \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leq \underbrace{||x||_\infty^2 + ||x||_\infty^2 + \ldots + ||x||_\infty^2}_{n \ times}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq n||x||_\infty^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

Hay $||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$. (2)
Từ $(1), (2)$ ta được $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$.

ii) Với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} 1 \times |x_i|$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta được

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \times |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2 \times \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2 \quad (3)$$

Mặt khác, ta có

$$||x||_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \times \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i \neq j=1}^{n} |x_i||x_j|$$

và

$$||x||_2^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Do đó ta được

$$||x||_1^2 = ||x||_2^2 + \sum_{i \neq j=1}^{n} |x_i||x_j|$$

Suy ra

$$||x||_1^2 \geq ||x||_2^2 \Leftrightarrow ||x||_1 \geq ||x||_2 \qquad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$. ■

Quay trở lại bài toán.

a) Từ *Mệnh đề* trên ta có

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

Mặt khác, với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_\infty \leq ||x||_\infty$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

Chọn $M = \sqrt{n} \geq 1$ ta được điều cần chứng minh.

b) Từ *Mệnh đề* trên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$$

Mặt khác, với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_1$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_1$$

Chọn $M = \sqrt{n} \geq 1$ ta được điều cần chứng minh.

Câu 5. Cho X là tập khác rỗng. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ thỏa

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{nếu } x \neq y, \\ 0, \text{nếu } x = y. \end{cases}$$

Chứng minh (X, d) là không gian metric.

(M_1) Nếu $x \neq y$ thì $d(x,y) = 1 \geq 0$ và nếu $x = y$ thì $d(x,y) = 0 \geq 0$.
Suy ra $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Ta có $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M_2) Ta có

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{nếu } x \neq y, \\ 0, \text{nếu } x = y \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{nếu } y \neq x, \\ 0, \text{nếu } y = x \end{cases} = d(y,x)$$

(M_3) Xét $z \in \mathbb{R}$, ta sẽ chứng minh $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Ta có hai trường hợp sau:

TH1: $x = y$.

a. $x = y = z : d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y) = 0 + 0 = 0$ (đúng).

b. $x = y \neq z : d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + 1 = 2$ (đúng).

TH2: $x \neq y$.

a. $x \neq y = z : d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + 0 = 1$ (đúng).

b. $x \neq y \neq z : d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + 1 = 2$ (đúng).

Vậy (X,d) là không gian metric.

Câu 6. Cho $X = \mathbb{R}$ và $d_i : X \to \mathbb{R}, i = \overline{1,2}$, với

$$d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|},$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} + |x - y|$$

Chứng minh $(X, d_i), i = \overline{1,2}$ là không gian metric.

a. $d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

(M_1) Ta có $|x - y| \geq 0 \Rightarrow d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|} \geq 0$.
Mặt khác, ta có

$$d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x - y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(M_2) Ta có

$$d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d_1(y, x)$$

(M_3) Xét $z \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|+|z-y|} \\ &\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \\ &= d_1(x,z) + d_1(z,y) \end{aligned}$$

Vậy (X, d_1) là không gian metric.

b. $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} + |x-y|$.

(M_1) Ta có $|x-y| \geq 0 \Rightarrow d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} + |x-y| \geq 0$.
Mặt khác, ta có

$$d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-y|} + |x-y| = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(M_2) Ta có

$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} + |x-y| = \sqrt{|y-x|} + |y-x| = d_2(y,x)$$

(M_3) Xét $z \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|} + |x-y| \\ &\leq \sqrt{|x-z|+|z-y|} + |x-z| + |z-y| \\ &\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} + |x-z| + |z-y| \\ &= d_2(x,z) + d_2(z,y) \end{aligned}$$

Vậy (X, d_2) là không gian metric.

Câu 7. Chứng minh rằng: $C[0,1]$ là không gian định chuẩn với chuẩn là

$$\begin{aligned} ||.||_\infty : C[0,1] &\to [0,+\infty] \\ f &\mapsto ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)| \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh các tính chất sau:

(N_1) *Phân biệt dương:* Ta có

$$|f(x)| \geq 0, \forall x \in [0,+\infty] \Rightarrow ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)| \geq 0$$

$$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

(N_2) *Chuẩn vector bội:* Với $f \in C[0,1], \lambda \in [0,+\infty]$, ta có

$$||\lambda f||_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)| = |\lambda| ||f||_\infty$$

(N_3) *Bất đẳng thức tam giác:* Với $f, g \in C[0,1]$, ta có

$$||f+g||_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)+g(x)|$$

Mặt khác, ta có

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|, \forall x \in [0,+\infty]$$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,+\infty]} |g(x)|, \forall x \in [0,+\infty]$$

Tồn tại $x' \in [0, +\infty]$ sao cho

$$|f(x')+g(x')| = \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[0,+\infty]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,+\infty]} |g(x)|$$

hay

$$||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Vậy $||.||_\infty$ là một chuẩn trên $C[0,1]$.

Tính chất của ánh xạ liên tục

Cho (E, δ) là không gian metric, $(F, ||.||)$ là không gian định chuẩn và $f, g : E \to F$. Nếu f, g liên tục tại $u \in E$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

(i) $f \pm g$ liên tục tại u.

(ii) αf liên tục tại u.

Câu 8. Chứng minh tính chất trên.

(i) Ta có f, g liên tục tại $u \in E$ nên theo định nghĩa, ta có

Với mỗi $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, tồn tại $\delta_1, \delta_2 > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in E$, nếu

$$\delta(x, u) < \delta_1, \delta(x', u) < \delta_2 \text{ thì}$$

$$||f(x) - f(u)|| < \varepsilon, ||g(x') - g(u)|| < \varepsilon'.$$

Chọn $x = x', \varepsilon' = \varepsilon, \delta' = \min(\delta_1, \delta_2)$.
Phát biểu lại: Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại δ' sao cho với mọi $x \in E$, nếu $\delta(x, u) < \delta'$ thì $||f(x) - f(u)||, ||g(x) - g(u)|| < \varepsilon$.
Ta cần chứng minh $f + g$ liên tục tại u, hay

Cho trước $\varepsilon'' > 0$, tìm $\delta'' > 0$ sao cho với mỗi $x'' \in E$, nếu $\delta(x, u) < \delta''$ thì $||(f + g)(x'') - (f + g)(u)|| < \varepsilon''$.

Ta có (đặt bất đẳng thức bên dưới là $(*)$):

$$||(f+g)(x'')-(f+g)(u)|| = ||f(x'')+g(x'')-f(u)-g(u)|| \leq ||f(x'')-f(u)||+||g(x'')-g(u)||$$

Chọn $x = x'', \delta'' = \delta', \varepsilon'' = 2\varepsilon$.
Từ $(*)$ ta được

$$||(f+g)(x)-(f+g)(u)|| \leq ||f(x)-f(u)||+||g(x)-g(u)|| < 2\varepsilon = \varepsilon''$$

Vậy $f + g$ liên tục tại u.

(ii) Ta có f liên tục tại $u \in E$ nên theo định nghĩa với $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta' > 0$ sao cho với mọi $x \in E$, nếu $\delta(x, u) < \delta'$ thì $||f(x) - f(u)|| < \varepsilon$.

Ta cần chứng minh αf liên tục tại u, hay

Cho trước $\varepsilon' > 0$, tìm $\delta'' > 0$ sao cho với mọi $x' \in E$, nếu $\delta(x', u) < \delta''$ thì $||(\alpha f)(x) - (\alpha f)(u)|| < \varepsilon'$.

Chọn $x = x', \delta' = \delta'', \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\alpha|}$.

Ta có

$$\begin{aligned} ||(\alpha f)(x) - (\alpha f)(u)|| &= ||\alpha f(x) - \alpha f(u)|| \\ &= |\alpha| \cdot ||f(x) - f(u)|| \\ &< |\alpha| \varepsilon = |\alpha| \frac{\varepsilon'}{|\alpha|} = \varepsilon' \end{aligned}$$

Vậy αf liên tục tại u.

Câu 9. Cho

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = \frac{nx}{n+1} \end{aligned}$$

Kiểm tra $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ đều trên $[0,1]$ không?

Lấy $x \in \mathbb{R}$, xét

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+1} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = x$$

Vậy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$.

Ta sẽ chứng minh $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[0,1]$, hay ta chứng minh

$$\lim_{n\to\infty}\delta(f_n,f)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{n+1}-x\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{-x}{n+1}\right|=0$$

Đặt $g(x)=\left|\dfrac{-x}{n+1}\right|$, suy ra

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{-x}{n+1}\right)'\left(\frac{-x}{n+1}\right)}{\left|-\frac{x}{n+1}\right|}=\frac{1}{n+1},\quad \text{do } x\in(0,1]$$

Từ đó, ta có $g(x)>0$ khi $x\in(0,1]$ và $g(x)=0$ khi $x=0$ hay $g(x)\geq 0, x\in[0,1]$. Do đó $g(x)$ là hàm đồng biến trên đoạn $[0,1]$.

Xét

$$\lim_{n\to\infty} \delta(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{-x}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-1}{n+1}\right| = 0$$

Vậy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.