Trường: Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TPHCM.
Lớp: 22TTH1TN.
MSSV: 22110245.
Học và tên: Lê Phú Trường.

Bài tập 0.1. Xét nhóm hoán vị S_n và σ là một m-chu trình. Chứng minh rằng $l \in \mathbb{N}, \sigma^l$ là m-chu trình khi và chỉ khi $(m, l) = 1$.

Chứng minh. Ta xét một ví dụ đơn giản như sau $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Rõ ràng ta có được $\sigma^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$ bao gồm hai chu trình có độ dài bằng 3 tách biệt, $\sigma^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$ bao gồm ba chu trình có độ dài bằng 2 tách biệt,...
Nói một cách tổng quát hơn, ta giả sử $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ m)$. Ta có σ^l là phép ánh xạ chuyển đổi mỗi số k thành $k+l$ cho mọi giá trị k, từ đây ta được ánh xạ chuyển đổi $k+l$ thành $k+2l$, chuyển đổi $k+2l$ thành $k+3l$ và cứ tiếp tục. Như vậy $\sigma^l : k \to k+l \to k+2l \ldots k+(m-1)l \to k$.
Các phần tử này riêng biệt (hay nói cụ thể hơn σ^l là một m-chu trình) khi và chỉ khi $k+lx$ và $k+ly$ là phân biệt với x và y phân biệt, hay nói cách khác $k+lx \not\equiv k+ly, \forall x \neq y \in 0, 1, \ldots, m-1$ hay khi và chỉ khi $l(x-y) \not\equiv 0 \pmod{m}$.
Ta giả sử l và m không đôi một nguyên tố cùng nhau, tức là $(l, m) \neq 1$, khi đó $\exists k > 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) là ước chung của l và m. Hay ta có thể viết lại dưới dạng $l = kq$ và $m = kp$, với $p < m, q < l$ là hai số nguyên khác 0.
Khi đó, do $q < l \leq m$ nên $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ sao cho $m = q\gamma$. Ta có $l(x-y) \equiv kq(x-y) \equiv kq\gamma(x-y) \equiv m\gamma(x-y) \equiv mp(x-y) \equiv kp(x-y) \equiv 0 \pmod{kp}$, do $q, x, y, m, l \in \mathbb{N}$. Điều này cho thấy $i(x-y)$ chia hết cho m, mà điều đó không tương đương với $i(x-y) \not\equiv 0 \pmod{m}$, suy ra vô lý.
Vậy với $l \in \mathbb{N}, \sigma^l$ là k-chu trình khi và chỉ khi $(m, l) = 1$, ta được điều cần chứng minh. $\square$

Trường: Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TPHCM.
Lớp: 22TTH1TN.
MSSV: 22110245.
Học và tên: Lê Phú Trường.

Bài tập 2.6. Cho R là một vành có tính chất sau:

$$x^3 = x \text{ với mọi } x \in R$$

Chứng minh rằng R là một vành giao hoán.

Chứng minh. Từ giả thuyết ta có $x^3 = x \Rightarrow x^4 = x^2, \forall x \in R$. Đặt $t = x^2, t^2 = x^4$ hay $t = t^2$.
Với mọi $a \in R$ ta xét

$$(at - tat)^2 = atat - attat - tatat + tattat = atat - atat - tatat + tatat = 0$$

Suy ra

$$(at - tat)(at - tat)^2 = (at - tat)^3 = 0$$

hay $at = tat$.
Xét

$$(ta - tat)^2 = tata - tatat - tatta + tattat = tata - tatat - tata + tatat = 0$$

Suy ra

$$(ta - tat)(ta - tat)^2 = (ta - tat)^3 = 0$$

hay $ta = tat$.
Từ đó ta được $at = ta = tat$.
Xét $ax = (ax)^3 = axaxax = axxaax = a(xa)^2x = ax(xa)^2 = xa^2xax = a^2x^2ax = x^2a^3x = x^3a^3 = (xa)^3 = xa, \forall x, a \in R$.
Vậy R là vành giao hoán. $\square$