Báo cáo lý thuyết và thực hành
Giải tích số

Lê Phú Trường

Mã số sinh viên: 22110245
Email: 22110245@student.hcmus.edu.vn

Khoa Toán - Tin học
Trường Đại học Khoa học tự nhiên
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Tóm tắt nội dung

Trong bài báo cáo của môn học Giải tích số, tôi sẽ trình bày những khái niệm về phương pháp số để giải quyết các bài toán xấp xỉ hàm số, đạo hàm, tích phân và đánh giá sai số do giảng viên Ông Thanh Hải yêu cầu. Về phần thực hành, tôi sẽ sử dụng ngôn ngữ lập trình Python để giải quyết bài toán được giao. Ngoài ra, để tiện theo dõi phần thực hành lập trình, thầy/cô có thể xem thông qua link dẫn sau Numerical Analysis hoặc có thể xem trực tiếp trong phần báo cáo này.

1 Các khái niệm cơ bản

Những tài liệu tôi đã tham khảo trong chương này là [TH24], [Fer95], [Vig21] và [Wik24a].

Yêu cầu 1.1. Phát biểu định lý khai triển Taylor theo công thức Lagrange.

Định lí 1.1 (**Định lý khai triển Taylor theo công thức Lagrange**). *Giả sử $f \in C^n[a, b]$ và tồn tại $f^{(n+1)}$ trên (a, b) thì cho bất kỳ điểm x và c trong $[a, b]$, tồn tại một điểm ξ phụ thuộc vào x và nằm giữa x và c thỏa*

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

với

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

được gọi là đa thức Taylor bậc n của f có tâm tại c, và

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

được gọi là sai số chặt cụt (truncation error) liên quan đến $P_n(x)$. □

Yêu cầu 1.2. Trình bày định nghĩa và tính chất Big notation và Little notation.

Định nghĩa 1.1 (**Big-$\mathcal{O}$ notation**). *Một hàm $f(x)$ được gọi là "Big-$\mathcal{O}$" của $g(x)$ khi $x \to a$, được viết là $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ khi $x \to a$ nếu và chỉ nếu tồn tại hằng số $c > 0$ và $\delta > 0$ thỏa*

$$|f(x)| \leq c \times |g(x)|$$

sao cho x thỏa $|x - a| < \delta$. □

Tính chất 1.1 (**Big-$\mathcal{O}$ notation**). *Ta có một số tính chất của Big-$\mathcal{O}$ notation như sau:*

1) *Khi d là hằng số, ta có $d\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$ khi $x \to a$.*

2) $\mathcal{O}(g_1(x)) + \mathcal{O}(g_2(x)) = \mathcal{O}(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$.

3) $g_1(x)\mathcal{O}(g_2(x)) = \mathcal{O}(g_1(x)\dot{g}_2(x))$.

4) $\mathcal{O}(g_1(x))\mathcal{O}(g_2(x)) = \mathcal{O}(g_1(x)g_2(x))$. □

Định nghĩa 1.2 (**Little-o notation**). *Ta viết $f(x) = o(g(x))$, khi $x \to a$ nếu và chỉ nếu $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.* □

Tính chất 1.2 (**Little-o notation**). *Ta có một số tính chất của Little-o notation, xét $m < n$:*

1) $x^m = o(x^n)$, *khi* $x \to \infty$.

2) $x^n = o(x^m)$, *khi* $x \to 0$. □

Yêu cầu 1.3. Trình bày định nghĩa sai số tương đối, sai số tuyệt đối. Cho 2 ví dụ và tính sai số tương đối, sai số tuyệt đối, sai số chặt cụt (ví dụ khác bài giảng). Cho ví dụ tính toán số giải thích sự khác nhau giữa sai số tương đối và sai số tuyệt đối.

Định nghĩa 1.3. *Đặt $f_{e\ (or\ extract)}$ là giá trị chính xác và $f_{e\ (or\ approximation)}$ là giá trị xấp xỉ. Ta định nghĩa:*

- *Sai số tuyệt đối (absolute error)* $= \|f_e - f_a\|$.
- *Sai số tương đối (relative error)* $= \dfrac{\|f_e - f_a\|}{\|f_e\|}$. □

Ví dụ 1.1. Cho $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149, x \in [4, 5]$. Tính sai số tương đối, sai số tuyệt đối và sai số chặt cụt tại $x = 4.71$.

Bài làm. Ta có giá trị chính xác của hàm là: $f_e = f(4.71) = -14.636489$.

Giả sử giá trị xấp xỉ của hàm được lấy từ việc làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2 của f_e, tức là $f_a = -14.64$.

Ta thực hiện tính các loại sai số như sau (sử dụng chuẩn 1):

- Sai số tuyệt đối $= |f_e - f_a| = |-14.636489 - (-14.64)| = 3.511 \times 10^{-3}$.
- Sai số tương đối $= \dfrac{|f_e - f_a|}{|f_e|} = \dfrac{|-14.636489 - (-14.64)|}{|-14.636489|} = 2.39879933 \times 10^{-4}$.
- Sai số chặt cụt $|E_n(x = 4.71)| = |f(x = 4.71) - P_n(x = 4.71)|$, trong đó $f(x = 4.71)$ là giá trị chính xác và $P_n(x = 4.71)$ là giá trị xấp xỉ.

  Ta sẽ tính đạo hàm của hàm f cho tới khi đạt giá trị 0, với mọi $x \in [4, 5]$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149 \\
f'(x) &= 3x^2 - 12x + 3 \\
f''(x) &= 6x - 12 \\
f^{(3)}(x) &= 6 \\
f^{(4)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Vậy ta sẽ xét giá trị $n = 4$. Chọn $c = 4.7$ và $x = 4.71, (c, x) \subset [4, 5]$, ta được:

$$\begin{aligned}
P_n(x = 4.5) &= \sum_{k=0}^{n=4} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c = 4.7)(4.71 - 4.7)^k \\
&= f(4.7) + 0.01 f'(4.7) + 0.01^2 f''(4.7) + 0.01^3 f^{(3)}(4.7) \\
&= -14.766 + 0.01 \times 12.87 + 0.01^2 \times 16.2 + 0.01^3 \times 6 \\
&= -14.635674
\end{aligned}$$

Suy ra sai số chặt cụt:

$$|E_4(x = 4.71)| = |f(x = 4.71) - P_4(x = 4.71)| = |-14.636489 - (-14.635674)| = 8.15^{-4}$$

Ví dụ 1.2. Cho $f(x) = e^x,\ x \in [0, 1]$. Tính sai số tương đối, sai số tuyệt đối và tìm n sao cho sai số chặt cụt không quá 10^{-8} tại $x = 0.5$.

Bài làm. Ta có giá trị chính xác của hàm là: $f_e = f(0.5) = 1.648721271$.

Giả sử giá trị xấp xỉ của hàm được lấy từ việc làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2 của f_e, tức là $f_a = 1.65$.

Ta thực hiện tính các loại sai số như sau (sử dụng chuẩn 1):

- Sai số tuyệt đối $= |f_e - f_a| = |1.648721271 - 1.65| = 1.2787293 \times 10^{-3}$.
- Sai số tương đối $= \dfrac{|f_e - f_a|}{|f_e|} = \dfrac{|1.648721271 - 1.65|}{|1.648721271|} = 7.755885257 \times 10^{-4}$.
- Sai số chặt cụt $|E_n(x = 0.5)| = |f(x = 0.5) - P_n(x = 0.5)|$, trong đó $f(x = 0.5)$ là giá trị chính xác và $P_n(x = 0.5)$ là giá trị xấp xỉ.

Do ta phải đi tìm n sao cho $|E_n|$ không quá 10^{-8} nên ta sẽ chưa quan tâm đến việc đi tính trực tiếp P_n, vì giá trị P_n không phụ thuộc trực tiếp vào n.

Ta có tính đạo hàm của hàm f tại lần đạo hàm thứ $k \in \mathbb{Z}^+$ luôn bằng e^x, với mọi $x \in [0, 1]$. Nói cách khác, $f^{(k)}(x) = e^x$.

Chọn $c = 0.4$ và $x = 0.5$, với $\xi \in (c, x)$ ta được:

$$\begin{aligned}
E_n(x = 0.5) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(0.5 - 0.4)^{(n+1)} \\
&= \frac{0.1^{n+1} e^{\xi}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Do $\xi \in (c = 0.4, x = 0.5)$ nên suy ra:

$$|E_n(x)| < \frac{0.1^{n+1} e^{0.5}}{(n+1)!}$$

Để sai số chặt cụt không quá 10^{-8} thì

$$|E_n(x)| < \frac{0.1^{n+1}e^{0.5}}{(n+1)!} \leq 10^{-8}$$

Suy ra $n = 5$, khi đó với $c = 0.4$ và $x = 0.5$ ta tính được P_n như sau:

$$\begin{aligned} P_5(x = 0.5) &= \sum_{k=0}^{n=5} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0.4)(0.5 - 0.4)^k \\ &= \sum_{k=0}^{5} \frac{0.1^k}{k!} e^{0.4} = 1.648721269 \end{aligned}$$

Suy ra sai số chặt cụt:

$$|E_5(x = 0.5)| = |f(x = 0.5) - P_5(x = 0.5)| = |1.648721271 - 1.648721269| = 2.40186 \times 10^{-9}$$

Ví dụ 1.3. Sự khác nhau giữa absolute error và relative error.

Bài làm. 1. Hộ gia đình A một ngày sản xuất được 100 cái áo, bị lỗi 3 cái. Khi đó $f_e^A = 100$ và $f_a^A = 97$. Ta tính được:

- Sai số tuyệt đối (A) $= |f_e^A - f_a^A| = 3$.
- Sai số tương đối (A) $= \dfrac{|f_e^A - f_a^A|}{|f_e^A|} = 0.03$.

2. Một công ty B sản xuất một ngày 10^6 cái áo, lỗi 3 cái. Khi đó $f_e^B = 10^6$ và $f_a^B = 999997$. Ta tính được:

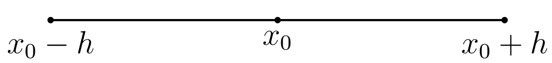
- Sai số tuyệt đối (B) $= |f_e^B - f_a^B| = 3$.
- Sai số tương đối (B) $= \dfrac{|f_e^B - f_a^B|}{|f_e^B|} = 3^{-6}$.

Suy ra

$$\begin{cases} \text{Sai số tương đối (B)} \ll \text{Sai số tương đối (A)}, \\ \text{Sai số tuyệt đối (A)} = \text{Sai số tuyệt đối (B)}. \end{cases}$$

Yêu cầu 1.4. Trình bày cách xây dựng bậc hội tụ trong trường hợp biết nghiệm chính xác, và trường hợp chưa biết nghiệm chính xác. Cho 2 ví dụ tính toán số trình bày cách tính toán bậc hội tụ trong 2 trường hợp này.

Bài tập 1.1 (Xây dựng bậc hội tụ). Xét $n = 2$ và $0 < h < 1$, ta sẽ tìm giá trị xấp xỉ của $u'(x_0)$.



Xét khai triển Taylor theo công thức Lagrange của hàm $f(x) = u(x) \in C^2[x_0 - h, x_0 + h]$:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2!}u''(x_0) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(\xi_{x_0})$$

với $\xi_{x_0} \in (x_0, x_0 + h)$. Suy ra:

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} - h\frac{u''(x_0)}{2} - h^2\frac{u^{(3)}(\xi_{x_0})}{3!} \tag{BT1.1-1}$$

Từ đây ta có $f_e = u'(x_0)$ và $f_a = \dfrac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$. Sai số tuyệt đối:

$$|f_e - f_a| = \left| h\frac{u''(x_0)}{2} + h^2\frac{u^{(3)}(\xi_{x_0})}{3!} \right| \leq h\frac{|u''(x_0)|}{2} + h^2\frac{|u^{(3)}(\xi_{x_0})|}{3!} \tag{BT1.1-2}$$

với $u'', u^{(3)} \in C[a, b]$.

Đặt $c \geq 2\max\left\{\dfrac{|u''(x_0)|}{2}; \dfrac{|u^{(3)}(\xi_{x_0})|}{3!}\right\}$. Tồn tại c bởi vì tồn tại $\|u''\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u''(x)|$, $\|u^{(3)}\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u^{(3)}(x)|$.

Từ (BT1.1-2) suy ra:

$$|f_e - f_a| \leq h\frac{c}{2} + h^2\frac{c}{2} \leq h\frac{c}{2} \leq ch, \forall h \in (0, 1)$$

Để đánh giá sự hội tụ của một phương pháp số, chúng ta cần chỉ ra rằng tồn tại $c > 0$, $\|f_e - f_a\| \leq ch^\alpha$, với α là bậc hội tụ và α là hằng số dương.

Từ (BT1.1-1) ta được:

$$f_a - f_e = Dh + \mathcal{O}(h^2)$$

với $f_e = u'(x_0), D = \dfrac{u''(x_0)}{2!}, \mathcal{O}(h^2) = h^2\dfrac{u^{(3)}(x_0)}{3!}$.

Từ đây ta được:

$$\boxed{f_h - f_e = Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1})}$$

với f_h là giá trị xấp xỉ, h là độ dài đoạn chúng ta xét.

Ta sẽ tính bậc hội tụ α với 2 trường hợp:

TH1: Chúng ta có giá trị chính xác f_e, xét:

$$\begin{aligned} f_h - f_e &= Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1}) \\ \Rightarrow \log|f_h - f_e| &= \log|Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1})| \end{aligned}$$

Do D là hằng số và *Tính chất 1.1.3* nên ta suy ra:

$$\begin{aligned} \log|Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1})| &= \log|Dh^\alpha(1 + \mathcal{O}(h))| \text{ (với } Dh^\alpha\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(h^{\alpha+1})) \\ &= \log|Dh^\alpha| + \log(1 + \mathcal{O}(h)) \\ &= \log|D| + \alpha\log(h) + \log(1 + \mathcal{O}(h)) \end{aligned}$$

Vậy ta tính được:

$$\begin{aligned} \log|f_h - f_e| &= \log(D) + \alpha\log(h) + \log(1 + \mathcal{O}(h)) \text{ (khi } h \to 0) \\ &= \log(D) + \alpha\log(h) + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

Chứng minh $\log(1+\mathcal{O}(h)) = \mathcal{O}(h)$ *khi* $h \to 0$.

Đặt $f(h) = \mathcal{O}(h)$, ta có $\exists c, \delta > 0 : |f(h)| \le c|h|, |h| < \delta$.

Ta cần chứng minh $\log(1+f(h)) = \mathcal{O}(h)$ khi $h \to 0$, hay cần tìm $c' > 0$ và δ' sao cho

$$\begin{aligned}
&|\log(1+f(h))| \le c'|h|, \text{ khi } |h| < \delta' \\
&\Leftrightarrow |f(h)+1| \le 10^{c'|h|}, \text{ khi } |h| < \delta' \\
&\qquad \le |f(h)| + 1 \le c|h| + 1 \le 10^{c|h|}, \text{ khi } |h| < \delta'
\end{aligned}$$

Chọn $c' = c, \delta' = \delta$. □

Ta có $|f_h - f_e| > \left|f_{\frac{h}{2}} - f_e\right|$ và:

$$\begin{aligned}
\frac{f_h - f_e}{f_{\frac{h}{2}} - f_e} &= \frac{Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1})}{D(\frac{h}{2})^\alpha + \mathcal{O}((\frac{h}{2})^{\alpha+1})} = \frac{h^\alpha(D + \mathcal{O}(h))}{h^\alpha(D2^{-\alpha} + \mathcal{O}(h))} \\
&= \frac{2^\alpha(D + 2^\alpha\mathcal{O}(h) - 2^\alpha\mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h))}{D + 2^\alpha\mathcal{O}(h)} \\
&= 2^\alpha + \frac{\mathcal{O}(h)(1-2^\alpha)}{D + 2^\alpha\mathcal{O}(h)} = 2^\alpha + \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

Lấy log hai vế phương trình trên, ta được:

$$\boxed{\log_2\left|\frac{f_h - f_e}{f_{\frac{h}{2}} - f_e}\right| = \alpha + \log_2(\mathcal{O}(h))}$$

Chứng minh $\mathcal{O}(h) \to 0$ *khi* $h \to 0$ *và* $\dfrac{\mathcal{O}(h)(1-2^\alpha)}{D + 2^\alpha\mathcal{O}(h)} = \mathcal{O}(h)$ *khi* $h \to 0$.

1. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{O}(h) \to 0$ khi $h \to 0$ trước. Cho bất kỳ $\varepsilon > 0$, tìm $\delta_\varepsilon > 0$ sao cho nếu $|h| < \delta_\varepsilon$ thì $|\mathcal{O}(h)| < \varepsilon$.
   Đặt $f(h) = \mathcal{O}(h)$, khi đó $\exists c > 0$ và $\delta' > 0$ sao cho $|h| < \delta', |f(h)| < ch$. Ta có $|f(x)| < ch < c\delta_\varepsilon$. Chọn $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{c}$.
2. Do ta được $\mathcal{O}(h) \to 0$ khi $h \to 0$ (chứng minh trên) nên $\dfrac{1-2^\alpha}{D + 2^\alpha\mathcal{O}(h)}$ bị chặn và:

$$\frac{1-2^\alpha}{D + 2^\alpha\mathcal{O}(h)} \to \frac{1-2^\alpha}{D}, \text{khi } h \to 0$$

   Suy ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{O}(h)(1-2^\alpha)}{D + 2^\alpha\mathcal{O}(h)} = \lim_{h\to 0} \mathcal{O}(h) = 0$$

□

TH2: Không biết nghiệm chính xác f_e, xét

$$\begin{aligned}
f_h - f_e &= Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1}) \\
f_{\frac{h}{2}} - f_e &= D\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha+1}\right) \\
f_{\frac{h}{4}} - f_e &= D\left(\frac{h}{4}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{4}\right)^{\alpha+1}\right)
\end{aligned}$$

Ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{f_h - f_{\frac{h}{2}}}{f_{\frac{h}{2}} - f_{\frac{h}{4}}} &= \frac{f_h - f_e + f_e - f_{\frac{h}{2}}}{f_{\frac{h}{2}} - f_e + f_e - f_{\frac{h}{4}}} \\
&= \frac{Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1}) - D\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha+1}\right)}{D\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha+1}\right) - D\left(\frac{h}{4}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{4}\right)^{\alpha+1}\right)} \\
&= \frac{Dh^\alpha - 2^{-\alpha}Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1})}{Dh^\alpha 2^{-\alpha} - 4^{-\alpha}Dh^\alpha + \mathcal{O}(h^{\alpha+1})} \\
&= \frac{Dh^\alpha[(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)]}{Dh^\alpha 2^{-\alpha}[(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)]} \\
&= \frac{2^\alpha[(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)]}{(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)} \\
\Rightarrow \log_2\left|\frac{f_h - f_{\frac{h}{2}}}{f_{\frac{h}{2}} - f_{\frac{h}{4}}}\right| &= \log_2(2^\alpha) + \log_2\left[\frac{[(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)]}{(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)}\right]
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\boxed{log_2\left|\frac{f_h - f_{\frac{h}{2}}}{f_{\frac{h}{2}} - f_{\frac{h}{4}}}\right| = \alpha + \mathcal{O}(h)}$$

với $\log_2\left[\frac{[(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)]}{(1-2^{-\alpha}) + \mathcal{O}(h)}\right] = \mathcal{O}(h)$ đã được giảng viên giải thích trong giờ học.

Mở rộng: Tôi sẽ xây dựng bậc hội tụ của sai số tuyệt đối và sai số tương đối.

1. *Sai số tuyệt đối.* Với $h_i = \frac{1}{n_i}$, n_i là số đoạn chia trên đoạn đang xét. Ta xét:

$$\begin{aligned}
f_{h_i} - f_e &= Dh^\alpha + \mathcal{O}({h_i}^{\alpha+1}) \\
\Rightarrow \log|f_{h_i} - f_e| &= \log|D{h_i}^\alpha + \mathcal{O}({h_i}^{\alpha+1})| \\
&= \log|Dh_i^\alpha(1 + \mathcal{O}(h_i^{\alpha+1}))| \\
&= \log|Dh_i^\alpha| + \log|1 + \mathcal{O}(h_i^{\alpha+1})| \\
&= \log|D| + \alpha\log|h_i| + \mathcal{O}(h_i^{\alpha+1}) \qquad \text{(BT1.1-3)}
\end{aligned}$$

Tương tự, ta tính được:

$$\begin{aligned}
f_{h_{i+1}} - f_e &= Dh_{i+1}^\alpha + \mathcal{O}(h_{i+1}^{\alpha+1}) \\
\Rightarrow \log|f_{h_{i+1}} - f_e| &= \log|D| + \alpha\log|h_{i+1}| + \mathcal{O}(h_{i+1}^{\alpha+1}) \qquad \text{(BT1.1-4)}
\end{aligned}$$

Lấy (BT1.1-3) − (BT1.1-4), ta được:

$$\begin{aligned}
\log|f_{h_{i+1}} - f_e| - \log|f_{h_i} - f_e| &= \alpha(\log|h_{i+1}| - \log|h_i|) + \mathcal{O}(h_i^{\alpha+1}) + \mathcal{O}(h_{i+1}^{\alpha+1}) \\
&\approx -\alpha(\log|h_i| - \log|h_{i+1}|) \\
&= -\alpha(\log n_{i+1} - \log n_i) \qquad (\text{do } h_i = \frac{1}{n_i})
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\boxed{\alpha = -\frac{\log|f_{h_{i+1}} - f_e| - \log|f_{h_i} - f_e|}{\log n_{i+1} - \log n_i} = -\frac{\log\left(\dfrac{|f_{h_{i+1}} - f_e|}{|f_{h_i} - f_e|}\right)}{\log\left(\dfrac{n_{i+1}}{n_i}\right)}}$$

2. *Sai số tương đối.* Tương tự với *Sai số tuyệt đối*, ta tính được:

$$\begin{aligned}
\log|f_{h_{i+1}} - f_e| - \log|f_{h_i} - f_e| &= -\alpha(\log n_{i+1} - \log n_i)\\
\Leftrightarrow \log|f_{h_{i+1}} - f_e| - \log|f_e| - \log|f_{h_i} - f_e| + \log|f_e| &= -\alpha(\log n_{i+1} - \log n_i)\\
\Leftrightarrow \log\left(\frac{|f_{h_{i+1}} - f_e|}{|f_e|}\right) - \log\left(\frac{|f_{h_i} - f_e|}{|f_e|}\right) &= -\alpha(\log n_{i+1} - \log n_i)\\
\Leftrightarrow \log\left(\frac{|f_{h_{i+1}} - f_e|}{|f_e|} : \frac{|f_{h_i} - f_e|}{|f_e|}\right) &= -\alpha(\log n_{i+1} - \log n_i)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{\log\left(\dfrac{|f_{h_{i+1}} - f_e|}{|f_{h_i} - f_e|}\right)}{\log\left(\dfrac{n_{i+1}}{n_i}\right)}$$

Vậy bậc hội tụ cho sai số tương đối cũng bằng với bậc hội tụ của sai số tuyệt đối.

Ví dụ 1.4. Cho $f(x) = \sin(x)$, tìm $f'(\frac{\pi}{2})$.

Bài làm. Ta có $f'(x) = \cos(x)$, xét:

TH1: Xác định giá trị chính xác $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$. Ta có:

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + hf'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{h^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi), \xi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + h\right)$$
$$\Rightarrow \underbrace{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{F\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \underbrace{\frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}}_{F_h\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{h}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi), \xi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + h\right)$$

Ta tính xấp xỉ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng công thức:

$$F_h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$
$$\underbrace{F_h\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Giá trị xấp xỉ}} - \underbrace{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Giá trị chính xác}} = Dh + \mathcal{O}(h^2)$$

với $D = \dfrac{1}{2}f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right); \mathcal{O}(h^2) = \dfrac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi)$. Chọn $h = 0.1$, ta được:

$$F_h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0.1} = -0.04995834$$
$$F_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + 0.05\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0.05} = -0.02499479$$

Vậy bậc hội tụ trong trường hợp biết chính xác giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ là:

$$\log_2\left|\frac{F_h - F}{F_{\frac{h}{2}} - F}\right| = 0.99909813$$

TH2: Không có giá trị chính xác f_e, ta sẽ tính toán thêm $F_{\frac{h}{4}}$:

$$F_{\frac{h}{4}} = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+0.025\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0.025} = -0.01249934$$

Vậy bậc hội tụ trong trường hợp này là:

$$\log_2\left|\frac{F_h - F_{\frac{h}{2}}}{F_{\frac{h}{2}} - F_{\frac{h}{4}}}\right| = 0.99842025$$

Ví dụ 1.5. Cho $f(x) = e^x$, tìm $f'(2)$.

Bài làm. Ta có $f'(x) = e^x$, xét:

TH1: Xác định giá trị chính xác $f'(2) = 7.389056099$. Ta có:

$$\begin{aligned} f\left(2+h\right) &= f\left(2\right) + hf'\left(2\right) + \frac{h^2}{2!}f''\left(2\right) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}\left(\xi\right), \xi \in (2; 2+h) \\ \Rightarrow \underbrace{f'\left(2\right)}_{F(2)} &= \underbrace{\frac{f\left(2+h\right) - f\left(2\right)}{h}}_{F_h(2)} - \frac{h}{2}f''\left(2\right) - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi), \xi \in (2; 2+h) \end{aligned}$$

Ta tính xấp xỉ $F(2) = f'(2)$ bằng công thức:

$$\begin{aligned} F_h\left(2\right) &= \frac{f\left(2+h\right) - f\left(2\right)}{h} \\ \underbrace{F_h\left(2\right)}_{\text{Giá trị xấp xỉ}} - \underbrace{F\left(2\right)}_{\text{Giá trị chính xác}} &= Dh + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

với $D = \frac{1}{2}f''\left(2\right); \mathcal{O}(h^2) = \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi)$. Chọn $h = 0.1$, ta được:

$$\begin{aligned} F_h\left(2\right) &= \frac{f\left(2+0.1\right) - f\left(2\right)}{0.1} = 7.771138136 \\ F_{\frac{h}{2}}\left(2\right) &= \frac{f\left(2+0.05\right) - f\left(2\right)}{0.05} = 7.576900148 \end{aligned}$$

Vậy bậc hội tụ trong trường hợp biết chính xác giá trị $F\left(2\right) = f'\left(2\right)$ là:

$$\log_2\left|\frac{F_h - F}{F_{\frac{h}{2}} - F}\right| = 1.024347022$$

TH2: Không có giá trị chính xác f_e, ta sẽ tính toán thêm $F_{\frac{h}{4}}$:

$$F_{\frac{h}{4}} = \frac{f\left(2+0.025\right)-f\left(2\right)}{0.025} = 7.482193828$$

Vậy bậc hội tụ trong trường hợp này là:

$$\log_2\left|\frac{F_h - F_{\frac{h}{2}}}{F_{\frac{h}{2}} - F_{\frac{h}{4}}}\right| = 1.036292774$$

Yêu cầu 1.5. Tìm đa thức Taylor bậc 3 $P_3(x)$ của các hàm số dưới đây tại $x_0 = 0$, sau đó sử dụng công thức sai số trong Định lý Taylor để tìm chặn trên của sai số.

a) $f(x) = e^{-x}, x \in [0, 1]$.

b) $f(x) = \sin(x), x \in [0, \pi]$.

c) $f(x) = \ln(x + 1), x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Bài làm.

a) Xét đa thức Taylor bậc 3 $P_3(x)$ của hàm số $f(x) = e^{-x}, x \in [0, 1]$ tại $x_0 = 0$ và $n = 3$:

$$\begin{aligned}P_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\end{aligned}$$

Xét sai số chặt cụt $|E_n(x)|$ của hàm số $f(x) = e^{-x}, x \in [0, 1]$ tại $x_0 = 0$ và $n = 3$:

$$\begin{aligned}|E_3(x)| &= \left|\frac{1}{(3+1)!} f^{(3+1)}(\xi)(x - x_0)^{3+1}\right| \\ &= \left|\frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi)\right|\end{aligned}$$

với $\xi \in (0, x)$. Do $f^{(4)}(\xi) = e^{-\xi} > 0, \forall \xi \in (0, x)$ và $f^{(4)}$ là hàm giảm (nghĩa là cho bất kỳ $\xi_1, \xi_2 \in (0, x)$ sao cho $\xi_1 < \xi_2$ thì $f^{(4)}(\xi_1) > f^{(4)}(\xi_2)$) nên:

$$\begin{aligned}&f^{(4)}(\xi) = e^{-\xi} < e^0 = 1 \text{ và } \frac{x^4}{4!} \le \frac{1}{4!}, x \in [0, 1] \\ \Rightarrow |E_3(x)| &= \left|\frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi) < \frac{1}{4!}, x \in [0, 1], \xi \in (0, x)\end{aligned}$$

Vậy chặn trên của sai số chặt cụt $|E_3(x)|$ là $\dfrac{1}{4!}$.

b) Xét đa thức Taylor bậc 3 $P_3(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(x), x \in [0, \pi]$ tại $x_0 = 0$ và $n = 3$:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} \\ &= \sin(0) + x\cos(0) - \frac{x^2\sin(0)}{2!} - \frac{x^3\cos(0)}{3!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

Xét sai số chặt cụt $|E_n(x)|$ của hàm số $f(x) = \sin(x), x \in [0, \pi]$ tại $x_0 = 0$ và $n = 3$:

$$\begin{aligned} |E_3(x)| &= \left| \frac{1}{(3+1)!} f^{(3+1)}(\xi)(x - x_0)^{3+1} \right| \\ &= \left| \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \right| \end{aligned}$$

với $\xi \in (0, x)$. Do $f^{(4)}(\xi) = \sin(\xi) \in [-1, 1], \forall \xi \in (0, x)$ nên:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(\xi) = \sin(\xi) \leq 1 \text{ và } \frac{x^4}{4!} \leq \frac{\pi^4}{4!}, x \in [0, \pi] \\ \Rightarrow |E_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \right| < \frac{\pi^4}{4!}, x \in [0, \pi], \xi \in (0, x) \end{aligned}$$

Vậy chặn trên của sai số chặt cụt $|E_3(x)|$ là $\frac{\pi^4}{4!}$.

c) Xét đa thức Taylor bậc 3 $P_3(x)$ của hàm số $f(x) = \ln(x + 1), x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ tại $x_0 = 0$ và $n = 3$:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} \\ &= 0 + \frac{x}{0+1} - \frac{x^2}{2!(0+1)^2} + \frac{2x^3(0+1)}{3!(0+1)^3} \\ &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Xét sai số chặt cụt $|E_n(x)|$ của hàm số $f(x) = \ln(x + 1), x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ và $n = 3$:

$$\begin{aligned} |E_3(x)| &= \left| \frac{1}{(3+1)!} f^{(3+1)}(\xi)(x - x_0)^{3+1} \right| \\ &= \left| \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \right| \end{aligned}$$

với $\xi \in (0, x)$. Do $f^{(4)}(\xi) = -\dfrac{6}{(\xi+1)^4}$ nên:

$$|f^{(4)}(\xi)| = \left|-\frac{6}{(\xi+1)^4}\right| = \frac{6}{(\xi+1)^4} < \frac{6}{(0+1)^4}, \xi \in (0,x) \text{ và } \frac{x^4}{4!} \le \frac{0.5^4}{4!}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$
$$\Rightarrow |E_3(x)| = \left|\frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi)\right| < \frac{6}{(0+1)^4}\frac{0.5^4}{4!} = \frac{1}{64}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \xi \in (0,x)$$

Vậy chặn trên của sai số chặt cụt $|E_3(x)|$ là $\dfrac{1}{64}$.

Yêu cầu 1.6. Xây dựng đa thức Taylor tại $x_0 = 0$ để xấp xỉ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ đến độ chính xác 10^{-3}, với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Bài làm. Do E_n phụ thuộc trực tiếp vào n nên ta sẽ đi tìm n sao cho $|E_n|$ không quá 10^{-3}.

Trước tiên, ta sẽ xác định dạng đạo hàm của hàm f tại lần đạo hàm thứ $k \in \mathbb{Z}^+$, với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ như sau:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x+1} \\
f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \\
f^{(3)}(x) &= -\frac{6}{(x+1)^4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(x+1)^5} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

Chọn $c = -0.1$ và $x = x_0 = 0$, với $\xi \in (c, x)$ ta được:

$$\begin{aligned}
E_n(x=0) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(0-(-0.1))^{(n+1)} \\
&= \frac{(-1 \times 0.1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{(\xi+1)^{n+2}} = \frac{(-0.1)^{n+1}}{(\xi+1)^{n+2}}
\end{aligned}$$

Do $\xi \in (c = -0.1, x = 0)$, ta có:

$$\begin{aligned}
& -0.1 < \xi < 0 \\
& \Leftrightarrow 0.9 < \xi + 1 < 1 && \text{(cộng thêm 1)} \\
& \Leftrightarrow 0.9^{n+2} < (\xi+1)^{n+2} < 1 && \text{(lấy mũ } n+2\text{)} \\
& \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{(\xi+1)^{n+2}} < \frac{1}{0.9^{n+2}} && \text{(nghịch đảo)} \\
& \Leftrightarrow 0.1^{n+1} < \frac{0.1^{n+1}}{(\xi+1)^{n+2}} < \frac{0.1^{n+1}}{0.9^{n+2}} && \text{(nhân thêm } 0.1^{n+1}\text{)}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$|E_n(x)| = \left|\frac{(-0.1)^{n+1}}{(\xi+1)^{n+2}}\right| = \frac{0.1^{n+1}}{(\xi+1)^{n+2}} < \frac{0.1^{n+1}}{0.9^{n+2}}$$

Để sai số chặt cụt không quá 10^{-3} thì

$$|E_n(x)| < \frac{0.1^{n+1}}{0.9^{n+2}} \leq 10^{-3}$$

Suy ra $n = 3$, khi đó với $c = -0.1$ và $x = x_0 = 0$ ta tính được P_n như sau:

$$\begin{aligned} P_3(x=0) &= \sum_{k=0}^{n=3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(-0.1)(0-(-0.1))^k \\ &= \sum_{k=0}^{3} \frac{(-0.1)^k}{k!} \frac{k!}{(-0.1+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-0.1)^k}{0.9^{k+1}} \\ &= 0.9998475842 \end{aligned}$$

Vậy đa thức Taylor tại $x_0 = 0$ để xấp xỉ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ đến độ chính xác 10^{-3}, với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ là $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{(-0.1)^k}{0.9^{k+1}}$ với kết quả là 0.9998475842. □

Yêu cầu 1.7. Áp dụng Định lý Taylor để chứng minh rằng:

1. $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ với x đủ nhỏ.
2. $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ với x đủ nhỏ.
3. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)$ với x đủ nhỏ.

Chứng minh. 1. Đặt $f(x) = \cos(x)$ với x đủ nhỏ. Ta sẽ tính toán đa thức Taylor P_n và sai số chặt cụt E_n bậc n của f, xét $n = 2$ và $c = 0$ ta có $P_2(x)$ và $E_2(x)$ (với x đủ nhỏ) như sau:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = f(0) + xf'(0) + x^2 f''(0) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$E_2(x) = \frac{1}{(2+1)!} f^{(2+1)}(\xi)(x-0)^{2+1} = \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi)x^3 = \frac{\sin(\xi)x^3}{6}, \xi \in (c, x)$$

Ta sẽ chứng minh $E_2(x) = \mathcal{O}(x^4)$ khi $x \to 0$, với x đủ nhỏ (ta xét $x \to 0$ với mong muốn phần sai số chặt cụt $E_2(x)$ lúc này sẽ gần như bằng 0). Nói cách khác, ta cần tìm $c' > 0$ và $\delta > 0$ thỏa

$$|E_2(x)| = \left|\frac{\sin(\xi)x^3}{6}\right| \leq c' \times |x^4| = c' \times x^4, \xi \in (c, x)$$

sao cho x thỏa $|x| < \delta$ (Theo *Định nghĩa 1.1*).

Với $\xi \in (c, x)$ ta luôn có $\sin(\xi) \leq 1$, khi đó:

$$|E_2(x)| = \left|\frac{\sin(\xi)x^3}{6}\right| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right| \tag{YC1.7.1}$$

Lại có:

$$\left|\frac{x^3}{6}\right| \leq |x^3| \leq x^4 \tag{YC1.7.2}$$

Từ (YC1.7.1) và (YC1.7.2) suy ra:

$$|E_2(x)| = \left|\frac{\sin(\xi)x^3}{6}\right| \leq x^4 \text{ với } x \text{ đủ nhỏ}$$

Chọn $c' = 1$ và $\delta = 10^{-6}$ ta được $E_2(x) = \mathcal{O}(x^4)$.

Tôi sẽ giải thích thêm về cách chọn δ. Với $\delta = 10^{-6}$ thì $|x| < \delta = 10^{-6}$, suy ra $|x^3| < 10^{-18}$ và:

$$|E_2(x)| = \left|\frac{\sin(\xi)x^3}{6}\right| < \frac{\sin(\xi)10^{-18}}{6} < 1.666666667^{-19} \approx 10^{-19}$$

Vậy lúc này $|E_2(x)|$ là một số rất nhỏ (bé hơn gần 10^{-19}), thỏa mãn được nhu cầu xấp xỉ hàm $f(x)$ sao cho sai số $|f(x) - P_2(x)|$ lúc này không quá lớn hay $|E_2(x)|$ không quá lớn.

Theo *Định lý 1.1* ta có $f(x) = \cos(x) = P_2(x) + E_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$.

2. Đặt $f(x) = e^x$ với x đủ nhỏ. Ta sẽ tính toán đa thức Taylor P_n và sai số chặt cụt E_n bậc n của f, xét $n = 1$ và $c = 0$ ta có $P_1(x)$ và $E_1(x)$ (với x đủ nhỏ) như sau:

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = f(0) + xf'(0) = 1 + x$$

$$E_1(x) = \frac{1}{(1+1)!} f^{(1+1)}(\xi)(x-0)^{1+1} = \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi)x^2 = \frac{e^\xi x^2}{2}, \xi \in (c, x)$$

Ta sẽ chứng minh $E_1(x) = \mathcal{O}(x^2)$ khi $x \to 0$, với x đủ nhỏ (ta xét $x \to 0$ với mong muốn phần sai số chặt cụt $E_2(x)$ lúc này sẽ gần như bằng 0). Nói cách khác, ta cần tìm $c' > 0$ và $\delta > 0$ thỏa

$$|E_1(x)| = \left|\frac{e^\xi x^2}{2}\right| = \frac{e^\xi x^2}{2} \leq c' \times |x^2| = c' \times x^2, \xi \in (c, x)$$

sao cho x thỏa $|x| < \delta$ (Theo *Định nghĩa 1.1*).

Với $\xi \in (c, x)$ ta có $e^\xi < e^x$ với x đủ nhỏ, khi đó:

$$|E_1(x)| = \frac{e^\xi x^2}{2} < \frac{e^x x^2}{2} \leq e^x x^2$$

Lại có $|x| < \delta$ với x đủ nhỏ và δ cần tìm, ta được:

$$|E_1(x)| < e^x x^2 \leq e^{|x|} x^2 < e^\delta x^2$$

Vậy bây giờ ta chỉ cần chọn δ hợp lý thì sẽ chọn được c' tương ứng. Tôi sẽ chọn $\delta = 10^{-6}$ và giải thích về cách chọn này. Với $\delta = 10^{-6}$ thì $|x| < \delta = 10^{-6}$, suy ra $x^2 < 10^{-12}$ và:

$$|E_1(x)| = \left|\frac{e^\xi x^2}{2}\right| < e^\delta x^2 < e^{10^{-6}} 10^{-12} \approx 10^{-12}$$

Vậy lúc này $|E_1(x)|$ là một số rất nhỏ (bé hơn gần 10^{-12}), thỏa mãn được nhu cầu xấp xỉ hàm $f(x)$ sao cho sai số $|f(x) - P_1(x)|$ lúc này không quá lớn hay $|E_1(x)|$ không quá lớn.

Chọn $c = e^{10^{-6}}$ và $\delta = 10^{-6}$ ta được $E_1(x) = \mathcal{O}(x^2)$.

Theo *Định lý 1.1* ta có $f(x) = x^2 = P_1(x) + E_1(x) = 1 - x + \mathcal{O}(x^2)$.

3. Đặt $f(x) = \sqrt{1+x}$ với x đủ nhỏ. Ta sẽ tính toán đa thức Taylor P_n và sai số chặt cụt E_n bậc n của f, xét $n = 1$ và $c = 0$ ta có $P_1(x)$ và $E_1(x)$ (với x đủ nhỏ) như sau:

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = f(0) + xf'(0) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+0}}x = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$E_1(x) = \frac{1}{(1+1)!} f^{(1+1)}(\xi)(x-0)^{1+1} = -\frac{x^2}{4(\xi+1)\sqrt{\xi+1}}, \xi \in (c,x) = (0,x)$$

Ta sẽ chứng minh $E_1(x) = \mathcal{O}(x^2)$ khi $x \to 0$, với x đủ nhỏ (ta xét $x \to 0$ với mong muốn phần sai số chặt cụt $E_2(x)$ lúc này sẽ gần như bằng 0). Nói cách khác, ta cần tìm $c' > 0$ và $\delta > 0$ thỏa

$$|E_1(x)| = \left| -\frac{x^2}{4(\xi+1)\sqrt{\xi+1}} \right| = \frac{x^2}{4(\xi+1)\sqrt{\xi+1}} \le c' \times |x^2| = c' \times x^2, \xi \in (c,x) = (0,x)$$

sao cho x thỏa $|x| < \delta$ (Theo *Định nghĩa 1.1*).

Với $\xi \in (0,x)$ và với x đủ nhỏ, ta có:

$$|E_1(x)| = \frac{x^2}{4(\xi+1)\sqrt{\xi+1}} < \frac{x^2}{4}$$

Chọn $c' = \frac{1}{4}$ và $\delta = 10^{-6}$ ta được $E_1(x) = \mathcal{O}(x^2)$.

Tôi sẽ giải thích thêm về cách chọn δ. Với $\delta = 10^{-6}$ thì $|x| < \delta = 10^{-6}$, suy ra $x^2 < 10^{-12}$ và:

$$|E_1(x)| = \frac{x^2}{4(\xi+1)\sqrt{\xi+1}} < \frac{x^2}{4} < 2.5^{-13} \approx 10^{-13}, \xi \in (0,x)$$

Vậy lúc này $|E_1(x)|$ là một số rất nhỏ (bé hơn gần 10^{-13}), thỏa mãn được nhu cầu xấp xỉ hàm $f(x)$ sao cho sai số $|f(x) - P_1(x)|$ lúc này không quá lớn hay $|E_1(x)|$ không quá lớn.

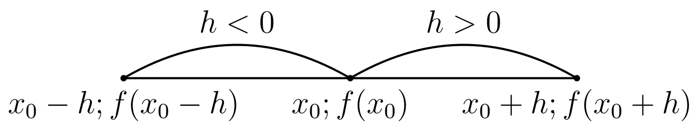
Theo *Định lý 1.1* ta có $f(x) = \cos(x) = P_1(x) + E_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^2)$. □

2 Phương pháp xấp xỉ đạo hàm

Những tài liệu tôi đã tham khảo trong chương này là [TH24], [Kiu05] và [Wik24d].

Yêu cầu 2.1. Trình bày cách xây dựng công thức tính xấp xỉ đạo hàm: sai phân tiến, sai phân lùi, sai phân trung tâm cho đạo hàm bậc 1, đạo hàm bậc 2.

Phương pháp xấp xỉ cho đạo hàm bậc 1.



1. Sai phân tiến: Áp dụng khai triển Taylor trong công thức Lagrange:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_0+h) \quad \text{(YC2.1.1)}$$

Suy ra:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) - \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_0+h)$$

Ta được sai phân tiến:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

với $\mathcal{O}(h) = -\frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) - \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_0+h)$.

Công thức sai phân tiến $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ xấp xỉ $f(x_0)$ có bậc hội tụ bằng 1:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \underbrace{\mathcal{O}(h)}_{\text{bậc hội tụ bằng 1}}}$$

Tiếp tục áp dụng khai triển Taylor trong công thức Lagrange với:

$$\begin{aligned} f(x_0+2h) &= f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x_0) \\ &\quad + \frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(\hat{\xi}), \hat{\xi} \in (x_0, x_0+2h) \end{aligned} \quad \text{(YC2.1.2)}$$

Nhân hai vế của (YC2.1.1) cho 4, sau đó ta thực hiện phép tính (YC2.1.2) - 4(YC2.1.1), ta được:

$$f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) = -3f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{4}{3!}h^3 f^{(3)}(x_0) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(\hat{\xi}) - \frac{4}{4!}f^{(4)}(\xi)h^4$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} + \frac{2}{3!}h^2 f^{(3)}(x_0) + \frac{f^{(4)}(\xi)(2h)^3}{4!} - \frac{2}{4!}f^{(4)}(\xi)h^3$$

Ta được sai phân tiến:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)}$$

với $\mathcal{O}(h^2) = \dfrac{2}{3!}h^2 f^{(3)}(x_0) + \dfrac{f^{(4)}(\xi)(2h)^3}{4!} - \dfrac{2}{4!}f^{(4)}(\xi)h^3$ bậc hội tụ bằng 2.

2. Sai phân lùi: Áp dụng khai triển Taylor trong công thức Lagrange:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi}), \overline{\xi} \in (x_0 - h, x_0) \quad \text{(YC2.1.3)}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi}), \overline{\xi} \in (x_0 - h, x_0)$$

Ta được sai phần lùi:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

với $\mathcal{O}(h) = \dfrac{h}{2}f''(x_0) - \dfrac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) + \dfrac{h^3}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi})$ bậc hội tụ bằng 1.

Công thức sai phân lùi $\dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ xấp xỉ $f'(x_0)$ có bậc hội tụ bằng 1:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h)}$$

Thực hiện phép tính 4(YC2.1.3) - (YC2.1.4) sau đó suy ra:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h} + \frac{2h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \frac{(2h)^3}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi}') + \frac{(2h)^3}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi})$$

Vậy ta được:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \text{ khi } h \to 0}$$

với $\mathcal{O}(h^2) = \dfrac{2h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \dfrac{(2h)^3}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi}') + \dfrac{(2h)^3}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi})$.

Ta gọi:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h}$$

là xấp xỉ đạo hàm cấp 1 $f'(x_0)$ bằng sai phân lùi có bậc hội tụ bằng 2.

3. Sai phân trung tâm: Thực hiện phép tính (YC2.1.1) - (YC2.1.3) ta được:

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{2h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) - \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi})$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \frac{h^3}{2 \times 4!}f^{(4)}(\xi) + \frac{h^3}{2 \times 4!}f^{(4)}(\overline{\xi})$$

Ta được sai phân trung tâm:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

với $\mathcal{O}(h^2) = -\dfrac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \dfrac{h^3}{2 \times 4!}f^{(4)}(\xi) + \dfrac{h^3}{2 \times 4!}f^{(4)}(\overline{\xi})$ có bậc hội tụ bằng 2.

Công thức sai phân trung tâm $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ xấp xỉ $f'(x_0)$ có bậc hội tụ bằng 2:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)}$$

Phương pháp xấp xỉ cho đạo hàm bậc 2.

1. Sai phân trung tâm:

Thực hiện phép tính ta lấy (YC2.1.1) + (YC2.1.3), ta được:

$$\begin{aligned} f(x_0+h)+f(x_0-h) &= 2f(x_0)+2f''(x_0)\frac{h^2}{2!}+\left[f^{(4)}(\xi)+f^{(4)}(\overline{\xi})\right]\frac{h^4}{4!} \\ \Rightarrow f''(x_0) &= \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}-\left[f^{(4)}(\xi)+f^{(4)}(\overline{\xi})\right]\frac{h^2}{4!} \end{aligned}$$

với $\xi, \overline{\xi} \in [x_0-h, x_0+h]$. Khi đó, tồn tại $M > 0$ sao cho:

$$f^{(4)}(\xi)+f^{(4)}(\overline{\xi}) \leq |f^{(4)}(\xi)|+|f^{(4)}(\overline{\xi})| \leq 2\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|f^{(4)}(x)| = M$$

Vậy ta được:

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)}$$

Ta gọi:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

là xấp xỉ đạo hàm cấp 2 $f''(x_0)$ bằng sai phân trung tâm có bậc hội tụ bằng 2.

2. Sai phân tiến: Thực hiện phép tính ta lấy 2(YC2.1.1) - (YC2.1.2), ta được:

$$\begin{aligned} 2f(x_0+h)-f(x_0+2h) &= f(x_0)-\frac{2h^2}{2!}f''(x_0)-\frac{6h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\left[2f^{(4)}(\xi)-\frac{16h^4}{4!}f^{(4)}(\hat{\xi})\right] \\ \Rightarrow f''(x_0) &= \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}-\frac{6h}{3!}f^{(3)}(x_0)+[2f^{(4)}(\xi)-16f^{(4)}(\hat{\xi})]\frac{h^2}{4!} \end{aligned}$$

với $\xi, \hat{\xi} \in [x_0, x_0+2h)$. Khi đó, tồn tại $\overline{M} = \max\limits_{x\in[x_0,x_0+2h]}|f(x_0)| > 0$ sao cho:

$$\frac{6|f^{(3)}(x_0)|}{3!}+\frac{2|f^{(4)}(\xi)|+16|f^{(4)}(\hat{\xi})|}{4!} \leq \frac{6}{3!}\max_{x\in[x_0,x_0+2h]}|f(x_0)|+\left(\frac{2+16}{4!}\right)\max_{x\in[x_0,x_0+2h]}|f(x_0)|$$

Vậy ta được:

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}+\mathcal{O}(h) \text{ khi } h \to 0}$$

Ta gọi:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}$$

là xấp xỉ đạo hàm cấp 2 $f''(x_0)$ bằng sai phấn tiến có bậc hội tụ bằng 1.

3. Sai phân lùi: Áp dụng khai triển Taylor trong công thức Lagrange:

$$f(x_0-2h) = f(x_0)-2hf'(x_0)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x_0)-\frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(\overline{\xi}') \qquad \text{(YC2.1.4)}$$

với $\overline{\xi} \in (x_0-h, x_0)$. Thực hiện phép tính 2(YC2.1.3) - (YC2.1.4) sau đó suy ra:

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{f(x_0-2h)-2f(x_0-h)+f(x_0)}{h^2}+\mathcal{O}(h) \text{ khi } h \to 0}$$

Ta gọi:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 2f(x_0 - h) + f(x_0)}{h^2}$$

là xấp xỉ đạo hàm cấp 2 $f''(x_0)$ bằng sai phân lùi có bậc hội tụ bằng 1.

Yêu cầu 2.2. Trình bày lý thuyết đánh giá sai số chặt cụt cho các công thức đạo hàm trên.

Bài làm. Trước tiên ta cần định nghĩa *Tổng sai số* là tổng của *roundoff* và *truncation error*, trong đó:

- *Roundoff error* là sự khác biệt giữa kết quả được tạo ra bởi một thuật toán nhất định sử dụng số học chính xác và kết quả được tạo ra bởi cùng một thuật toán sử dụng số học làm tròn có độ chính xác hữu hạn.
- *Truncation error* là sự khác biệt giữa giá trị thực của hàm và giá trị bị cắt của hàm đã cho.

Quan sát rằng trong tất cả các biểu thức vi phân hữu hạn, tổng của các hệ số là bằng không. Ảnh hưởng của lỗi làm tròn có thể rất lớn. Nếu h rất nhỏ, các giá trị của $f(x)$, $f(x \pm h)$, $f(x \pm 2h)$,... sẽ xấp xỉ bằng nhau. Khi chúng được nhân với các hệ số trong các công thức sai phân hữu hạn và được cộng lại, nhiều chữ số có ý nghĩa có thể bị mất. Mặt khác, chúng ta không thể làm h quá lớn, bởi vì lỗi cắt cụt khi đó sẽ trở nên quá mức. Tình huống không may này không có cách chữa, nhưng chúng ta có thể giảm bớt phần nào bằng cách thực hiện các biện pháp ngăn chặn sau:

- Sử dụng số học chính xác kép.
- Áp dụng các công thức sai phân hữu hạn chính xác ít nhất đến $\mathcal{O}(h^2)$.

Để minh họa các lỗi, hãy tính đạo hàm bậc hai của $f(x) = e^{-x}$ tại $x = 1$ bằng công thức sai phân trung tâm ở trên. Chúng ta thực hiện các phép tính với độ chính xác sáu và tám chữ số, sử dụng các giá trị khác nhau của h. Kết quả, được chỉ ra trong *Bảng 1*, sẽ được so sánh với $f''(1) = e^{-1} = 0.36787944$.

h	Độ chính xác 6 chữ số	Độ chính xác 8 chữ số
0.64	0.380 610	0.380 609 11
0.32	0.371 035	0.371 029 39
0.16	0.368 711	0.368 664 84
0.08	0.368 281	0.368 076 56
0.04	0.368 75	0.367 831 25
0.02	0.37	0.3679
0.01	0.38	0.3679
0.005	0.40	0.3676
0.0025	0.48	0.3680
0.00125	1.28	0.3712

Bảng 1: *Giá trị $(e^{-x})''$ tại $x = 1$ từ xấp xỉ sai phân trung tâm*

Trong các phép tính với độ chính xác sáu chữ số, giá trị tối ưu của h là 0.08, đưa ra kết quả chính xác đến ba chữ số có nghĩa. Do đó ba chữ số có nghĩa bị mất do sự kết hợp của truncation and roundoff errors. Với h tối ưu trở lên, lỗi chính là do truncation error; với h nhỏ hơn, roundoff errors trở nên rõ rệt. Kết quả tốt nhất thu được với phép tính độ chính xác tám chữ số chính xác đến bốn chữ số có nghĩa. Bởi vì độ chính xác thêm làm giảm roundoff errors, h tối ưu nhỏ hơn (khoảng 0.02) so với trong các phép tính độ chính xác sáu chữ số.

Yêu cầu 2.3. Sử dụng các công thức sai phân tiến, sai phân lùi và sai phân trung tâm để xác định giá trị còn thiếu trong bảng sau:

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	-4.827866	
3.0	-4.240058	
3.1	-3.496909	
3.2	-2.596792	

Bài làm. Tại $x = 2.9$ ta sẽ tính $f'(2.9)$ bằng công thức sai phân tiến với bậc hội tụ bằng 2, $x_0 = 2.9$ và $h = 0.1$:

$$f'(2.9) \approx \frac{-3f(2.9) + 4f(2.9 + 0.1) - f(2.9 + 2 \times 0.1)}{2 \times 0.1} = 5.101375$$

Tại $x = 3.0$ ta sẽ tính $f'(3.0)$ bằng công thức sai phân trung tâm với bậc hội tụ bằng 2, $x_0 = 3.0$ và $h = 0.1$:

$$f'(3.0) \approx \frac{f(3.0 + 0.1) - f(3.0 - 0.1)}{2 \times 0.1} = 6.654785$$

Tại $x = 3.1$ ta sẽ tính $f'(3.1)$ bằng công thức sai phân trung tâm với bậc hội tụ bằng 2, $x_0 = 3.1$ và $h = 0.1$:

$$f'(3.1) \approx \frac{f(3.1 + 0.1) - f(3.1 - 0.1)}{2 \times 0.1} = 8.21633$$

Tại $x = 3.2$ ta sẽ tính $f'(3.2)$ bằng công thức sai phân lùi với bậc hội tụ bằng 1, $x_0 = 3.2$ và $h = 0.1$:

$$f'(3.2) \approx \frac{f(3.2) - f(3.2 - 0.1)}{0.1} = 9.00117$$

Ta hoàn thành bảng theo yêu cầu đề như sau:

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	-4.827866	5.101375
3.0	-4.240058	6.654785
3.1	-3.496909	8.21633
3.2	-2.596792	9.00117

Yêu cầu 2.4. Cho hàm số $f(x) = 3xe^x - \cos(x)$. Sử dụng dữ liệu từ bảng sau:

x	$f(x)$
1.20	11.59006
1.29	13.78176
1.30	14.04276
1.31	14.30741
1.40	16.86187

Tính giá trị xấp xỉ của $f''(1.3)$, với $h = 0.1$ và $h = 0.01$. Sau đó, xác định giá trị sai số.

Bài làm. Tại $x = 1.3$ ta sẽ tính $f''(1.3)$ bằng công thức sai phân trung tâm với bậc hội tụ bằng 2; với $x_0 = 1.3$, $h = 0.1$ và $h = 0.01$:

$$f_{a;h=0.1} = f''(1.3) \approx \frac{f(1.3+0.1) - 2f(1.3) + f(1.3-0.1)}{0.1^2} = 0.365$$
$$f_{a;h=0.01} = f''(1.3) \approx \frac{f(1.3+0.1) - 2f(1.3) + f(1.3-0.1)}{0.01^2} = 36.5$$

Ta sẽ tính đạo hàm bậc 2 của hàm f:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3xe^x - \cos(x) \\ \Rightarrow f'(x) &= 3(e^x + xe^x) + \sin(x) \\ \Rightarrow f''(x) &= 3(2e^x + xe^x) + \cos(x) \end{aligned}$$

Với $x = 1.3$, ta được giá trị f_e cho đạo hàm bậc 2 tại $x = 1.3$ như sau:

$$f_e = f''(1.3) = 3(2e^{1.3} + 1.3e^{1.3}) + \cos(1.3) = 36.59353584$$

Ta sẽ tính sai số tương đối và sai số tuyệt đối cho f_e và $f_{a;h=0.1}, f_{a;h=0.01}$:

- Sai số tương đối:

$$\begin{cases} |f_e - f_{a;h=0.1}| = |36.59353584 - 0.365| = 36.22853584 \\ |f_e - f_{a;h=0.01}| = |36.59353584 - 36.5| = 0.09353584 \end{cases}$$

- Sai số tuyệt đối:

$$\begin{cases} \dfrac{|f_e - f_{a;h=0.1}|}{|f_e|} = \dfrac{|36.59353584 - 0.365|}{|36.59353584|} = 0.9900255608 \\ \dfrac{|f_e - f_{a;h=0.01}|}{|f_e|} = \dfrac{|36.59353584 - 36.5|}{|36.59353584|} = 2.556075489 \times 10^{-3} \end{cases}$$

Yêu cầu 2.5. Xét bài toán điều kiện biên Dirichlet như sau:

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ y(0) = -0.3, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -0.1. \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp xấp xỉ để tìm hàm tiệm cận xấp xỉ cho *Yêu cầu 2.7* với $h = \dfrac{\pi}{4}$ và $h = \dfrac{\pi}{8}$.

Bài làm. Ở bài này, tôi sẽ làm tổng quát với biến h và đoạn $[a, b]$ bất kỳ, sau đó tôi sẽ thay các giá trị cụ thể để giải quyết bài toán đề bài yêu cầu. Xét bài toán tổng quát:

$$\begin{cases} y''(x) + G(x)y'(x) + H(x)y(x) = F(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

Ta chia đoạn $[a, b]$ thành $n + 1$ đoạn, nghĩa là:

$$x_0 = a \qquad x_1 \qquad x_2 \quad \dots \quad x_n \qquad x_{n+1} = b$$

với $h = \dfrac{x_{n+1} - x_0}{n+1} = \dfrac{b-a}{n+1}$; $x_i = x_{i-1} + h, i = \overline{1,n}$; $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$.

Xét $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$, ta có:

$$y''(x_i) + G(x_i)y'(x_i) + H(x_i)y(x_i) = F(x_i) \tag{YC2.5.1}$$

Áp dụng khai triển Taylor theo Lagrange:

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ y'(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Thay vào (YC2.5.1), ta được:

$$\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} + G(x_i)\left(\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right) + H(x_i)y(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = F(x_i)$$

Ta xấp xỉ $y(x_i) \approx y_i, i = \overline{1,n}$. Giá trị xấp xỉ $\{y_i\}_{i=\overline{1,n}}$ thỏa:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + G_i\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) + H_i y_i = F_i \\ \Leftrightarrow\ & y_{i-1}\left(1 - \frac{G_i h}{2}\right) + y_i(H_i h^2 - 2) + y_{i+1}\left(1 + \frac{G_i h}{2}\right) = h^2 F_i \end{aligned}$$

- Ta xét $i = 1$:

$$y_0\left(1 - \frac{G_i h}{2}\right) + y_1(H_i h^2 - 2) + y_2\left(1 + \frac{G_i h}{2}\right) = h^2 F_1$$

  với $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ (đã biết), ta được:

$$\boxed{\alpha\left(1 - \frac{G_i h}{2}\right) + y_1(H_i h^2 - 2) + y_2\left(1 + \frac{G_i h}{2}\right) = h^2 F_1} \tag{YC2.5.2}$$

- Ta xét $i = \overline{2, n-1}$:

$$\boxed{y_{i-1}\left(1 - \frac{G_i h}{2}\right) + y_i(H_i h^2 - 2) + y_{i+1}\left(1 + \frac{G_i h}{2}\right) = h^2 F_i} \tag{YC2.5.3}$$

- Ta xét $i = n$:

$$y_{n-1}\left(1 - \frac{G_n h}{2}\right) + y_n(H_n h^2 - 2) + y_{n+1}\left(1 + \frac{G_n h}{2}\right) = h^2 F_n$$

  với $y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(b) = \beta$ (đã biết), ta được:

$$\boxed{y_{n-1}\left(1 - \frac{G_n h}{2}\right) + y_n(H_n h^2 - 2) + \beta\left(1 + \frac{G_n h}{2}\right) = h^2 F_n} \tag{YC2.5.4}$$

Vậy ta đã xây dựng xong, tiếp theo tôi sẽ thay các giá trị h, a, b và tìm n cụ thể để thực hiện xấp xỉ $\{y_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Xét bài toán đặt ra, ta có $G(x) = -1, H(x) = -2$ và $F(x) = \cos x$:

1. Với $h = \dfrac{\pi}{4}$, ta tính được:

$$h = \frac{\pi}{4} = \frac{x_{n+1} - x_0}{n+1} = \frac{\pi}{2} : (n+1) \Rightarrow n+1 = 2 \text{ và } n = 1$$

Vậy ta sẽ chia $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ thành 2 đoạn, với $x_1 = x_0 + h = 0 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Xét (YC2.5.2) ta được:

$$\begin{aligned}
&-0.3\left(1+\frac{\pi}{8}\right) - 2y_1\left(1+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) - 0.1\left(1-\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow y_1 = -0.282870604
\end{aligned}$$

Nghiệm y_1 vừa tìm được khá gần với nghiệm chính xác:

$$y(x_1) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{10}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 3\cos\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{5} = -0.2828427125$$

2. Với $h = \dfrac{\pi}{8}$, ta tính được:

$$h = \frac{\pi}{8} = \frac{x_{n+1} - x_0}{n+1} = \frac{\pi}{2} : (n+1) \Rightarrow n+1 = 4 \text{ và } n = 3$$

Vậy ta sẽ chia $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ thành 4 đoạn, với $x_i = x_{i-1} + h = x_{i-1} + \dfrac{\pi}{8}, i = \overline{1,n}$; $x_1, x_2, x_3 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Xét (YC2.5.2), (YC2.5.3) và (YC2.5.4) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}
-0.3\left(1+\dfrac{\pi}{16}\right) - 2y_1\left(1+\left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2\right) + y_2\left(1-\dfrac{\pi}{16}\right) = \left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2 \cos\dfrac{\pi}{8} \\
y_1\left(1+\dfrac{\pi}{16}\right) - 2y_2\left(1+\left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2\right) + y_3\left(1-\dfrac{\pi}{16}\right) = \left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2 \cos\dfrac{\pi}{4} \\
y_2\left(1+\dfrac{\pi}{16}\right) - 2y_3\left(1+\left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2\right) - 0.1\left(1-\dfrac{\pi}{16}\right) = \left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2 \cos\dfrac{3\pi}{8}
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
y_1 = -0.3156854002 \\
y_2 = -0.2829058485 \\
y_3 = -0.20609956332
\end{cases}$$

Nghiệm y_1, y_2 và y_3 vừa tìm được khá gần với nghiệm chính xác:

$$\begin{cases}
y(x_1) = y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{10}\left(\sin\dfrac{\pi}{8} + 3\cos\dfrac{\pi}{8}\right) = -0.315432203 \\
y(x_2) = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{10}\left(\sin\dfrac{\pi}{4} + 3\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{5} = -0.2828427125 \\
y(x_3) = y\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{10}\left(\sin\dfrac{3\pi}{8} + 3\cos\dfrac{3\pi}{8}\right) = -0.207192983
\end{cases}$$

Yêu cầu 2.6. Sử dụng phương pháp xấp xỉ đạo hàm tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán điều kiện biên sau với $h = \dfrac{1}{4}$:

$$\begin{cases} y'' = 4(y - x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Bài làm. Xét bài toán đặt ra, ta có $G(x) = 0, H(x) = -4$ và $F(x) = -4x$. Với $h = \dfrac{1}{4}$, ta tính được:

$$h = \frac{1}{4} = \frac{x_{n+1} - x_0}{n+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow n + 1 = 4 \text{ và } n = 3$$

Vậy ta sẽ chia $[0, 1]$ thành 4 đoạn, với $x_i = x_{i-1} + h = x_{i-1} + \dfrac{1}{4}, i = \overline{1, n}$;
$x_1, x_2, x_3 \in (0, 1)$. Xét (YC2.5.2), (YC2.5.3) và (YC2.5.4) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2y_1\left(1 + 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right) + y_2 = -4 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^2} \\ y_1 - 2y_2\left(1 + 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right) + y_3 = -4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4^2} \\ y_2 - 2y_3\left(1 + 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right) + 2 = -4 \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{697}{1765} = 0.3951247166 \\ y_2 = \dfrac{81}{98} = 0.8265306122 \\ y_3 = \dfrac{2363}{1764} = 1.339569161 \end{cases}$$

Bài tập lập trình

Tôi sẽ dùng Python để tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán biên Dirichlet.

- Input : `self, f, Gx, Hx, Fx, a, b, ua, ub, h`.
  - `f, Gx, Hx, Fx` : các hàm số trong đề bài.
  - `a, b` : đoạn $[a, b]$ chứa nghiệm.
  - `ua, ub` : giá trị biên.
  - `h` : bước xấp xỉ.
- Ouput : giá trị nghiệm xấp xỉ của bài toán. Sử dụng hàm plot để vẽ nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác trên cùng một đồ thị, chú thích hình vẽ đầy đủ.

Trước tiên, tôi sẽ xây dựng class có tên là `ApproximationDirichlet` để tổng quát hóa bài toán điều kiện biên Dirichlet:

```
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

class ApproximationDirichlet:
    """
    ApproximationDirichlet is a class that solves the boundary value problem
    y''(x) + G(x)y'(x) + H(x)y(x) = F(x), a <= x <= b, y(a) = ua, y(b) = ub
    using the finite difference method.

    Parameters
    ----------
    f : function
      The actual solution to the boundary value problem.
    Gx : function
      The function G(x) in the boundary value problem.
    Hx : function
      The function H(x) in the boundary value problem.
    Fx : function
      The function F(x) in the boundary value problem.
    a : float
      The left boundary of the interval.
    b : float
      The right boundary of the interval.
    ua : float
      The left boundary condition.
    ub : float
      The right boundary condition.
    h : float
      The step size.

    Methods
    -------
    solve() -> np.ndarray:
      Solves the boundary value problem using the finite difference method.
    absolute_error() -> float:
      Returns the absolute error of the approximation.
    relative_error() -> float:
      Returns the relative error of the approximation.
    order_of_accuracy() -> float:
      Returns the order of accuracy of the approximation.
    plot() -> None:
```

```
        Plots the approximation and the actual solution.
    """

    def __init__(self, f, Gx, Hx, Fx, a, b, ua, ub, h):
        self.f = f
        self.Gx = Gx
        self.Hx = Hx
        self.Fx = Fx
        self.a = a
        self.b = b
        self.ua = ua
        self.ub = ub
        self.h = h
        self.n = int((b - a) / h) - 1

        self.x = np.linspace(a, b, self.n + 2)
        self.A = np.zeros((self.n, self.n))
        self.b_vec = np.zeros(self.n)
        self.y = np.zeros(self.n + 2)
        self.y[0] = ua
        self.y[-1] = ub

    def solve(self) -> np.ndarray:
        for i in range(1, self.n + 1):
            xi = self.x[i]
            hi = self.h
            if i == 1:
                self.A[i-1, i-1] = self.Hx(xi) * hi**2 - 2
                self.A[i-1, i] = 1 + self.Gx(xi) * hi / 2
                self.b_vec[i-1] = hi**2 * self.Fx(xi) - self.ua * (1 - self.Gx(xi) * hi / 2)
            elif i == self.n:
                self.A[i-1, i-2] = 1 - self.Gx(xi) * hi / 2
                self.A[i-1, i-1] = self.Hx(xi) * hi**2 - 2
                self.b_vec[i-1] = hi**2 * self.Fx(xi) - self.ub * (1 + self.Gx(xi) * hi / 2)
            else:
                self.A[i-1, i-2] = 1 - self.Gx(xi) * hi / 2
                self.A[i-1, i-1] = self.Hx(xi) * hi**2 - 2
                self.A[i-1, i] = 1 + self.Gx(xi) * hi / 2
                self.b_vec[i-1] = hi**2 * self.Fx(xi)

        self.y[1:self.n + 1] = np.linalg.solve(self.A, self.b_vec)
        return self.y

    def absolute_error(self) -> float:
        return np.linalg.norm(self.y - self.f(self.x))

    def relative_error(self) -> float:
        return np.linalg.norm(self.y - self.f(self.x)) / np.linalg.norm(self.f(self.x))

    def order_of_accuracy(self) -> float:
        h = self.h
        h2 = h / 2

        approx_h = ApproximationDirichlet(self.f, self.Gx, self.Hx, self.Fx, self.a, self.b, self.ua, self.ub, h)
        approx_h2 = ApproximationDirichlet(self.f, self.Gx, self.Hx, self.Fx, self.a, self.b, self.ua, self.ub, h2)
```

```
        approx_h.solve()
        approx_h2.solve()

        f_exact = self.f(self.x)
        f_exact_h2 = approx_h2.f(approx_h2.x)

        return -np.log(np.linalg.norm(approx_h2.y - f_exact_h2) / np.linalg.norm(approx_h.y - f_exact)) / np.log(approx_h2.n / approx_h.n)

    def plot(self) -> None:
        fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))
        axs[0].plot(self.x, self.y, color='b', label='Approximation')
        axs[0].set_title('Approximation')
        axs[0].set_xlabel('x')
        axs[0].set_ylabel('y')
        axs[0].legend()

        axs[1].plot(self.x, self.f(self.x), color='r', label='Actual solution')
        axs[1].set_title('Actual solution')
        axs[1].set_xlabel('x')
        axs[1].legend()

        axs[2].plot(self.x, self.y, color='b', label='Approximation')
        axs[2].plot(self.x, self.f(self.x), color='r', label='Actual solution')
        axs[2].set_title('Comparison')
        axs[2].set_xlabel('x')
        axs[2].legend()

        plt.tight_layout()
        plt.show()
```

Listing 1: ApproximationDirichlet Class

Yêu cầu 2.7. Xét bài toán điều kiện biên Dirichlet như sau:

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y + \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ y(0) = -0.3, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -0.1. \end{cases}$$

có nghiệm chính xác $y(x) = -\dfrac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$. Sử dụng xấp xỉ đạo hàm để tìm nghiệm xấp xỉ với $h = \dfrac{\pi}{20}$.

Bài làm. Tôi sẽ khai báo các biến đầu vào dựa trên yêu cầu của `ApproximationDirichlet Class`:

```
x = sp.symbols('x')
f = lambda x: -1/10 * (np.sin(x) + 3 * np.cos(x))
Gx = lambda x: -1
Hx = lambda x: -2
Fx = lambda x: np.cos(x)
a = 0
b = np.pi / 2
ua = -0.3
ub = -0.1
h = np.pi / 20
```

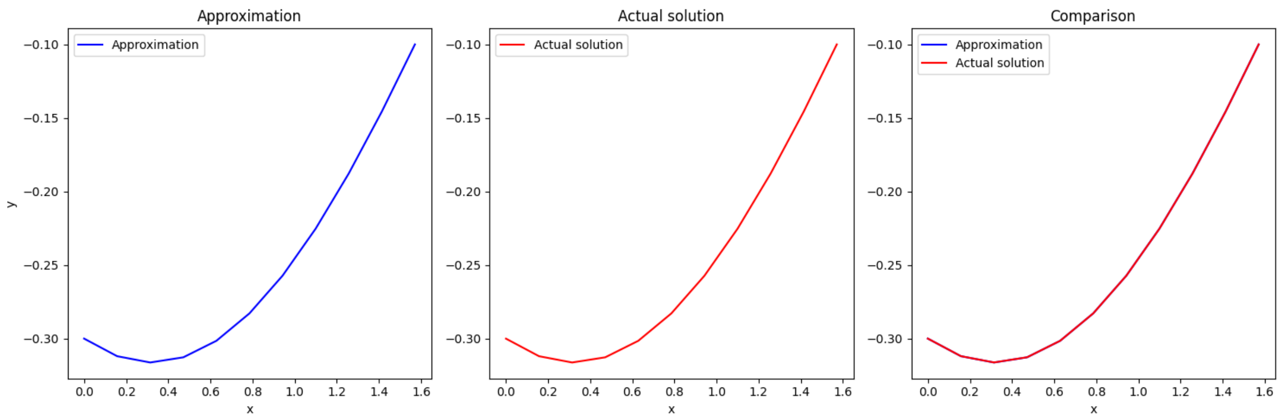
Tiếp theo, tôi sẽ truyền biến vào class và sau đó tính toán giá trị xấp xỉ cùng với hình ảnh trực quan:

```python
approximation = ApproximationDirichlet(f, Gx, Hx, Fx, a, b, ua, ub, h)
y_approx = approximation.solve()
print('Approximate value: ', y_approx)

approximation.plot()

```

```
Approximate value:  [-0.3        -0.31197884 -0.31626005 -0.3127416  -0.30151343
-0.28285539 -0.25723058 -0.22527415 -0.187778   -0.14567166 -0.1       ]
```



Ngoài ra, các giá trị sai số tương đối, sai số tuyệt đối và bậc hội tụ (theo *l2-norm*) cũng có thể được tính toán:

```python
print('Absolute error: ', approximation.absolute_error())
print('Relative error: ', approximation.relative_error())
print('Order of accuracy: ', approximation.order_of_accuracy())

```

```
Absolute error:  8.7633411008115e-05
Relative error:  0.00010191223097416988
Order of accuracy:  1.3865563326300536
```

Tôi sẽ hoàn thành bảng kết quả sau với các kích thước phần tử lưới nhưng cách trình bày code cũng tương tự với h:

Kích thước phần tử lưới	h	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$
Sai số tuyệt đối	$8.76334110 \times 10^{-5}$	$3.10968793 \times 10^{-5}$	$1.10025307 \times 10^{-5}$
Sai số tương đối	0.00010191	$2.59937385 \times 10^{-5}$	$6.55941628 \times 10^{-6}$
Bậc hội tụ	1.39	1.44	1.47

Kích thước phần tử lưới	$\frac{h}{8}$	$\frac{h}{16}$
Sai số tuyệt đối	$3.89065673 \times 10^{-6}$	$1.37561348 \times 10^{-6}$
Sai số tương đối	1.6473872×10^{-6}	$4.12785002 \times 10^{-7}$
Bậc hội tụ	1.49	1.49

Yêu cầu 2.8. Xét bài toán điều kiện biên Dirichlet như sau:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \qquad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ y(0) = 1, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$$

có nghiệm chính xác $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1)\sin x$. Sử dụng xấp xỉ đạo hàm để tìm nghiệm xấp xỉ với $h = \dfrac{\pi}{20}$.

Bài làm. Tôi sẽ khai báo các biến đầu vào dựa trên yêu cầu của `ApproximationDirichlet Class`:

```
x = sp.symbols('x')
f = lambda x: np.cos(x) + (np.sqrt(2) - 1) * np.sin(x)
Gx = lambda x: 0
Hx = lambda x: 1
Fx = lambda x: 0
a = 0
b = np.pi / 4
ua = 1
ub = 1
h = np.pi / 20

```

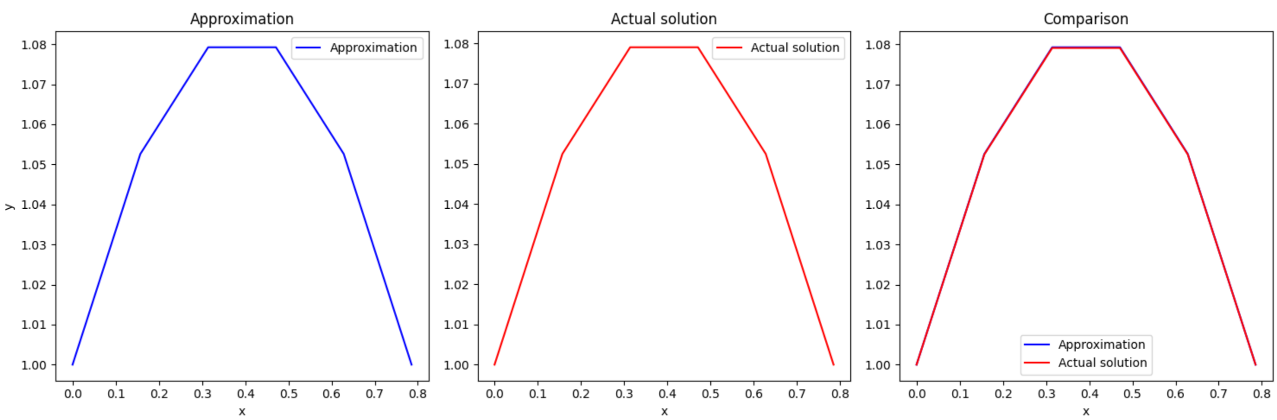
Tiếp theo, tôi sẽ truyền biến vào class và sau đó tính toán giá trị xấp xỉ cùng với hình ảnh trực quan:

```
approximation = ApproximationDirichlet(f, Gx, Hx, Fx, a, b, ua, ub, h)
y_approx = approximation.solve()
print('Approximate value: ', y_approx)

approximation.plot()

```

```
Approximate value:  [1.         1.05260081 1.07922974 1.07922974 1.05260081 1.        ]
```



Ngoài ra, các giá trị sai số tương đối, sai số tuyệt đối và bậc hội tụ (theo *l2-norm*) cũng có thể được tính toán:

```
print('Absolute error: ', approximation.absolute_error())
print('Relative error: ', approximation.relative_error())
print('Order of accuracy: ', approximation.order_of_accuracy())

```

```
Absolute error:  0.00029533596130767087
Relative error:  0.00011544866698055672
Order of accuracy:  1.284511352092607
```

Tôi sẽ hoàn thành bảng kết quả sau với các kích thước phần tử lưới nhưng cách trình bày code cũng tương tự với h:

Kích thước phần tử lưới	h	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$
Sai số tuyệt đối	0.00029534	0.00010422	$3.68236795 \times 10^{-5}$
Sai số tương đối	0.00011545	$2.99340596 \times 10^{-5}$	$7.63553427 \times 10^{-6}$
Bậc hội tụ	1.28	1.39	1.45

Kích thước phần tử lưới	$\frac{h}{8}$	$\frac{h}{16}$
Sai số tuyệt đối	$1.30170782 \times 10^{-5}$	$4.60204808 \times 10^{-6}$
Sai số tương đối	$1.92926135 \times 10^{-6}$	$4.84955672 \times 10^{-7}$
Bậc hội tụ	1.47	1.49

3 Nội suy và xấp xỉ đa thức

Những tài liệu tôi đã tham khảo trong chương này là [TH24] và [BF10].

Yêu cầu 3.1. Trình bày cách xây dựng hàm Lagrange bậc 1, 2, 3, 4 trên đoạn $[-1, 1]$. Vẽ hình các hàm Lagrange trên, chú thích hình vẽ đầy đủ.

Bài làm.

1. Hàm Lagrange bậc 1. Ta xét $h = |x_2 - x_1|$:

$$x_1 = -1; y_1 \qquad\qquad x_2 = 1; y_2$$

Với các giá trị y_1 và y_2, ta cần xây dựng hàm đa thức $y_h(x) = ax + b$ thỏa $\begin{cases} y_h(x_1) = y_1 \\ y_h(x_2) = y_2 \end{cases}$

Ta có:

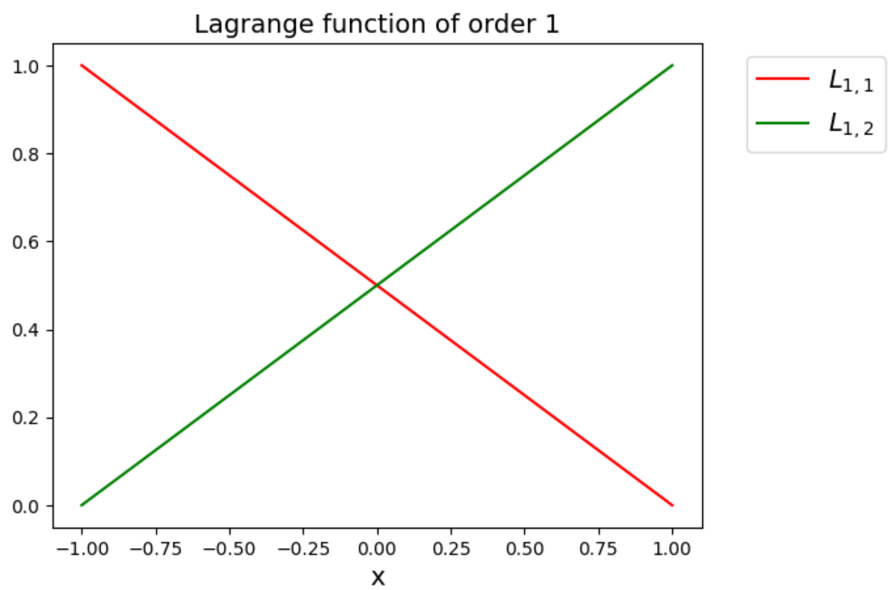
$$\begin{cases} y_h(x_1) = ax_1 + b = y_1 \\ y_h(x_2) = ax_2 + b = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = y_1 - x_1 \times \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

Vậy ta xây dựng được:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= x \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \\ &= y_1 \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) + y_2 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \\ &= y_h(x_1) L_{1,1}(x) + y_h(x_2) L_{1,2}(x) \end{aligned}$$

với $L_{1,1}(x) = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}; L_{1,2}(x) = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ là các hàm Lagrange bậc 1. Vậy hàm Langrange bậc 1 trên đoạn $[-1, 1]$ là:

$$\begin{cases} L_{1,1}(x) = \dfrac{x - 1}{-2} \\ L_{1,2}(x) = \dfrac{x + 1}{2} \end{cases}$$



Hình 1: *Hàm Lagrange bậc 1 trên đoạn* $[-1, 1]$

2. Hàm Lagrange bậc 2. Ta xét $h = \max\limits_{i=\overline{1,3}} |x_{i+1} - x_i|$:

$$x_1 = -1; y_1 \qquad x_2 = 0; y_2 \qquad x_3 = 1; y_3$$

Với các giá trị y_1, y_2 và y_3, ta cần xây dựng hàm đa thức $y_h(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa $\begin{cases} y_h(x_1) = y_1 \\ y_h(x_2) = y_2 \\ y_h(x_3) = y_3 \end{cases}$

Ta sẽ giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

Xét

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 & 0 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x_2^2 - x_1^2)(x_3 - x_1) - (x_3^2 - x_1^2)(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_3 - x_1) - (x_3 - x_1)(x_3 + x_1)(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3) \neq 0 \end{aligned}$$

Với

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = y_1x_2 + y_3x_1 + y_2x_3 - y_3x_2 - y_1x_3 - y_2x_1 = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)$$

Suy ra

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{y_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

Với

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2y_2 + x_3^2y_1 + x_2^2y_3 - x_3^2y_2 - x_1^2y_3 - x_2^2y_1 = y_1(x_3^2 - x_2^2) + y_2(x_1^2 - x_3^2) + y_3(x_2^2 - x_1^2)$$

Suy ra

$$b = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{x_3 + x_2}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)} y_1 + \frac{x_1 + x_3}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{x_2 + x_1}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_3)} y_3$$

Với

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = y_1x_2x_3(x_2 - x_3) + y_2x_1x_3(x_3 - x_1) + y_3x_1x_2(x_1 - x_2)$$

Suy ra

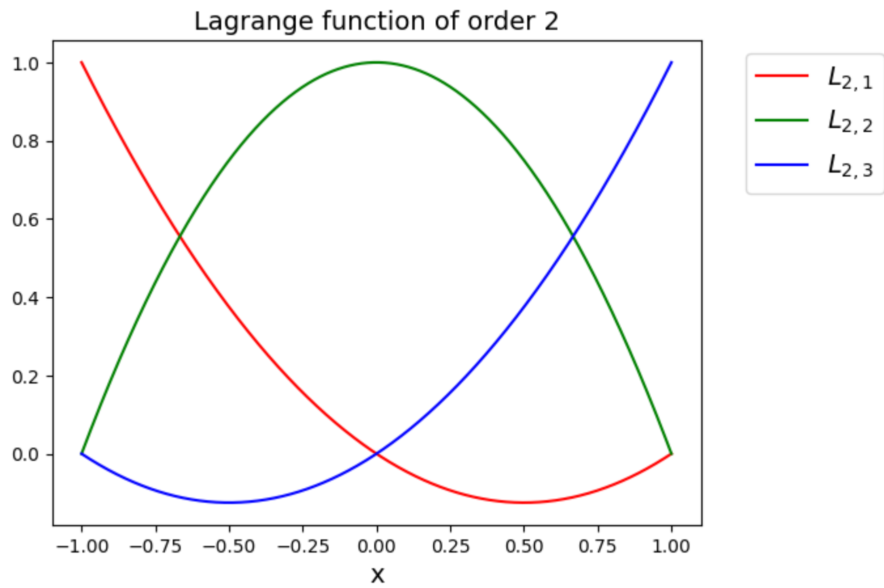
$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{x_2x_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} y_1 + \frac{x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{x_1x_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} y_3$$

Thay a, b, c vừa tìm được vào $y_h(x)$ ta được:

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= \left[\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right]x^2 \\
&- \left[\frac{x_3+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{x_1+x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{x_2+x_1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3\right]x \\
&+ \frac{x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{x_1x_2}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}y_3 \\
&= y_1\left[\frac{x^2-(x_3+x_2)x+x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right] + y_2\left[\frac{x^2-(x_1+x_3)x+x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\right] + y_3\left[\frac{x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\right] \\
&= y_1 \times \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \times \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \times \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= y_h(x_1)L_{2,1}(x) + y_h(x_2)L_{2,2}(x) + y_h(x_3)L_{2,3}(x)
\end{aligned}$$

với $L_{2,1}(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}; L_{2,2}(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}; L_{2,3}(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$ là các hàm Lagrange bậc 2. Vậy hàm Lagrange bậc 2 trên đoạn $[-1, 1]$ là:

$$\begin{cases}
L_{2,1}(x) = \dfrac{x(x-1)}{2} \\
L_{2,2}(x) = (x+1)(1-x) \\
L_{2,3}(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}
\end{cases}$$



Hình 2: *Hàm Lagrange bậc 2 trên đoạn* $[-1, 1]$

3. Công thức Lagrange tổng quát. Để tổng quát hoá khái niệm đa thức nội suy Lagrange bậc n đi qua $n+1$ điểm $(x_0, f(x_0), \dots, (x_n, f(x_n))$. Đầu tiên, với mỗi $i = 0, 1, \dots, n$, chúng ta xây dựng một hàm $L_{n,i}$ thỏa mãn tính chất sau:

$$L_{n,i}(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Để thỏa mãn $L_{n,i}(x_k) = 0$ với mỗi $k \neq i$, thì tử số của hàm Lagrange có dạng:

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Và để thỏa mãn $L_{n,i}(x_k) = 1$ với mỗi $k = i$, thì mẫu số phải có cùng dạng với tử số nhưng được tính toán với $x = x_i$:

$$(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{n-1})(x_i - x_n)$$

Vậy ta được công thức tổng quát cho hàm nội suy Lagrange bậc n:

$$L_{n,i} = \prod_{k=0;k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Ta có định lý sau:

Định lí 3.1. *Nếu $x_0, \dots, x_n$ là $n+1$ điểm rời rạc và f là một hàm mà giá trị của nó tại những điểm $x_0, \dots, x_n$ được biết trước thì tồn tại duy nhất một đa thức có bậc tối đa là n sao cho*

$$f(x_k) = P(x_k), \quad \forall k = \overline{0, n}.$$

Khi đó, đa thức này có dạng:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \dots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x) \quad (3.3)$$

với

$$L_{n,k} = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad \forall k = \overline{0, n}.$$

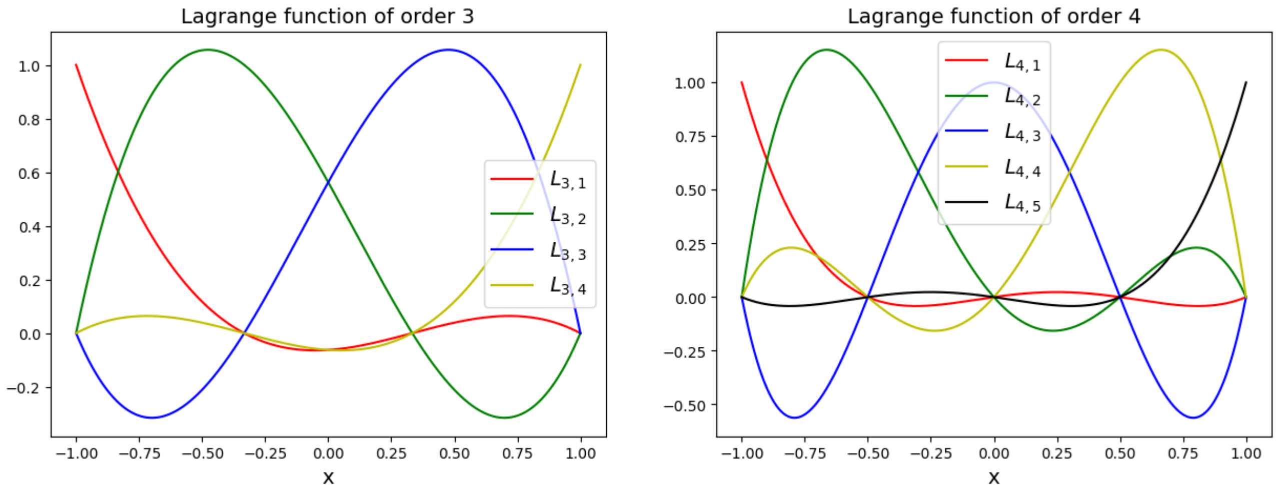
□

Áp dụng *Định lý 3.1* với hàm Lagrange bậc 3, tôi sẽ chia đoạn $[-1, 1]$ thành 3 phần bằng nhau, tức là $h = \dfrac{2}{3}$. Khi đó, hàm Lagrange bậc 3 trên đoạn $[-1, 1]$ sẽ có dạng:

$$\begin{cases} L_{3,1} = \dfrac{-9(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)}{16} \\ L_{3,2} = \dfrac{27(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{16} \\ L_{3,3} = \dfrac{-27(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)}{16} \\ L_{3,4} = \dfrac{9(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{16} \end{cases}$$

Áp dụng *Định lý 3.1* với hàm Lagrange bậc 4, tôi sẽ chia đoạn $[-1, 1]$ thành 4 phần bằng nhau, tức là $h = \dfrac{1}{2}$. Khi đó, hàm Lagrange bậc 4 trên đoạn $[-1, 1]$ sẽ có dạng:

$$\begin{cases} L_{4,1} = \dfrac{2x(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)}{3} \\ L_{4,2} = \dfrac{-8x(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{3} \\ L_{4,3} = 4(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1) \\ L_{4,4} = \dfrac{-8x(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-1)}{3} \\ L_{4,5} = \dfrac{2x(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{3} \end{cases}$$



Hình 3: *Hàm Lagrange bậc 3 và 4 trên đoạn* $[-1, 1]$

Yêu cầu 3.2. Trình bày định lý đánh giá sai số của hàm Lagrange.

Định lí 3.2 (Đánh giá sai số hàm Lagrange). *Giả sử* $f \in C^{n+1}[a, b]$ *và* $P(x)$ *là một đa thức nội suy có bậc không lớn hơn* n*, và nội suy tại* $n+1$ *điểm rời rạc* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *trong* $[a, b]$ *(nghĩa là* $P(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$*) thì cho mỗi* $x \in [a, b]$*, tồn tại một điểm* $\xi_x \in (a, b)$ *thỏa:*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

với $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\prod_{k=0;k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}}_{L_{n,i}(x)}$. $\square$

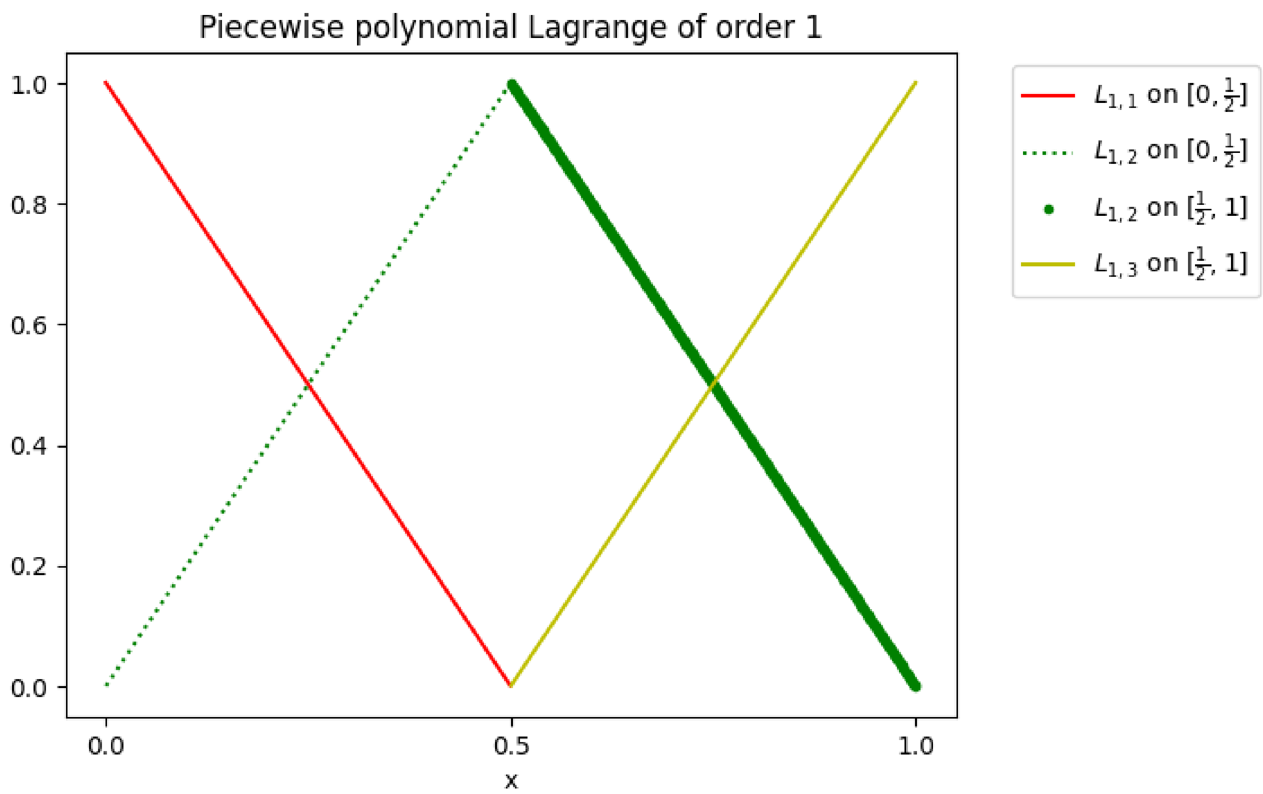
Yêu cầu 3.3. Cho đoạn $[0, 1]$, trình bày cách xây dựng hàm Lagrange từng phần bậc 1, 2, 3 trên đoạn $[0, \frac{1}{2}]$ và $[\frac{1}{2}, 1]$. Vẽ hình các hàm được xây dựng, chú thích hình vẽ đầy đủ.

Bài làm. Ta có đa thức Lagrange từng phần bậc 1 trên đoạn $[0, 1]$ như sau:

$$L_{1,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} = 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$L_{1,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \dfrac{x - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$L_{1,3}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \dfrac{x - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Hình 4: *Đa thức từng phần Lagrange bậc 1 trên đoạn* $[0, 1]$

Ta có đa thức Lagrange từng phần bậc 2 trên đoạn $[0, 1]$ như sau:

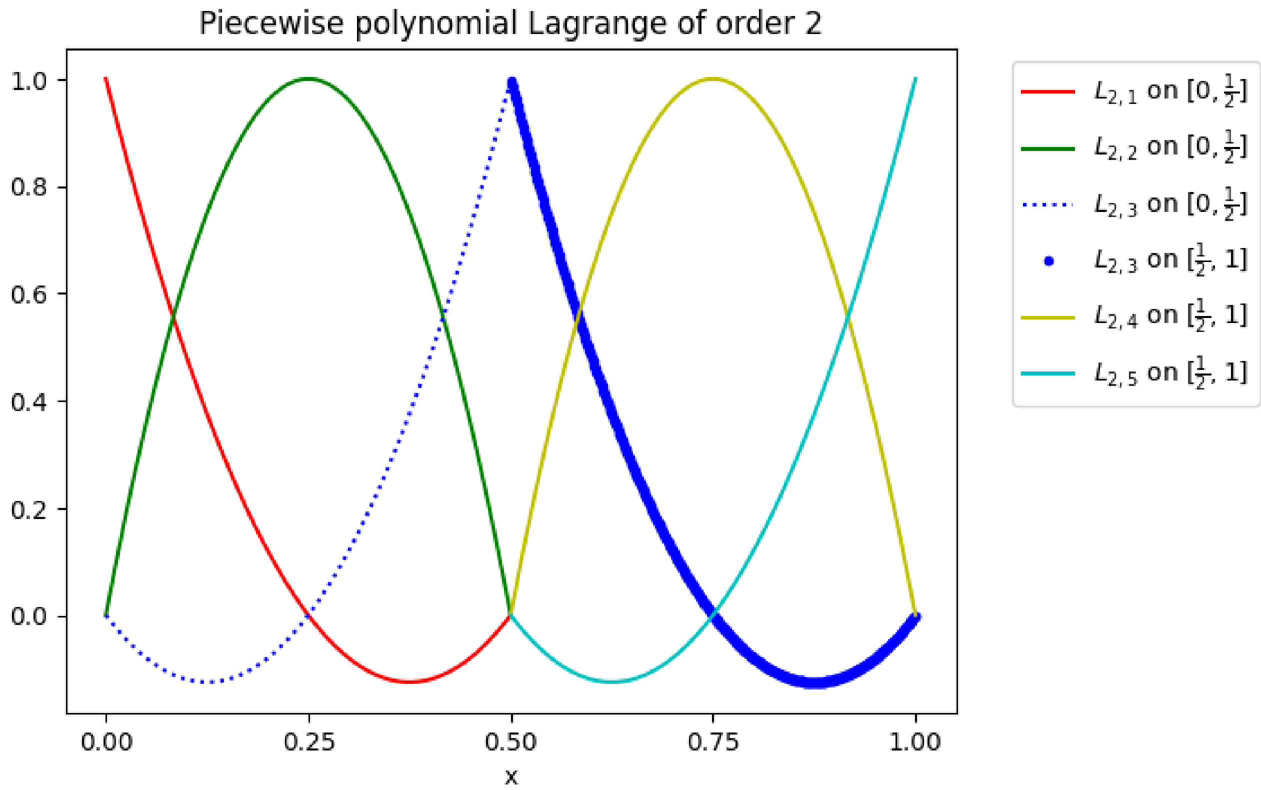
$$L_{2,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x - \dfrac{1}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(0 - \dfrac{1}{4}\right)\left(0 - \dfrac{1}{2}\right)} = (4x-1)(2x-1), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{2,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-0)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{4} - 0\right)\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right)} = -16x^2 + 8x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{2,3}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-0)\left(x - \dfrac{1}{4}\right)}{\left(\dfrac{1}{2} - 0\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right)} = 8x^2 - 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x - \dfrac{3}{4}\right)(x-1)}{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2} - 1\right)} = 2(4x-3)(x-1), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{2,4}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{3}{4} - 1\right)} = (16x-8)(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$L_{2,5}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{3}{4}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)} = (2x-1)(4x-3), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Hình 5: *Đa thức từng phần Lagrange bậc 2 trên đoạn* $[0, 1]$

Ta có đa thức Lagrange từng phần bậc 3 trên đoạn $[0, 1]$ như sau:

$$L_{3,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x - \dfrac{1}{6}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(0 - \dfrac{1}{6}\right)\left(0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(0 - \dfrac{1}{2}\right)} = (6x-1)(3x-1)(2-x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{3,2}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-0)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{6} - 0\right)\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\right)} = 18x(3x-1)(2x-1), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{3,3}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-0)\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{3}-0\right)\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)} = 9x(6x-1)(1-2x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{3,4}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-0)\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}-0\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)} = 2x(6x-1)(3x-1), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{5}{6}\right)(x-1)}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{1}{2}-1\right)} = 2(3x-2)(6x-5)(1-x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$L_{3,5}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{5}{6}\right)(x-1)}{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{2}{3}-1\right)} = 9(2x-1)(6x-5)(x-1), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$L_{3,6}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-1)}{\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{5}{6}-1\right)} = 18(2x-1)(3x-2)(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$L_{3,7}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{5}{6}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\left(1-\dfrac{5}{6}\right)} = (2x-1)(3x-2)(6x-5), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Yêu cầu 3.4. Cho $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$. Xây dựng các đa thức nội suy Lagrange bậc 1, 2, để xấp xỉ $f(0.45)$, sau đó đánh giá sai số tương ứng.

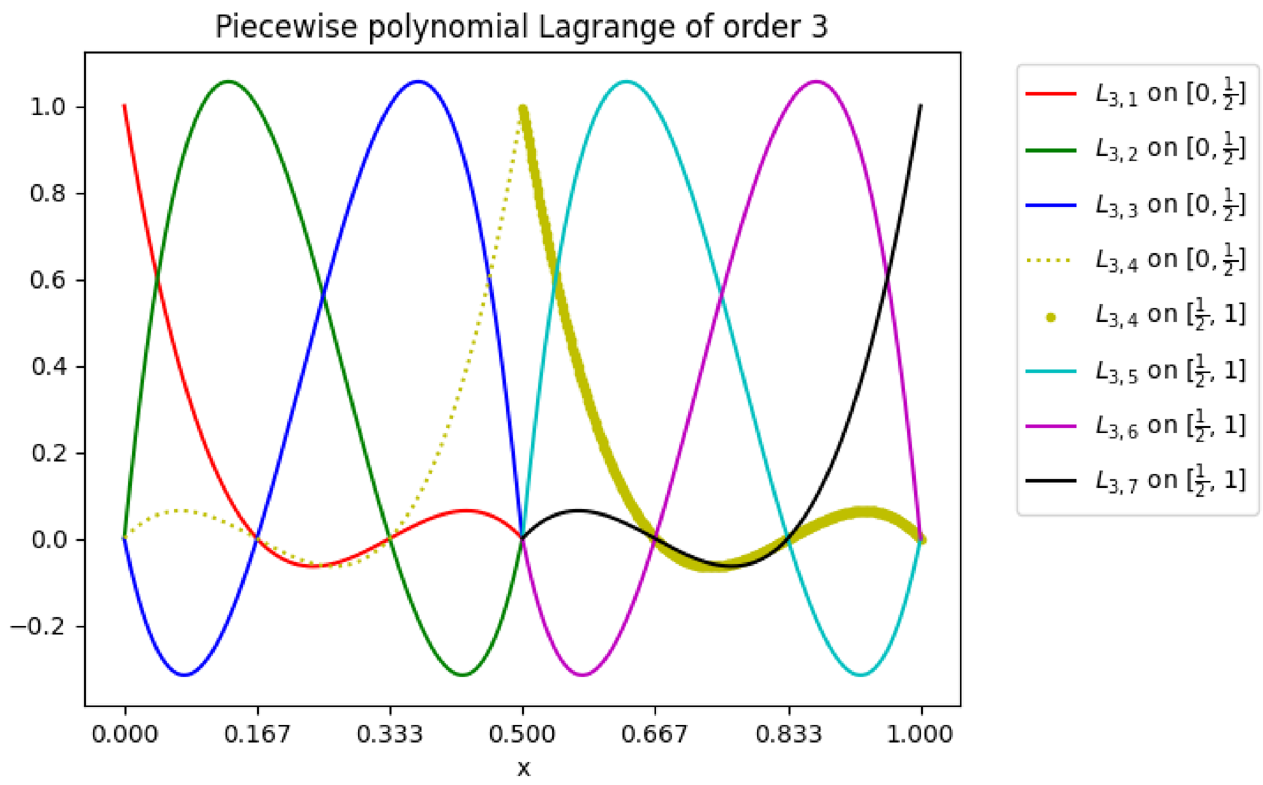
1. $f(x) = \cos x$.
2. $f(x) = \sqrt{1+x}$.
3. $f(x) = \ln(1+x)$.
4. $f(x) = \tan x$.

Bài làm. 1. Với $f(x) = \cos x$, ta tính được:

$$f(x_0) = \cos 0 = 1, f(x_1) = \cos 0.6 \approx 0.82533551, f(x_2) = \cos 0.9 \approx 0.62160997$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 1.

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0)L_{1,1}(x) + f(x_2)L_{1,2}(x) \\ &= \frac{9-10x}{9} + 0.62160997 \times \frac{10x}{9} \end{aligned}$$



Hình 6: *Đa thức từng phần Lagrange bậc 3 trên đoạn* $[0, 1]$

Ta được $f(x) \approx p_1(x), \forall x \in [0; 0.9]$, suy ra $f(0.45) \approx p_1(0.45) = 0.8108049841$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.9} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{0.9} |\cos x|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.8327436026$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f - p_1\| &= \left(\int_0^{0.9} |f(x) - p_1(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{0.9} \left|\cos x - \left(\frac{9-10x}{9} + 0.62160997 \times \frac{10x}{9}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 0.06197872\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f - p_1\|}{\|f\|} \approx 0.07442713$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 2.

$$\begin{aligned}p_2(x) &= f(x_0)L_{2,1}(x) + f(x_1)L_{2,2} + f(x_2)L_{2,3}(x) \\ &= \frac{50(x-0.6)(x-0.9)}{27} - 0.82533551 \times \frac{50x(x-0.9)}{9} + 0.62160997 \times \frac{100x(x-0.6)}{27} \\ &= -0.431086867x^2 - 0.03245518828x + 1\end{aligned}$$

Ta được $f(x) \approx p_2(x), \forall x \in [0; 0.9]$, suy ra $f(0.45) \approx p_2(0.45) = 0.8981000747$.

Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.9} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{0.9} |\cos x|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.8327436026$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f - p_2\| &= \left(\int_0^{0.9} |f(x) - p_2(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{0.9} \left|\cos x - (-0.431086867x^2 - 0.03245518828x + 1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2.26252225 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f - p_2\|}{\|f\|} = 2.716949422 \times 10^{-3}$$

2. Với $f(x) = \sqrt{1+x}$, ta tính được:

$$f(x_0) = \sqrt{1+0} = 1, f(x_1) = \sqrt{1+0.6} = 1.264911064, f(x_2) = \sqrt{1+0.9} = 1.378404875$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 1.

$$\begin{aligned}p_1(x) &= f(x_0)L_{1,1}(x) + f(x_2)L_{1,2}(x) \\ &= 0.420449861343358x + 1\end{aligned}$$

  Ta được $f(x) \approx p_1(x), \forall x \in [0; 0.9]$, suy ra $f(0.45) \approx p_1(0.45) = 1.189202437604511$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.9} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{0.9} |\sqrt{1+x}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.142365965879586$$

  – Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f - p_1\| &= \left(\int_0^{0.9} |f(x) - p_1(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{0.9} \left|\sqrt{1+x} - (0.420449861343358x + 1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.010427694208396\end{aligned}$$

  – Sai số tương đối:

$$\frac{\|f - p_1\|}{\|f\|} \approx 2.282038882427349 \times 10^{-5}$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 2.

$$\begin{aligned}p_2(x) &= f(x_0)L_{2,1}(x) + f(x_1)L_{2,2} + f(x_2)L_{2,3}(x) \\ &= -0.070228595896317x^2 + 0.483655597650043x + 1\end{aligned}$$

  Ta được $f(x) \approx p_2(x), \forall x \in [0; 0.9]$, suy ra $f(0.45) \approx p_2(0.45) = 1.203423728273515$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.9} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{0.9} |\sqrt{1+x}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.142365965879586$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f-p_2\| &= \left(\int_0^{0.9} |f(x)-p_2(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_0^{0.9} \left|\sqrt{1+x}-(-0.070228595896317x^2+0.483655597650043x+1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 8.378737670476489\times 10^{-4}\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f-p_2\|}{\|f\|} = 7.334547702517662\times 10^{-4}$$

3. Với $f(x)=\ln(1+x)$, ta tính được:

$$f(x_0)=0, f(x_1)=\ln(1+0.6)=0.4700036292, f(x_2)=\ln(1+0.9)=0.6418538862$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 1.

$$\begin{aligned}p_1(x) &= f(x_0)L_{1,1}(x)+f(x_2)L_{1,2}(x)\\ &= 0.713170984635994x\end{aligned}$$

Ta được $f(x)\approx p_1(x), \forall x\in[0;0.9]$, suy ra $f(0.45)\approx p_1(0.45)=0.320926943086197$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.9} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{0.9} |\ln(1+x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.379091563892749$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f-p_1\| &= \left(\int_0^{0.9} |f(x)-p_1(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_0^{0.9} |\ln(1+x)-0.713170984635994x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 0.0354471112655669\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f-p_1\|}{\|f\|} = 0.0935054077742426$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 2.

$$\begin{aligned}p_2(x) &= f(x_0)L_{2,1}(x)+f(x_1)L_{2,2}+f(x_2)L_{2,3}(x)\\ &= -0.233894658134107x^2+0.92367617695669x\end{aligned}$$

Ta được $f(x)\approx p_2(x), \forall x\in[0;0.9]$, suy ra $f(0.45)\approx p_2(0.45)=0.368290611358354$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\| = \left(\int_0^{0.9} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{0.9} |\ln(1+x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.379091563892749$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f-p_2\| &= \left(\int_0^{0.9}|f(x)-p_2(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_0^{0.9}\left|\ln(1+x)-(-0.233894658134107x^2+0.92367617695669x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 0.00379751244266909\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f-p_2\|}{\|f\|}=0.0100174016105077$$

4. Với $f(x)=\tan(x)$, ta tính được:

$$f(x_0)=0, f(x_1)=\tan(0.6)=0.6841368083, f(x_2)=\tan(0.9)=1.260158218$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 1.

$$\begin{aligned}p_1(x) &= f(x_0)L_{1,1}(x)+f(x_2)L_{1,2}(x)\\ &= 1.40017579727815x\end{aligned}$$

Ta được $f(x)\approx p_1(x), \forall x\in[0;0.9]$, suy ra $f(0.45)\approx p_1(0.45)=0.630079108775170$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\|=\left(\int_0^{0.9}|f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{0.9}|\tan x|^2\right)^{\frac{1}{2}}=0.600131833475228$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f-p_1\| &= \left(\int_0^{0.9}|f(x)-p_1(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_0^{0.9}|\tan x-1.40017579727815x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 0.1067168733\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f-p_1\|}{\|f\|}=0.1778223839$$

- Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 2.

$$\begin{aligned}p_2(x) &= f(x_0)L_{2,1}(x)+f(x_1)L_{2,2}+f(x_2)L_{2,3}(x)\\ &= 0.866492611251114x^2+0.620332447152153x\end{aligned}$$

Ta được $f(x)\approx p_2(x), \forall x\in[0;0.9]$, suy ra $f(0.45)\approx p_2(0.45)=0.454614354996819$. Tiếp theo, tôi sẽ đánh giá sai số, với:

$$\|f\|=\left(\int_0^{0.9}|f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{0.9}|\tan x|^2\right)^{\frac{1}{2}}=0.600131833475228$$

– Sai số tuyệt đối:

$$\begin{aligned}\|f-p_1\| &= \left(\int_0^{0.9} |f(x)-p_1(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_0^{0.9} \left|\tan x - (0.866492611251114x^2 + 0.620332447152153x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 0.02698404158\end{aligned}$$

– Sai số tương đối:

$$\frac{\|f-p_2\|}{\|f\|} = 0.024496352313$$

Yêu cầu 3.5. Cho $f(x) = e^x$ với $0 \le x \le 2$. Xấp xỉ $f(0.75)$ bằng cách sử dụng đa thức nội suy Lagrange bậc 1 với $x_0 = 0.5$ và $x_1 = 1$.

Bài làm. Với $f(x) = e^x$, ta tính được $f(x_0) = 1, f(x_1) = e$.
Xấp xỉ $f(x)$ bằng hàm Lagrange bậc 1:

$$\begin{aligned}p_1(x) &= f(x_0)L_{1,1}(x) + f(x_1)L_{1,2}(x)\\ &= 2 - 2x + e(2x-1)\end{aligned}$$

Ta được $f(x) \approx p_1(x), \forall x \in [x_0, x_1]$, suy ra $f(0.75) \approx p_1(0.75) = 1.859140914$.

Yêu cầu 3.6. Cho bảng giá trị sau:

X_i	8.1	8.3	8.6	8.7
$F(X_i)$	16.94410	17.56492	18.50515	18.82091

Sử dụng đa thức nội suy Lagrange bậc 1, 2, 3 để xấp xỉ $F(8.4)$.

Bài làm. 1. Đa thức nội suy Lagrage bậc 1. Xét $X_0 = 8.3$ và $X_1 = 8.6$, ta sẽ xấp xỉ $F(X_i)$ bằng hàm Lagrange bậc 1 như sau:

$$\begin{aligned}p_1(x) &= F(X_0)L_{1,1}(x) + F(X_1)L_{1,2}(x)\\ &= 17.56492 \times \frac{x-8.6}{8.3-8.6} + 18.50515 \times \frac{x-8.3}{8.6-8.3}\end{aligned}$$

Ta được $F(X_i) \approx p_1(x), \forall x \in [X_0, X_1]$, suy ra $F(8.4) \approx p_1(8.4) = 17.87833$.

2. Đa thức nội suy Lagrage bậc 2. Xét $X_0 = 8.1, X_1 = 8.3, X_2 = 8.6$, ta sẽ xấp xỉ $F(X_i)$ bằng hàm Lagrange bậc 2 như sau:

$$\begin{aligned}p_2(x) &= F(X_0)L_{2,1}(x) + F(X_1)L_{2,2}(x) + F(X_2)L_{2,3}(x)\\ &= 16.94410(10x^2 - 169x + 713.8) + 17.56492\left(-\frac{50x^2}{3} + \frac{835x}{3} - 1161\right)\\ &+ 18.50515\left(\frac{20x^2}{3} - \frac{328x}{3} + 448.2\right)\end{aligned}$$

Ta được $F(X_i) \approx p_2(x), \forall x \in [X_0, X_2]$, suy ra $F(8.4) \approx p_2(8.4) = 17.87713$.

3. Đa thức nội suy Lagrage bậc 3. Xét $X_0 = 8.1, X_1 = 8.3, X_2 = 8.6, X_4 = 8.7$, ta sẽ xấp xỉ $F(X_i)$ bằng hàm Lagrange bậc 2 như sau:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= F(X_0)L_{3,1}(x) + F(X_1)L_{3,2}(x) + F(X_2)L_{3,3}(x) + F(X_3)L_{3,4}(x) \\
&= 16.94410\left(-\frac{50x^3}{3} + \frac{1280x^2}{3} - \frac{21841x}{6} + 10350.1\right) \\
&+ 17.56492\left(\frac{125x^3}{3} - \frac{3175x^2}{3} + 8956.25x - 25251.75\right) \\
&+ 18.50515\left(-\frac{200x^3}{3} + \frac{5020x^2}{3} - 13994x + 38993.4\right) \\
&+ 18.82091\left(\frac{125x^3}{3} - \frac{3125x^2}{3} + \frac{104135x}{12} - 24090.75\right)
\end{aligned}$$

Ta được $F(X_i) \approx p_3(x), \forall x \in [X_0, X_3]$, suy ra $F(8.4) \approx p_3(8.4) = 17.877142500053$.

4 Xấp xỉ tích phân bằng các phương pháp Newton-Cotes

Những tài liệu tôi đã tham khảo trong chương này là [TH24], [BF10], [Wik24c] và [Wei24].

Yêu cầu 4.1. Trình bày cách xây dựng tìm điểm cầu phương và trọng số cầu phương trong các trường hợp 1, 2, 3, 4, 5 điểm cầu phương (tương ứng trọng số cầu phương).

Bài làm. Phương pháp cầu phương:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Trong đó:

- c_i là trọng số cầu phương.
- x_i là điểm cầu phương.
- $\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ là công thức cầu phương.

Và nhiệm vụ của chúng ta là xác định c_i cùng với x_i.

1. Phương pháp Newton-Cotes bậc 1.

$$\begin{array}{ccc} \xi_1 & & \xi_2 \\ \bullet & \text{———————} & \bullet \\ -1 & & 1 \end{array}$$

Xét:

$$\mathcal{L}_{1,1}(\xi) = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi),\ \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2]$$
$$\mathcal{L}_{1,2}(\xi) = \frac{\xi + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}(1 + \xi),\ \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2]$$

Ta có:

$$f(\xi) \approx f(-1)\mathcal{L}_{1,1}(\xi) + f(1)\mathcal{L}_{1,2}(\xi)$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(\xi) \approx f(-1)\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_{1,1}(\xi)d\xi + f(1)\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_{1,2}(\xi)d\xi$$

Suy ra:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx f(-1) + f(1)}$$

Vậy $c_i = \{1, 1\}_{i=\overline{1,2}}$ và $x_i = \{-1, 1\}_{i=\overline{1,2}}$.

2. Phương pháp Newton-Cotes bậc 2.

$$\begin{array}{ccccc} \xi_1 & & \xi_2 & & \xi_3 \\ \bullet & \text{————} & \bullet & \text{————} & \bullet \\ -1 & & 0 & & 1 \end{array}$$

Xét:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,1}(\xi) &= \frac{\xi(\xi-1)}{-1(-1-1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi-1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_3] \\
\mathcal{L}_{2,2}(\xi) &= (1-\xi)(1+\xi),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_3] \\
\mathcal{L}_{2,3}(\xi) &= \frac{\xi(\xi+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi+1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_3]
\end{aligned}$$

Ta có:

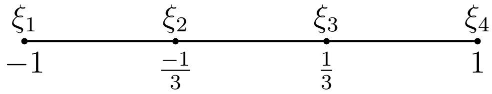
$$\begin{aligned}
& f(\xi) \approx f(-1)\mathcal{L}_{2,1}(\xi) + f(0)\mathcal{L}_{2,2}(\xi) + f(1)\mathcal{L}_{2,3}(\xi) \\
\Rightarrow & \int_{-1}^{1} f(\xi) \approx f(-1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{2,1}(\xi)d\xi + f(0)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{2,2}(\xi)d\xi + f(1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{2,3}(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)}$$

Vậy $c_i = \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right\}_{i=\overline{1,3}}$ và $x_i = \{-1, 0, 1\}_{i=\overline{1,3}}$.

3. Phương pháp Newton-Cotes bậc 3.



Xét:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3,1}(\xi) &= \frac{-9}{16}\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi-1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_4] \\
\mathcal{L}_{3,2}(\xi) &= \frac{27}{16}(\xi+1)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi-1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_4] \\
\mathcal{L}_{3,3}(\xi) &= -\frac{27}{16}(\xi+1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(\xi-1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_4] \\
\mathcal{L}_{3,4}(\xi) &= \frac{9}{16}(\xi+1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_4]
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
& f(\xi) \approx f(-1)\mathcal{L}_{3,1}(\xi) + f\left(-\frac{1}{3}\right)\mathcal{L}_{3,2}(\xi) + f\left(\frac{1}{3}\right)\mathcal{L}_{3,3}(\xi) + f(1)\mathcal{L}_{3,4}(\xi) \\
\Rightarrow & \int_{-1}^{1} f(\xi) \approx f(-1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{3,1}(\xi)d\xi + f\left(-\frac{1}{3}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{3,2}(\xi)d\xi + f\left(\frac{1}{3}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{3,3}(\xi)d\xi + f(1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{3,4}(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx \frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}f(1)}$$

Vậy $c_i = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}_{i=\overline{1,4}}$ và $x_i = \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}_{i=\overline{1,4}}$.

4. Phương pháp Newton-Cotes bậc 4.

$$\begin{array}{ccccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_3 & \xi_4 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Xét:

$$\mathcal{L}_{4,1}(\xi) = \frac{2}{3}\xi\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_5]$$

$$\mathcal{L}_{4,2}(\xi) = -\frac{8}{3}\xi(\xi + 1)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_5]$$

$$\mathcal{L}_{4,3}(\xi) = 4(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_5]$$

$$\mathcal{L}_{4,4}(\xi) = -\frac{8}{3}\xi(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{2}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_5]$$

$$\mathcal{L}_{4,5}(\xi) = \frac{2}{3}\xi(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\left(\xi - \frac{1}{2}\right),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_5]$$

Ta có:

$$f(\xi) \approx f(-1)\mathcal{L}_{4,1}(\xi) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}_{4,2}(\xi) + f(0)\mathcal{L}_{4,3}(\xi) + f\left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}_{4,4}(\xi) + f(1)\mathcal{L}_{4,5}(\xi)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(\xi) \approx f(-1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{4,1}(\xi)d\xi + f\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{4,2}(\xi)d\xi + f(0)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{4,3}(\xi)d\xi$$
$$+ f\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{4,4}(\xi)d\xi + f(1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{4,5}(\xi)d\xi$$

Suy ra:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx \frac{7}{45}f(-1) + \frac{32}{45}f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{15}f(0) + \frac{32}{45}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{45}f(1)}$$

Vậy $c_i = \left\{\frac{7}{45}, \frac{32}{45}, \frac{4}{15}, \frac{32}{45}, \frac{7}{45}\right\}_{i=\overline{1,5}}$ và $x_i = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}_{i=\overline{1,5}}$.

5. Phương pháp Newton-Cotes bậc 5.

$$\begin{array}{cccccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_4 \\ -1 & -\frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}$$

Xét:

$$\mathcal{L}_{5,1}(\xi) = -\frac{625}{768}\left(\xi + \frac{3}{5}\right)\left(\xi + \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{3}{5}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_6]$$

$$\mathcal{L}_{5,2}(\xi) = \frac{3125}{768}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{3}{5}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_6]$$

$$\mathcal{L}_{5,3}(\xi) = -\frac{3125}{384}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{3}{5}\right)\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{3}{5}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_6]$$

$$\mathcal{L}_{5,4}(\xi) = \frac{3125}{384}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{3}{5}\right)\left(\xi + \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{3}{5}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_6]$$

$$\mathcal{L}_{5,5}(\xi) = -\frac{3125}{768}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{3}{5}\right)\left(\xi + \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{1}{5}\right)(\xi - 1),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_6]$$

$$\mathcal{L}_{5,6}(\xi) = \frac{625}{768}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{3}{5}\right)\left(\xi + \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\left(\xi - \frac{3}{5}\right),\ \forall\xi \in [\xi_1, \xi_6]$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(\xi) &\approx f(-1)\mathcal{L}_{5,1}(\xi) + f\left(-\frac{3}{5}\right)\mathcal{L}_{5,2}(\xi) + f\left(-\frac{1}{5}\right)\mathcal{L}_{5,3}(\xi) + f\left(\frac{1}{5}\right)\mathcal{L}_{5,4}(\xi) \\
&\quad + f\left(\frac{3}{5}\right)\mathcal{L}_{5,5}(\xi) + f(1)\mathcal{L}_{5,6}(\xi) \\
\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(\xi) &\approx f(-1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{5,1}(\xi)d\xi + f\left(-\frac{3}{5}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{5,2}(\xi)d\xi + f\left(-\frac{1}{5}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{5,3}(\xi)d\xi \\
&\quad + f\left(\frac{1}{5}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{5,4}(\xi)d\xi + f\left(\frac{3}{5}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{5,5}(\xi)d\xi + f(1)\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_{5,6}(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx \frac{19}{144}f(-1) + \frac{25}{48}f\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{25}{72}f\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{72}f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{48}f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{19}{144}f(1)}$$

Vậy $c_i = \left\{\frac{19}{144}, \frac{25}{48}, \frac{25}{72}, \frac{25}{72}, \frac{25}{48}, \frac{19}{144}\right\}_{i=\overline{1,6}}$ và $x_i = \left\{-1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right\}_{i=\overline{1,6}}$.

Yêu cầu 4.2. Trình bày lý thuyết đánh giá sai số tương ứng từng trường hợp 1, 2, 3, 4, 5 điểm cầu phương.

Bài làm. Dựa theo định nghĩa phương pháp cầu phương đã trình bày trong *Yêu cầu 4.1*, ta có $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]; x_i \neq x_j, i \neq j, \forall i, j \in \overline{0,n}$.

Xét đa thức nội suy Lagrange, ta có:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n}\frac{x-x_i}{x_i-x_j}\right) \\
f(x) &\approx P_n(x), \forall x \in [a,b] \\
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_{n,i}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \qquad \text{(YC4.2.1)}
\end{aligned}$$

với $\xi_x \in [a,b]$ và ξ_x phụ thuộc x. Từ (YC4.2.1), ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\underbrace{\int_a^b L_{n,i}(x)dx}_{c_i} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx
\end{aligned}$$

Giả sử tồn tại $M \in \mathbb{R}$ sao cho $|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_i\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\int_a^b \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| dx$$

Tiếp theo, tôi sẽ xem xét định lý sau trước khi thực hiện đánh giá sai số theo từng bậc của phương pháp cầu phương Newton-Cotes theo như đề yêu cầu:

Định lí 4.1 (Mean value theorem for integral). *Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$ và g là khả tích và không đổi dấu trên $[a, b]$ (nghĩa là $g(x) \geq 0$ hoặc $g(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$) thì tồn tại $\xi \in [a, b]$, thỏa:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

□

1. Trường hợp bậc 1:

   $x_0 = a$ $\qquad\qquad\qquad$ $x_1 = b$

   Xét $h = b - a, n = 1$:

$$P_1(x) = f(x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) + f(x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$$
$$\Rightarrow c_0 = \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx = \frac{h}{2} \text{ và } \int_a^b \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}dx = \frac{h}{2}$$

   Ta được:

$$\int_a^b P_1(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$
$$\Rightarrow E_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \xi_x \in (a, b)$$

   Đặt $g(x) = (x - x_0)(x - x_1) = (x - a)(x - b), \forall x \in [a, b]$, ta được $g(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ (do với x bất kỳ thì ta luôn có $a \leq x \leq b$) và

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]\right| \leq \frac{1}{2!}\left|\int_a^b f^{(2)}(\xi_x)g(x)dx\right|$$

   Ta áp dụng *Định lý 4.1* để tính:

$$\int_a^b f^{(2)}(\xi_x)g(x)dx = f^{(2)}(\eta)\int_a^b g(x)dx$$

   với $\eta \in (a, b)$ và η không phụ thuộc x. Khi đó ta được:

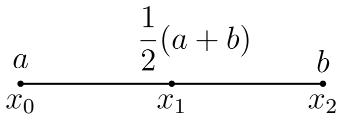
$$\begin{aligned}\int_a^b E_1(x)dx &= \frac{f^{(2)}(\eta)}{2!}\int_a^b g(x)dx = \frac{f^{(2)}(\eta)}{2!}\int_a^b (x - a)(x - b)dx \\ &= \frac{f^{(2)}(\eta)}{2!}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(a + b) + abx\right]\Bigg|_a^b \\ &= -\frac{1}{12}f''(\eta)(b - a)^3 = -\frac{1}{12}f''(\eta)h^3\end{aligned}$$

   Ta được đánh giá sai số cho Newton-Cotes bậc 1 là:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]\right| \leq \frac{h^3}{12}|f''(\eta)|}$$

   với $\eta \in (a, b), h = b - a$.

2. Trường hợp bậc 2:



Xét $h = \dfrac{b-a}{2}, n = 2$, ta có:

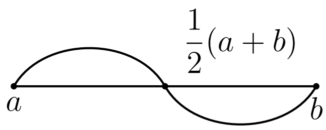
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + \int_a^b E_2(x)dx$$

trong đó:

- $$\begin{aligned}\int_a^b P_2(x)dx &= f(x_0)\int_a^b L_{2,0}(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_{2,1}(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_{2,2}(x)dx \\ &= h\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]\end{aligned}$$

- $$\int_a^b E_2(x)dx = \frac{1}{3!}\int_a^b f^{(3)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)dx$$

Đặt $g(x) = \prod_{i=0}^{2}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x-a)\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)(x-b), \forall x \in [a,b]$, ta có $g(x)$ đổi dấu trên $[a,b]$:



Xét:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_2(x)dx\right| \le \left|\int_a^b E_2(x)dx\right| = \frac{1}{3!}\left|\int_a^b f^{(3)}(\xi_x)g(x)dx\right|$$

Ta áp dụng *Định lý 4.1* để tính:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(3)}(\xi_x)g(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f^{(3)}(\xi_x)g(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f^{(3)}(\xi_x)g(x)dx \\ &= f^{(3)}(\eta_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(x)dx + f^{(3)}(\eta_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(x)dx\end{aligned}$$

với $\eta_1 \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$ và $\eta_2 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$. Khi đó ta được:

$$\begin{aligned}
\int_a^b E_2(x)dx &= \frac{1}{3!}\int_a^b f^{(3)}(\xi_x)g(x)dx \\
&= \frac{1}{3!}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} E_3(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b E_3(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{3!}\left(f^{(3)}(\eta_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \underbrace{g(x)}_{\geq 0}dx + f^{(3)}(\eta_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b \underbrace{g(x)}_{\leq 0}dx\right) \\
&= \frac{h^4}{24}[f^{(3)}(\eta_1) - f^{(3)}(\eta_2)]
\end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx \\
&= \frac{1}{64}(a-b)^4 = \frac{1}{64}(2h)^4 = \frac{h^4}{4}
\end{aligned}$$

và

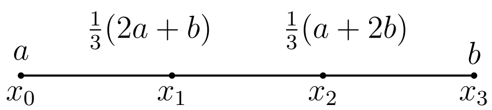
$$\begin{aligned}
\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(x)dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx \\
&= -\frac{1}{64}(a-b)^4 = -\frac{h^4}{4}
\end{aligned}$$

Ta được đánh giá sai số cho Newton-Cotes bậc 2 là:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx - h\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]\right| \leq \frac{h^4}{24}\left|f^{(3)}(\eta_1) - f^{(3)}(\eta_2)\right|}$$

với $\eta_1 \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$ và $\eta_2 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$, $h = \dfrac{b-a}{2}$.

3. Trường hợp bậc 3:



Xét $h = \dfrac{b-a}{3}, n = 3$, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_3(x)dx + \int_a^b E_3(x)dx$$

trong đó:

-

$$\begin{aligned}\int_a^b P_3(x)dx &= f(x_0)\int_a^b L_{3,0}(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_{3,1}(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_{3,2}(x)dx\\ &+ f(x_3)\int_a^b L_{3,3}(x)dx\\ &= f(a)\frac{1}{3}(b-a) + f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\frac{3}{8}(b-a) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\frac{3}{8}(b-a) + f(b)\frac{1}{8}(b-a)\\ &= h\left[\frac{3}{8}f(a) + \frac{9}{8}f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{9}{8}f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \frac{3}{8}f(b)\right]\end{aligned}$$

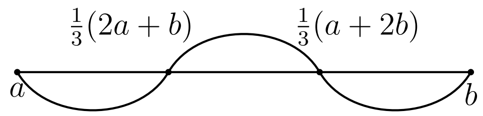
-

$$\int_a^b E_3(x)dx = \frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{3}(x-x_i)dx$$

Đặt

$$g(x) = \prod_{i=0}^{3}(x-x_i) = (x-a)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)(x-b), \forall x\in[a,b]$$

ta có $g(x)$ đổi dấu trên $[a,b]$:



Xét:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_3(x)dx\right| \le \left|\int_a^b E_3(x)dx\right| = \frac{1}{4!}\left|\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)g(x)dx\right|$$

Ta áp dụng *Định lý 4.1* để tính:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)g(x)dx &= \int_a^{\frac{1}{3}(2a+b)} f^{(4)}(\xi_x)g(x)dx + \int_{\frac{1}{3}(2a+b)}^{\frac{1}{3}(a+2b)} f^{(4)}(\xi_x)g(x)dx + \int_{\frac{1}{3}(a+2b)}^{b} f^{(4)}(\xi_x)g(x)dx\\ &= f^{(4)}(\eta_1)\int_a^{\frac{1}{3}(2a+b)} g(x)dx + f^{(4)}(\eta_2)\int_{\frac{1}{3}(2a+b)}^{\frac{1}{3}(a+2b)} g(x)dx + f^{(4)}(\eta_3)\int_{\frac{1}{3}(a+2b)}^{b} g(x)dx\end{aligned}$$

với $\eta_1 \in \left(a, \frac{1}{3}(2a+b)\right)$, $\eta_2 \in \left(\frac{1}{3}(2a+b), \frac{1}{3}(a+2b)\right)$ và $\eta_3 \in \left(\frac{1}{3}(a+2b), b\right)$. Khi đó ta được:

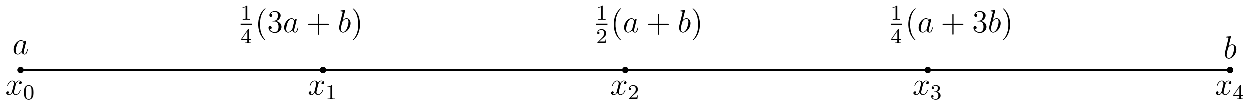
$$\begin{aligned}\int_a^b E_3(x)dx &= \frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)g(x)dx\\ &= \frac{1}{4!}\left(f^{(4)}(\eta_1)\int_a^{\frac{1}{3}(2a+b)} g(x)dx + f^{(4)}(\eta_2)\int_{\frac{1}{3}(2a+b)}^{\frac{1}{3}(a+2b)} g(x)dx + f^{(4)}(\eta_3)\int_{\frac{1}{3}(a+2b)}^{b} g(x)dx\right)\\ &= \frac{h^5}{4!}\left[-\frac{19}{30}f^{(4)}(\eta_1) + \frac{11}{30}f^{(4)}(\eta_2) - \frac{19}{30}f^{(4)}(\eta_3)\right]\end{aligned}$$

Ta được đánh giá sai số cho Newton-Cotes bậc 3 là:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - h\left[\frac{3}{8}f(a) + \frac{9}{8}f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{9}{8}f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \frac{3}{8}f(b)\right]\right| \\ \leq \frac{h^5}{4!}\left|-\frac{19}{30}f^{(4)}(\eta_1) + \frac{11}{30}f^{(4)}(\eta_2) - \frac{19}{30}f^{(4)}(\eta_3)\right|$$

với $\eta_1 \in \left(a, \frac{1}{3}(2a+b)\right)$, $\eta_2 \in \left(\frac{1}{3}(2a+b), \frac{1}{3}(a+2b)\right)$ và $\eta_3 \in \left(\frac{1}{3}(a+2b), b\right)$, $h = \frac{b-a}{3}$.

4. Trường hợp bậc 4:



Xét $h = \frac{b-a}{4}, n = 4$, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_4(x)dx + \int_a^b E_4(x)dx$$

trong đó:

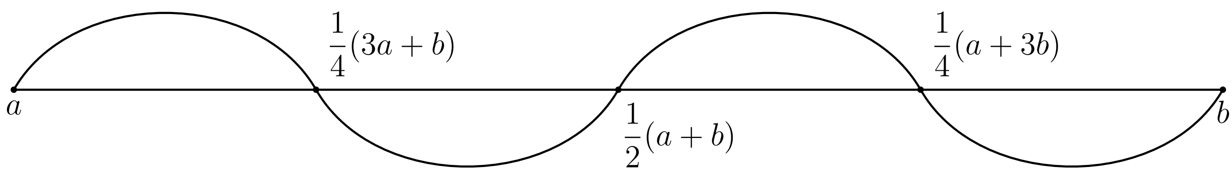
- $$\begin{aligned}\int_a^b P_4(x)dx &= f(x_0)\int_a^b L_{4,0}(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_{4,1}(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_{4,2}(x)dx \\ &+ f(x_3)\int_a^b L_{4,3}(x)dx + f(x_4)\int_a^b L_{4,4}(x)dx \\ &= f(a)\frac{7}{90}(b-a) + f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\frac{16}{45}(b-a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{15}(b-a) \\ &+ f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\frac{16}{45}(b-a) + f(b)\frac{7}{90}(b-a) \\ &= h\left[\frac{7}{90}f(a) + \frac{16}{45}f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{2}{15}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{16}{45}f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{7}{90}f(b)\right]\end{aligned}$$

- $$\int_a^b E_4(x)dx = \frac{1}{5!}\int_a^b f^{(5)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{4}(x-x_i)dx$$

Đặt

$$g(x) = \prod_{i=0}^{4}(x-x_i) = (x-a)\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+3b}{4}\right)(x-b), \forall x \in [a,b]$$

ta có $g(x)$ đổi dấu trên $[a,b]$:



Xét:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_4(x)dx\right| \le \left|\int_a^b E_4(x)dx\right| = \frac{1}{5!}\left|\int_a^b f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx\right|$$

Ta áp dụng *Định lý 4.1* để tính:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx &= \int_a^{\frac{1}{4}(3a+b)} f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx + \int_{\frac{1}{4}(3a+b)}^{\frac{1}{2}(a+b)} f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx \\
&+ \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{\frac{1}{4}(a+3b)} f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx + \int_{\frac{1}{4}(a+3b)}^{b} f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx \\
&= f^{(5)}(\eta_1)\int_a^{\frac{1}{4}(3a+b)} g(x)dx + f^{(5)}(\eta_2)\int_{\frac{1}{4}(3a+b)}^{\frac{1}{2}(a+b)} g(x)dx \\
&+ f^{(5)}(\eta_3)\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{\frac{1}{4}(a+3b)} g(x)dx + f^{(5)}(\eta_4)\int_{\frac{1}{4}(a+3b)}^{b} g(x)dx
\end{aligned}$$

với $\eta_{i+1} \in (x_i, x_{i+1}), i = \overline{0,4}$. Khi đó ta được:

$$\begin{aligned}
\int_a^b E_4(x)dx &= \frac{1}{5!}\int_a^b f^{(5)}(\xi_x)g(x)dx \\
&= \frac{1}{5!}\Bigg(f^{(5)}(\eta_1)\int_a^{\frac{1}{4}(3a+b)} g(x)dx + f^{(5)}(\eta_2)\int_{\frac{1}{4}(3a+b)}^{\frac{1}{2}(a+b)} g(x)dx \\
&+ f^{(5)}(\eta_3)\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{\frac{1}{4}(a+3b)} g(x)dx + f^{(5)}(\eta_4)\int_{\frac{1}{4}(a+3b)}^{b} g(x)dx\Bigg) \\
&= \frac{h^6}{5!}\left[\frac{9}{4}f^{(5)}(\eta_1) - \frac{11}{12}f^{(5)}(\eta_2) + \frac{11}{12}f^{(5)}(\eta_3) - \frac{9}{4}f^{(5)}(\eta_4)\right]
\end{aligned}$$

Ta được đánh giá sai số cho Newton-Cotes bậc 4 là:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx - h\left[\frac{7}{90}f(a) + \frac{16}{45}f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{2}{15}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{16}{45}f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{7}{90}f(b)\right]\right| \\
&\qquad \le \frac{h^6}{5!}\left|\frac{9}{4}f^{(5)}(\eta_1) - \frac{11}{12}f^{(5)}(\eta_2) + \frac{11}{12}f^{(5)}(\eta_3) - \frac{9}{4}f^{(5)}(\eta_4)\right|
\end{aligned}}$$

với $\eta_{i+1} \in (x_i, x_{i+1}), i = \overline{0,4}$, $h = \dfrac{b-a}{4}$.

Yêu cầu 4.3. Xác định tên gọi tương ứng các trường hợp trong *Yêu cầu 4.1.*

Bài làm. Tên gọi tương ứng với từng bậc n là:

- $n = 1$: Trapezoidal rule.
- $n = 2$: Simpson's rule.
- $n = 3$: Simpson's Three-Eighths rule.
- $n = 4$: Boole's rule.
- $n = 5$: Higher order rules.

Yêu cầu 4.4. Sử dụng các công thức Newton-Cotes đóng để xấp xỉ các tích phân sau.

$$a) \int_0^1 \ln(1+x)dx. \qquad b) \int_2^5 \sqrt{1+x^2}dx. \qquad c) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx.$$

Bài làm. a) Xét $f(x) = \ln(1+x), x \in [0,1]; \xi_x = 2x - 1$, ta được:

x	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
ξ	-1	-3/5	-1/5	1/5	3/5	1

Tính toán xấp xỉ tích phân bằng phương pháp Newton-Cotes bậc 5:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi+3}{2}\right)d\xi, \text{ đặt } g(\xi) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi+3}{2}\right)\\ &\approx \frac{19}{144}g(-1) + \frac{25}{48}g\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{25}{72}g\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{72}g\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{48}g\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{19}{144}g(1)\\ &= 0.38629064705274974\end{aligned}$$

b) Xét $f(x) = \sqrt{1+x^2}, x \in [2,5]; \xi_x = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{3}$, ta được:

x	2	13/5	16/5	19/5	22/5	5
ξ	-1	-3/5	-1/5	1/5	3/5	1

Tính toán xấp xỉ tích phân bằng phương pháp Newton-Cotes bậc 5:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \sqrt{1+x^2}dx &= \int_{-1}^1 \frac{3}{2}\sqrt{1+\left(\frac{3\xi+7}{2}\right)^2}d\xi, \text{ đặt } g(\xi) = \frac{3}{2}\sqrt{1+\left(\frac{3\xi+7}{2}\right)^2}\\ &\approx \frac{19}{144}g(-1) + \frac{25}{48}g\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{25}{72}g\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{72}g\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{48}g\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{19}{144}g(1)\\ &= 10.945909217241272\end{aligned}$$

x	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
ξ	-1	-3/5	-1/5	1/5	3/5	1

c) Xét $f(x) = \sin^2(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \xi_x = \frac{4}{\pi}x - 1$, ta được:

Tính toán xấp xỉ tích phân bằng phương pháp Newton-Cotes bậc 5:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}\sin^2\left(\frac{\pi(\xi+1)}{4}\right)d\xi, \text{ đặt } g(\xi) = \frac{\pi}{4}\sin^2\left(\frac{\pi(\xi+1)}{4}\right)$$
$$\approx \frac{19}{144}g(-1) + \frac{25}{48}g\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{25}{72}g\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{72}g\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{25}{48}g\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{19}{144}g(1)$$
$$= 0.7853981633974483$$

Yêu cầu 4.5. Sử dụng quy tắc Composite Simpson, Composite Trapezoidal và Composite Midpoint để tính giá trị xấp xỉ tích phân sau:

a) $\int_0^{\pi} x^2\cos(x)dx$ với $n = 6$.

b) $\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2(x)dx$ với $n = 4$.

c) $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}dx$ với $n = 8$.

d) $\int_{-0.5}^{0.5} x\ln(x+1)dx$ với $n = 6$.

Bài làm. Tôi sẽ tham khảo các định lý về quy tắc Composite Simpson, Composite Trapezoidal và Composite Midpoint trong *Chương 4, sách [BF10]* như sau:

Định lí 4.2. *Cho $f \in C^4[a,b]$, n là số chẵn, $h = \frac{b-a}{n}$, và $x_j = a + jh$, với mỗi $j = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó tồn tại $\mu \in (a,b)$ sao cho **Quy tắc Composite Simpson** với n đoạn con có thể được viết như sau:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] + \mathcal{O}(h^4)$$

Trong đó, sai số tổng hợp theo quy tắc Composite Simson là $\mathcal{O}(h^4) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$. □

Định lí 4.3. *Cho $f \in C^2[a,b], h = \frac{b-a}{n}$, và $x_j = a + jh$, với mỗi $j = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó tồn tại $\mu \in (a,b)$ sao cho **Quy tắc Composite Trapezoidal** với n đoạn con có thể được viết với số hạng sai số như sau:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

□

Định lí 4.4. *Cho $f \in C^2[a,b], n$ là số chẵn, $h = \frac{b-a}{n+2}$, và $x_j = a + (j+1)h$ với mỗi $j = -1, 0, \ldots, n+1$. Khi đó tồn tại $\mu \in (a,b)$ sao cho **Quy tắc Composite Midpoint** với $n+2$ đoạn con có thể được viết với số hạng sai số như sau:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu).$$

□

a) Đặt $n = 6$ và $f(x) = x^2 \cos x, x \in [0, \pi]$.

– Quy tắc Composite Simpson: Ta có $f^{(4)}(x) = x^2 \cos x + 8x \sin x - 12 \cos x \in C^4[0, \pi]$. Xét $h = \dfrac{\pi}{6}$ và $x_j = jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 6$. Áp dụng *Định lý 4.2*, ta có:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$
$$= \frac{\pi}{18}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{3} f(x_{2j-1}) + f(\pi)\right]$$
$$= -6.27486838845312$$

– Quy tắc Composite Trapezoidal: Ta có

$$f^{(2)}(x) = -x^2 \cos x - 4x \sin x + 2\cos x \in C^2[0, \pi]$$

Xét $h = \dfrac{\pi}{6}$ và $x_j = jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 6$. Áp dụng *Định lý 4.3*, ta có:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] = \frac{\pi}{12}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{5} f(x_j) + f(\pi)\right]$$
$$= -6.42872221802316$$

– Quy tắc Composite Midpoint: Ta có

$$f^{(2)}(x) = -x^2 \cos x - 4x \sin x + 2\cos x \in C^2[0, \pi]$$

Xét $h = \dfrac{\pi}{8}$ và $x_j = (j+1)h$ với mỗi $j = -1, 0, \ldots, 7$. Áp dụng *Định lý 4.4*, ta có:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \approx 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \frac{\pi}{4}\sum_{j=0}^{3} f(x_{2j}) = -2.74059356249829$$

b) Đặt $n = 4$ và $f(x) = \cos^2 x, x \in [-0.5, 0.5]$.

– Quy tắc Composite Simpson: Ta có $f^{(4)}(x) = 8(-\sin^2 x + \cos^2 x) \in C^4[-0.5, 0.5]$. Xét $h = \dfrac{1}{4}$ và $x_j = -0.5 + jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 4$. Áp dụng *Định lý 4.2*, ta có:

$$\int_{0.5}^{-0.5} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left[f(-0.5) + 2f(x_2) + 4\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j-1}) + f(0.5)\right]$$
$$= 0.920886046119136$$

– Quy tắc Composite Trapezoidal: Ta có $f^{(2)}(x) = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) \in C^2[-0.5, 0.5]$. Xét $h = \dfrac{1}{4}$ và $x_j = -0.5 + jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 4$. Áp dụng *Định lý 4.3*, ta có:

$$\int_{0.5}^{-0.5} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] = \frac{1}{8}\left[f(-0.5) + 2\sum_{j=1}^{3} f(x_j) + f(0.5)\right]$$
$$= 0.911933428706111$$

– Quy tắc Composite Midpoint: Ta có $f^{(2)}(x) = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) \in C^2[-0.5, 0.5]$. Xét $h = \dfrac{1}{6}$ và $x_j = -0.5 + (j+1)h$ với mỗi $j = -1, 0, \ldots, 5$. Áp dụng *Định lý 4.4*, ta có:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \approx 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{2} f(x_{2j}) = 0.905036033082936$$

c) Đặt $n = 8$ và $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x}}, x \in [3, 5]$.

– Quy tắc Composite Simpson: Ta có

$$f^{(4)}(x) = \frac{3\left(3 - \dfrac{15\left(2x-1\right)^2}{2x\left(x-1\right)} + \dfrac{35\left(2x-1\right)^4}{16x^2\left(x-1\right)^2}\right)}{\left(x\left(x-1\right)\right)^{\frac{5}{2}}} \in C^4[3, 5]$$

Xét $h = \dfrac{1}{4}$ và $x_j = 3 + jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 8$. Áp dụng *Định lý 4.2*, ta có:

$$\begin{aligned}\int_3^5 f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] \\ &= \frac{1}{12}\left[f(3) + 2\sum_{j=1}^{3} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{4} f(x_{2j-1}) + f(5)\right] \\ &= 0.594842908383301\end{aligned}$$

– Quy tắc Composite Trapezoidal: Ta có

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1 + \dfrac{3\left(2x-1\right)^2}{4x\left(x-1\right)}}{\left(x\left(x-1\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \in C^2[3, 5]$$

Xét $h = \dfrac{1}{4}$ và $x_j = 3 + jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 6$. Áp dụng *Định lý 4.3*, ta có:

$$\begin{aligned}\int_3^5 f(x)\,dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] = \frac{1}{8}\left[f(3) + 2\sum_{j=1}^{7} f(x_j) + f(5)\right] \\ &= 0.595462268279054\end{aligned}$$

– Quy tắc Composite Midpoint: Ta có

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1 + \dfrac{3\left(2x-1\right)^2}{4x\left(x-1\right)}}{\left(x\left(x-1\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \in C^2[3, 5]$$

Xét $h = \dfrac{1}{5}$ và $x_j = 3 + (j+1)h$ với mỗi $j = -1, 0, \ldots, 9$. Áp dụng *Định lý 4.4*, ta có:

$$\int_3^5 f(x)\,dx \approx 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \frac{2}{5} \sum_{j=0}^{4} f(x_{2j}) = 0.633358775039934$$

d) Đặt $n = 6$ và $f(x) = x\ln(x+1), x \in [-0.5, 0.5]$.

– Quy tắc Composite Simpson: Ta có $f^{(4)}(x) = \dfrac{2\left(-\dfrac{3x}{x+1}+4\right)}{(x+1)^3} \in C^4[-0.5, 0.5]$. Xét $h = \dfrac{1}{6}$ và $x_j = -0.5 + jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 6$. Áp dụng *Định lý 4.2*, ta có:

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{-0.5} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]\\ &= \frac{1}{18}\left[f(3) + 2\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{3} f(x_{2j-1}) + f(5)\right]\\ &= 0.0880922109604289\end{aligned}$$

– Quy tắc Composite Trapezoidal: Ta có $f^{(2)}(x) = \dfrac{-\dfrac{x}{x+1}+2}{x+1} \in C^2[-0.5, 0.5]$. Xét $h = \dfrac{1}{6}$ và $x_j = -0.5 + jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 6$. Áp dụng *Định lý 4.3*, ta có:

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{-0.5} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] = \frac{1}{12}\left[f(-0.5) + 2\sum_{j=1}^{5} f(x_j) + f(0.5)\right]\\ &= 0.0936301397428686\end{aligned}$$

– Quy tắc Composite Midpoint: Ta có $f^{(2)}(x) = \dfrac{-\dfrac{x}{x+1}+2}{x+1} \in C^2[-0.5, 0.5]$. Xét $h = \dfrac{1}{8}$ và $x_j = -0.5 + (j+1)h$ với mỗi $j = -1, 0, \ldots, 7$. Áp dụng *Định lý 4.4*, ta có:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \approx 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} f(x_{2j}) = 0.118569999055368$$

Yêu cầu 4.6. Giả sử $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2, f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Tìm α, biết rằng khi sử dụng quy tắc Composite Trapezoidal để xấp xỉ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ với $n = 4$ thì cho ra giá trị 1.75.

Bài làm. Giả sử $f \in C^2[0,1], n = 4, h = \dfrac{1}{4}, x_j = jh$ với mỗi $j = 0, 1, \ldots, 4$. Áp dụng *Định lý 4.3*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] = \frac{1}{8}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{3} f(x_j) + f(1)\right]\\ &= \frac{1}{8}[f(0) + 2[f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)] + f(1)]\\ &= \frac{1}{8}[1 + 2(\alpha + 2.5 + \alpha) + 2] = 1.75\\ &\Rightarrow \alpha = 1.5\end{aligned}$$

Bài tập lập trình

Tôi sẽ dùng Python viết các hàm `Trapezoidal`, `Simpson`, `Composite_Trapezoidal`, `Composite_Simpson` để tính xấp xỉ giá trị $\int_a^b f(x)dx$.

- Input : `f, a, b, n`.
  - `f` : hàm số cần tính tích phân.
  - `a, b` : đoạn $[a, b]$ cần tính tích phân.
  - `n` (tùy vào trường hợp cụ thể): số đoạn chia nhỏ đoạn $[a, b]$.
- Output: giá trị xấp xỉ của tích phân.

```python
import numpy as np

def Trapezoidal(f, a, b) -> float:
    return (b - a) / 2 * (f(a) + f(b))

def Simpson(f, a, b) -> float:
    return (b - a) / 6 * (f(a) + 4 * f((a + b) / 2) + f(b))

def Composite_Trapezoidal(f, a, b, n) -> float:
    h = (b - a) / n
    x = np.linspace(a, b, n + 1)
    return h / 2 * (f(a) + 2 * np.sum(f(x[1:-2])) + f(b))

def Composite_Simpson(f, a, b, n) -> float:
    if (n % 2 != 0):
        raise ValueError('n must be even')

    h = (b - a) / n
    x = np.linspace(a, b, n + 1)
    return h / 3 * (f(a) + 2 * np.sum(f(x[2:2:(n/2 - 1)])) + 4 * np.sum(f(x
    [1:2:(n/2)])) + f(b))

```

Yêu cầu 4.7. Sử dụng quy tắc Trapezoidal, quy tắc Simpson để xấp xỉ các tích phân sau:

$a)\ \int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin(2x)dx$ $\quad b)\ \int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2 dx$ $\quad c)\ \int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}dx$

$d)\ \int_{0.75}^{1.3} ((\sin x)^2 - 2x\sin x + 1)dx$ $\quad e)\ \int_e^{e+1} \frac{1}{x\ln x}dx$ $\quad f)\ \int_{-0.5}^{0} x\ln(x+1)dx$

Bài làm. a) Xét $f(x) = e^{3x}\sin(2x), x \in [0, \pi/4]$. Ta được:

```python
f = lambda x: np.exp(3 * x) * np.sin(2 * x)
a = 0; b = np.pi / 4

print('Trapezoidal rule: ', Trapezoidal(f, a, b))
print('Simpson rule: ', Simpson(f, a, b))

```

```
Trapezoidal rule:  4.143259655194083
Simpson rule:  2.5836964032474845
```

b) Xét $f(x) = \cos^2(2x), x \in [-0.25, 0.25]$. Ta được:

```python
f = lambda x: np.cos(x)**2
a = -0.25; b = 0.25

print('Trapezoidal rule: ', Trapezoidal(f, a, b))
print('Simpson rule: ', Simpson(f, a, b))

```

```
Trapezoidal rule:  0.46939564047259313
Simpson rule:  0.4897985468241977
```

c) Xét $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}, x \in [0, 0.35]$. Ta được:

```python
f = lambda x: 2 / (x**2 - 4)
a = 0; b = 0.35

print('Trapezoidal rule: ', Trapezoidal(f, a, b))
print('Simpson rule: ', Simpson(f, a, b))

```

```
Trapezoidal rule:  -0.17776434558349452
Simpson rule:  -0.17682156924372924
```

d) Xét $f(x) = ((\sin x)^2 - 2x\sin x + 1), x \in [0.75, 1.3]$. Ta được:

```python
f = lambda x: (np.sin(x)**2 - 2*x*np.sin(x) + 1)
a = 0.75; b = 1.3

print('Trapezoidal rule: ', Trapezoidal(f, a, b))
print('Simpson rule: ', Simpson(f, a, b))

```

```
Trapezoidal rule:  -0.037024252723997224
Simpson rule:  -0.020271589910295148
```

e) Xét $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}, x \in [e, e+1]$. Ta được:

```python
f = lambda x: 1 / (x * np.log(x))
a = np.exp(1); b = np.exp(1) + 1

print('Trapezoidal rule: ', Trapezoidal(f, a, b))
print('Simpson rule: ', Simpson(f, a, b))

```

```
Trapezoidal rule:  0.28633417247833504
Simpson rule:  0.2726704524449636
```

f) Xét $f(x) = x\ln(x+1), x \in [-0.5, 0]$. Ta được:

```python
f = lambda x: x * np.log(x + 1)
a = -0.5; b = 0

print('Trapezoidal rule: ', Trapezoidal(f, a, b))
print('Simpson rule: ', Simpson(f, a, b))

```

```
Trapezoidal rule:  0.08664339756999316
Simpson rule:  0.05285463856097945
```

Yêu cầu 4.8. Sử dụng quy tắc Composite Simpson và Composite Trapezoidal để tính giá trị xấp xỉ tích phân sau với $n = 4, 8, 16, 32$:

$$a)\ \int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx \qquad b)\ \int_{-0.5}^{0.5} \cos^2(x) dx$$

$$c)\ \int_e^{e+2} \frac{1}{x \ln x} dx \qquad d)\ \int_0^{3\pi/8} \tan x dx$$

Bài làm.

```
# Set the list of n values
n = [4, 18, 12, 32]

```

a) Xét $f(x) = x^2 \cos(x), x \in [0, \pi]$. Ta được:

```
f = lambda x: x**2 * np.cos(x)
a = 0; b = np.pi

print('Composite Trapezoidal rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Trapezoidal(f, a, b, i))

print('\nComposite Simpson rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Simpson(f, a, b, i))

```

```
Composite Trapezoidal rule with:
- n = 4 :  -6.616378147535766
- n = 18 :  -6.29915936020792
- n = 12 :  -6.3191955192250395
- n = 32 :  -6.288234334647795

Composite Simpson rule with:
- n = 4 :  -6.237981140022703
- n = 18 :  -6.283087545919187
- n = 12 :  -6.282686619625665
- n = 32 :  -6.283175560445785
```

b) Xét $f(x) = \cos^2(x), x \in [-0.5, 0.5]$. Ta được:

```
f = lambda x: np.cos(x)**2
a = -0.5; b = 0.5

print('Composite Trapezoidal rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Trapezoidal(f, a, b, i))

print('\nComposite Simpson rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Simpson(f, a, b, i))

```

```
Composite Trapezoidal rule with:
- n = 4 :  0.9119334287061107
- n = 18 :  0.9203025478679936
- n = 12 :  0.919761116463509
- n = 32 :  0.9205985253184711

Composite Simpson rule with:
- n = 4 :  0.9208860461191357
- n = 18 :  0.9207358491878563
- n = 12 :  0.9207373019499148
- n = 32 :  0.9207355280867305
```

c) Xét $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}, x \in [e, e+2]$. Ta được:

```
f = lambda x: 1 / (x * np.log(x))
a = np.exp(1); b = np.exp(1) + 2

print('Composite Trapezoidal rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Trapezoidal(f, a, b, i))

print('\nComposite Simpson rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Simpson(f, a, b, i))

```

```
Composite Trapezoidal rule with:
- n = 4 :  0.44378227536392834
- n = 18 :  0.43941592112926003
- n = 12 :  0.43970224574564687
- n = 32 :  0.43925916645289453

Composite Simpson rule with:
- n = 4 :  0.4393652991936503
- n = 18 :  0.4391870859550852
- n = 12 :  0.43918914724111563
- n = 32 :  0.4391866223206545
```

d) Xét $f(x) = \tan x, x \in [0, 3\pi/8]$. Ta được:

```
f = lambda x: np.tan(x)
a = 0; b = 3 * np.pi / 8

print('Composite Trapezoidal rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Trapezoidal(f, a, b, i))

print('\nComposite Simpson rule with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ': ', Composite_Simpson(f, a, b, i))

```

```
Composite Trapezoidal rule with:
```

```
- n = 4 :  1.0005390312299143
- n = 18 :  0.9626214728404974
- n = 12 :  0.9651971130745052
- n = 32 :  0.9612048556044326

Composite Simpson rule with:
- n = 4 :  0.9658406106369494
- n = 18 :  0.96057118586623
- n = 12 :  0.9606608771080177
- n = 32 :  0.9605496831175793
```

5 Xấp xỉ tích phân bằng các công thức cầu phương Gauss

Những tài liệu tôi đã tham khảo trong chương này là [TH24], [BF10], [Hil87] và [Wik24b].

Yêu cầu 5.1. Trình bày các hàm Gauss- Legendre, Gauss-Chebyshev, Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite cho bậc đa thức $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Bài làm. 1. Hàm **Gauss-Legendree** với hàm trọng số $w(x) = 1$, xét trên đoạn $[a, b] = [-1, 1]$. Tập hợp các đa thức Legendree bậc 1 đến 5:

n	1	2	3	4	5
$P_n(x)$	x	$x^2 - \frac{1}{3}$	$x^3 - \frac{3}{5}x$	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$	$x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$

2. Hàm **Gauss-Chebyshev** với hàm trọng số $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, xét trên đoạn $[a, b] = [-1, 1]$. Tập hợp các đa thức Chebyshev bậc 1 đến 5:

n	1	2	3	4	5
$T_n(x)$	x	$x^2 - \frac{1}{2}$	$x^3 - \frac{3}{4}x$	$x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$	$x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x$

3. Hàm **Gauss-Laguerre** với hàm trọng $w(x) = \dfrac{1}{e^x}$, xét trên đoạn $[a, b] = [0, \infty]$. Tập hợp các đa thức Laguerre bậc 1 đến 5:

n	1	2	3	4
$L_n(x)$	$x - 1$	$x^2 - 4x + 2$	$x^3 - 9x^2 + 18x - 6$	$x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$

n	5
$L_n(x)$	$x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120$

4. Hàm **Gauss-Hermite** với hàm trọng số $w(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$, xét trên đoạn $[a, b] = [-\infty, \infty]$. Tập hợp các đa thức Hermite bậc 1 đến 5:

n	1	2	3	4	5
$H_n(x)$	x	$x^2 - \frac{1}{2}$	$x^3 - \frac{3}{2}x$	$x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$	$x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x$

Yêu cầu 5.2. Sử dụng công thức tổng quát để xây dựng các hàm trực giao trên, chứng minh tính trực giao của các hàm này.

Bài làm. Tôi sẽ sử dụng định nghĩa và định lý sau để xây dựng các hàm trực giao:

Định nghĩa 5.1. *Cho tập hợp $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ với $\phi_i \in C[a,b], \forall i = \overline{1,n}$ là các hàm trực giao $[a,b]$, khi đó:*

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_a^b w(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & khi\ i \neq j \\ \alpha_i > 0, & khi\ i = j \end{cases}$$

với hàm trọng số $w(x)$ là liên tục trên $[a,b]$ và $w(x) > 0, \forall x \in [a,b]$. Nếu $\alpha_i = 1$ thì $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ trực chuẩn. □

Định lí 5.1. *Tập hợp đa thức $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ được định nghĩa như sau:*

- $p_0(x) = 1$.
- $p_1(x) = x - a_1$, *với* $a_1 = \dfrac{\langle xp_0, p_0 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle}$.
- $p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1}(x) - b_n p_{n-2}(x), \forall n \geq 2$, *với*

$$a_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}; \quad b_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-2} \rangle}{\langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle}$$

Lúc này, $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ là tập trực giao, nghĩa là

$$\langle p_i, p_j \rangle = \begin{cases} 0, & khi\ i \neq j \\ \alpha_i > 0, & khi\ i = j \end{cases}$$

□

Tập hợp các đa thức trực giao Legendre trên đoạn $[-1,1]$ với hàm trọng số 1 là:

- $P_0(x) = 1$.
- $P_1(x) = x$. Trong đó:

$$a_1 = \frac{\langle xP_0(x), P_0(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 xdx}{\int_{-1}^1 1dx} = 0$$

- $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Trong đó:

$$a_2 = \frac{\langle xP_1(x), P_1(x) \rangle}{\langle P_1(x), P_1(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3dx}{\int_{-1}^1 x^2dx} = 0$$

$$b_2 = \frac{\langle xP_1(x), P_0(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2dx}{\int_{-1}^1 1dx} = \frac{1}{3}$$

- $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. Trong đó:

$$a_3 = \frac{\langle xP_2(x), P_2(x) \rangle}{\langle P_2(x), P_2(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x(3x^2-1)^2}{9}dx}{\int_{-1}^1 \frac{(3x^2-1)^2}{9}dx} = 0$$

$$b_3 = \frac{\langle xP_2(x), P_1(x) \rangle}{\langle P_1(x), P_1(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^4 - \frac{x^2}{3}dx}{\int_{-1}^1 x^2dx} = \frac{4}{15}$$

- $P_4(x) = x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35}$. Trong đó:

$$a_4 = \frac{\langle xP_3(x), P_3(x)\rangle}{\langle P_3(x), P_3(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^3\left(5x^2-3\right)^2}{25} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2(5x^2-3)^2}{25} dx} = 0$$

$$b_4 = \frac{\langle xP_3(x), P_2(x)\rangle}{\langle P_2(x), P_2(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^6 - \frac{14x^4}{15} + \frac{x^2}{5} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)^2}{9} dx} = \frac{9}{35}$$

- $P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}$. Trong đó:

$$a_5 = \frac{\langle xP_4(x), P_4(x)\rangle}{\langle P_4(x), P_4(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x\left(35x^4-30x^2+3\right)^2}{1225} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{(35x^4-30x^2+3)^2}{1225} dx} = 0$$

$$b_5 = \frac{\langle xP_4(x), P_3(x)\rangle}{\langle P_3(x), P_3(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^2\cdot\left(175x^6-255x^4+105x^2-9\right)}{175} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2(5x^2-3)^2}{25} dx} = \frac{16}{63}$$

Tập hợp các đa thức trực giao Chebyshev trên đoạn $[-1, 1]$ với hàm trọng số $(1 - x^2)^{-1/2}$ là:

- $T_0(x) = 1$.
- $T_1(x) = x$. Trong đó:

$$a_1 = \frac{\langle xT_0(x), T_0(x)\rangle}{\langle T_0(x), T_0(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x}{(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-0.5} dx} = 0$$

- $T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$. Trong đó:

$$a_2 = \frac{\langle xT_1(x), T_1(x)\rangle}{\langle T_1(x), T_1(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1-x^2)^{0.5}} dx} = 0$$

$$b_2 = \frac{\langle xT_1(x), T_0(x)\rangle}{\langle T_0(x), T_0(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-0.5} dx} = \frac{1}{2}$$

- $T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$. Trong đó:

$$a_3 = \frac{\langle xT_2(x), T_2(x)\rangle}{\langle T_2(x), T_2(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x\left(2x^2-1\right)^2}{4(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2-1)^2}{4(1-x^2)^{0.5}} dx} = 0$$

$$b_3 = \frac{\langle xT_2(x), T_1(x)\rangle}{\langle T_1(x), T_1(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1-x^2)^{0.5}} dx} = \frac{1}{4}$$

- $T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$. Trong đó:

$$a_4 = \frac{\langle xT_3(x), T_3(x)\rangle}{\langle T_3(x), T_3(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^3\left(4x^2-3\right)^2}{16(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2(4x^2-3)^2}{16(1-x^2)^{0.5}} dx} = 0$$

$$b_4 = \frac{\langle xT_3(x), T_2(x)\rangle}{\langle T_2(x), T_2(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^2\cdot\left(8x^4-10x^2+3\right)}{8(1-x^2)^{0.5}} dx}{\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2-1)^2}{4(1-x^2)^{0.5}} dx} = \frac{1}{4}$$

- $T_5(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x$. Trong đó:

$$a_5 = \frac{\langle xT_4(x), T_4(x)\rangle}{\langle T_4(x), T_4(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x\left(8x^4-8x^2+1\right)^2}{64(1-x^2)^{0.5}}dx}{\int_{-1}^{1} \frac{(8x^4-8x^2+1)^2}{64(1-x^2)^{0.5}}dx} = 0$$

$$b_5 = \frac{\langle xT_4(x), T_3(x)\rangle}{\langle T_3(x), T_3(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{x^2\cdot\left(32x^6-56x^4+28x^2-3\right)}{32(1-x^2)^{0.5}}dx}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2(4x^2-3)^2}{16(1-x^2)^{0.5}}dx} = \frac{1}{4}$$

Tập hợp các đa thức trực giao Laguerre trên đoạn $[0, +\infty]$ với hàm trọng số e^{-x} là:

- $L_0(x) = 1$.
- $L_1(x) = x - 1$. Trong đó:

$$a_1 = \frac{\langle xL_0(x), L_0(x)\rangle}{\langle L_0(x), L_0(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx} = 1$$

- $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$. Trong đó:

$$a_2 = \frac{\langle xL_1(x), L_1(x)\rangle}{\langle L_1(x), L_1(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(x-1\right)^2 e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(x-1\right)^2 e^{-x}dx} = 3$$

$$b_2 = \frac{\langle xL_1(x), L_0(x)\rangle}{\langle L_0(x), L_0(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(x-1\right) e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx} = 1$$

- $L_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$. Trong đó:

$$a_3 = \frac{\langle xL_2(x), L_2(x)\rangle}{\langle L_2(x), L_2(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(\left(x-3\right)\left(x-1\right)-1\right)^2 e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(\left(x-3\right)\left(x-1\right)-1\right)^2 e^{-x}dx} = 5$$

$$b_3 = \frac{\langle xL_2(x), L_1(x)\rangle}{\langle L_1(x), L_1(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(x-1\right)\left(\left(x-3\right)\left(x-1\right)-1\right) e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(x-1\right)^2 e^{-x}dx} = 4$$

- $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$. Trong đó:

$$a_4 = \frac{\langle xL_3(x), L_3(x)\rangle}{\langle L_3(x), L_3(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(x^3-9x^2+18x-6\right)^2 e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(x^3-9x^2+18x-6\right)^2 e^{-x}dx} = 7$$

$$b_4 = \frac{\langle xL_3(x), L_2(x)\rangle}{\langle L_2(x), L_2(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(\left(x-3\right)\left(x-1\right)-1\right)\left(x^3-9x^2+18x-6\right) e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(\left(x-3\right)\left(x-1\right)-1\right)^2 e^{-x}dx} = 9$$

- $L_5(x) = x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120$. Trong đó:

$$a_5 = \frac{\langle xL_4(x), L_4(x)\rangle}{\langle L_4(x), L_4(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right)^2 e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right)^2 e^{-x}dx} = 9$$

$$b_5 = \frac{\langle xL_4(x), L_3(x)\rangle}{\langle L_3(x), L_3(x)\rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} x\left(x^3-9x^2+18x-6\right)\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right) e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} \left(x^3-9x^2+18x-6\right)^2 e^{-x}dx} = 16$$

Tập hợp các đa thức trực giao Hermite trên đoạn $[-\infty, +\infty]$ với hàm trọng số e^{-x^2} là:

- $H_0(x) = 1$.
- $H_1(x) = x$. Trong đó:

$$a_1 = \frac{\langle xH_0(x), H_0(x)\rangle}{\langle H_0(x), H_0(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx} = 0$$

- $H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$. Trong đó:

$$a_2 = \frac{\langle xH_1(x), H_1(x)\rangle}{\langle H_1(x), H_1(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx} = 0$$

$$b_2 = \frac{\langle xH_1(x), H_0(x)\rangle}{\langle H_0(x), H_0(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx} = \frac{1}{2}$$

- $H_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$. Trong đó:

$$a_3 = \frac{\langle xH_2(x), H_2(x)\rangle}{\langle H_2(x), H_2(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\left(2x^2-1\right)^2e^{-x^2}}{4}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2-1)^2e^{-x^2}}{4}dx} = 0$$

$$b_3 = \frac{\langle xH_2(x), H_1(x)\rangle}{\langle H_1(x), H_1(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx} = 1$$

- $H_4(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$. Trong đó:

$$a_4 = \frac{\langle xH_3(x), H_3(x)\rangle}{\langle H_3(x), H_3(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\left(2x^2-3\right)^2e^{-x^2}}{4}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(2x^2-3)^2e^{-x^2}}{4}dx} = 0$$

$$b_4 = \frac{\langle xH_3(x), H_2(x)\rangle}{\langle H_2(x), H_2(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right)e^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2-1)^2e^{-x^2}}{4}dx} = \frac{3}{2}$$

- $H_5(x) = x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x$. Trong đó:

$$a_5 = \frac{\langle xH_4(x), H_4(x)\rangle}{\langle H_4(x), H_4(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\left(4x^4-12x^2+3\right)^2e^{-x^2}}{16}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4x^4-12x^2+3)^2e^{-x^2}}{16}dx} = 0$$

$$b_5 = \frac{\langle xH_4(x), H_3(x)\rangle}{\langle H_3(x), H_3(x)\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\left(8x^6-36x^4+42x^2-9\right)e^{-x^2}}{8}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(2x^2-3)^2e^{-x^2}}{4}dx} = 2$$

Tiếp theo, tôi sẽ sử dụng *Định nghĩa 5.1* chứng minh tính trực giao của các hàm trên.

- Kiểm tra tính trực giao của hàm Gauss-Legendree:

  Ta cần chứng minh

$$\langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_i > 0, & i = j \end{cases}$$

  Để cho đơn giản, tôi sẽ biểu diễn sự trực giao dưới dạng ma trận. Với mỗi phần tử $m_{i,j}$ của ma trận là phép tính $\langle P_i, P_j \rangle$, ta có ma trận kiểm tra tính trực giao của Gauss-Legendree như sau:

	0	1	2	3	4	5
0	2	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0
2	0	0	$\frac{8}{45}$	0	0	0
3	0	0	0	$\frac{8}{175}$	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{128}{11025}$	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{128}{43659}$

  Vậy tập các hàm Gauss-Legendree $\{P_0, P_2, \ldots, P_5\}$ là tập trực giao.

- Kiểm tra tính trực giao của hàm Gauss-Chebyshev

  Ta cần chứng minh

$$\langle T_i, T_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_i > 0, & i = j \end{cases}$$

  Để cho đơn giản, tôi sẽ biểu diễn sự trực giao dưới dạng ma trận. Với mỗi phần tử $m_{i,j}$ của ma trận là phép tính $\langle T_i, T_j \rangle$, ta có ma trận kiểm tra tính trực giao của Gauss-Chebyshev như sau:

	0	1	2	3	4	5
0	π	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0
2	0	0	$\frac{\pi}{8}$	0	0	0
3	0	0	0	$\frac{\pi}{32}$	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{\pi}{128}$	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{\pi}{512}$

  Vậy tập các hàm Gauss-Chebyshev $\{T_0, T_2, \ldots, T_5\}$ là tập trực giao.

- Kiểm tra tính trực giao của hàm Gauss-Laguerre

  Ta cần chứng minh

$$\langle L_i, L_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_i > 0, & i = j \end{cases}$$

  Để cho đơn giản, tôi sẽ biểu diễn sự trực giao dưới dạng ma trận. Với mỗi phần tử $m_{i,j}$ của ma trận là phép tính $\langle L_i, L_j \rangle$, ta có ma trận kiểm tra tính trực giao của Gauss-Chebyshev như sau:

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	4	0	0	0
3	0	0	0	36	0	0
4	0	0	0	0	576	0
5	0	0	0	0	0	14400

Vậy tập các hàm Gauss-Laguerre $\{L_0, L_2, \ldots, L_5\}$ là tập trực giao.

- Kiểm tra tính trực giao của hàm Gauss-Hermite

  Ta cần chứng minh

$$\langle H_i, H_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_i > 0, & i = j \end{cases}$$

  Để cho đơn giản, tôi sẽ biểu diễn sự trực giao dưới dạng ma trận. Với mỗi phần tử $m_{i,j}$ của ma trận là phép tính $\langle H_i, H_j \rangle$, ta có ma trận kiểm tra tính trực giao của Gauss-Chebyshev như sau:

	0	1	2	3	4	5
0	$\sqrt{\pi}$	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	0	0	0
2	0	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	0	0
3	0	0	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{4}$

  Vậy tập các hàm Gauss-Laguerre $\{H_0, H_2, \ldots, H_5\}$ là tập trực giao.

Yêu cầu 5.3. Đánh giá lý thuyết sai số cầu phương Gauss.

Bài làm.

- Lý thuyết sai số cầu phương Gauss-Legendre: Xét định lý được tham khảo từ *Chương 4, sách [BF10]* như sau:

  Định lí 5.2. *Giả sử $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là các nghiệm của đa thức Legendre $P_{n+1}(x)$ có bậc $n+1$, và với mỗi $i = 0, 1, \ldots, n$, các số c_i được định nghĩa như sau:*

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx$$

  Xét biểu thức cần tính $f(x)$, nếu $f(x)$ là đa thức và có bậc nhỏ hơn $2n+1$, thì:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

Và nếu $f(x)$ không là đa thức thì:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

□

Kết quả 5.1. *Tôi sẽ sử dụng kết quả (8.5.4) và (8.5.6) trong sách [Hil87] đối với công thức cầu phương Gauss-Legendre như sau:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + E, \text{ với } w(x) = 1$$

trong đó:

- *$f(x)$ là biểu thức cần tính.*
- *c_i là trọng số cầu phương và c_i được định nghĩa trong Định lý 5.2*
- *x_i là điểm cầu phương, hay là nghiệm thứ i của đa thức Legendre bậc n.*
- *E là sai số cầu phương Gauss-Legendre, đặt $m = n + 1$ ta có*

$$E = \frac{2^{2m+1}(m!)^4}{(2m+1)[(2m)!]^3} f^{(2m)}(\xi), \text{ với } |\xi| < 1$$

Viết một cách cụ thể, ta có:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx + \frac{2^{2m+1}(m!)^4}{(2m+1)[(2m)!]^3} f^{(2m)}(\xi), \text{ với } |\xi| < 1$$

Bên cạnh đó, ta có bảng trọng số cầu phương dựa vào các điểm cầu phương của Gauss-Lengdere như sau:

m	Điểm cầu phương x_i	Trọng số cầu phương c_i
2	$\pm\sqrt{3}/3$	1
3	0	8/9
	$\pm\sqrt{15}/5$	5/9
4	±0.339981	0.652145
	±0.861136	0.347855
5	0	0.568889
	±0.538469	0.478629
	±0.906180	0.236927

Bảng 2: *Trọng số cầu phương tương ứng với điểm cầu phương của phương pháp Gauss-Legendre*

□

- Lý thuyết sai số cầu phương Gauss-Chebyshev:

Kết quả 5.2. *Tôi sẽ sử dụng kết quả (8.8.6), (8.8.8) và (8.8.11) trong sách sách [Hil87] đối với công thức cầu phương Gauss-Chebyshev như sau:*

$$\int_{-1}^{1} w(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + E$$

trong đó:

- $f(x)$ *là biểu thức cần tính.*
- c_i *là trọng số cầu phương, đặt* $m = n+1$ *ta có* $c_i = \dfrac{\pi}{m}$ *là hằng số.*
- x_i *là điểm cầu phương, hay là nghiệm thứ i của đa thức Chebyshev bậc m và*

$$x_i = \cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2m}\right] (i = 0, 1, \ldots, n)$$

- E *là sai số cầu phương Gauss-Chebyshev và*

$$E = \frac{2\pi}{2^{2m}(2m)!} f^{2m}(\xi), \text{ với } |\xi| < 1$$

Viết một cách cụ thể, ta có:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \frac{\pi}{m} \sum_{i=0}^{n} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2m}\right]\right) + \frac{2\pi}{2^{2m}(2m)!} f^{2m}(\xi), \text{ với } |\xi| < 1$$

Bên cạnh đó, ta có bảng trọng số cầu phương dựa vào các điểm cầu phương của Gauss-Chebyshev như sau:

m	Điểm cầu phương x_i	Trọng số cầu phương c_i
2	±0.707107	1.5708
3	0	1.0472
	±0.866025	1.0472
4	±0.382683	0.785398
	±0.92388	0.785398
5	0	0.628319
	±0.587785	0.628319
	±0.951057	0.628319

Bảng 3: *Trọng số cầu phương tương ứng với điểm cầu phương của phương pháp Gauss-Chebyshev*

□

- Lý thuyết sai số cầu phương Gauss-Laguerre:

Kết quả 5.3. *Tôi sẽ sử dụng kết quả (8.6.2), (8.6.3), (8.6.7) và (8.6.9) trong sách [Hil87] đối với công thức cầu phương Gauss-Laguerre như sau:*

$$\int_{0}^{\infty} w(x)f(x)dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + E$$

trong đó:

– *$f(x)$ là biểu thức cần tính.*

– *c_i là trọng số cầu phương, đặt $m = n + 1$ với $\mathcal{L}_m(x) = (-1)^m L_m(x)$ ta có*

$$c_i = \frac{(m!)^2}{x_i[\mathcal{L}'_m(x_i)]^2} = \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2}$$

– *x_i là điểm cầu phương, hay là nghiệm thứ i của đa thức Laguerre bậc m.*

– *E là sai số cầu phương Gauss-Laguerre và*

$$E = \frac{(m!)^2}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi), \text{ với } \xi > 0$$

Viết một cách cụ thể, ta có:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i) + \frac{(m!)^2}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi), \text{ với } \xi > 0$$

Bên cạnh đó, ta có bảng trọng số cầu phương dựa vào các điểm cầu phương của Gauss-Laguerre như sau:

m	Điểm cầu phương x_i	Trọng số cầu phương c_i
2	0.585786	0.853553
	3.414214	0.146447
3	0.415775	0.711093
	2.294280	0.278518
	6.289945	0.0103893
4	0.322548	0.603154
	1.745761	0.357419
	4.536620	0.0388879
	9.395071	0.000539295
5	0.263560	0.521756
	1.413403	0.398667
	3.596426	0.0759424
	7.085810	0.00361176
	12.640801	0.0000233700

Bảng 4: *Trọng số cầu phương tương ứng với điểm cầu phương của phương pháp Gauss-Laguerre*

□

- Lý thuyết sai số cầu phương Gauss-Hermite:

Kết quả 5.4. *Tôi sẽ sử dụng kết quả (8.7.2), (8.7.3), (8.7.6) và (8.7.7) trong sách sách [Hil87] đối với công thức cầu phương Gauss-Hermite như sau:*

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + E$$

trong đó:

- *$f(x)$ là biểu thức cần tính.*
- *c_i là trọng số cầu phương, đặt $m = n+1$ với $\mathcal{H}_m(x) = 2^m H_m(x)$ ta có*

$$c_i = \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2}$$

- *x_i là điểm cầu phương, hay là nghiệm thứ i của đa thức Laguerre bậc m.*
- *E là sai số cầu phương Gauss-Laguerre và*

$$E = \frac{m!\sqrt{\pi}}{2^m(2m)!} f^{(2m)}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Viết một cách cụ thể, ta có:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i) + \frac{m!\sqrt{\pi}}{2^m(2m)!} f^{(2m)}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Bên cạnh đó, ta có bảng trọng số cầu phương dựa vào các điểm cầu phương của Gauss-Hermite như sau:

m	Điểm cầu phương x_i	Trọng số cầu phương c_i
2	±0.707107	0.886227
3	0	1.181636
	±1.224745	0.295910
4	±0.524648	0.804914
	±1.650680	0.0813128
5	0	0.945309
	±0.958572	0.393619
	±2.020183	0.0199532

Bảng 5: *Trọng số cầu phương tương ứng với điểm cầu phương của phương pháp Gauss-Hermite*

□

Yêu cầu 5.4. Sử dụng công thức cầu phương Gauss-Legendre với $n = 1, 2, 3$ để tính giá trị xấp xỉ các tích phân sau:

$$a) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \qquad b) \int_0^1 x(1-x^2)dx \qquad c) \int_1^2 x \ln(x) dx$$

Bài làm. a) Tôi sẽ thực hiện đổi biến như sau:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \overset{u=2x-1}{=} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right) du$$

Đặt $f(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right)$ với $[a, b] = [-1, 1]$.

– Với $n = 1$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}_{i=\overline{0,1}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right) du \\
&\approx \sum_{i=0}^{1} f(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx = f(x_0) + f(x_1) \\
&= 0.15941043096637894
\end{aligned}$$

– Với $n = 2$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \left\{-\dfrac{\sqrt{15}}{5}, 0, \dfrac{\sqrt{15}}{5}\right\}_{i=\overline{0,2}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right) du \\
&\approx \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx = \frac{5}{9}f(x_0) + \frac{8}{9}f(x_1) + \frac{5}{9}f(x_2) \\
&= 0.16059538680891924
\end{aligned}$$

– Với $n = 3$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_4(x) = x^4 - \dfrac{6}{7}x^2 + \dfrac{3}{35}$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \{-0.86113631; -0.33998104; 0.33998104; 0.86113631\}_{i=\overline{0,3}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right) du \\
&\approx \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx \\
&= 0.347855f(x_0) + 0.652145f(x_1) + 0.652145f(x_2) + 0.347855f(x_3) \\
&= 0.16060278038303477
\end{aligned}$$

b) Tôi sẽ thực hiện đổi biến như sau:

$$\int_0^1 x(1-x^2)dx \overset{u=2x-1}{=} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2} - \left(\frac{u+1}{2}\right)^3\right) dx = \int_{-1}^1 \frac{u+1}{4} - \frac{(u+1)^3}{16} du$$

Đặt $f(u) = \dfrac{u+1}{4} - \dfrac{(u+1)^3}{16}$ với $[a, b] = [-1, 1]$.

– Với $n = 1$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}_{i=\overline{0,1}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x^2)dx &= \int_{-1}^1 \frac{u+1}{4} - \frac{(u+1)^3}{16}du \\ &= \sum_{i=0}^{1} f(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx \\ &= f(x_0) + f(x_1) = 0.25\end{aligned}$$

– Với $n = 2$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \left\{-\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5}\right\}_{i=\overline{0,2}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x^2)dx &= \int_{-1}^1 \frac{u+1}{4} - \frac{(u+1)^3}{16}du \\ &= \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx \\ &= \frac{5}{9}f(x_0) + \frac{8}{9}f(x_1) + \frac{5}{9}f(x_2) = 0.25\end{aligned}$$

– Với $n = 3$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \{-0.86113631; -0.33998104; 0.33998104; 0.86113631\}_{i=\overline{0,3}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x^2)dx &= \int_{-1}^1 \frac{u+1}{4} - \frac{(u+1)^3}{16}du \\ &\approx \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\, dx \\ &= 0.347855f(x_0) + 0.652145f(x_1) + 0.652145f(x_2) + 0.347855f(x_3) \\ &= 0.25\end{aligned}$$

c) Tôi sẽ thực hiện đổi biến như sau:

$$\int_1^2 x\ln x dx \overset{u=2x-3}{=} \int_{-1}^1 \frac{u+3}{4}\ln\left(\frac{u+3}{2}\right)du$$

Đặt $f(u) = \frac{u+3}{4}\ln\left(\frac{u+3}{2}\right)$ với $[a,b] = [-1,1]$.

– Với $n = 1$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}_{i=\overline{0,1}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x dx &= \int_{-1}^1 \frac{u+3}{4}\ln\left(\frac{u+3}{2}\right)du \\ &\approx \sum_{i=0}^1 f(x_i)\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^0 \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx \\ &= f(x_1)+f(x_2) = 0.636149499560974\end{aligned}$$

– Với $n=2$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \left\{-\dfrac{\sqrt{15}}{5}, 0, \dfrac{\sqrt{15}}{5}\right\}_{i=\overline{0,2}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x dx &= \int_{-1}^1 \frac{u+3}{4}\ln\left(\frac{u+3}{2}\right)du \\ &\approx \sum_{i=0}^2 f(x_i)\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^2 \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx \\ &= \frac{5}{9}f(x_1)+\frac{8}{9}f(x_2)+\frac{5}{9}f(x_3) = 0.6362926190884768\end{aligned}$$

– Với $n=3$, xét đa thức Gauss-Legendre $P_4(x) = x^4 - \dfrac{6}{7}x^2 + \dfrac{3}{35}$, khi đó nghiệm của hàm này sẽ là $x_i = \{-0.86113631; -0.33998104; 0.33998104; 0.86113631\}_{i=\overline{0,3}}$. Áp dụng *Kết quả 5.1*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x dx &= \int_{-1}^1 \frac{u+3}{4}\ln\left(\frac{u+3}{2}\right)du \\ &\approx \sum_{i=0}^3 f(x_i)\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx \\ &= 0.347855\times f(x_0)+0.652145\times f(x_1)+0.652145\times f(x_2)+0.347855\times f(x_3) \\ &= 0.636294341324834\end{aligned}$$

Yêu cầu 5.5. Sử dụng công thức cầu phương Gauss-Chebyshev với $n = 1, 2, 3$ để tính:

$$a)\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}e^x dx \qquad b)\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2}\cos x dx \qquad c)\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\cos(2x)dx$$

Chứng minh. a) Đặt $f(x) = e^x$ với $[a,b] = [-1,1]$.

– Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}e^x dx &\approx \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^1 f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{4}\right]\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]+f\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = 3.9602660527907583\end{aligned}$$

– Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}e^x dx &\approx \frac{\pi}{3}\sum_{i=0}^{2} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{6}\right]\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(f\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + f[0] + f\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) = 3.977321960082316\end{aligned}$$

– Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}e^x dx &\approx \frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{3} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{8}\right]\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\left(f[-0.92388] + f[-0.382683] + f[0.382683] + f[0.92388]\right)\\ &= 3.9774626346619573\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\cos x dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)\cos x dx$$

Đặt $f(x) = (1-x^2)\cos x$ với $[a,b] = [-1,1]$.

– Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\cos x dx &\approx \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{1} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{4}\right]\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\left(f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + f\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = 1.194189420552066\end{aligned}$$

– Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\cos x dx &\approx \frac{\pi}{3}\sum_{i=0}^{2} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{6}\right]\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(f\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + f[0] + f\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) = 1.38641591092126\end{aligned}$$

– Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\cos x dx &\approx \frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{3} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{8}\right]\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\left(f[-0.92388] + f[-0.382683] + f[0.382683] + f[0.92388]\right)\\ &= 1.3824265010948575\end{aligned}$$

c) Tôi sẽ thực hiện đổi biến như sau:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\cos(2x)dx &\overset{u=2x-1}{=} \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(1-\left[\frac{u+1}{2}\right]^2\right)^{-1/2}\cos(u+1)du\\ &= \int_{-1}^{1}(1-u^2)^{-1/2}\frac{(1-u^2)^{1/2}\cos(u+1)}{2}\left(1-\left[\frac{u+1}{2}\right]^2\right)^{-1/2}du\end{aligned}$$

Đặt $f(u) = \dfrac{(1-u^2)^{1/2}\cos(u+1)}{2}\left(1-\left[\dfrac{u+1}{2}\right]^2\right)^{-1/2}$ với $[a,b] = [-1,1]$.

– Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\cos(2x)dx \approx \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{1} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{4}\right]\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + f\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = 0.39265484129312206$$

– Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\cos(2x)dx \approx \frac{\pi}{3}\sum_{i=0}^{2} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{6}\right]\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(f\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + f[0] + f\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) = 0.37502067014907087$$

– Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.2*, ta được:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\cos(2x)dx \approx \frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{3} f\left(\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{8}\right]\right)$$
$$\approx \frac{\pi}{4}\left(f[-0.92388] + f[-0.382683] + f[0.382683] + f[0.92388]\right)$$
$$= 0.3647191835685561$$

Yêu cầu 5.6. Sử dụng các công thức cầu phương Gauss-Laguerre hoặc Gauss-Hermite với $n = 1,2,3$ để tính giá trị xấp xỉ các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sin x}dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$

Bài làm. a) Đặt $f(x) = (1+x)^{-1}$ với $x \in [0,\infty)$.

– Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.3* và *Bảng 4* cho công thức cầu phương Gauss-Leguerre, ta được:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.853553 \times f(0.585786) + 0.146447 \times f(3.414214)$$
$$= 0.5714285589$$

– Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.3* và *Bảng 4* cho công thức cầu phương Gauss-Leguerre, ta được:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.711093 \times f(0.415775) + 0.278518 \times f(2.294280) + 0.0103893 \times f(6.289945)$$
$$= 0.5882352259739326$$

- Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.3* và *Bảng 4* cho công thức cầu phương Gauss-Leguerre, ta được:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.603154 \times f(0.322548) + 0.357419 \times f(1.745761)$$
$$+ 0.0388879 \times f(4.536620) + 0.000539295 \times f(9.395071)$$
$$= 0.5933013651594371$$

b) Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ với $x \in [0, \infty)$.

- Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.3* và *Bảng 4* cho công thức cầu phương Gauss-Leguerre, ta được:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sin x}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.853553 \times f(0.585786) + 0.146447 \times f(3.414214)$$
$$= 1.0000084475681932$$

- Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.3* và *Bảng 4* cho công thức cầu phương Gauss-Leguerre, ta được:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sin x}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.711093 \times f(0.415775) + 0.278518 \times f(2.294280) + 0.0103893 \times f(6.289945)$$
$$= 3.6691345094943384$$

- Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.3* và *Bảng 4* cho công thức cầu phương Gauss-Leguerre, ta được:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sin x}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(m!)^2 x_i}{[\mathcal{L}_{m+1}(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.603154 \times f(0.322548) + 0.357419 \times f(1.745761)$$
$$+ 0.0388879 \times f(4.536620) + 0.000539295 \times f(9.395071)$$
$$= 2.244409392709214$$

c) Đặt $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ với $x \in (-\infty, \infty)$.

- Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.4* và *Bảng 5* cho công thức cầu phương Gauss-Hermite, ta được:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}dx \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i)$$
$$\approx 0.886227 \times f(-0.707107) + 0.886227 \times f(0.707107)$$
$$= 1.1816357562293311$$

– Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.4* và *Bảng 5* cho công thức cầu phương Gauss-Hermite, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}dx &\approx \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i)\\ &\approx 0.295910 \times f(-1.224745) + 1.181636 \times f(0) + 0.295910 \times f(1.224745)\\ &= 1.4183639701699085\end{aligned}$$

– Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.4* và *Bảng 5* cho công thức cầu phương Gauss-Hermite, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}dx &\approx \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i)\\ &\approx 0.0813128 \times f(-1.650680) + 0.804914 \times f(-0.524648)\\ &+ 0.804914 \times f(0.524648) + 0.0813128 \times f(1.650680)\\ &= 1.3060180802893209\end{aligned}$$

d) Đặt $f(x) = 1$ với $x \in (-\infty, \infty)$, lúc này $f(x)$ là hằng số.

– Với $n = 1$, áp dụng *Kết quả 5.4* và *Bảng 5* cho công thức cầu phương Gauss-Hermite, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &\approx \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i)\\ &\approx 0.886227 + 0.886227 = 1.772454\end{aligned}$$

– Với $n = 2$, áp dụng *Kết quả 5.4* và *Bảng 5* cho công thức cầu phương Gauss-Hermite, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &\approx \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i)\\ &\approx 0.295910 + 1.181636 + 0.295910 = 1.773456\end{aligned}$$

– Với $n = 3$, áp dụng *Kết quả 5.4* và *Bảng 5* cho công thức cầu phương Gauss-Hermite, ta được:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &\approx \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}{[\mathcal{H}'_m(x_i)]^2} f(x_i)\\ &\approx 0.0813128 + 0.804914 + 0.804914 + 0.0813128 = 1.7724536\end{aligned}$$

Yêu cầu 5.7. Dùng Python vẽ hình các hàm trong *Yêu cầu 5.1*. Sử dụng các lệnh *xlabel, ylabel, legend, title, ...* để chú thích hình vẽ đầy đủ.

Bài làm. Vẽ minh họa các đa thức Gauss-Legendree trên đoạn $[-1, 1]$:

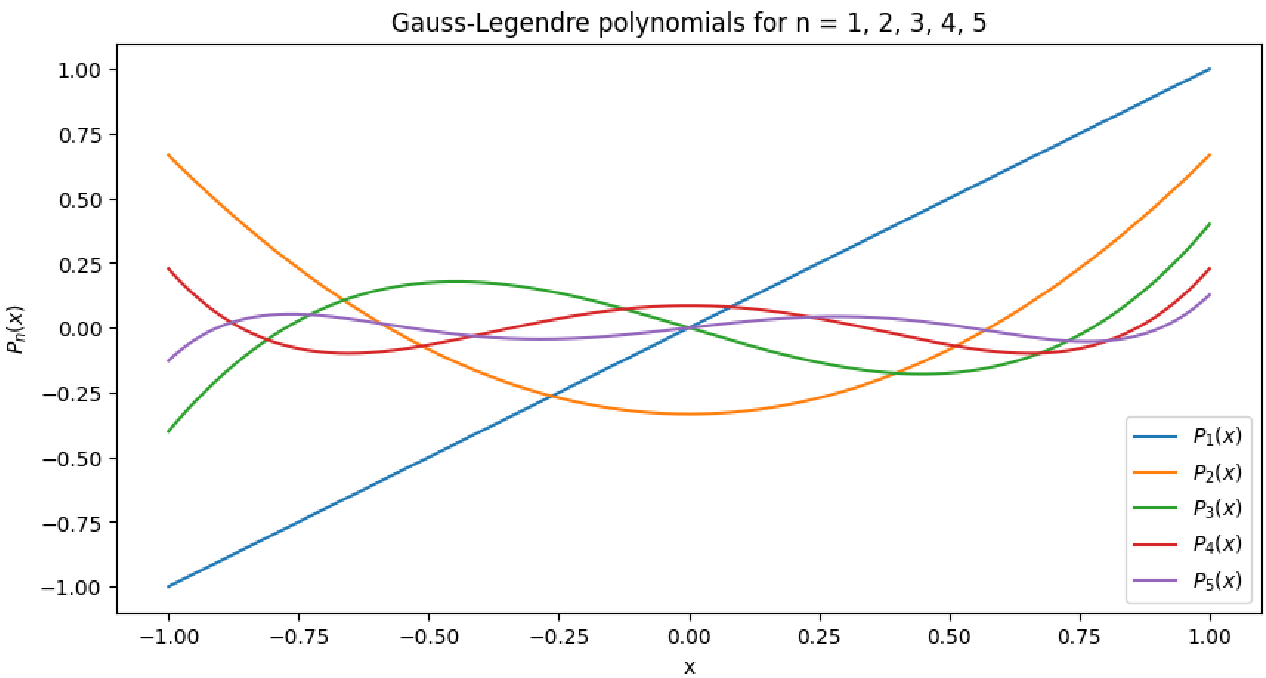
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-1, 1, 1000)

P_1 = x
P_2 = x**2 - 1/3
P_3 = x**3 - 3/5*x
P_4 = x**4 - 6/7*x**2 + 3/35
P_5 = x**5 - 10/9*x**3 + 5/21*x

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x, P_1, label=r'$P_1(x)$')
plt.plot(x, P_2, label=r'$P_2(x)$')
plt.plot(x, P_3, label=r'$P_3(x)$')
plt.plot(x, P_4, label=r'$P_4(x)$')
plt.plot(x, P_5, label=r'$P_5(x)$')
plt.title('Gauss-Legendre polynomials for n = 1, 2, 3, 4, 5')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$P_n(x)$')
plt.legend()
plt.show()

```



Hình 7: *Đa thức Gauss-Legendre trên đoạn* $[-1, 1]$

Vẽ minh họa các đa thức Gauss-Chebyshev trên đoạn $[-1, 1]$:

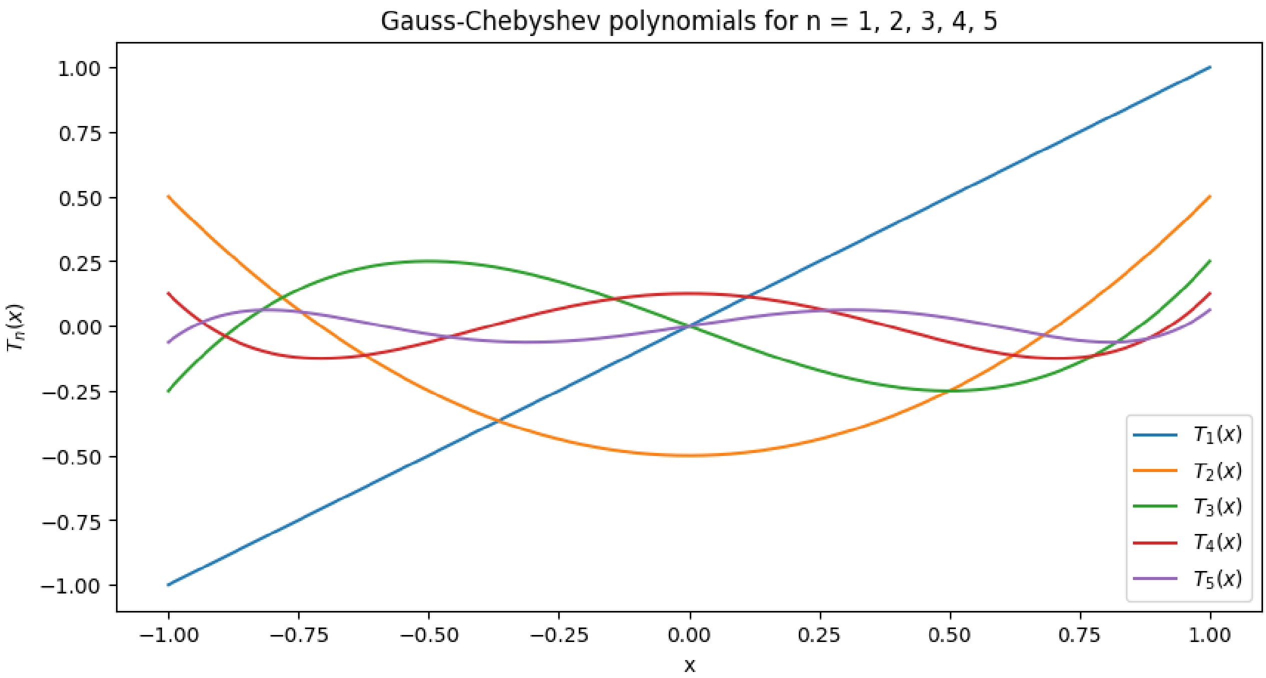
```
x = np.linspace(-1, 1, 1000)

T_1 = x
T_2 = x**2 - 1/2
T_3 = x**3 - 3/4*x
T_4 = x**4 - x**2 + 1/8
T_5 = x**5 - 5/4*x**3 + 5/16*x

plt.figure(figsize=(10, 5))
```

```
plt.plot(x, T_1, label=r'$T_1(x)$')
plt.plot(x, T_2, label=r'$T_2(x)$')
plt.plot(x, T_3, label=r'$T_3(x)$')
plt.plot(x, T_4, label=r'$T_4(x)$')
plt.plot(x, T_5, label=r'$T_5(x)$')
plt.title('Gauss-Chebyshev polynomials for n = 1, 2, 3, 4, 5')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$T_n(x)$')
plt.legend()
plt.show()

```



Hình 8: *Đa thức Gauss-Chebyshev trên đoạn* $[-1, 1]$

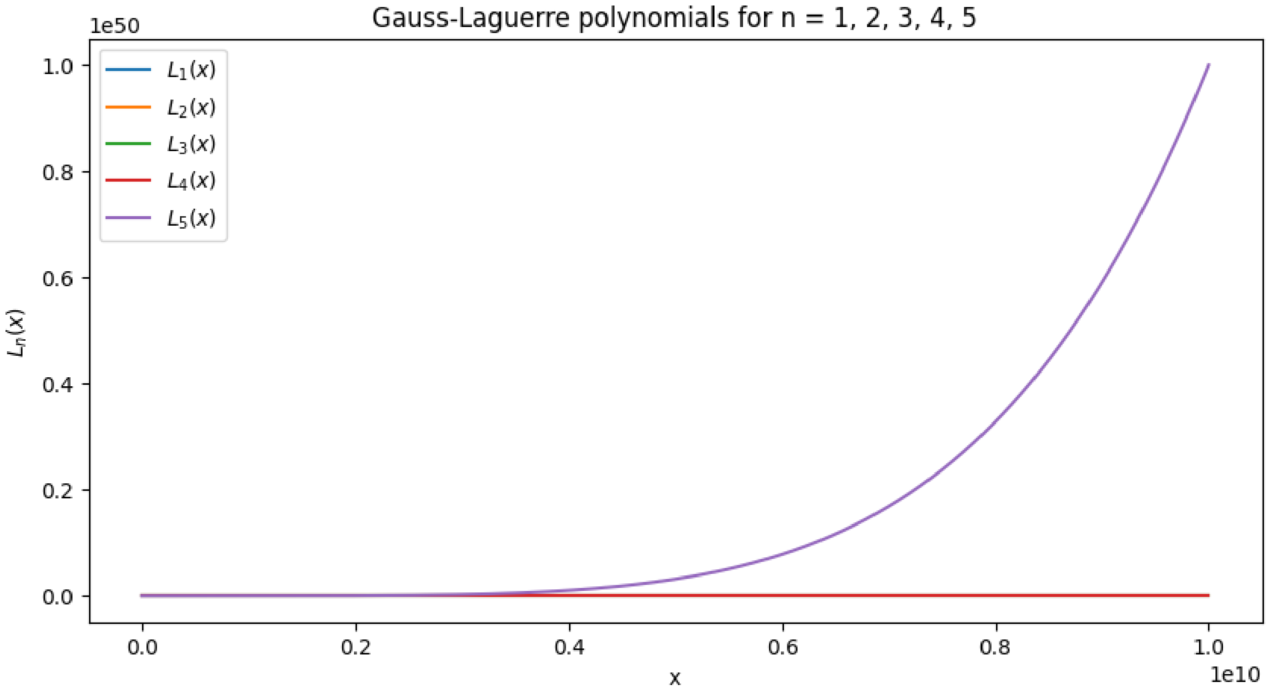
Vẽ minh họa các đa thức Gauss-Laguerre trên đoạn $[0, \infty]$:

```
x = np.linspace(0, 10**10, 1000)

L_1 = x - 1
L_2 = x**2 - 4*x + 2
L_3 = x**3 - 9*x**2 + 18*x - 6
L_4 = x**4 - 16*x**3 + 72*x**2 - 96*x + 24
L_5 = x**5 - 25*x**4 + 200*x**3 - 600*x**2 + 600*x - 120

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x, L_1, label=r'$L_1(x)$')
plt.plot(x, L_2, label=r'$L_2(x)$')
plt.plot(x, L_3, label=r'$L_3(x)$')
plt.plot(x, L_4, label=r'$L_4(x)$')
plt.plot(x, L_5, label=r'$L_5(x)$')
plt.title('Gauss-Laguerre polynomials for n = 1, 2, 3, 4, 5')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$L_n(x)$')
plt.legend()
plt.show()

```



Hình 9: *Đa thức Gauss-Laguerre trên đoạn* $[0, \infty]$

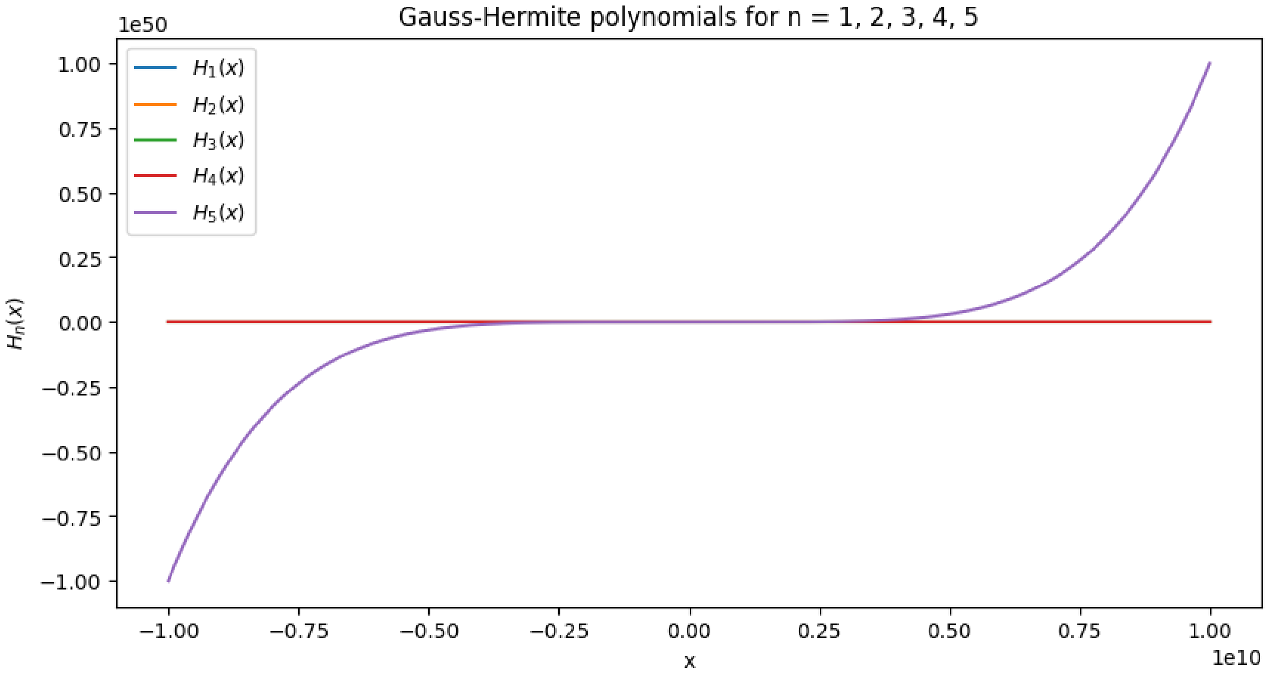
Vẽ minh họa các đa thức Gauss-Hermite trên đoạn $[-\infty, \infty]$:

```
x = np.linspace(-10**10, 10**10, 1000)

H_1 = x
H_2 = x**2 - 1/2
H_3 = x**3 - 3/2*x
H_4 = x**4 - 3*x**2 + 3/4
H_5 = x**5 - 5*x**3 + 15/4*x

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x, H_1, label=r'$H_1(x)$')
plt.plot(x, H_2, label=r'$H_2(x)$')
plt.plot(x, H_3, label=r'$H_3(x)$')
plt.plot(x, H_4, label=r'$H_4(x)$')
plt.plot(x, H_5, label=r'$H_5(x)$')
plt.title('Gauss-Hermite polynomials for n = 1, 2, 3, 4, 5')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'$H_n(x)$')
plt.legend()
plt.show()

```



Hình 10: *Đa thức Gauss-Hermite trên đoạn* $[-\infty, \infty]$

Yêu cầu 5.8. Dùng Python viết các function `Gauss_Legendre`, `Gauss_Chebyshev`, `Gauss_Laguerre` , `Gauss_Hermite` cho bậc đa thức $n = 1, 2, 3, 4, 5$ để tính giá trị xấp xỉ tích phân của các *Yêu cầu 5.4, 5.5 và 5.6.*

Bài làm. Trước tiên tôi sẽ xây dựng function `orthogonal_polynomials` cùng với `inner_product` để tạo ra các hàm bậc đa thức cần thiết:

```
import numpy as np
import sympy as sp

def inner_product(w, f, g, a, b) -> float:
    """
    Returns the inner product of two functions f and g with respect to the
   weight function w on the interval [a, b].

    Parameters
    ----------
    w : function
      The weight function.
    f : function
      The first function.
    g : function
      The second function.
    a : float
      The left boundary of the interval.
    b : float
      The right boundary of the interval.

    Returns
    -------
    float
      The inner product of f and g with respect to the weight function w on
   the interval [a, b] using sympy.
    """
    x = sp.symbols('x')
```

```python
    return float(sp.integrate(w * f * g, (x, a, b)))

def orthogonal_polynomials(n, poly_type) -> dict:
    """
    Returns the first n orthogonal polynomials of the specified type.

    Parameters
    ----------
    n : int
      The number of orthogonal polynomials to return.
    poly_type : str
      The type of orthogonal polynomials to return. Can be 'Legendre', 'Chebyshev', 'Laguerre', or 'Hermite'.

    Returns
    -------
    dict
      A dictionary containing the orthogonal polynomials, a_n, and b_n for the specified type of orthogonal polynomials.

    Examples
    --------
    >>> orthogonal_polynomials(3, 'Legendre')
    {'Polynomials': [1, x, x**2 - 1/3, x*(x**2 - 3/5)],
      'a_n': [nan, 0, 0, 0],
      'b_n': [nan, nan, 1/3, 4/15]}
    """
    x = sp.symbols('x')

    if poly_type == 'Legendre':
        w = 1
        a, b = -1, 1
    elif poly_type == 'Chebyshev':
        w = 1 / sp.sqrt(1 - x**2)
        a, b = -1, 1
    elif poly_type == 'Laguerre':
        w = 1 / sp.exp(x)
        a, b = 0, sp.oo
    elif poly_type == 'Hermite':
        w = 1 / sp.exp(x**2)
        a, b = -sp.oo, sp.oo
    else:
        raise ValueError("Invalid polynomial type. Choose from 'Legendre', 'Chebyshev', 'Laguerre', or 'Hermite'.")

    P_n = [1, x - inner_product(w, x, 1, a, b) / inner_product(w, 1, 1, a, b)]
    a_n = [np.NaN, inner_product(w, x, 1, a, b) / inner_product(w, 1, 1, a, b)]
    b_n = [np.NaN, np.NaN]

    for i in range(2, n + 1):
        a_n.append(inner_product(w, x * P_n[i - 1], P_n[i - 1], a, b) / inner_product(w, P_n[i - 1], P_n[i - 1], a, b))
        b_n.append(inner_product(w, x * P_n[i - 1], P_n[i - 2], a, b) / inner_product(w, P_n[i - 2], P_n[i - 2], a, b))
        P_n.append((x - a_n[i]) * P_n[i - 1] - b_n[i] * P_n[i - 2])

    return {'Polynomials': [sp.simplify(P_i) for P_i in P_n], 'a_n': a_n, 'b_n': b_n}
```

- Xây dựng hàm `Gauss_Legendre` cho *Yêu cầu 5.4*:

```python
def Lagrange_interpolation(x, x_arr, i, a, b) -> float:
    """
    Computes the Lagrange interpolation polynomial and integrates it over [a, b].

    Parameters
    ----------
    x : sympy.Symbol
      The variable of the polynomial.
    x_arr : list
      The list of x points.
    i : int
      The index of the current point.
    a : float
      The left boundary of the interval.
    b : float
      The right boundary of the interval.

    Returns
    -------
    float
      The integral of the Lagrange interpolation polynomial over [a, b].
    """
    n = len(x_arr)
    return float(sp.integrate(sp.prod([(x - x_arr[j]) / (x_arr[i] - x_arr[j]) for j in range(n) if j != i]), (x, a, b)).evalf())

def Gauss_Legendre(f, n) -> float:
    """
    Gauss-Legendre quadrature for the function f with n nodes in the interval [-1, 1] and w(x) = 1.

    Parameters
    ----------
    f : function
      The function to be integrated.
    n : int
      The number of nodes.

    Returns
    -------
    float
      The approximate value of the integral.
    """
    x = sp.symbols('x')
    orth_poly = orthogonal_polynomials(n + 1, 'Legendre')
    x_arr = sp.solve(orth_poly['Polynomials'][-1], x)
    return float(sum([Lagrange_interpolation(x, x_arr, i, -1, 1) * f(x_arr[i]) for i in range(n + 1)]).evalf())

```

Ví dụ:

a)

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \overset{u=2x-1}{=} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right) du$$

Đặt $f(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{u+1}{2}\right)$ với $[a,b] = [-1,1]$.

```
n = [1, 2, 3]
f = lambda x: 1/2 * ((x + 1)/2)**2 * sp.exp(-(x + 1)/2)

print('Gauss-Legendre quadrature with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ':', Gauss_Legendre(f, i))
```

```
Gauss-Legendre quadrature with:
- n = 1 : 0.159410430966379
- n = 2 : 0.160595386808919
- n = 3 : 0.160602777514685
```

- Xây dựng hàm `Gauss_Chebyshev` cho *Yêu cầu 5.5*:

```
def Gauss_Chebyshev(f, n) -> float:
    """
    Gauss-Chebyshev quadrature for the function f with n nodes in the interval [-1, 1] and w(x) = 1 / sqrt(1 - x**2).

    Parameters
    ----------
    f : function
      The function to be integrated.
    n : int
      The number of nodes.

    Returns
    -------
    float
      The approximate value of the integral.
    """
    x_arr = [np.cos((2 * i + 1) * np.pi / (2 * (n + 1))) for i in range(n + 1)]
    return float(np.pi / (n + 1) * sum([f(x_arr[i]) for i in range(n + 1)]))
```

Ví dụ:

b)

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} \cos x dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2}(1-x^2) \cos x dx$$

Đặt $f(x) = (1-x^2)\cos x$ với $[a,b] = [-1,1]$.

```
n = [1, 2, 3]
f = lambda x: (1 - x**2) * sp.cos(x)

print('b)')
print('Gauss-Chebyshev quadrature with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ':', Gauss_Chebyshev(f, i))
```

```
Gauss-Chebyshev quadrature with:
- n = 1 : 1.19418942055207
- n = 2 : 1.38641591092126
- n = 3 : 1.38242650109486
```

- Xây dựng hàm `Gauss_Laguerre` và `Gauss_Hermite` cho *Yêu cầu 5.6*:

```python
def Gauss_Laguerre(f, n) -> float:
    """
    Gauss-Laguerre quadrature for the function f with n nodes in the interval [0, inf] and w(x) = exp(-x).

    Parameters
    ----------
    f : function
      The function to be integrated.
    n : int
      The number of nodes.

    Returns
    -------
    float
      The approximate value of the integral.
    """
    x = sp.symbols('x')
    orth_poly = orthogonal_polynomials(n + 1, 'Laguerre')
    L_m = orth_poly['Polynomials'][-1]
    x_arr = sp.solve(L_m, x)

    # Filter out real solutions
    x_arr = [xi.evalf() for xi in x_arr if abs(xi.as_real_imag()[1]) < 1e-10]
    x_arr = [sp.re(xi) for xi in x_arr]  # Take the real part

    weights = []
    L_m_prime = sp.diff((-1)**(n + 1) * L_m, x)
    for xi in x_arr:
        wi = sp.factorial(n + 1)**2 / (xi * (L_m_prime.subs(x, xi))**2)
        weights.append(wi)

    return float(sum([weights[i] * f(x_arr[i]) for i in range(n + 1)]).evalf())

def Gauss_Hermite(f, n) -> float:
    """
    Gauss-Hermite quadrature for the function f with n nodes in the interval [-inf, inf] and w(x) = exp(-x**2).

    Parameters
    ----------
    f : function
      The function to be integrated.
    n : int
      The number of nodes.

    Returns
    -------
    float
      The approximate value of the integral.
    """
    x = sp.symbols('x')
```

```
    orth_poly = orthogonal_polynomials(n + 1, 'Hermite')
    H_m = orth_poly['Polynomials'][-1]
    x_arr = sp.solve(H_m, x)

    # Filter out real solutions
    x_arr = [xi.evalf() for xi in x_arr if abs(xi.as_real_imag()[1]) < 1e-10]
    x_arr = [sp.re(xi) for xi in x_arr]  # Take the real part

    weights = []
    H_m_prime = sp.diff(2**(n + 1) * H_m, x)
    for xi in x_arr:
        wi = 2**(n + 2) * sp.factorial(n + 1) * sp.sqrt(sp.pi) / (H_m_prime.subs(x, xi))**2
        weights.append(wi)

    return float(sum([weights[i] * f(x_arr[i]) for i in range(n + 1)]).evalf())

```

Ví dụ:

b)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sin x} dx$$

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ với $x \in [0, \infty)$.

```
n = [1, 2, 3]
f = lambda x: 1 / sp.sin(x)

print('Gauss-Laguerre quadrature with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ':', Gauss_Laguerre(f, i))

```

```
Gauss-Laguerre quadrature with:
- n = 1 : 1.00000873499388
- n = 2 : 3.66911077218785
- n = 3 : 2.24441111304607
```

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2} dx$$

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ với $x \in (-\infty, \infty)$.

```python
n = [1, 2, 3]
f = lambda x: 1 / (x**2 + 1)

print('Gauss-Hermite quadrature with:')
for idx, i in enumerate(n):
    print(' - n =', i, ':', Gauss_Hermite(f, i))
```

```
Gauss-Hermite quadrature with:
- n = 1 : 1.18163590060368
- n = 2 : 1.41796308072441
- n = 3 : 1.30601862698301
```

Tài liệu tham khảo

[Hil87] F.B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. 2nd. New York: Dover Publications, 1987.

[Fer95] Ruennhwa Ferng. *Lecture Notes on Numerical Analysis*. Numerical Analysis. 1995. URL: https://www.math.nthu.edu.tw/~wangwc/teaching/NA_11f/min_tex/feng_tex/na.pdf.

[Kiu05] Jaan Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*. Annotated edition. Cambridge University Press, 2005.

[BF10] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. 9th. Cengage Learning, 2010.

[Vig21] Antoine Vigneron. *Notes on Lectures 2 and 3: Asymptotic Notations*. CSE331: Introduction to Algorithms. Mar. 2021. URL: https://faculty.unist.ac.kr/algo/wp-content/uploads/sites/362/2021/07/cse331notes02-03.pdf.

[TH24] Ông Thanh Hải. *Giải tích số*. Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. 2024.

[Wei24] Eric W. Weisstein. *Newton-Cotes Formulas*. 2024. URL: https://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html.

[Wik24a] Wikipedia contributors. *Big O notation*. https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation. 2024.

[Wik24b] Wikipedia contributors. *Gauss–Legendre quadrature*. 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Legendre_quadrature.

[Wik24c] Wikipedia contributors. *Newton–Cotes formulas – Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%E2%80%93Cotes_formulas.

[Wik24d] Wikipedia contributors. *Round-off error*. https://en.wikipedia.org/wiki/Round-off_error. 2024.