Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE

Curso de Ciência da Computação

Disciplina de Projeto Análise de Algoritmo

Trabalho 1 de Projeto Análise e Algoritmo

Leticia Zanellatto de Oliveira

Renan de Lara Hipólito

Foz do Iguaçu

2023

1. Multiplicação de Matrizes

A abordagem convencional da multiplicação de matrizes envolve três laços aninhados, resultando em uma complexidade cúbica sequencial, onde o primeiro laço percorre as linhas da matriz, o segundo percorre as colunas e o terceiro realiza as operações de multiplicação e soma, percorrendo a matriz de forma linear.

Assim, assumimos um A = (a_{ij}) e um B = (b_{ij}), duas matrizes $n \times n$, onde o seu produto C e igual a A × B. Definindo a entrada c_{ij} , para cada i, j = 1, 2 ,..., n, temos que $c_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$. Para calcular c_{ij} leva tempo de $\theta(n)$ para qualquer (i, j) e existe n^2 pares de matrizes C. Logo sua complexidade é dada como $\theta(n^3)$.

Uma maneira de melhorar é aplicar a ideia de algoritmo por divisão e conquista, que consiste em:

- dividir o problema original em subproblemas do mesmo tipo;
- os subproblemas são resolvidos recursivamente, sendo os que os subproblemas menores são o caso base;
- as soluções dos subproblemas são combinadas numa solução do problema original;

Nesse viés, temos o algoritmo de Strassen, que realiza menos operações para obter o produto de duas matrizes, o que lhe concede uma complexidade de $O(n^{2.807})$, menor do que a abordagem convencional.

O algoritmo começa dividindo as duas matrizes originais, X e Y com tamanho N, em quatro submatrizes de tamanho N/2. Em seguida é efetuado 7 chamadas recursivas utilizando essas submatrizes.

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & F \\ G & G \end{bmatrix}$$

$P_1 = A\ (F - H)$

$P_2 = (A + B) \times H$

$P_3 = (C + B) \times H$

$P_4 = D\ (G - E)$

$P_5 = (A + D) \times (E + H)$

$P_6 = (B - D) \times (G + H)$

$P_7 = (A - C) \times (E + F)$

A última etapa do algoritmo realiza a soma e subtração das matrizes P em quatro submatrizes C.

$$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$

$$C_{12} = P_1 + P_2$$

$$C_{21} = P_3 + P_4$$

$$C_{22} = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$$

Com isso, temos a seguinte recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & se\ n = 1, \\ 7T\left(n/2\right) + \theta(n^2) & se\ n > 1 \end{cases}$$

Seja T(n) o tempo para multiplicar duas matrizes $n \times n$ utilizando o algoritmo de Strassen, temos que como todo subproblema do algoritmo de Strassen vai ser o cálculo de uma submatriz $\left(n/2\right) \times \left(n/2\right)$ logo não existe o caso médio, dado que sempre iremos nos enquadrar no pior caso para n > 1.

- **Melhor Caso:** Temos n = 1, o que resultará em uma multiplicação escalar, portanto teremos $T(1) = \theta(1)$.
- **Pior Caso:** Quando temos n > 1, podemos demonstrar a complexidade de pior caso do algoritmo de Strassen utilizando o Teorema Mestre. Como visto na equação da recorrência, $a = 7,\ b = 2\ e\ f(n) = n^2$, o caso 1 do Teorema Mestre generalizado se encaixa perfeitamente nesta equação de recursão, pois seja $g(n) = n^{\log_b \alpha - \varepsilon}$, utilizando os valores temos seja $g(n) = n^{\log_2 7 - \varepsilon}$ e como temos que $f(n) = n^2$, vemos que $f(n) = O(g(n))$, pois $n^2 \leq c.n^{\log_2 7 - \varepsilon}\ e\ c > 1$, portanto temos que $T(n) = O(n^{log7}) = O(n^{2.807})$.

Os arquivos testes tem a seguinte sintaxe: “A = N x N”, onde N é o tamanho da matriz, nas linhas seguintes tem os valores da matriz separados por “;” e são duas matrizes por arquivo. Realizando testes com um código de C++ que tinha os dois algoritmos, chegamos na seguinte tabela:

	512	1024	2048	2500	4096
Multiplicação Normal	2 segs	9 segs	1 min 30 seg	4 min e 39 seg	Mais de 10 minutos
Strassen <=2	22 segs	4 min	10 min	*	*
Strassen <=64	8 miliseg	6 seg	43 seg	4 min e 30 segs	10 min

Nota-se que, dentro do algoritmo de Strassen, se mudar a condição do caso base ele apresenta um desempenho melhor, pois segundo Thomas H "O fator constante escondido no tempo de execução do algoritmo de Strassen é maior que o fator constante no método "ingênuo" com complexidade $\theta(n^3)$" [Introduction to Algorithms - (2001) página 740], ou seja, no algoritmo de Strassen para multiplicação de matrizes, modificar a condição do caso base pode resultar em um desempenho melhor em comparação com o método "ingênuo" para tamanhos de matriz pequenos.

2. Problema da Mochila (Knapsack Problem)

O Problema da Mochila consiste em uma “mochila” de capacidade C (inteiro) e um conjunto de n itens com P_i (inteiro) e valor V_i associado a cada item i, é possível determinar quais itens devem ser colocados na mochila de modo a maximizar o valor total transportado, respeitando sua capacidade.

Os arquivos testes tem a seguinte sintaxe:

“C = N

V = a; b; c;

P = d; e; f;”

, onde N é a capacidade da mochila, V é os valores e P é o peso, cada arquivo tem apenas uma mochila. Realizando testes com um código de C++ que tinha o problema da mochila implementado, chegamos na seguinte tabela:

Teste 1: Capacidade = 10 x Item = 4

Teste 2: Capacidade = 8 mil x Item = 16 mil

Teste 3 = Capacidade = 50 mil x Item = 150 mil

Teste 4: Capacidade = 100 mil x Item = 100 mil

Teste 5: Capacidade = 100 mil x Item = 300 mil

Teste 4	Teste 1	Teste 3	Teste 4	Teste 5
6100 nanoseg	2 segs	4 min 43 seg	7 min 50 segs	*

Como pode-se ver, o último teste acabou não dando certo pois a matriz que o método cria para calcular é muito grande fazendo com que o notebook travasse.

3. Referencias

AshiqAR. (2023). Matrix Multiplication Algorithms. GitHub. https://github.com/AshiqAR/Matrix-Multiplication-Algorithms

CARVALHO, R. Problema da Mochila. Trabalho apresentado para a Disciplina MS777 - Projeto Supervisionado I, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 20XX. Orientador: POLDI, K. C.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Introduction To Algorithms. Índia: MIT Press, 2001.

FERNANDES, Dayanne; CHAGAS, Lucas Mafra. "Um Estudo sobre o Algoritmo de Strassen." Trabalho acadêmico apresentado à [Nome da Instituição], 2022. Número de matrícula: 13/0107191, 12/0126443.

KRAUSE, Arthur Mittmann; MORO, Gabriel Bronzatti; SCHNORR, Lucas Mello. Análise de Desempenho da Multiplicação de Matrizes por Strassen contra o Método Tradicional. Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.