1.2.

Нас с вами будут интересовать случайные события более сложные, чем элементарные. Такие случайные события мы будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, D и так далее. Рассмотрим случайный эксперимент – бросание двух игральных костей.

Нас может интересовать, к примеру, событие C: «сумма выпавших очков равна 8». Это событие состоит из пяти элементарных событий. Или, к примеру, нас может интересовать событие D: «на костях выпало одинаковое количество очков». Это событие состоит из 6 элементарных событий.

Вообще говоря, в теории вероятностей случайное событие A – это некоторое подмножество выборочного пространства. То, что A является подмножеством Ω, будем обозначать следующим образом.

Если схематически изобразить Ω как некоторую область, то любое событие лежит где-то внутри, то есть состоит из элементов Ω – элементарных событий.

Обратим внимание на то, что **обратное** утверждение, вообще говоря, неверно. То есть мы не можем рассматривать в качестве события **любое** подмножество выборочного пространства. Это связано с тем, что для каждого события мы с вами должны задать вероятность. Оказывается, что если Ω достаточно большое, то мы не можем для любого его подмножества определить вероятность **разумным образом**, так, как нам бы хотелось. Впрочем, в дискретном случае такой проблемы не возникает, и мы можем **любое** подмножество дискретного выборочного пространства считать событием.

Слова «событие A произошло» означают, что произошло какое-то элементарное событие из A.

Так же, как в арифметике, мы с вами рассматриваем действия над числами: сложение, умножение и так далее, рассмотрим операции над событиями.

Операция первая: **объединение** двух событий. Это событие происходит тогда и только тогда, когда происходит **или** событие A, **или** событие B, **или оба** этих события. Обозначается это следующим образом.

Объединение n событий A_1, A_2 и так далее A_n мы будем обозначать для краткости вот так. Это событие происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A_i.

Следующая операция: **пересечение** двух событий. Это событие происходит тогда и только тогда, когда происходит **и** событие A, **и** событие B. Пересечение n событий мы будем обозначать так. Это событие происходит тогда и только тогда, когда происходят все события A_i.

Так же, как в арифметике, у нас есть ноль, в алгебре событий мы вводим **пустое** множество, то есть множество, не содержащее ни одного элемента. В теории вероятностей пустое множество называется **невозможным** событием.

Если два события A и B не пересекаются, то есть не имеют общих элементов, то есть они не могут произойти одновременно, то мы будем называть их **несовместными** событиями.

Выборочное пространство Ω в теории вероятностей называется **достоверным** событием. Оно происходит всегда по построению, по определению выборочного пространства.

Операции объединения и пересечения обладают двумя очевидными свойствами.

Свойство 1. Коммутативность.

Пересекать или объединять события мы можем в любом порядке, на результате это не отражается.

Свойство 2. Ассоциативность.

При пересечении и объединении событий мы можем группировать их так, как нам нравится – результат не меняется. Этим свойством мы уже воспользовались вот здесь и вот здесь, когда мы не ставили скобки, потому что эти скобки мы можем расставить как угодно, результат будет один и тот же.

Следующие свойства, возможно, менее очевидны. Дистрибутивность пересечения относительно объединения и дистрибутивность объединения относительно пересечения. Вы можете сами изобразить это на рисунках.

Следующая операция – **разность** событий A и B. Это событие происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B.

Дополнение к событию A будем обозначать или с чертой вверху − знак логического отрицания, или с индексом c вверху от английского слова complement. Это событие происходит тогда и только тогда, когда **не происходит** событие A. Дополнение к событию A в теории вероятностей называют событием, **противоположным** к A, что вполне естественно, так как в любом эксперименте обязательно наступает либо только A, либо только «не A».

Следующие три равенства очевидны:

если я объединю любое событие с противоположным, то я получу выборочное пространство, причем события A и противоположное к нему – несовместны; дополнение к дополнению есть само событие.

Множество событий, заданных на выборочном пространстве, будем обозначать буквой F-красивое. Это довольно интересный объект. Элементами множества F-красивое являются множества, события, то есть некоторые подмножества Ω. Задание F-красивое – это второй шаг на пути построении математической модели случайного эксперимента. То есть мы с вами должны договориться, какие подмножества выборочного пространства мы будем рассматривать в качестве событий. В случае дискретного выборочного пространства мы будем считать, что F-красивое состоит из всех возможных подмножеств множества Ω.

В первой части нашего курса мы будем говорить «событие» – подразумевать «подмножество выборочного пространства», будем говорить «подмножество» –

подразумевать «событие». Однако во второй части нашего курса, когда мы будем рассматривать более сложные выборочные пространства, а именно непрерывные, мы еще вернемся к обсуждению этого объекта, F-красивое.

А сейчас рассмотрим примеры применения введенных операций. Пусть события C и D такие, как мы рассмотрели вначале. Тогда их объединение состоит из 10 перечисленных элементарных событий, их пересечение содержит одно-единственное элементарное событие, разность C и D состоит из четырех элементарных событий: дополнение к множеству D содержит довольно большое количество элементов, и для краткости это дополнение я запишу следующим образом.