Notas de Matemática Discreta II

2025

Autor: Ignacio Gomez Barrios

Clase del 12/3

Grafos

__Definición:__
Un grafo es un par (V, E) donde V es un conjunto y E es un **subconjunto** del conjunto de 2 elementos de V
$E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$

__Notación:__
$\{x, y\}$ se denotará $xy \therefore xy = yx$
Ejemplo de grafo aqui:

El **vecindario** de un vertice x es :
$\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$

El **grado** de un vertice x es:
$d(x) = |\Gamma(x)|$

$\delta = min\,\{d(x) : x \in V\}$
$\Delta = max\,\{d(x) : x \in V\}$

Un grafo se dice regular si $\delta = \Delta$

Ejemplos de grafos "famosos"

1. C_n son los ciclos con n elementos, con $n \geq 3$
   $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$
   $E = \{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$
   ejemplo de C_n aqui
2. K_n = grafo completo en n vertices, con $n \in \mathbb{N}$
   $V = \{1, 2, ..., n\}$
   $E = \{A \subseteq V : |A| = 2\}$
   ejemplo de K_n aqui
3. $K_{r,t}$ es el grafo $V = \{X \cup Y\}$, $E = \{xy : x \in X, y \in Y\}$
   ejemplo de $K_{r,t}$ aqui
   Este el *"grafo bipartito completo"*

__Definición:__
un **camino** entre x e y es una sucesión de vertices $z_0, z_1, ..., z_t$ tales que $z_0 = x$, $z_t = y$ y $\forall i : 0 \leq i \leq t$ tenemos $z_i z_{i+1} \in E$
Entonces denotamos
$x \sim y \iff \exists$ un camino desde x a y
$\sim$ es una relación de equivalencia $\rightarrow$ induce una partición de V en clases de equivalencia, las cuales se llaman componentes conexas.

__Definición:__
Un Grafo es conexo si tiene 1 sola componente conexa

Coloreo de grafos

Un coloreo de un grafo $G = (V, E)$ con k colores es una función
$C : V \to \{1, ..., k\}$ tal que $xy \in E \implies C(x) \neq C(y)$

Definición:
El número cromático de un grafo G es
$\chi(G) = min\,\{k : \exists \text{ un coloreo con } k \text{ colores}\}$

Problema:
calcular $\chi(G)$ eficientemente
Algoritmo de fuerza bruta: colorear cada vertice con algun color $1, ..., k$ y chequear si es propio (complejidad $O(n^n)$)

Algoritmo de Greedy para coloreo

requiere un **orden** de vertices
$x_1, x_2, ..., x_n$ en algun orden

$$Greedy \begin{cases} C(x_1) = 1 \\ C(x_i) = min\,\{k : k \text{ no sea color de ningun } x_1, x_2, ..., x_{i-1} \text{ que sea vecino de } x_i\} \end{cases}$$

invariante de *Greedy*: los coloreos son propios

Greedy no calcula necesariamente $\chi(G)$
por ejemplo, en C_6 con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline 1\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline 1\\\hline 4\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{2}\\\hline 1 & 2\\\hline 4 & \\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 & & \\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 & 5 & \\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 & 5 & 6\\\hline\end{array}$$

$\implies$ *Greedy* da un coloreo con 3 colores, pero $\begin{cases} C(x_1) = 1 & i \text{ impar} \\ C(x_i) = 2 & i \text{ par} \end{cases}$ es propio

$\implies Greedy(G) \neq \chi(G) = 2$

una mirada a los C_n

similar al ejemplo, si n es par $\implies C(i) = \begin{cases} 1 & i \text{ impar} \\ 2 & i \text{ par} \end{cases}$

Propiedad:

si n es impar $\implies \chi(C_n) = 3$

Demostración:
veamos primero que $\chi(C_n) \geq 3$ si n es impar

supongamos que no $\implies \exists$ un coloreo propio con 2 colores

sea A el color del vertice 1
$12 \in E \implies C(2) \neq C(1) = A$, como solo hay 2 colores, $C(2) = B$
$23 \in E \implies C(3) \neq C(2) = B$, como solo hay 2 colores $C(3) = A$

generalizando, tenemos $C(i) = A$ si i es impar, $C(i) = B$ si i es par

$\implies C(n) = A$ (pues n impar) y $C(1) = A$, pero $n1 \in E \implies C(n) \neq C(1)$ **Absurdo**

veamos ahora que $\chi(C_n) \leq 3$

$$\text{sea el coloreo: } C(i) = \begin{cases} 1 & i \text{ impar, } i < n \\ 2 & i \text{ par} \\ 3 & i = n \end{cases}$$

es propio $\therefore \chi(C_n) \leq 3$

observación parcial:
sea $H = (W, F)$ un *subgrafo* de $G = (V, E)$
(es decir, H es un grafo y $W \subseteq V, F \subseteq E$)
$\implies \chi(H) \leq \chi(G)$

Corolario:
si G tiene algún ciclo impar como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq 3$

Observaciones:

- $\chi(G) \leq n$ con $n =$ número de vertices
- $\chi(K_n) = n$
- Si K_r es un subgrafo de G $\implies r \leq \chi(G)$

Clase del 14/3

BFS y DFS

tanto $BFS(x)$ como $DFS(x) \rightarrow$ encuentran la componente conexa de x

1. $C = \{x\}$ $T = \{x\}$ *Spanning Tree*
   $P, Q = [x]$ P = pila, Q = cola, DFS usa una pila, BFS usa una cola

2. `while`
   $Q \neq \emptyset$
   $P \neq \emptyset$

A partir de aqui, los algoritmos divergen

BFS

1. $\forall y \in \Gamma(z) \cap (V - C)$

   $C = C \cup \{y\}$

   $Q \mathrel{+}= y$

   $T \mathrel{+}= y$

   $E(T) = E(T) \cup \{y\}$

2. remover z de Q

3. `return` C, T

DFS
`if` $\Gamma(z) \cap (V - C) = \emptyset$
  borrar z de P
`else`
  tomar **algún** $y \in \Gamma(z) \cap (V - C)$
  $C = C \cup \{y\}$, agregar y a P, T
  agregar yz a $E(t)$
`return` C, T

Problema : "Familia de problemas"

para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el problema $k - color$ como:

dado grafo G, es $\chi(G) \leq k$?

Teorema

$2 - color$ es polinomial

Demostracion:
daremos un algoritmo que resuelve el problema y es polinomial
observacion: $\chi(G) \leq 2 \iff \chi(C) \leq 2, \forall$ componente conexa de G
vamos a suponer que G es conexo
algoritmo:

1. tomar $x \in V(G)$
2. correr $BFS(x)$, sea $T(x)$ el *tree*
3. colorear los vertices de $V(G)$ como $C(z) \begin{cases} 1 & \text{si } nivel_{T(x)}(z) \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } nivel_{T(x)}(z) \text{ es par} \end{cases}$
4. `if` (coloreo del paso 3 es propio)
   resultado = "si"
   `else`
   resultado = "no"

Complejidad:
$BFS(x) \rightarrow O(n)$
$O(\sum d(z)) = O(2n) = O(n)$

el paso 3 es 'gratis' cuando un vertice w agrega un vertice v
$C(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } C(w) = 2 \\ 2 & \text{si } C(w) = 1 \end{cases}$

paso 4: $O(n)$

Correctitud:
si devuelve "si" es porque el coloreo es propio $\implies \chi(G) \leq 2$

veamos que pasa si devulve "no"
para probar eso veremos que G tiene un ciclo impar

si la respuesta es "no" $\implies$ el coloreo del paso $|3|$ no es propio $\implies zv \in E(G), C(z) = C(v)$

esto significa:
$C(z) = \begin{cases} 1 & nivel_{T(x)}(z) \text{ par} \\ 2 & nivel_{T(x)}(z) \text{ impar} \end{cases} \quad C(v) = \begin{cases} 1 & nivel_{T(x)}(v) \text{ par} \\ 2 & nivel_{T(x)}(v) \text{ impar} \end{cases}$

$\implies nivel(z)$ y $nivel(v)$ son ambos impares $\vee$ ambos pares
$\implies [nivel(z) + nivel(v)$ es par$]\circledast$

sea $xz_1z_2...z_j$ con $z_j = z$ el único camino entre x y z en $T(x)$
$\implies nivel(z) = j$

sea $xv_1v_2...v_i$ con $v_i = v$ el único camino entre x y v en $T(x)$
$\implies nivel(v) = i$

esos caminos empiezan igual (en x) y terminan distinto (en z y v)
$\therefore \exists w$ tal que
$xz_1z_2...z_j = xz_1z_2...wz_{p+1}...z_j$
$xv_1v_2...v_i = xv_1v_2...wv_{p+1}...v_i$
con $p = nivel(w)$

como $zv \in E(G)$, en G tenemos el ciclo
$wz_{p+1}z_{p+2}...z_jv_iv_{i-1}...v_{p+1}w$

tenemos el ciclo $1 + (j - p) + (i - p) = 1 + p(i + j) =$ impar
$\implies \chi(G) \nleq 2$

<u>Corolario:</u>
$\chi(G) \geq 3 \iff \exists$ ciclo impar en G

Más sobre Greedy

- Complejidad $Greedy = O(\sum d(n)) = O(n)$
- Cota obvia $\chi(G) \leq \Delta + 1$

  ($Greedy$ nunca va a colorear con más de $\Delta + 1$ colores)

1. $\chi(K_n) = n = (n - 1) + 1 = \Delta + 1$
2. $\chi(C_{2r+1}) = 3 = 2 + 1 = \Delta + 1$

Pregunta:
$\exists$ algun grafo conexo $\neq K_n, C_{2r+1}$ con $\chi(G) = \Delta + 1$?

Respuesta: NO (teorema de Brooks, 1941)

Teorema Baby Brooks

$$G \text{ conexo no regular } \implies \chi(G) \leq \Delta$$

Demostración:
sea $x \in V(G) : d(x) = \delta$

corramos $BFS(x)$ (o $DFS(X)$)
esto da un orden de los vertices. El orden en que se fueron agregando a BFS

corramos *Greedy* con el orden **inverso** a ese
($\therefore x$ es el ultimo)
$x_1, x_2, ..., x_n$ con $x_n = x$

tenemos $C(x_1) = 1$
recordemos $C(x_i) = min\,\{k : C(x_j) \neq k, \forall j < 1 : x_{i,j} \in \Gamma(x)\}$

En el orden BFS todo vértice (salvo x) es agregado al arbol por un **vecino** que **ya esta**
$\implies$ es anterior en el orden BFS
$\implies$ todo vertice $\neq x$ tiene un vecino **anterior** en el orden BFS
$\implies$ todo vertice $\neq x$ tiene un vecino **posterior** en el orden BFS inverso

$\therefore$ cuando voy a colorear x_i, x_i tiene a lo sumo $d(x_i) - 1$ vecinos anteriores en el orden BFS inverso
$\therefore$ *Greedy* elimina a lo sumo $d(x_i) - 1$ colores

como $d(x_i) - 1 \leq \Delta - 1$
Greedy elimina a lo sumo $\Delta - 1$ colores al analizar x_i
$\implies$ va a colorear x con alguno de los colores $1, 2, ..., \Delta$ (eso si $i < n$)

pero $i = n \implies x_n = x \implies d(x_n) = \delta < \Delta$
$\implies$ *Greedy* elimina a lo sumo $\delta \implies$ va a colorear a x con algun color $\in \{1, 2, ..., \Delta\}$

Clase del 19/3

Ejemplo de Greedy "desastrozo"

$V = \{1, 2, ..., 2r\}\,, r \in \mathbb{N}$
$E = \{xy : x, y \in V, x \text{ impar}, \, y \text{ par } \neq x + 1\}$
Ejemplo con $r = 4$
Ejemplo aqui
como no hay lados entre los vertices impares y no hay lados entre los lados pares, entonces $\chi(G) = 2$
$C(x_i) = \begin{cases} 1 & i \text{ par} \\ 2 & i \text{ impar} \end{cases}$
corramos *Greedy* en el orden *natural* (1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7, 8)
TABLA AQUI
Greedy colorea en ese caso con r colores y $r \neq 2$

Teorema

sea G un grafo que *ya tiene* un coloreo propio con r colores (obtenidos de alguna forma, no necesariamente Greedy)
$\implies$ *Greedy* en ese orden coloreara con a lo sumo r colores

formalmente
sea $\pi : \{1, ..., r\} \to \{1, ..., r\}$ una biyección
sea $V_i = \{x \in V : C(x) = i\}$
si corremos *Greedy* poniendo todos los vertices de $V_{\pi(1)}$ primero, luego todos los vertices de $V_{\pi(2)}$, etc. Terminando con los vertices de $V_{\pi(r)}$ al final, entonces tenemos $\leq r$ colores

Demostración

sea $w_i = V_{\pi(1)} \cup V_{\pi(2)} \cup ... \cup V_{\pi(i)}$
hipótesis inductiva: *Greedy* (en el orden del enunciado) colorea con w_i con $\leq i$ colores
si probamos esto para todo i, como $w_r = V_r$ tendremos al teorema

Caso base

$i = 1$
$w_i = V_{\pi(1)}$ vertices de color $\pi(1)$
como el coloreo original es propio y todos esos vertices tienen el mismo color, entonces no puede haber ningún lado entre ellos
$\therefore$ *Greedy* colorea a w_1 con 1 color

Paso inductivo

asumamos por inducción que *Greedy* colorea a w_i con $\leq i$ colores y demostremos que Greedy coloreara a w_{i+1} con $\leq i + 1$ colores
supongamos que no
$\implies$ debe haber un vertice $x \in w_{i+1}$ tal que $Greedy(x) = i + 2$
$\implies$ *Greedy* no le pudo dar el color $i + 1$
$\implies$ $\exists y \in \Gamma(x)$ anterior a x en el orden anterior tal que $Greedy(y) = i + 1$

como $x \in w_{i+1}$, y es anterior a $x \implies y \in w_{i+1}$ también
$x, y \in w_{i+1}$
$\implies x, y \notin w_i$ (porque y tiene color $i+1$ y x tiene color $i+2$)
$\implies x, y \in w_{i+1} - w_i$ $(w_{i+1} - w_i = V_{\pi(i+1)})$
en resumen
$x, y \in V_{\pi(i+1)}, y \in \Gamma(x) \implies$ tienen el mismo color pero son vecinos $\implies$ ABSURDO

Corolario

$\exists$ algún orden de los vertices tal que *Greedy* colorea con exactamente $\chi(G)$ colores
tomemos un coloreo de G con $\chi(G)$ colores, reordenemos de acuerdo al teorema
$\implies$ *Greedy* usara $\leq r$ colores $\implies$ *Greedy* usara $\chi(G)$

Flujos en networks

Grafo dirigido

un grafo dirigido es un par (V, E) con $E \subseteq V \times V$
notación:
$\overrightarrow{xy} = (x, y)$
$\Gamma^+(x) = \{y \in V : \overrightarrow{xy} \in E\}$
$\Gamma^-(x) = \{y \in V : \overrightarrow{yx} \in E\}$
un network es un triple (V, E, C) con (V, E) grafo dirigido y $C : E \to \mathbb{R} \geq 0$

Definición

dada $f : E \to \mathbb{R} \geq 0$, $x \in V$ denotamos
$out_f(x) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} f(x, y)$
$in_f(x) = \sum_{y \in \Gamma^-(x)} f(x, y)$

Definición

dado un network $N = (V, E, C)$ y $s, t \in V$
definimos un flujo en N de s a t como una función
$f : E \to \mathbb{R}$ tal que

1. $0 \leq f(x, y) \leq C(x, y)$ $\forall (x, y) \in E$
2. $out_f(x) = in_f(x)$ $\forall x \neq s, t$ 'ley de conservación'
3. $in_f(s) = 0$ s es productor, alternativamente $in_f(s) \leq out_f(s)$
4. $out_f(t) = 0$ t es consumidor, alternativamente $out_f(s) \leq in_f(s)$

Propiedad: cantidad obvia

sea f flujo de s a $t \implies out_f(s) = in_f(s)$

Definición:

el valor de f es $\gamma(f) = out_f(s)$ $(= in_f(t))$

Max flow problem - Problema del flujo maximal

dado un network N y $s, t \in V$, hallar un flujo 'maximal' de s a t. Es decir, f flujo de s a t tal que $\gamma(g) \leq \gamma(f)$ $\forall$ flujo g de s a t

Definición

un camino dirigido en un network (o cualquier grafo) desde un vertice x a un vertice y (entre x e y) es una sucesión de vertices $x_0, x_1, ..x_r$ tales que $x_0 = x$ y $x_r = y$
$\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E$ $\forall 0 \leq i < r$

Definición

un lado $\overrightarrow{xy}$ se dice saturado (relativo a un flujo f) si $f(x) = C(x)$

Algoritmo 'Greedy' para flujo maximal

1. $f = 0 \rightarrow f(x, y) = 0$ $\forall xy$
2. `while (1) {`

    `if` ($\exists$ un camino dirigido de s a t sin ningun lado saturado)

    sea $x_0 = s, x_1, ..., x_r = t$ un camino

    $\varepsilon = min\,\{C(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) : 0 \leq i < r\}$

    mandar ϵ unidades de flujo por el camino

    $f(\overrightarrow{xy})$ = $f(\overrightarrow{xy}) + \varepsilon$

    `else`

    `return (f);`

    `}`

Complejidad de Greedy

en cada iteración del `while` se satura al menos un lado $\implies$ hay $O(n)$ iteraciones
complejidad de cada iteración:
hay que encontrar un camino dirigido 'no saturado' $\rightarrow$ usamos $BFS/DFS \implies O(n)$ ademas, sumamos $O(n)$ de calcular ε y aumentar ε
complejidad total $= O(n^2)$ es polinomial
EJEMPLO DE GREEDY ACA
Ahora vamos a 'alterar' a Greedy permitiendo *otros* caminos, 'no dirigidos'. veremos el Algoritmo de Ford-Fulkerson, que es esencialmente Greedy con esos caminos 'augmenting paths'

Motivación para caminos aumentantes

EJEMPLO ACA

Definición

un camino 'aumentante' de x a y es una sucesión de vertices $x_0 = x, x_1, ..., x_r = y$ tal que $\forall 0 \leq i < r$ pasa una de las 2 cosas siguientes

1. $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E \wedge f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) < C(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$
2. $\overrightarrow{x_{i+1} x_i} \in E \wedge f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) > 0$

con casos 1) 'Forward' y 2) 'Backward'

Definición

un corte es un subconjunto $S \subseteq V$ tal que $s \in S, t \notin S$

Notación

sea $f : E \to \mathbb{R}$
vamos a extender a f de pares de vertices a pares de conjuntos de vertices si $A, B \subseteq V$
$f(A,B) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \overrightarrow{xy} \in E}} f(x,y)$

Teorema

sea f flujo y S corte
$\gamma(f) = f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}, S)$

Demostración

calculamos $\sum_{x \in S} out_f(x) - in_f(x)$

$= (out_f(s) - in_f(s)) + \sum_{\substack{x \in S \\ x \neq s}} out_f(x) - in_f(x)$ (definición de $\sum$ para $x = s$)

$= (out_f(s) - 0) + 0$ (definicion de $in_f(s)$ y $out_f(x) = in_f(x) \forall x \neq s$)

$= out_f(s)$

$= \gamma(f)$

$\implies \gamma(f) = \sum_{x \in S}(out_f(x) - in_f(x))$

$= \sum_{x \in S} out_f(x) - \sum_{x \in S} in_f(x)$ (def de $\sum$)

$= \sum_{x \in S} \sum_{y \in \Gamma^+(x)} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in \Gamma^-(x)} f(y,x)$ (def de $out_f(x)$ y $in_f(x)$)

$= \sum_{\substack{x \in S \\ y \in V \\ \overrightarrow{xy} \in E}} f(x,y) - \sum_{\substack{x \in S \\ y \in V \\ \overrightarrow{xy} \in E}} f(y,x)$

pero, observemos por un momento que si $A \cap B = \emptyset$, entonces

$f(A \cup B, C) = f(A,C) + f(B,C)$

$f(C, A \cup B) = f(C,A) + f(C,B)$

Entonces, continuamos con la demostración

$$= \sum_{\substack{x\in S\\ y\in V\\ \overrightarrow{xy}\in E}} f(x,y) - \sum_{\substack{x\in S\\ y\in V\\ \overrightarrow{xy}\in E}} f(y,x) = f(S, S\cup\overline{S}) - f(S\cup\overline{S}, S)$$
$$= f(S,S) + f(S,\overline{S}) - f(S,S) - f(\overline{S},S)$$

$$= f(S,\overline{S}) - f(\overline{S},S)$$

Algoritmo de Ford-Fulkerson

1. $f = 0$ (o con cualquier flujo)
2. `while` ($\exists$ f-camino aumentante entre s y t)

    tomar $s = x_0, x1, ..., t = x_r$ un camino aumentante

    $$\varepsilon_i = \begin{cases} C(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) & \text{si } \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E \\ f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) & \text{si } \overrightarrow{x_{i+1} x_i} \in E \end{cases}$$

    $\varepsilon = min(\varepsilon_i)$

    aumentar f en ε a lo largo del camino *

    `end while`

3. `return` (f)

*nota: 'aumentar f en ε' :
$f_{nuevo}(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = f_{viejo}(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon$ caso 'forward'
$f_{nuevo}(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) = f_{viejo}(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) + \varepsilon$ caso 'backward'

Teorema

si aumentamos f en ε, lo que queda es flujo

Demostración

si $\overrightarrow{xy}$ no forma parte del camino f, queda igual
si tengo un lado forward $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$, llamaremos f^* a lo que obtenemos luego de aumentar

$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon$
$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \geq 0 + \varepsilon$
$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \geq \varepsilon \ > 0$

y

$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon$

$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \leq f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon_i$
$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \leq f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + C(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$ (def de ε_i)
$f^*(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \leq C(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$

$\implies 0 < f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \leq C(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}$

caso backward
$f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) = f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon$
$f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) < f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}$
$f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) < C(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}$

y

$f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) = f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon$
$f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \geq f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon$
$f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \geq 0$

$\implies 0 \leq f^*(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) < C(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}$

conclusión:
en cualquiera de los 2 casos
$0 \leq f^*(\overrightarrow{xy}) \leq C(\overrightarrow{xy})$

queda ahora determinar que $in_{f^*}(x) = out_{f^*}(x) \ \forall x \neq s, t$

Clase del 21/3

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.