Chapitre 6 - Périmètres, aires, volumes

1 Périmètres

1.1 Définition

Définition. Le *périmètre*[1] d'une figure du plan est la longueur de son bord.

De manière plus visuelle, le périmètre est la longueur de ficelle qui serait nécessaire pour dessiner le contour d'une figure.

Dans tout ce cours, on exprime les longueurs sans préciser l'unité. En pratique, il faut faire attention à ce que toutes les longueurs utilisées soient exprimées dans la même unité.

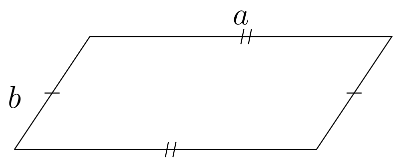
Propriété (Rappel du chapitre 4.)**.** *Pour un polygone, on obtient le périmètre en effectuant la somme des longueurs des côtés qui le composent.*

En revanche, on manque beaucoup d'outils pour calculer le périmètre d'une figure dont les côtés ne sont pas des segments. On énonce dans la partie suivante les formules qui permettent de calculer les cas simples, puis on explique comment calculer le périmètre d'une figure plus compliquée en se ramenant aux cas élémentaires.

1.2 Formules de périmètres classiques

1.2.1 Parallélogrammes (dont rectangles, losanges et carrés)

Propriété (Périmètre du paralléogramme)**.**



$\mathcal{P} = a + b + a + b = 2 \times (a + b)$.

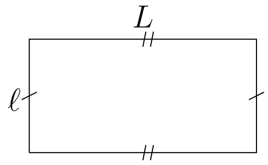
Le périmètre d'un parallélogramme est donnée par le double de la somme des longueurs de deux côtés consécutifs.

Démonstration. Le périmètre du parallélogramme est la somme des longueurs de ses quatre côtés. Or, les côtés opposés ont la même longueur (cf. chapitre 4). Donc, si on nomme le parallélogramme $ABCD$, on a $AB = CD$ et $BC = DA$, et le périmètre est $AB+BC+CD+DA = AB+BC+AB+BC = 2\times(AB+BC)$. $\square$

1. du grec $\pi\varepsilon\rho\iota$(péri : mesurer) et $\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ (métron : mesure)

On avait vu en chapitre 4 que les rectangles, les losanges, et les carrés étaient des cas particuliers de parallélogrammes. En particulier, la formule ci-dessus s'applique également à eux, ce qui entraîne les trois résultats suivants.

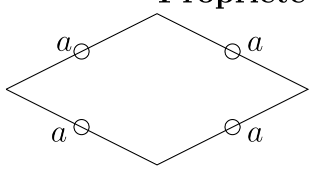
Propriété (Périmètre du rectangle)**.**



$$\mathcal{P} = \ell + L + \ell + L = 2 \times (\ell + L).$$

Le périmètre d'un rectangle est donné par le double de la somme de sa longueur et de sa largeur.

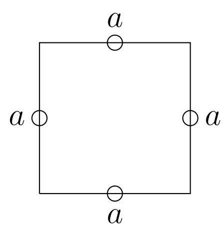
Propriété (Périmètre du losange)**.**



$$\mathcal{P} = a + a + a + a = 4 \times a.$$

Le périmètre d'un losange est le quadruple de la longueur de ses côtés.

Propriété (Périmètre du carré)**.**



$$\mathcal{P} = a + a + a + a = 4 \times a.$$

Le périmètre d'un carré est le quadruple de la longueur de ses côtés.

Remarque. Comme le carré est un losange, la formule est la même pour le périmètre du losange et du carré. Par ailleurs, les trois formules précédentes (rectangles, losanges, carrés) sont des cas particuliers de celle des parallélogrammes.

1.2.2 Cercles (et arcs de cercles).

Définition (Le nombre π)**.** On désigne par la lettre π (on prononce « pi ») le périmètre d'un cercle dont le diamètre est de longueur 1.

Remarque. Le nombre π n'est pas un nombre décimal. Il ne s'écrit même pas comme le résultat d'une division d'entiers.

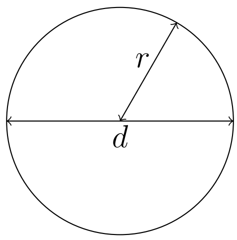
On peut approcher le nombre π par des nombres décimaux, en écrivant de plus en plus de chiffres après la virgule. Par exemple :

$$3,141592653589793 < \pi < 3,141592653589794$$

Si on écrivait les chiffres après la virgule de plus en plus loin, on ne verrait jamais de motif se répétant à l'infini.

Pour l'instant, on pense même que toute suite de chiffres apparaît quelque part dans π (quitte à chercher loin après la virgule), mais on n'a pas encore pu le démontrer rigoureusement. À titre d'exemple, la suite de quatre chiffres « 2022 » apparaît 20098 fois dans les 200 millions de premiers chiffres de π, et elle apparaît pour la première fois après 17952 chiffres.[2]

Propriété. *Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son rayon (ou à son diamètre). Donc :*
- *le périmètre d'un cercle de diamètre d est égal à $\pi \times d$,*
- *le périmètre d'un cercle de rayon r est égal à $2 \times \pi \times r$.*

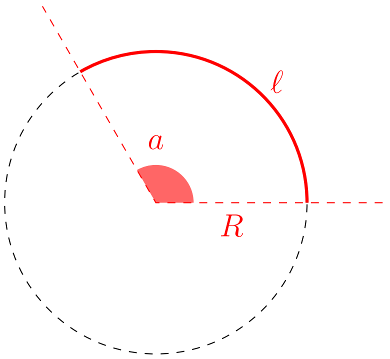


$$\mathcal{P} = \pi \times d = 2 \times \pi \times r.$$

Par définition des angles, on a aussi la propriété suivante :

Propriété. *La longueur d'un arc de cercle de rayon R, centré en O, et allant d'un point A à un point B est proportionnelle à l'angle $\widehat{AOB}$. Elle est donc égale à $2 \times \pi \times R \times \frac{\widehat{AOB}}{360^o}$.*

2. Si vous voulez vous amuser à chercher d'autres suites dans π, il suffit de la saisir dans le champ ici `https://www.angio.net/pi/`



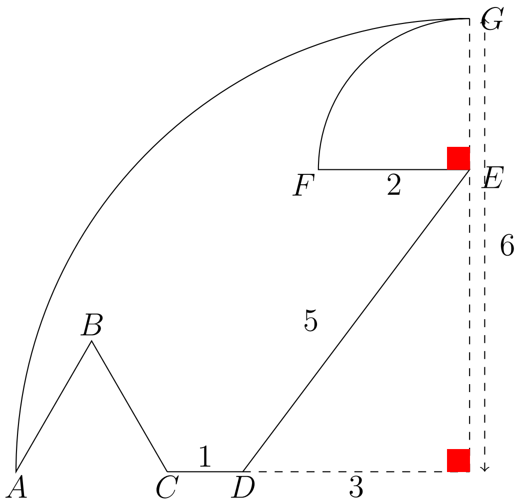
$$\ell = \underbrace{2 \times \pi \times R}_{\text{circonférence du cercle entier}} \times \underbrace{(a \div 360^o)}_{\text{proportion du cercle contenue dans l'arc}}$$

1.3 Cas complexes

Maintenant que l'on a déterminé les périmètres de quelques figures simples, on peut simplement énoncer une règle simple.

Méthode. Pour calculer le périmètre d'une figure complexe, on décompose son contour en traits simples (segments ou arcs de cercle) et on fait la somme de leurs longueurs.

Exemple. À titre d'exemple, considérons la figure suivante, où le triangle ABC est équilatéral.



- Les longueurs CD, DE et EF sont données sur la figure.
- les deux arcs de cercle joignant F à G puis G à A correspondent à un angle de 90^o (ce sont des quarts de cercle). Le premier a un rayon égal à 2, et le second un rayon égal à 6, donc leurs longueurs respectives sont $\underbrace{(2 \times \pi \times 2)}_{\text{cercle de rayon 2}} \div 4 = \pi$ et $\underbrace{(2 \times \pi \times 6)}_{\text{cercle de rayon 6}} \div 4 = 3 \times \pi$.

— enfin, comme ABC est équilatéral, les longueurs AB et BC sont égales, et elles sont égales à la longueur AC. Si on note O le centre du grand quart de cercle, on a $OA = OG$ car A et G sont sur le même cercle de centre O. On sait que $OG = 6$, donc $OA = 6$. D'autre part, $OA = AC + CD + DO = AC + 1 + 3 = AC + 4$. Donc $AC = 6 - 4 = 2$, et $AB = BC = 2$.

On en déduit enfin le périmètre de la figure :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= AB + BC + CD + DE + EF + \pi + 3 \times \pi \\ &= 2 + 2 + 1 + 5 + 2 + 4 \times \pi \\ &= 12 + 4 \times \pi \\ &\approx 24,5633\ldots \end{aligned}$$

2 Aires

2.1 Définition

Définition. L'aire d'une figure du plan est la surface contenue à l'intérieur de celle-ci.

Par exemple, l'aire en cm^2 d'une figure correspond au nombre de carrés de 1cm de côté que l'on peut mettre à l'intérieur de celle-ci.

2.2 Aire d'une réunion

Définition. Si on peut séparer notre figure en deux figures ne se rencontrant que le long de leurs côtés, alors l'aire de la figure d'origine est obtenue en faisant la somme des aires des deux petites.

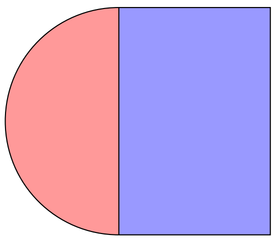


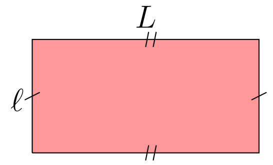
FIGURE 1 – L'aire de la figure totale est la somme de l'aire de la figure rouge et de l'aire de la figure bleue.

2.3 Formules d'aires classiques

2.3.1 Rectangles (dont carrés)

Commençons avec la formule de l'aire d'un rectangle, qui va nous permettre de retrouver un certain nombre d'autres formules.

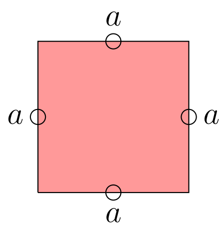
Propriété (Aire du rectangle)**.** *L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur et de sa largeur.*



$$\mathcal{A} = \ell \times L.$$

En particulier, on en déduit immédiatement la formule de l'aire d'un carré.

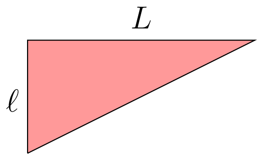
Propriété (Aire du carré)**.** *L'aire d'un carré est le produit de la longueur de ses côtés par elle-même.*



$$\mathcal{A} = a \times a.$$

2.3.2 Triangles rectangles

Propriété (Aire du rectangle)**.** *L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des longueurs des deux côtés de l'angle droit.*



$$\mathcal{A} = (\ell \times L) \div 2.$$

Démonstration.

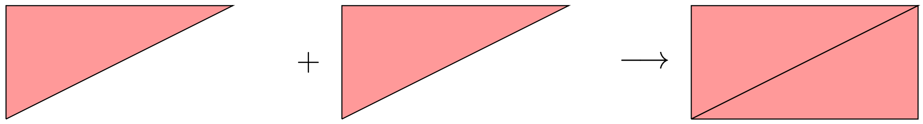


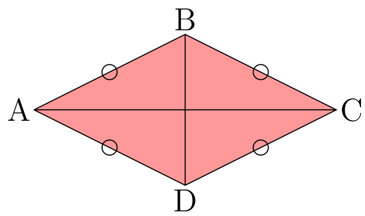
FIGURE 2 – En prenant deux copies du triangle rectangle, on forme un rectangle, donc l'aire du triangle rectangle est la moitié de celle du rectangle ainsi obtenu.

□

De la formule de l'aire du triangle rectangle, on va maintenant déduire celle du losange et celle de n'importe quel triangle.

2.3.3 Losanges

Propriété (Aire du losange)**.**



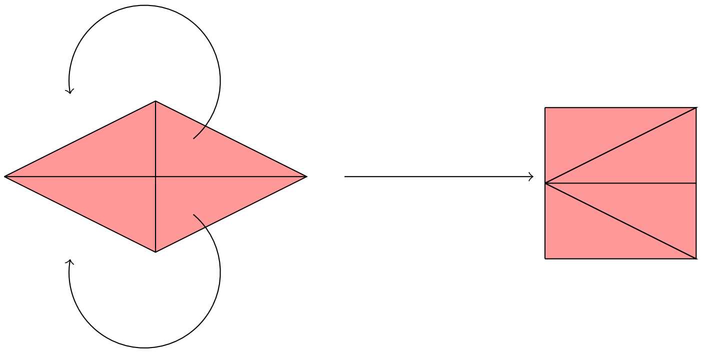
$$\mathcal{A} = AC \times BD.$$

L'aire d'un losange est le produit des longueurs de ses diagonales.

Démonstration. Deux démonstrations possibles :

— Les diagonales coupent le losange en quatre triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont des demi-diagonales. L'aire de chacun des quatre triangles rectangles est donc égale à $(AC \div 2) \times (BD \div 2)$. En multipliant ceci par quatre, on obtient donc $AC \times BD$.

— On peut aussi obtenir cette formule en se convainquant que l'on peut justement réagencer les quatre triangles rectangles pour obtenir la figure suivante d'un rectangle dont les côtés ont justement la longueur des diagonales du losange d'origine.



□

2.3.4 Triangles

Définition. Dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé. Le pied de cette hauteur est son point d'intersection avec le côté opposé.

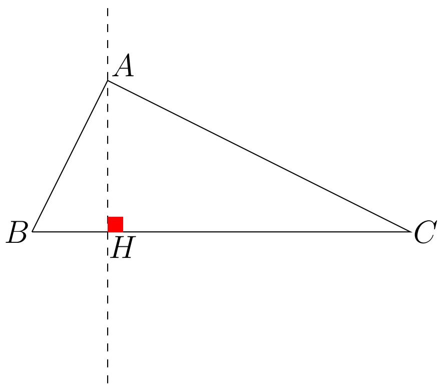
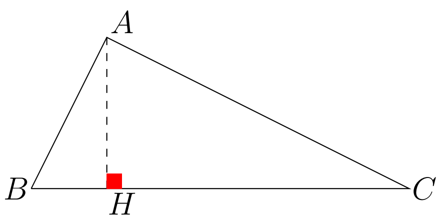


FIGURE 3 – Un triangle ABC, la hauteur issue de A en tirets, et son pied H.

Propriété. *Si on note H le pied de la hauteur issue de A dans un triangle ABC, l'aire du triangle est la moitié du produit des longueurs AH et BC :*



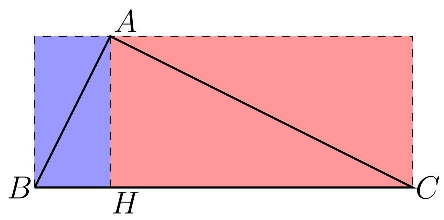
$$\mathcal{A} = (AH \times BC) \div 2$$

Démonstration. Deux démonstrations possibles encore :

— La hauteur sépare le triangle ABC en deux triangles rectangles ABH et ACH. Leurs aires respectives sont $(AH \times BH) \div 2$ et $(AH \times CH) \div 2$. Donc l'aire du triangle ABC est

$$(AH \times BH + AH \times CH) \div 2 = (AH \times (\underbrace{BH + CH}_{=BC})) \div 2 = (AH \times BC) \div 2$$

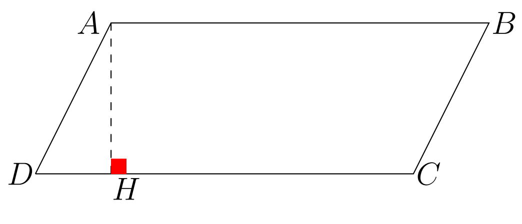
— On peut aussi tracer le rectangle ci-dessous dont les côtés ont longueur AH et BC.



On voit alors que le grand rectangle, dont la surface est $AH \times BC$ est formé de deux triangles bleus et deux triangles rouges, alors que le triangle ABC est formé d'un triangle bleu et d'un triangle rouge. L'aire du triangle ABC est donc la moitié de celle du rectangle, et on en déduit $\mathcal{A} = (AH \times BC) \div 2$. □

2.4 Parallélogrammes

Propriété. *Étant donné un parallélogramme $ABCD$, et le point d'intersection H entre (CD) et la droite perpendiculaire à (CD) passant par A, l'aire de $ABCD$ est le produit des longueurs CD et AH.*



$$\mathcal{A} = AH \times CD$$

Démonstration. On peut découper un triangle rectangle à droite et le recoller à gauche pour former un rectangle dont les côtés sont justement $[AH]$ et $[CD]$. □

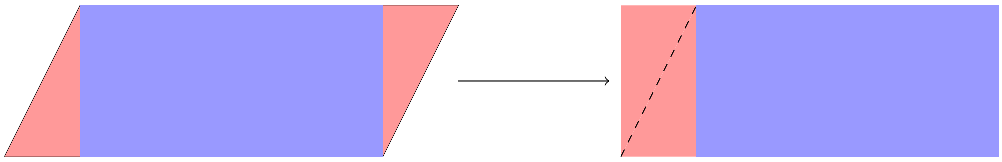


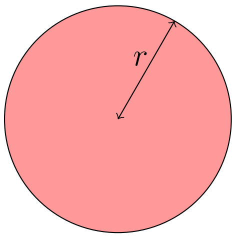
Figure 4 – Obtention de la formule de l'aire d'un parallélogramme à partir de celle du rectangle.

2.5 Disques et secteurs angulaires

Terminons avec le résultat le plus difficile concernant les aires.

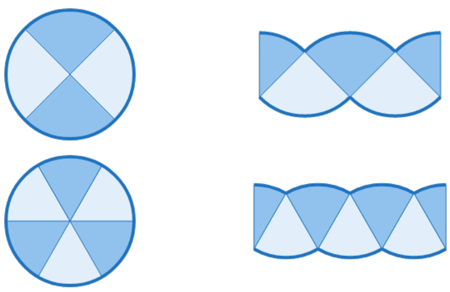
Théorème 1 (Aire d'un disque)**.** *L'aire d'un disque est égal à celle d'un rectangle dont la largeur est le rayon du disque, et la longueur la moitié du périmètre du disque.*

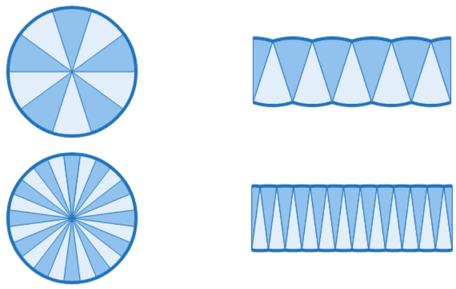
Autrement dit, l'aire d'un disque de rayon r *est égal à* $\mathcal{A} = \pi \times r \times r$*.*



$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r.$$

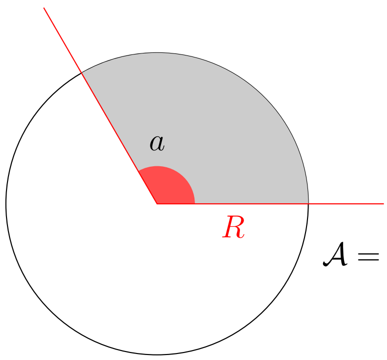
Remarque. C'est l'occasion de quelques remarques importantes sur ce résultat. On a *défini* le nombre π comme étant relié à la circonférence (le périmètre) d'un cercle. Le fait qu'il intervienne de manière simple dans le calcul de la surface du disque à l'intérieur de ce cercle est a priori très chanceux. On peut en donner une idée via le découpage suivant (l'idée est dûe à Archimède). On coupe le disque en un certain nombre de secteurs de même taille, et on les réorganise comme sur les figures ci-dessous. On obtient une figure un peu tordue dont la surface est la même que celle du disque de départ ; plus on fait de petits morceaux, plus la figure obtenue se rapproche d'un rectangle dont la longueur est bien la moitié du périmètre du cercle (donc $\pi \times r$), et dont la largeur est le rayon du cercle (donc r).





On peut conclure sur un petit résultat annexe, qui découle naturellement de celui sur l'aire du disque.

Propriété. *L'aire d'un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle, donc est égale à $\pi \times r \times r \times (a \div 360^o)$, où a est l'angle du secteur et r son rayon, comme sur la figure ci-dessous.*



$$\mathcal{A} = \underbrace{\pi \times R}_{\text{aire du disque entier}} \times \underbrace{(a \div 360^o)}_{\text{part du disque représentée par le secteur.}}$$

FIGURE 5 – Aire d'un secteur angulaire (en gris sur la figure)

3 Volumes

3.1 Définition

3.2 Formules de volumes classiques

3.3 Volume d'une réunion