THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques et Informatique

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

David LETURCQ

Thèse dirigée par **Christine LESCOP**, Directrice de recherche, CNRS délégation Alpes

préparée au sein du **Laboratoire Institut Fourier**
dans **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et technologies de l'Information, Informatique**

Compter des configurations spatiales en dimension impaire avec la torsion de Reidemeister

Counting spatial configurations in odd dimension with the Reidemeister torsion

Thèse soutenue publiquement le **3 juillet 2020**,
devant le jury composé de :

Monsieur Alberto CATTANEO
Professeur, Université de Zurich, Rapporteur
Monsieur Louis FUNAR
Directeur de recherche, CNRS délégation Alpes, Examinateur
Madame Christine LESCOP
Directrice de recherche, CNRS délégation Alpes, Directrice de thèse
Monsieur Julien MARCHÉ
Professeur des universités, Sorbonne université-Paris, Rapporteur
Monsieur Gwenaël MASSUYEAU
Professeur des universités, Université de Bourgogne, Président du jury
Monsieur Jean-Baptiste MEILHAN
Maître de conférences HDR, Université Grenoble-Alpes, Examinateur

En premier lieu, je remercie Christine Lescop de son encadrement pendant ces trois années de thèse et le stage qui les a précédées, et des nombreuses discussions mathématiques qui m'ont permis de me familiariser avec le domaine de cette thèse, et de trouver les pistes à partir desquelles celle-ci s'est construite. Je lui suis reconnaissant des nombreuses relectures qui m'ont permis d'affiner ma rédaction, et de corriger mes erreurs, des conseils utiles pour les préparations d'exposé, et, surtout, de tout le temps consacré à cela. Merci aussi pour l'aide apportée dans les formalités administratives régulières, redoublées cette année des dossiers de candidature. De tout cela, encore, merci. Je remercie également les deux rapporteurs de cette thèse, Julien Marché, et Alberto Cattaneo, du temps consacré à lire ce manuscrit, et de leurs rapports. Merci à tous les membres du jury d'avoir accepté cette charge, malgré les conditions exceptionnelles de cette année 2020. J'exprime aussi ma gratitude à Tadayuki Watanabe pour son accueil cet été à Matsue pendant deux mois et demi, et la JSPS pour nous avoir donné la possibilité d'organiser ce séjour, pendant lequel j'ai commencé à passer d'un simple résultat en degré 2, à la formule générale qui est le plus important résultat de cette thèse. Dans le même temps, je remercie aussi Tomotada Ohtsuki d'avoir accepté de m'accueillir à Kyōto les deux années qui viennent, et Jean-Baptiste Meilhan d'avoir contribué à me faire connaître les programmes de la JSPS il y a deux ans, des discussions mathématiques que nous avons pu avoir, et de son invitation (hélas compromise par le contexte sanitaire) à parler aux rencontres France-Japon. Merci aussi à Pierre Dehornoy de l'organisation du séminaire de topologie du vendredi, et des nombreuses et toujours intéressantes conversations que nous avons eues pendant cette thèse.

Je profite également de l'occasion pour exprimer toute ma gratitude à Céline Déleval pour nos nombreuses discussions cette année, relatives aux doctorants, et que je sais motivées par le sincère souci de leur bien-être. Merci également à Thierry Gallay de son travail de directeur de l'institut, et de sa disponibilité constante pour toutes les formalités administratives, encore récemment dans les échanges avec le rectorat. Je tiens aussi à remercier toute l'équipe administrative de l'Institut Fourier de sa disponibilité constante pendant ses trois ans, et surtout à Lindsay Bardou, Christine Haccart, et, plus récemment, Laurence Bolliet, avec lesquelles j'ai eu le plus de contact, pour l'organisation de mes déplacements et des invitations du séminaire compréhensible. Ceci m'amène aussi à remercier Alejandro, Louis-Clément, et Bruno, qui m'ont fait découvrir ledit séminaire en première année, et m'ont recruté au cours de la seconde, me donnant l'occasion de me mêler un peu plus que je ne l'aurais fait sans cela à la vie de l'équipe. Je remercie également Clément de l'organisation partagée cette année, et des concours, de chaise, de phrase de clôture d'exposé, et d'accent anglais.

En parlant de séminaires, je pense aussi aux conférences, et remercie Fathi, avec qui j'ai peut-être en premier fait connaissance au cours de mes déplacements, et que j'ai le plus souvent croisé pendant ceux-ci, au cours des quatre dernières années, de m'avoir permis de me sentir un peu à l'aise dans ce milieu d'abord inconnu, des discussions toujours intéressantes, et de ses conseils profitables. Je remercie également, pour les quatre années consécutives où j'ai eu la chance d'y participer, les organisateurs de Winter Braids, et, plus largement, ceux de toutes les conférences auxquelles j'ai assisté. Ces conférences étant aussi l'occasion de nouer des amitiés, merci à tous ceux avec qui j'ai eu l'occasion de partager un repas, une discussion, mathématique ou non, et qui m'ont souvent enrichi de leurs expériences, et, parmi eux, plus particulièrement encore à Arthur, Celeste, Fathi (encore), Rym, et, même si nous nous connaissions déjà, Clément et Jacques.

Revenant au laboratoire, j'adresse une pensée à nos joueurs de tarot, Arnaud, Baptiste (trop rarement), Clément, Gabriel, Mokdad, Rémi, Thomas, Thomas, et Vivek, dont la moitié se disséminera l'an prochain. Plus largement, je remercie toute l'équipe doctorants (et assimilés) pour les nombreuses activités que nous avons pu partager cette année, les séminaires compréhensibles, les goûters et fondues subséquents, et pour le contact que nous avons plus ou moins réussi à garder pendant le confinement. Merci également à Jean-François, Gabriel, et Rémi pour les nombreuses conversations cette année, et pour avoir sans doute plus largement eu à supporter dans le privé mes moments d'hyperactivité, d'ennui, ou de lassitude.

Pour les trois années d'enseignement au DLST, je remercie de leurs conseils, de leur organisation des UE où je suis intervenu, Dietrich Häfner, Emmanuel Peyre, et Pierre Dehornoy, avec qui ce fut un plaisir de partager ces enseignements. Merci aussi à Roland Bacher, des nombreuses conversations de couloirs et de salle café sur l'enseignement (et sur beaucoup d'autres choses !), et de la séance de corrections en commun l'an dernier ! Merci, aussi, à mes groupes d'étudiants, à qui ce fut toujours un plaisir d'enseigner, malgré les résultats parfois inégaux, et qui m'auront au moins toujours épargné les problèmes sérieux de discipline. Me soucier sincèrement d'eux, au moins quatre mois par an aura été moralement salutaire, et indéniablement d'une grande aide dans le maintien de mon équilibre au cours de ces trois années, l'enseignement étant un plaisir dans les bons moments, et, dans les mauvais, au moins une interdiction de se laisser aller.

Je remercie, évidemment, tous les enseignants qui ont forgé mon esprit, et parfois mon caractère, dont je ne pourrais faire ici la longue liste, toute présente qu'elle soit à ma mémoire, et dont la profession, de plus en plus, est maltraitée par le public, par une hiérarchie dont les manquements ne sont que trop connus, et par des réformes indignes, dont ce n'est sans doute pas le lieu de s'énerver longuement. Mais je profite de cette brève parenthèse pour signifier toute mon estime à mes nombreux amis qui ont fait le choix, malgré des conditions de plus en plus indigentes, et un mépris constant de la part d'une certaine opinion, et de leur hiérarchie, d'enseigner. Je remercie aussi, puisque c'est l'occasion, Odon Vallet, qui, lors de mon passage en CPGE, a bien voulu me distinguer pour une des bourses qu'il accordait lui-même, sur sa fondation.

J'ai une pensée également pour ma famille, et pour mes parents, qui, si l'âge m'en a un peu éloignés, reste présents à mon cœur, et à qui je suis infiniment redevable de mon éducation, de m'avoir laissé libre de mes choix, et de les avoir toujours acceptés. Je pense aussi à tous mes grand-parents, et, je les remercie tous les cinq, à qui, encore présents ou non, proches ou lointains, je dois tant de souvenirs. Sans distinguer entre eux, c'est aussi l'occasion de remercier la grand-mère qui a tant contribué à mon éducation, et à mon goût pour la lecture, l'orthographe, et l'étude, et le grand-père dont les récits n'ont pas peu contribué à forger ma conscience morale.

Merci aux amis avec qui, malgré la distance, j'ai pu souvent garder le contact pendant ces trois années, et que je ne peux pas tous citer, même si je n'oublie jamais ceux que je ne vois plus aussi souvent que je le voudrais et qui, si je ne les nomme pas ici, ne sont pas moins présents à mon esprit. Merci à Youna, des repas et les conversations, toujours vivifiantes, lors des passages à Grenoble, à Emma, des discussions autour d'un thé, à Simon, des moments passés ensemble, à Lyon (pour ce Phèdre !), ou à Grenoble, à Dorian, et à Alexis, qui savent trop bien tout ce que je leur dois, encore plus après cet automne, à Alexandre, Alexis, et Paul, pour les vacances, passées et à venir. Enfin, merci surtout à Alexandre, pour bientôt dix ans d'amitié, de soutien, de discussions, et de débats !

Merci aussi, aux quelques amitiés qui, nouées dans le monde virtuel, n'en sont pas moins réelles.

Merci, enfin, au sort qui m'a fait faire ces quelques rencontres qu'aucune nécessité ne semblait diriger, et qui, bien souvent, me sont un antidote utile à l'entre-soi, ou à la misanthropie facile.

Enfin, l'ayant promis bien souvent, je sais que quelques personnes m'attendent sur le choix de l'épigraphe. Avant de les satisfaire, je prends l'occasion de donner aussi les citations auxquelles le manuscrit échappera.

Tout d'abord, malgré la forte pression populaire, les citations de *L'homme sans qualités* (R. Musil), si elles sont très amusantes, auraient été d'un goût incertain. On aurait pourtant pu tirer du chapitre 11 de nombreuses citations plus ou moins élogieuses sur les mathématiques, ou, du chapitre 13, le moins agréable « *Ses collègues lui apparaissaient comme des procureurs implacables et maniaques, des policiers de la logique, et tout ensemble comme des opiomanes, dévots d'une drogue étrangement blafarde qui les aidait à peupler le monde de chiffres et de rapports abstraits : « Bon Dieu ! dit-il, je n'ai pourtant jamais eu l'intention d'être mathématicien toute ma vie ! »* », qui aurait au moins servi d'auto-avertissement, ou, en guise d'autodérision plus gentille, au chapitre 17 « *Un mathématicien n'a l'air de rien du tout, c'est-à-dire qu'il a l'air si généralement intelligent que cela n'a plus aucun sens précis ! À l'exception des membres de l'Église catholique romaine, plus personne aujourd'hui n'a l'aspect qu'il devrait avoir, parce que nous faisons de notre tête un usage aussi impersonnel que de nos mains ; mais le mathématicien, c'est le comble de tout : un mathématicien sait presque aussi peu de choses sur lui-même que les gens n'en sauront sur les prairies, les poules, les jeunes veaux, quand les pilules vitaminées auront remplacé pain et viande !* ».

La thèse correspondant sans doute souvent à la période de la vie où, si celle-ci n'a pas cessé de nous sembler avancer trop lentement, elle a déjà commencé à nous paraître trop courte. La beauté du vers, et l'angoisse universellement intelligible auraient pu faire choisir cet extrait d'un monologue de Titus (*Bérénice*, J. Racine[1]) :

« *Sont-ce là ces projets de grandeur et de gloire*
Qui devaient dans les cœurs consacrer ma mémoire ?
Depuis huit jours je règne. Et jusques à ce jour
Qu'ai-je fait pour l'honneur ? J'ai tout fait pour l'amour.
D'un temps si précieux quel compte puis-je rendre ?
Où sont ces heureux jours que je faisais attendre ?
Quels pleurs ai-je séchés ? Dans quels yeux satisfaits
Ai-je déjà goûté le fruit de mes bienfaits ?
L'univers a-t-il vu changer ses destinées ?
Sais-je combien le ciel m'a compté de journées ?
Et de ce peu de jours si longtemps attendus,
Ah malheureux ! Combien j'en ai déjà perdus ! »

Le ton, cependant en aurait été peut-être un peu trop élevé, et le présage, un peu sinistre.

La beauté, toujours, m'a fait considérer un temps un très beau poème du XIIe siècle, de Dietmar Von Aist, que je ne cite ici que pour ceux qui, un peu germanophone, pourront au moins en apprécier l'euphonie.

« Slâfest du, friedel ziere?
Man wecket uns leider schiere.
Ein vogellîn sô wol getân,
Daz ist der linden an daz zwî gegân.

Ich was vil sanfte entslâfen,

[1]Certains s'attendent ici — Gabriel, je te vois ! à une remarque acerbe sur la mise en scène criminelle qui a été commise l'an dernier au MC2 et contre laquelle j'ai longuement vitupéré en salle café. Je me retiens, je ne pourrais être juste sans commettre de graves entorses à la bienséance et au bon goût, entorses que je laisse aux professionnels, qui s'en chargent visiblement très bien.

Nû rüefest du kint ‚Wâfen'.
Liep âne leit mac niht gesîn.
Swaz du gebiutest, daz leiste ich, friundîn mîn.

Diu frouwe begunde weinen:
Du rîtest und lâst mich eine.
Wenne wilt du wider her zuo mir?
Ôwê, du füerest mîn fröude sament dir! »

La brièveté a failli un temps me faire choisir, la fin du *Comte de Monte-Cristo* de Dumas « *Quant à vous, Morrel, voici tout le secret de ma conduite envers vous : il n'y a ni bonheur ni malheur en ce monde, il y a la comparaison d'un état à un autre, voilà tout. Celui-là seul qui a éprouvé l'extrême infortune est apte à ressentir l'extrême félicité. Il faut avoir voulu mourir, Maximilien, pour savoir combien il est bon de vivre. Vivez donc et soyez heureux, enfants chéris de mon cœur, et n'oubliez jamais que, jusqu'au jour où Dieu daignera dévoiler l'avenir à l'homme, toute la sagesse humaine sera dans ces deux mots : « Attendre et espérer ! »* » , ou au moins sa dernière phrase.

Enfin, il y a quelques semaines, je me suis résolu, comme une évidence, au choix de l'extrait qui suit, et qui clot ces sans doute trop longues considérations. Et pour finir, merci aussi à Clément (D.), que j'ai attendu cette partie pour remercier, uniquement pour lui signaler : désolé, ce n'est pas le Hussard sur le toit !

« Aujourd'hui, comme un auteur s'effraie de voir ses propres rêveries qui lui paraissent sans grande valeur parce qu'il ne les sépare pas de lui-même, obliger un éditeur à choisir un papier, à employer des caractères peut-être trop beaux pour elles, je me demandais si mon désir d'écrire était quelque chose d'assez important pour que mon père dépensât à cause de cela tant de bonté. Mais surtout en parlant de mes goûts qui ne changeraient plus, de ce qui était destiné à rendre mon existence heureuse, il insinuait en moi deux terribles soupçons. Le premier c'était que (alors que chaque jour je me considérais comme sur le seuil de ma vie encore intacte et qui ne débuterait que le lendemain matin) mon existence était déjà commencée, bien plus, que ce qui en allait suivre ne serait pas très différent de ce qui avait précédé. Le second soupçon, qui n'était à vrai dire qu'une autre forme du premier, c'est que je n'étais pas situé en-dehors du Temps, mais soumis à ses lois, tout comme ces personnages de roman qui à cause de cela me jetaient dans une telle tristesse quand je lisais leur vie, à Combray, au fond de ma guérite d'osier. Théoriquement on sait que la terre tourne, mais en fait on ne s'en aperçoit pas, le sol sur lequel on marche semble ne pas bouger et on vit tranquille. Il en est ainsi du Temps dans la vie. Et pour rendre sa fuite sensible, les romanciers sont obligés en accélérant follement les battements de l'aiguille, de faire franchir au lecteur dix, vingts, trente ans, en deux minutes. Au haut d'une page on a quitté un amant plein d'espoir, au bas de la suivante on le retrouve octogénaire, accomplissant péniblement dans le préau d'un hospice sa promenade quotidienne, répondant à peine aux paroles qu'on lui adresse, ayant oublié le passé. En disant de moi : « Ce n'est plus un enfant, ces goûts ne changeront plus, etc. », mon père venait tout d'un coup de me faire apparaître à moi-même dans le Temps, et me causait le même genre de tristesse que si j'avais été non pas encore l'hospitalisé ramolli, mais ces héros dont l'auteur, sur un ton indifférent qui est particulièrement cruel, nous dit à la fin d'un livre : « Il quitte de moins en moins la campagne. Il a fini par s'y fixer définitivement, etc. ». »

À l'ombre des jeunes filles en fleurs, M. Proust

Résumé

Les nœuds longs étudiés dans cette thèse sont des plongements standard à l'infini de $\mathbb{R}^n$ dans un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, pour n impair. Pour ces nœuds, on définit des invariants $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ à difféomorphismes ambiants triviaux hors d'une boule près. Ces invariants généralisent des invariants $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ définis par Bott, Cattaneo, et Rossi pour les nœuds longs de $\mathbb{R}^{n+2}$, et on donne une définition plus souple de ces invariants. L'invariant Z_k est défini comme une combinaison linéaire d'intégrales de certaines formes différentielles sur des espaces de configurations associés à des graphes ayant $2k$ sommets, de deux types, et $2k$ arêtes, de deux types également. Ces formes sont définies en tirant en arrière et en faisant le produit extérieur de $(n+1)$-formes (appelées *formes propagatrices externes*) sur l'espace de configurations de deux points de l'espace ambiant et de $(n-1)$-formes (appelées *formes propagatrices internes*) sur l'espace de configurations de deux points de $\mathbb{R}^n$. De manière équivalente, en utilisant des chaînes duales à ces formes, on donne une interprétation de Z_k en termes d'intersections algébriques de préimages de *chaînes propagatrices*. On obtient une formule pour Z_k en fonction de nombres d'enlacement de certains cycles d'une surface dont le bord est le nœud, pour les nœuds virtuellement rectifiables. La classe des nœuds virtuellement rectifiables contient au moins les nœuds rubans longs, et les nœuds longs avec $n \equiv 1 \mod 4$. Notre formule exprime les invariants Z_k comme les coefficients du développement en série formelle du logarithme de la torsion de Reidemeister.

Le chapitre introductif 1 vise à présenter les travaux antérieurs sur des invariants similaires, notamment en dimension 3, ainsi que les invariants les plus connus des nœuds de dimension supérieure. Le chapitre 2 présente les invariants étudiés dans la thèse dans la version qui en avait été donnée par Bott, Cattaneo, et Rossi pour les nœuds longs de $\mathbb{R}^{n+2}$. Les chapitres 3 et 4 présentent les résultats principaux de la thèse, en dimension impaire $n \geq 1$. Les résultats du chapitre 4 sont vérifiés pour les nœuds virtuellement rectifiables de la définition 4.3.2. Les chapitres 5 et 6 reproduisent respectivement les prépublications « Generalized Bott-Cattaneo-Rossi invariants of high-dimensional knots » [Let19] et « The Reidemeister torsion of high-dimensional long knots from configuration space integrals » [Let20], et démontrent les résultats annoncés respectivement dans les chapitres 3 et 4 pour $n \geq 3$. Le chapitre 7 contient une étude du cas de la dimension 1. Dans le chapitre 8, on démontre l'existence de chaînes propagatrices lisses en dehors d'une boule, et on étudie des classes d'homotopie de parallélisations des $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotiques d'homologie entière, en utilisant des outils de théorie de l'obstruction.

Abstract

In this thesis, long knots are embeddings of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ in an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with a standard behaviour near infinity, for some odd integer n. We define invariants $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ of these knots up to ambient diffeomorphisms that are standard outside a ball. These invariants are a generalization to this wider setting of an invariant $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ of Bott, Cattaneo, and Rossi for long knots in $\mathbb{R}^{n+2}$. Our definition also applies to long knots in $\mathbb{R}^{n+2}$ and it is more flexible than the original one. The *Bott-Cattaneo-Rossi invariant* Z_k is a linear combination of some integrals of differential forms over configuration spaces associated to some graphs with $2k$ vertices of two kinds, and $2k$ edges of two kinds. These forms are products of pullbacks of some $(n+1)$-forms (called *external propagating forms*) on the two-point configuration space of the ambient space and of some $(n-1)$-forms (called *internal propagating forms*) on the two-point configuration space of $\mathbb{R}^n$. In a dual way, we define Z_k as a combination of algebraic intersections of preimages of some *propagating chains* in these two two-point configuration spaces. We prove a formula for Z_k in terms of linking numbers of some cycles in a surface bounded by the knot, for *virtually rectifiable knots*. The class of virtually rectifiable long knots contains at least the long ribbon knots, and all the long knots when $n \equiv 1 \mod 4$. Our formula yields an expression of the Reidemeister torsion in terms of the Z_k.

Chapter 1 is an overview of the previously studied similar invariants, in particular in dimension 3, and of some high-dimensional knot invariants. Chapter 2 reviews the definition of the invariants (Z_k) for long knots of $\mathbb{R}^{n+2}$ by Bott, Cattaneo and Rossi. Chapters 3 and 4 contain the results of the thesis in odd dimension $n \geq 1$. The results of Chapter 4 hold for the virtually rectifiable knots of Definition 4.3.2. The preprints « Generalized Bott-Cattaneo-Rossi invariants of high-dimensional knots » [Let19] and « The Reidemeister torsion of high-dimensional long knots from configuration space integrals » [Let20] are integrally reproduced in Chapter 5 and Chapter 6. They contain the proofs of the results stated in Chapters 3 and 4 when $n \geq 3$. Chapter 7 is a study of the dimension $n = 1$ case. Eventually, in Chapter 8, we prove the existence of propagating chains that are smooth outside a ball and we study homotopy classes of parallelizations of asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$.

Table des matières

Chapitre 1

Panorama

Dans ce chapitre, nous donnons un bref aperçu de résultats déjà connus concernant les deux domaines auxquels se rattache cette thèse : les invariants de type fini, et les invariants de nœuds en haute dimension.

1.1 Invariants de type fini

1.1.1 Premières définitions

La notion d'invariants de type fini a été d'abord introduite dans le cadre des invariants d'entrelacs dans $\mathbb{S}^3$, c'est-à-dire des invariants d'isotopie des plongements d'une union disjointe de cercles dans $\mathbb{S}^3$. À un entrelacs, on peut associer un diagramme en le projetant sur un plan générique, où les seules singularités sont des points doubles transverses, et en gardant une information sur quel arc passe au-dessus de l'autre. Un tel point double est appelé un *croisement*, et le croisement opposé est celui où l'information dessus-dessous est inverse.

Étant donné un entrelacs L, un diagramme D de L, et des croisements deux-à-deux distincts $(c_i)_{1\leq i\leq r}$ de D, on note $(L, (c_i)_{1\leq i\leq r})$ l'entrelacs dont un diagramme est obtenu en changeant le croisement c_i dans D en le croisement opposé pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. La dérivée d'un invariant d'entrelacs Z à valeurs dans un $\mathbb{Z}$-module par rapport à ces croisements est

$$\partial_{(c_i)_{1\leq i\leq r}} Z(L) = \sum_{I\subset\{1,\ldots,r\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} Z((L, (c_i)_{i\in I})).$$

Dans ce cadre, un *invariant de Vassiliev de type au plus k* est un invariant d'entrelacs Z tel que pour tout entrelacs L et tous croisements deux-à-deux distincts $(c_i)_{i\in\{1,\ldots,k+1\}}$ d'un diagramme de L, $\partial_{(c_i)_{i\in\{1,\ldots,k+1\}}} Z(L) = 0$. Un *invariant de type fini* (ou *invariant de Vassiliev*) est un invariant qui est de type au plus k pour un certain entier naturel k.

Plus généralement, donnons-nous un ensemble $\mathcal{O}$ d'objets (en pratique les classes d'équivalence de certains objets topologiques pour une relation), et une fonction $Z\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ (en pratique un invariant des objets topologiques pour la relation étudiée). Supposons qu'il existe des opérations élémentaires $(o_i)_i$ transformant les éléments de $\mathcal{O}$. Étant donné des opérations commutant deux-à-deux, notons $(X, (o_i)_{i\in J})$ l'objet obtenu en appliquant les opérations $(o_i)_{i\in J}$ à X. Dans ce cadre, Z est un invariant de type au plus k si pour tout objet X et toutes opérations $(o_i)_{1\leq i\leq k+1}$ commutant deux-à-deux,

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,k+1\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} Z((X, (o_i)_{i\in I})) = 0.$$

De nouveau, Z est un invariant *de type fini* s'il existe un entier naturel k tel que Z soit un invariant de type au plus k.

L'exemple le plus trivial de cette théorie est de considérer $\mathcal{O} = \mathbb{Z}^d$, avec les opérations d'incrémentation o_i qui ajoutent $+1$ à une coordonnée d'un d-uplet. Dans ce cadre, les invariants de type au plus k sont exactement les polynômes de degré total au plus k.

Un second exemple est donné par les invariants de Vassiliev ci-dessus. Les invariants de type fini contiennent alors, par exemple, les coefficients de normalisations appropriées du polynôme d'Alexander, du polynôme de Jones colorié, et du polynôme HOMFLY-PT.

Un troisième exemple a d'abord été étudié par Ohtsuki [Oht96] en regardant l'ensemble des sphères d'homologie entière (les variétés compactes de dimension 3 ayant l'homologie entière de $\mathbb{S}^3$) avec certaines opérations de chirurgie. Dans [GGP01], Garoufalidis, Goussarov et Polyak ont étudié et comparé d'autres théories d'invariants de type fini associées à différentes opérations de chirurgie sur les sphères d'homologie entière. Les travaux de Moussard dans [Mou12b] décrivent une théorie d'invariants de type fini pour les sphères d'homologie rationnelle (les variétés compactes de dimension 3 ayant l'homologie rationnelle de $\mathbb{S}^3$).

Un dernier exemple est fourni par la théorie des nœuds rubans de haute dimension ($n \geq 2$) développée par Habiro, Kanenobu, et Shima [HKS99] et présentée plus en détail en partie 4.2.2. Watanabe a démontré dans [Wat07] que les invariants définis par Bott, Cattaneo, et Rossi dans [Bot96], [CR05], puis [Ros02] sont des invariants de type fini pour les nœuds rubans de $\mathbb{R}^{n+2}$ quand n est impair et supérieur à 3.

1.1.2 Invariants universels

Dans tous ces cadres, une des questions naturelles est celle de l'existence et de la construction d'invariants « universels » définis comme suit.

Définition 1.1.1. Un *invariant universel* (pour une théorie d'invariants de type fini) est un invariant Z à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ tel que pour tout invariant de type fini f à valeurs réelles, il existe une forme linéaire $w\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que $f = w \circ Z$.

Dans le cadre des invariants de Vassiliev, le premier invariant universel est l'*intégrale de Kontsevich* Z^{Kon} décrite par Bar-Natan dans [BN95a]. Cette intégrale vit dans un espace vectoriel dont les éléments sont des combinaisons linéaires de diagrammes unitrivalents[1], modulo certaines relations sur les diagrammes. Un second invariant universel est le *développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons*, et a été étudié, entre autres, par Altschüler et Friedel [AF97], Bar-Natan [BN95b], Guadagnini, Martellini et Mintchev [GMM90], Bott et Taubes [BT17], Dylan Thurston [Thu99], et Poirier [Poi02]. Ce second invariant est encore une combinaison linéaire de diagrammes unitrivalents. Les coefficients de cette combinaison peuvent être exprimés en fonction d'intégrales de formes différentielles sur des espaces de configurations dépendant du diagramme et de l'entrelacs. De manière équivalente, on peut les interpréter en termes d'intersections algébriques de certaines préimages dans ces espaces de configuration de sous-variétés de la forme $\{(x, x+\lambda v) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ où $v \in \mathbb{S}^2$. Les adhérences de ces sous-variétés dans une compactification de l'espace de configurations $C_2^0(\mathbb{R}^3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\}$ sont des exemples de *chaînes propagatrices*, une des notions centrales de cette thèse. Dans [Les00], Lescop a identifié cet invariant avec l'intégrale de Kontsevich, à une anomalie près.

Dans le cadre des invariants de 3-sphères d'homologie entière, le premier invariant universel est l'*invariant LMO* défini par Lê, Murakami, et Ohtsuki dans [LMO98], en utilisant l'intégrale de Kontsevich et les présentations des 3-variétés par chirurgie de $\mathbb{S}^3$ le long d'un entrelacs. Un second invariant universel, appelé *invariant KKT*, a été proposé par Kontsevich [Kon94], puis formalisé par Greg Kuperberg et Dylan Thurston [KT99] et Lescop [Les04a]. Moussard [Mou12a] a démontré que l'invariant KKT est également un invariant universel des sphères d'homologie rationnelle, en utilisant pour cela une formule de chirurgie obtenue par Lescop dans [Les04b]. Ces résultats ainsi qu'une formule de chirurgie pour l'invariant LMO obtenue par Massuyeau [Mas13] impliquent que les invariants LMO et KKT distinguent exactement les mêmes 3-sphères d'homologie rationnelle.

Enfin, pour les nœuds rubans de $\mathbb{R}^{n+2}$, les résultats de Habiro et Shima dans [HS01], rappelés ici en théorème 4.2.5, entraînent qu'un certain développement en série formelle du polynôme d'Alexander des nœuds rubans fournit un invariant universel.

Il existe très peu d'exemples de calculs directs des invariants définis au moyen d'intégrales de configurations spatiales. Bar-Natan [BN95b] et Guadagnini, Mar-

[1] i.e. dont les sommets sont de valence 1 ou 3

tellini et Mintchev [GMM90] ont calculé explicitement la partie de degré 2 du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons pour le nœud trivial. Poirier [Poi02] a démontré que l'anomalie évoquée plus haut s'annule en degré 3 et 5 (c'est-à-dire en se restreignant aux diagrammes ayant au plus 10 sommets). Enfin, un calcul direct de la partie de degré 2 de l'invariant des 3-sphères mentionné plus haut a été effectué par Lescop dans [Les15a].

Dans cette thèse, et notamment dans le chapitre 6, on utilise des chaînes propagatrices explicites pour calculer les invariants de Bott-Cattaneo-Rossi généralisés (Z_k) en fonction de certains nombres d'enlacement de cycles dans une surface bordée par le nœud. On obtient ainsi la formule du théorème 4.3.7.

1.2 Invariants de nœuds en haute dimension

1.2.1 Matrices de Seifert

Dans cette partie[2], on se place dans le cadre plus classique des plongements de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^{n+2}$. Une *surface de Seifert* d'un nœud est alors une variété connexe compacte orientée dont le bord est l'image du nœud. À une telle surface Σ, on peut associer une forme bilinéaire d'enlacement $(x^k, y^{n+1-k}) \mapsto \mathrm{lk}(x, y^+)$, où, pour tout cycle y de Σ, y^+ désigne le cycle obtenu en poussant légèrement y dans la direction normale positive à la surface. Ceci induit en particulier une forme bilinéaire sur la partie libre de $H_{\frac{n+1}{2}}(\Sigma)$, dont une matrice dans une base est appelée *matrice de Seifert d'ordre* $\frac{n+1}{2}$. Les résultats présentés dans les deux théorèmes suivants portent sur cette matrice.

Définition 1.2.1. On dit que deux matrices A et A' sont *cobordantes* si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \end{pmatrix}$ est congruente[3] à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec B, C, et D carrées de même taille.

On dit que deux matrices A et A' sont *S-équivalentes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini d'utilisations des relations suivantes.

- Des congruences $A_i \simeq ({}^T R) A_{i+1} R$ avec R à coefficients entiers et de déterminant 1.

[2]Dans la suite de la thèse, les nœuds qui nous intéresseront sont les plongements de $\mathbb{R}^n$ dans une variété de dimension $n+2$, avec un comportement standard à l'infini. Il y a une bijection entre les classes d'isotopie de ces deux types de nœuds.

[3]Deux matrices carrées à coefficients P et Q sont congruentes s'il existe une matrice inversible $R \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $P = ({}^T R) Q R$.

- Des expansions ou des réductions élémentaires de la forme

$$A_i \simeq A_{i+1} = \begin{pmatrix} & A_i & & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  où les α_i sont des entiers.

- Des expansions ou des réductions élémentaires de la forme

$$A_i \simeq A_{i+1} = \begin{pmatrix} & \beta_1 & 0 \\ A_i & \vdots & \vdots \\ & \beta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  où les β_i sont des entiers.

Un théorème de Levine [Lev69, p. 233] permet de voir l'information contenue dans ces matrices.[4]

Théorème 1.2.2 (Levine)**.** *Soient ψ et ψ' deux nœuds de $\mathbb{S}^{n+2}$ d'images K et K'. On dit que ψ et ψ' sont* concordants *s'il existe une variété lisse orientée V de $[0,1] \times \mathbb{S}^{n+2}$ dont le bord est la réunion de $\{0\} \times -K$ et $\{1\} \times K'$. Si n est impair et supérieur ou égal à 3, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *Les deux nœuds ψ et ψ' sont concordants.*

- *Les deux nœuds ψ et ψ' admettent des matrices de Seifert d'ordre $\frac{n+1}{2}$ cobordantes.*

Pour la relation d'isotopie, les résultats sont à notre connaissance plus rares. Citons les deux plus forts, qui classifient totalement les nœuds pour l'isotopie, au prix d'hypothèses fortes sur l'homotopie du complémentaire.

Théorème 1.2.3 (Levine, [Lev70], Theorems 1 & 3)**.** *Soit n un entier impair et supérieur ou égal à 3, Soient ψ et ψ' deux nœuds de $\mathbb{S}^{n+2}$, tels que pour tout $r \in \left\{1, \dots, \frac{n-1}{2}\right\}$,*

$$\pi_r(\mathbb{S}^{n+2} \setminus \psi(\mathbb{S}^n)) \cong \pi_r(\mathbb{S}^{n+2} \setminus \psi'(\mathbb{S}^n)) \cong \pi_r(\mathbb{S}^1).$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

[4] La première version de ce manuscrit donnait ce résultat avec le cobordisme au lieu de la concordance, cette dernière étant appelée "cobordism" dans l'article [Lev69].

- *Les deux nœuds ψ et ψ' sont isotopes.*
- *Les deux nœuds ψ et ψ' admettent des matrices de Seifert d'ordre $\frac{n+1}{2}$ S-équivalentes.*

Dans [Far80], Farber associe à un nœud et à une surface de Seifert Σ de ce nœud une application $\theta_\Sigma \colon \Sigma \wedge \Sigma \to \mathbb{S}^{n+1}$ sur le smash-produit $\Sigma \wedge \Sigma$, et définit une relation d'équivalence sur ces objets, en utilisant des outils de théorie de l'homotopie stable et de dualité de Spanier-Whitehead. Pour cette relation, dite de *R-équivalence*, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.4 (Farber, [Far80], Classification Theorem, p. 125)**.** *Soit n un entier impair et supérieur ou égal à 5. Soient ψ et ψ' deux nœuds de $\mathbb{S}^{n+2}$, tels que pour tout $r \in \left\{1, \dots, 1 + \left[\frac{n}{3}\right]\right\}$,*

$$\pi_r(\mathbb{S}^{n+2} \setminus \psi(\mathbb{S}^n)) \cong \pi_r(\mathbb{S}^{n+2} \setminus \psi'(\mathbb{S}^n)) \cong \pi_r(\mathbb{S}^1).$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- *Les deux nœuds ψ et ψ' sont isotopes.*
- *Les deux nœuds ψ et ψ' admettent des surfaces de Seifert Σ et Σ' telles que (Σ, θ_Σ) et $(\Sigma', \theta_{\Sigma'})$ sont R-équivalentes.*

En définition 4.1.8, on donne une définition plus large des matrices de Seifert qui décrivent la forme d'enlacement $\Big((x, y) \in H_k(\Sigma) \times H_{n+1-k}(\Sigma) \mapsto \mathrm{lk}(x, y^+) \in \mathbb{Z}\Big)$ pour tout $k \in \underline{n}$. En dimension $\frac{n+1}{2}$, ce formalisme est différent de celui utilisé dans cette partie puisque celui de la définition 4.1.8 dépend du choix de deux bases duales pour l'intersection. En annexe A, on démontre que l'on peut construire des nœuds longs avec des matrices de Seifert données.

1.2.2 Polynômes d'Alexander et torsion de Reidemeister

Les *polynômes d'Alexander* $(\Delta_{i,\psi}(t))_{1 \le i \le n}$ des nœuds de $\mathbb{S}^{n+2}$ sont définis, à partir de l'homologie rationnelle du revêtement cyclique infini du complémentaire du nœud. Par construction, ce sont des invariants d'isotopie du nœud. Ce sont des éléments de $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$, définis à multiplication par un monôme αt^d près (où $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, et $d \in \mathbb{Z}$). Nous en donnons une présentation plus détaillée en partie 4.1.1, et nous expliquons comment les calculer à partir de matrices de Seifert.

La *torsion de Reidemeister* est un invariant que l'on peut définir à partir des polynômes d'Alexander comme le produit alterné $\prod_{i=1}^{n} \Delta_{i,\psi}(t)^{(-1)^{d+1}}$. Elle est triviale en dimension paire. Elle peut être normalisée en dimension n impaire par $\mathcal{T}_\psi(1) = 1$ et $\mathcal{T}_\psi(t^{-1}) = \mathcal{T}_\psi(t)$ et est alors un élément bien défini de $\mathbb{Q}(t)$.

1.2.3 Invariants de Bott-Cattaneo-Rossi

Dans cette partie, sauf mention du contraire, on suppose n impair et supérieur ou égal à 3.

En s'inspirant des invariants définis à partir du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons en dimension 3, Bott [Bot96] a défini un invariant d'isotopie des nœuds de $\mathbb{S}^{n+2}$. Cet invariant est défini comme une combinaison linéaire de trois intégrales sur des espaces de configurations associés aux diagrammes suivants.

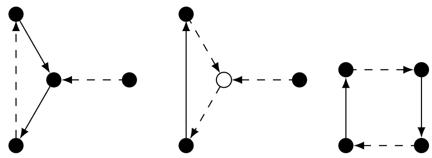


FIGURE 1.1

À chaque diagramme Γ, on associe un espace de configurations $C_\Gamma(\psi)$ dont les éléments sont les quadruplets de points deux-à-deux distincts de $\mathbb{S}^3$ correspondant aux sommets du graphe, avec la condition que les sommets noirs sont sur le nœud. Sur cet espace, on peut définir une forme différentielle qui « mesure » l'aire balayée par certaines directions, associées aux arêtes, entre les points d'une configuration. L'intégrale de cette forme converge, et en combinant les trois intégrales avec certains poids et orientations, on obtient un invariant d'isotopie Z_2.

Cattaneo et Rossi ([CR05] et [Ros02]) ont étendu ce procédé en comptant des diagrammes connexes avec plus de sommets pour obtenir toute une suite d'invariants $(Z_k)_{k\geq 2}$, définis par combinaison d'intégrales sur des espaces de configurations. Pour k impair, Z_k est toujours nul.

Watanabe [Wat07] a démontré que ces invariants (Z_k) étaient des invariants de type fini pour les nœuds rubans longs, avec les opérations introduites par Habiro, Kanenobu et Shima [HKS99] et décrites en partie 4.2.2. En particulier, ceci implique que les invariants (Z_k) s'expriment en fonction des coefficients β_k du logarithme du polynôme d'Alexander des nœuds rubans longs. Watanabe a également obtenu que l'invariant $\frac{1}{2}Z_{2k} + \beta_{2k}$ était de type au plus $2k-1$.

Nous précisons également en théorème 4.4.2 la relation obtenue par Watanabe pour les nœuds rubans longs sur Z_k en démontrant la formule $Z_{2k}(\psi)+\frac{1}{2}\beta_{2k}(\psi) = 0$ pour tout nœud ruban long. Pour ce faire, nous assouplissons les définitions des invariants (Z_k), et nous les étendons au cadre plus général des nœuds longs dans un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière pour $n \geq 1$ impair (chapitre 3), et nous obtenons des formules explicites de ces invariants en fonction de matrices de Seifert (théorème 4.3.7). Dans le cadre plus général des nœuds virtuellement rectifiables dans un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, on obtient la formule explicite suivante (théorème 4.3.8) reliant la torsion de Reidemeister aux invariants généralisés $(Z_k)_{k\geq 2}$ du chapitre 3 :

$$\mathcal{T}_\psi(e^h) = \exp\left(-\sum_{k\geq 2} Z_k(\psi)h^k\right).$$

Dans le cas $n = 1$, ceci nous fournit aussi l'expression suivante du polynôme d'Alexander usuel :

$$\Delta_\psi(e^h) = \exp\left(-\sum_{k\geq 2} Z_k(\psi)h^k\right).$$

Chapitre 2

Les invariants de Bott-Cattaneo-Rossi dans $\mathbb{R}^{n+2}$

Dans ce premier chapitre, nous rappelons la définition des invariants de Bott-Cattaneo-Rossi pour les nœuds longs de $\mathbb{R}^{n+2}$, avec n impair ≥ 3. Les travaux de Bott, Cattaneo et Rossi portent sur ces dimensions, mais nous démontrons dans cette thèse que leurs résultats sont également valides pour $n = 1$. Le rôle des chapitres suivants sera d'étendre ces invariants à d'autres variétés dans les mêmes dimensions, d'en établir certaines propriétés, puis de discuter de leurs liens avec des invariants de nœuds connus. On fixe donc dans ce qui suit un entier naturel n impair.

2.1 Nœuds longs dans $\mathbb{R}^{n+2}$

Définition 2.1.1. Un *nœud long* de $\mathbb{R}^{n+2}$ est un plongement lisse $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

- si $||x|| \leq 1$, $||\psi(x)|| \leq 1$,
- si $||x|| \geq 1$, $\psi(x) = (0, 0, x)$.

Deux nœuds longs ψ et ψ' de $\mathbb{R}^{n+2}$ sont *isotopes* s'il existe une famille $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ de nœuds longs de $\mathbb{R}^{n+2}$, telle que $\Big((t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \mapsto \psi_t(x) \in \mathbb{R}^{n+2}\Big)$ soit lisse, et telle que $\psi_0 = \psi$ et $\psi_1 = \psi'$. Une telle famille est appelée une *isotopie* entre ψ et ψ'.

La figure 2.1 donne un exemple de tel nœud, au moins dans le cas $n = 1$.

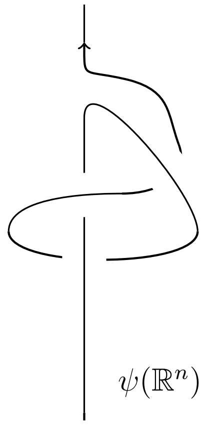


FIGURE 2.1 – Un nœud long dans l'espace $\mathbb{R}^{n+2}$.

2.2 Diagrammes de Bott-Cattaneo-Rossi

Nous introduisons ici les graphes qui nous serviront à définir les invariants (Z_k) dans la suite, et qui sont appelés diagrammes de Jacobi dans [Wat07].

Définition 2.2.1. Un *diagramme de Bott-Cattaneo-Rossi* (ou *diagramme BCR*) est un graphe connexe orienté Γ, donné par un ensemble $V(\Gamma)$ de sommets, muni d'une partition $V(\Gamma) = V_i(\Gamma) \sqcup V_e(\Gamma)$, et un ensemble $E(\Gamma)$ de couples de sommets distincts, muni d'une partition $E(\Gamma) = E_i(\Gamma) \sqcup E_e(\Gamma)$, où les éléments de $V_i(\Gamma)$ sont appelés *sommets internes*, ceux de $V_e(\Gamma)$ *sommets externes*, ceux de $E_i(\Gamma)$ *arêtes internes*, et ceux de $E_e(\Gamma)$ *arêtes externes*, tel que chaque sommet v vérifie l'une des cinq propriétés suivantes :

1. le sommet v est externe et trivalent, et possède une arête externe sortante et deux arêtes externes rentrantes, dont exactement une vient d'un sommet univalent,

2. le sommet v est interne et trivalent, et possède une arête interne rentrante, une arête interne sortante, et une arête externe rentrante, venant d'un sommet univalent,

3. le sommet v est interne et univalent, avec une arête externe sortante,

4. le sommet v est interne et bivalent, avec une arête externe rentrante, et une arête interne sortante,

5. le sommet v est interne et bivalent, avec une arête interne rentrante, et une arête externe sortante.

Les sommets externes seront représentés par des points blancs, et les sommets internes par des points noirs. Les arêtes externes seront représentées en pointillés, et les arêtes internes tracées en trait plein. Les cinq comportements ci-dessus sont alors représentés en figure 2.2.

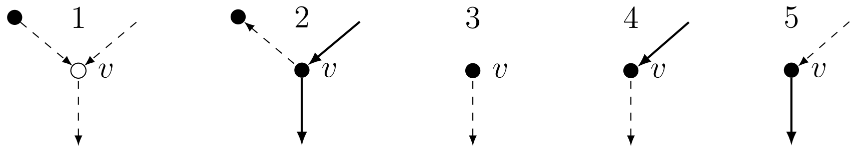


Figure 2.2

Le *degré* d'un diagramme BCR est le nombre $\frac{1}{2}\mathrm{Card}(V(\Gamma))$.

Ces conditions impliquent qu'un diagramme BCR Γ est constitué d'un cycle, avec une arête externe venant d'un sommet univalent attachée à chaque sommet du cycle dont les arêtes rentrantes et sortantes dans le cycle ont même nature. De manière équivalente, un diagramme BCR est une suite cyclique alternée de fragments comme en figure 2.3, avec autant de morceaux du premier que du deuxième type. En particulier, le degré d'un diagramme BCR est un entier naturel.

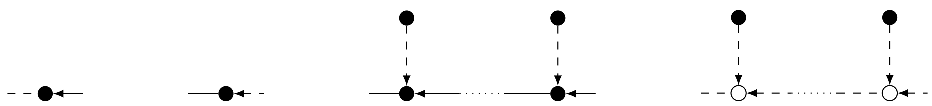


Figure 2.3

Deux exemples de diagrammes BCR sont donnés en figure 2.4.

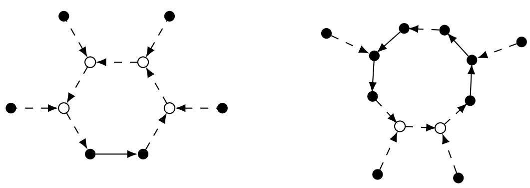


Figure 2.4 – Deux diagrammes BCR de degrés respectifs 5 et 6

2.3 Espace de configurations associé à un diagramme et à un nœud long

Afin de « compter » les diagrammes BCR sur un nœud long $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, nous définissons l'espace de configurations $C^0_\Gamma(\psi)$ par

$$C^0_\Gamma(\psi) = \{c\colon V(\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \mid c(V_i(\Gamma)) \subset \psi(\mathbb{R}^n)\}.$$

Pour toute configuration $c \in C^0_\Gamma(\psi)$, il existe une unique application $c_i\colon V_i(\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $c_{|V_i(\Gamma)} = \psi \circ c_i$. Pour toute arête e de Γ, posons

$$n(e) = \begin{cases} n+1 & \text{si } e \text{ est externe,} \\ n-1 & \text{si } e \text{ est interne.} \end{cases}$$

On définit pour toute arête $e = (v, w)$ une application

$$\begin{array}{cccl} G_e\colon & C^0_\Gamma(\psi) & \to & \mathbb{S}^{n(e)} \\ & c & \mapsto & \begin{cases} \frac{c(w)-c(v)}{||c(w)-c(v)||} & \text{si } e \text{ est externe,} \\ \frac{c_i(w)-c_i(v)}{||c_i(w)-c_i(v)||} & \text{si } e \text{ est interne.} \end{cases} \end{array}$$

Les espaces de configurations $C^0_\Gamma(\psi)$ sont orientés comme suit. Notons $(\mathrm{d}X^i_v)_{i\in\underline{n+2}}$ les formes coordonnées du sommet externe $c(v)$ dans une carte préservant l'orientation de M°, et $(\mathrm{d}Y^i_v)_{i\in\underline{n}}$ celles du sommet interne $c_i(v) \in \mathbb{R}^n$. Coupons chaque demi-arête externe e en deux demi-arêtes e_- (la queue) et e_+ (la tête), et associons à chacune de ces demi-arêtes la forme $\Omega'_{e_\pm}$ suivante, comme en Figure 2.5.

- si $e_\pm$ est adjacente à un sommet interne v, $\Omega'_{e_\pm} = \mathrm{d}Y^1_v \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Y^n_v$,
- si $e_\pm = e_+$ est la tête d'une arête venant d'un sommet univalent et arrivant à un sommet externe v, $\Omega'_{e_+} = \mathrm{d}X^1_v$,
- si $e_\pm = e_-$ est la queue d'une arête du cycle partant d'un sommet externe v, $\Omega'_{e_-} = \mathrm{d}X^2_v$,
- si $e_\pm = e_+$ est la tête d'une arête du cycle arrivant à un sommet externe v, $\Omega'_{e_+} = \mathrm{d}X^3_v \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}X^{n+2}_v$.

On définit alors le signe $\varepsilon'(\Gamma) = (-1)^{N_T(\Gamma)+\mathrm{Card}(E_e(\Gamma))}$ du diagramme, où $N_T(\Gamma)$ désigne le nombre de sommets trivalents de Γ, et on oriente $C_\Gamma(\psi)$ avec la forme[1] $\Omega'(\Gamma) = \varepsilon'(\Gamma) \bigwedge\limits_{e\in E_e(\Gamma)} \left(\Omega'_{e_-} \wedge \Omega'_{e_+}\right)$.

[1] Les formes $\Omega'_{e_\pm}$ et le signe $\varepsilon'(\Gamma)$ sont différents de l'orientation définie à la partie 5.2.4, mais la forme $\Omega'(\Gamma)$ coïncide avec la forme $\Omega(\Gamma)$ de cette dernière partie. La version présentée ici est plus cohérente avec les conventions habituelles pour les diagrammes unitrivalents en dimension 1.

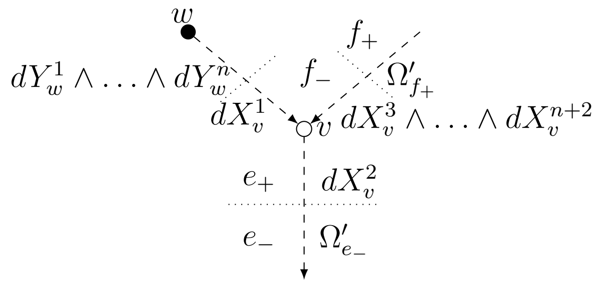


FIGURE 2.5 – Les formes associées aux demi-arêtes externes.

2.4 Invariants de Bott-Cattaneo-Rossi $(Z_k)_{k\geq 2}$

Pour tout diagramme BCR Γ, et tout nœud long ψ, on peut donc définir une forme différentielle sur $C^0_\Gamma(\psi)$ comme suit.

Soit $\omega_{n\pm 1}$ la $(n \pm 1)$-forme $SO(n \pm 1 + 1)$-invariante sur $\mathbb{S}^{n\pm 1}$, de masse totale 1. Pour chaque arête e, on pose $\omega_e(\Gamma, \psi) = {G_e}^*(\omega_{n(e)})$. Cette forme étant de degré pair, on pose

$$\omega(\Gamma, \psi) = \bigwedge_{e\in E(\Gamma)} \omega_e(\Gamma, \psi),$$

ce qui a un sens sans préciser l'ordre des termes du produit. On démontre dans le lemme 5.2.9 que $\deg(\omega(\Gamma, \psi)) = \dim(C_\Gamma(\psi))$, de sorte que l'intégrale $\int_{C^0_\Gamma(\psi)} \omega(\Gamma, \psi)$ est un nombre réel[2]. Dans ce cadre, pour tout entier $k \geq 2$, l'invariant de Bott-Cattaneo-Rossi (abrégé BCR) de degré k est défini par

$$Z_k(\psi) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_k} \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(\Gamma))} \int_{C^0_\Gamma(\psi)} \omega(\Gamma, \psi),$$

où $\mathcal{G}_k$ désigne l'ensemble des diagrammes BCR de degré k, et où $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(\Gamma))$ désigne le nombre d'automorphismes d'un diagramme BCR Γ. On a alors les deux résultats suivants[3].

Théorème 2.4.1 (Bott [Bot96], Cattaneo, Rossi [CR05, Ros02])**.** *Supposons $n \geq 3$ (et toujours impair). Les invariants BCR $(Z_k)_{k\geq 2}$ sont des invariants d'isotopie des nœuds longs.*

Théorème 2.4.2 (Watanabe [Wat07])**.** *Supposons $n \geq 3$ (et toujours impair). Si k est impair, l'invariant Z_k est toujours nul. Pour tout $k \geq 2$ pair, il existe des nœuds longs pour lesquels l'invariant Z_k n'est pas nul.*

[2] La convergence de cette intégrale découle des propriétés de la compactification $C_\Gamma(\psi)$ du chapitre suivant.

[3] Les chapitres suivants étendent ces résultats à un cadre plus large, qui inclut la dimension $n = 1$.

Chapitre 3

Invariants BCR généralisés

Dans ce chapitre, on assouplit la définition des invariants Z_k du chapitre précédent, en introduisant les propagateurs de la définition 3.7.2. Cet assouplissement nous permet de calculer exactement les Z_k en fonction de la torsion de Reidemeister au chapitre 4. Cette définition plus souple nous permet aussi d'étendre ces invariants aux nœuds longs dans d'autres variétés que $\mathbb{R}^{n+2}$. Les résultats de ce chapitre sont démontrés au chapitre 5 pour $n \geq 3$ impair. La plupart des arguments de ce chapitre s'appliquent au cas de la dimension 1. Les arguments supplémentaires requis en dimension 1 sont présentés au chapitre 7.

Pour tout entier $p \geq 1$, on note $\underline{p}$ l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$ des entiers de 1 à p.

3.1 $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotiques d'homologie entière

Définition 3.1.1. Soit M une variété lisse orientée compacte sans bord de dimension $n+2$ telle que $H_*(M;\mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{S}^{n+2};\mathbb{Z})$. Soit $\infty \in M$, et posons $M^\circ = M \setminus \{\infty\}$. Identifions[1] une boule $B_\infty(M)$ autour de ∞ dans M au complémentaire B_∞ de la boule ouverte unité dans $\mathbb{S}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2} \cup \{\infty\}$, et posons $B(M) = \overline{M^\circ \setminus B_\infty^\circ}$.

La variété M°, munie de la décomposition $M^\circ = B(M) \cup B_\infty^\circ$ est appelée un $\mathbb{R}^{n+2}$ *asymptotique d'homologie entière.*

On peut donc voir l'espace M° comme l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^{n+2}$, dont on a remplacé la boule unité par une variété de même bord et de même homologie. Dans ce cadre, on peut définir une notion de nœud long comme suit.

Définition 3.1.2. Soit M° un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière. Un *nœud long* de M° est un plongement lisse $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ tel que

[1] Pour des raisons de régularité, on suppose en fait que cette identification s'étend à un voisinage ouvert de la boule $B_\infty(M)$.

- pour tout x tel que $||x|| \leq 1$, $\psi(x) \in B(M)$,
- pour tout x tel que $||x|| \geq 1$, $\psi(x) \in B_\infty^\circ$, et $\psi(x) = (0, 0, x)$ (ce qui a un sens puisque $B_\infty^\circ \subset \mathbb{R}^{n+2}$).

La figure 3.1 résume les notations précédentes (en imaginant que la direction verticale et le nœud sont de dimension n).

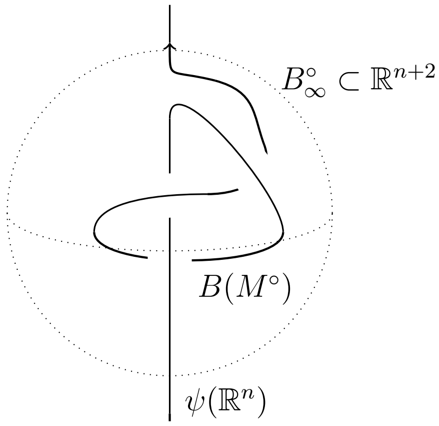


FIGURE 3.1 – Un nœud long dans l'espace M°. La boule (en pointillé) représente $B(M)$. Son extérieur est B_∞°, contenu dans $\mathbb{R}^{n+2}$.

Deux tels nœuds longs ψ et ψ' d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière M° sont *isotopes* s'il existe une famille $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ de nœuds longs de M°, telle que l'application $\Big((t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \mapsto \psi_t(x) \in M^\circ\Big)$ est lisse, et que $\psi_0 = \psi$ et $\psi_1 = \psi'$.

3.2 Parallélisations des $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotiques d'homologie entière

Définition 3.2.1. Une *parallélisation* d'un tel $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière est un isomorphisme de fibrés vectoriels $\tau\colon M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2} \to TM^\circ$ dont la restriction à $B_\infty^\circ \times \mathbb{R}^{n+2} \subset \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2}$ coïncide avec la trivialisation canonique $\mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2} \to T\mathbb{R}^{n+2}$.

Étant donné une telle parallélisation τ, et un point $x \in M^\circ$, on note $\tau_x\colon \mathbb{R}^{n+2} \to T_xM^\circ$ l'isomorphisme induit entre les fibres de $M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2}$ et de TM°.

La question de l'existence de telles parallélisations est non triviale, et on exhibe à la fin de la partie 5.8 une obstruction à cette existence qui appartient au groupe $\pi_{n+1}(SO(n + 2), I_{n+2})$, qui est de 2-torsion quand n est impair, et non trivial sauf pour $n = 1$ ou $n = 5$. On en déduit le théorème suivant (qui regroupe la proposition 5.2.18 et la remarque 5.8.4).

Proposition 3.2.2. *Soit M° un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière. Alors :*

- *La somme connexe $M^\circ \sharp M^\circ$, telle que définie en partie 3.9, est parallélisable (au sens de la définition 3.2.1).*
- *Si $n + 2 \in \{3, 7\}$, l'espace M° est lui-même parallélisable.*

3.3 Diagrammes BCR numérotés

Les diagrammes utilisés dans cette partie sont ceux de la définition 2.2.1. Rappelons en particulier que pour tout entier $k \geq 2$, $\mathcal{G}_k$ désigne l'ensemble des diagrammes BCR de degré k.

Définition 3.3.1. Une numérotation d'un diagramme BCR Γ est une bijection $\sigma\colon E(\Gamma) \to \underline{2k} = \{1, \dots, 2k\}$.

On note $\widetilde{\mathcal{G}_k}$ l'ensemble des diagrammes BCR numérotés de degré k (à isomorphisme de graphes orientés compatible avec les numérotations près).

3.4 Conventions pour les fibrés et les orientations et éclatements

Dans tout ce qui suivra, le bord ∂P d'une variété orientée P est orienté suivant la convention qui veut que la normale sortante en $x \in \partial P$ suivie d'une base orientée de $T_x\partial P$ forme une base orientée de T_xP.

Soit P une variété quelconque. On appelle fibré unitaire tangent de P et l'on note UP le fibré sur P dont les fibres sont les quotients $U_xP = (T_xP \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ de $T_xP \setminus \{0\}$ par les dilatations (c'est-à-dire les homothéties de rapport strictement positif).

Si Q est une sous-variété de P, telle que $\partial Q \subset \partial P$, et que Q rencontre ∂P transversalement, on définit son fibré normal $\mathfrak{N}Q$ comme le fibré sur Q dont les fibres sont les quotients $\mathfrak{N}_xQ = T_xP/T_xQ$, et son fibré unitaire normal comme le fibré sur Q dont les fibres sont les quotients $U_x\mathfrak{N}Q = (\mathfrak{N}_xQ \setminus 0)/\mathbb{R}_+^*$.

Pour une telle sous-variété, on définit l'*éclatement de P le long de Q* comme la variété $B\ell(P, Q) = (P \setminus Q) \cup U\mathfrak{N}Q$ obtenue comme ensemble en remplaçant Q par son fibré normal unitaire $U\mathfrak{N}Q$, de telle sorte que $\partial B\ell(P, Q) = (\partial P \setminus Q) \cup U\mathfrak{N}Q$ et $\mathrm{Int}(B\ell(P, Q)) = \mathrm{Int}(P) \setminus Q$. Comme variété $B\ell(P, Q)$ est difféomorphe au complémentaire dans P d'un voisinage tubulaire ouvert de Q. L'éclatement $B\ell(P, Q)$

est muni d'une application lisse canonique $p_b\colon B\ell(P,Q) \to P$ qui correspond à l'identité sur $P \setminus Q$ et à l'application de fibré $U\mathfrak{N}Q \to Q$ sur $U\mathfrak{N}Q$. Si la variété P est compacte, l'éclatement $B\ell(P,Q)$ l'est aussi.

Détaillons un peu cette construction dans le cas $Q = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$, $P = \mathbb{R}^n$ (avec $d \leq n$), qui est un modèle local du cas général hors des bords. On voit alors P comme le produit $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, et l'on identifie $x \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus \{0\}$ à $(||x||, \frac{x}{||x||}) \in]0,+\infty[\times \mathbb{S}^{n-d-1}$. Ceci nous fournit une identification entre $P \setminus Q$ et $\mathbb{R}^d \times]0,\infty[\times \mathbb{S}^{n-d-1}$. L'éclatement de P le long de Q consiste alors à remplacer $\mathbb{R}^d \times]0,\infty[\times \mathbb{S}^{n-d-1}$ par $\mathbb{R}^d \times [0,\infty[\times \mathbb{S}^{n-d-1}$. Ceci revient en effet à ajouter à $P \setminus Q$ un bord $\mathbb{R}^d \times \{0\} \times \mathbb{S}^{n-d-1}$ qui s'identifie naturellement au fibré normal unitaire à Q dans P.

3.5 Espaces de configurations de deux points

Étant donné un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière M°, l'espace de configurations $C_2^0(M^\circ)$ est la variété non compacte

$$C_2^0(M^\circ) = \{(x,y) \in M^\circ \times M^\circ \mid x \neq y\} = (M^\circ)^2 \setminus \Delta_{M^\circ},$$

où Δ_{M° est la diagonale $\Delta_{M^\circ} = \{(x,x) \mid x \in M^\circ\}$.

Pour de nombreuses raisons (convergence d'intégrales, théorème de Stokes, définition des propagateurs), il est préférable de manipuler des espaces de configurations compacts en leur rajoutant un bord. Dans ce but, nous allons procéder à des éclatements successifs de M^2.

Définition 3.5.1. Soit $C_2(M^\circ)$ la variété obtenue en éclatant dans M^2 le point (∞,∞), puis les adhérences de $\{\infty\} \times M^\circ$, $M^\circ \times \{\infty\}$, et Δ_{M° dans la variété obtenue. La variété $C_2(M^\circ)$ est appelée *espace de configurations de deux points de M°*.

La variété $C_2(M^\circ)$ est compacte et est munie d'une application canonique $p_b\colon C_2(M^\circ) \to M^2$ qui identifie $\mathrm{Int}(C_2(M^\circ)) = {p_b}^{-1}(C_2^0(M^\circ))$ à $C_2^0(M^\circ) \subset M^2$. Les deux propriétés suivantes sont établies dans [Les15b, lemmes 2.1 et 2.2].[2]

Lemme 3.5.2. *Soit $G_{\mathbb{S}^{d-1}}$ l'application de Gauss*

$$\begin{array}{rccc} G_{\mathbb{S}^{d-1}}\colon & C_2^0(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{S}^{d-1} \\ & c=(x,y) & \mapsto & \frac{y-x}{||y-x||}. \end{array}$$

L'application $G_{\mathbb{S}^{d-1}}$ s'étend en une application lisse $G_{\mathbb{S}^{d-1}}\colon C_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{S}^{d-1}$.

[2] Les énoncés y sont en dimension 3, mais les démonstrations seraient identiques ici.

Dans le cas général, on a également un analogue de cette application de Gauss, mais défini uniquement sur $\partial C_2(M^\circ)$, et avec l'aide d'une parallélisation de M°.

Proposition 3.5.3. *Le bord de $C_2(M^\circ)$ est la réunion des ensembles suivants.*

- *La face fermée $\partial_{\infty,\infty}C_2(M^\circ) = p_b^{-1}(\{(\infty,\infty)\})$, dont l'intérieur est formé des classes de couples $(u,v) \in (\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\})^2 \cong (T_\infty M \setminus \{0\})^2$ tels que $u \neq v$ modulo dilatations. Une telle classe $[u,v]$ est la limite en 0 de l'application $\Big(t \in]0, \min(||u||, ||v||)] \mapsto (\frac{u}{t}, \frac{v}{t}) \in C_2(M^\circ)\Big)$.*
- *La face ouverte[3] $\partial_{M^\circ,\infty}C_2(M^\circ) = U\mathfrak{N}(M^\circ \times \{\infty\}) \cong M^\circ \times \mathbb{S}^{n+1}$, où $(x,u) \in M^\circ \times \mathbb{S}^{n+1}$ est la limite en 0 de l'application $\Big(t \in]0, ||u||] \mapsto (x, \frac{u}{t}) \in C_2(M^\circ)\Big)$.*
- *La face ouverte $\partial_{\infty,M^\circ}C_2(M^\circ) = U\mathfrak{N}(\{\infty\} \times M^\circ) \cong \mathbb{S}^{n+1} \times M^\circ$, où $(u,y) \in \mathbb{S}^{n+1} \times M^\circ$ est la limite en 0 de l'application $\Big(t \in]0, ||u||] \mapsto (\frac{u}{t}, y) \in C_2(M^\circ)\Big)$.*
- *La face ouverte $\partial_\Delta C_2(M^\circ) = p_b^{-1}(\Delta_{M^\circ}) = U\mathfrak{N}\Delta_{M^\circ}$, que l'on identifie à UM° au moyen de l'application $\Big([(u,v)]_{(x,x)} \in U\mathfrak{N}_{(x,x)}\Delta_{M^\circ} \mapsto [v-u]_x \in U_xM^\circ\Big)$.*

Puisque $B_\infty^\circ \subset \mathbb{R}^{n+2}$, la face $\partial_{\infty,\infty}C_2(M^\circ)$ s'identifie à $\partial_{\infty,\infty}C_2(\mathbb{R}^{n+2})$ canoniquement.

À une éventuelle parallélisation τ de M°, on associe l'application lisse

$$\begin{array}{cccl} G_\tau \colon & \partial C_2(M^\circ) & \to & \mathbb{S}^{n+1} \\ & c & \mapsto & \begin{cases} G(c) & \text{si } c \in \partial_{\infty,\infty}C_2(M^\circ) \cong \partial_{\infty,\infty}C_2(\mathbb{R}^{n+2}), \\ -u & \text{si } c = (u,y) \in \partial_{\infty,M^\circ}C_2(M^\circ) = \mathbb{S}^{n+1} \times M^\circ, \\ u & \text{si } c = (x,u) \in \partial_{M^\circ,\infty}C_2(M^\circ) = M^\circ \times \mathbb{S}^{n+1}, \\ \frac{\tau_x^{-1}(u)}{||\tau_x^{-1}(u)||} & \text{si } c = [u]_x \in U_xM^\circ \subset UM^\circ \cong \partial_\Delta C_2(M^\circ). \end{cases} \end{array}$$

3.6 Espace de configurations associé à un diagramme et un nœud long

Soit Γ un diagramme BCR, comme en définition 2.2.1. On définit l'espace de configurations

$$C^0_\Gamma(\psi) = \left\{ c \colon V(\Gamma) \hookrightarrow M^\circ \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Il existe } c_i \colon V_i(\Gamma) \to \mathbb{R}^n \\ \text{telle que } c_{|V_i(\Gamma)} = \psi \circ c_i \end{array} \right\}.$$

Une configuration de $C^0_\Gamma(\psi)$ est donc la donnée d'une manière de placer les sommets du graphe de telle sorte que les sommets internes soient sur le nœud, les sommets

[3] c'est-à-dire ouverte comme partie de $\partial C_2(M^\circ)$

externes étant libres. La figure 3.2 donne un exemple d'une configuration dans $C_\Gamma(\psi)$, pour le nœud ψ de la figure 3.1. Sur la figure, les arêtes sont tracées pour mieux visualiser le graphe, mais la configuration n'est que la donnée des images des quatre sommets.

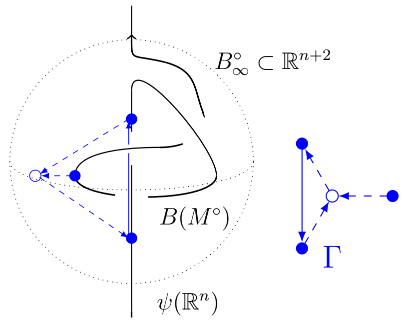


FIGURE 3.2 – Une configuration dans $C_\Gamma(\psi)$

Comme dans la partie précédente, on va compactifier cet espace en un espace de configurations $C_\Gamma(\psi)$. Les détails de sa construction peuvent être trouvés dans [Les20, Chapitre 8], dans un cadre plus général. Énonçons-en les propriétés utiles.

Théorème 3.6.1. *Il existe une variété compacte à bord et à coins $C_\Gamma(\psi)$ telle que*

- *la variété $C_\Gamma(\psi)$ est compacte, et est munie d'une application canonique $C_\Gamma(\psi) \to M^{V(\Gamma)}$, qui identifie l'intérieur de $C_\Gamma(\psi)$ à $C^0_\Gamma(\psi)$,*
- *pour toute arête $f = (v, w)$ de Γ, l'application $\left(p^e_f \colon c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto (c(v), c(w)) \in C_2(M^\circ)\right)$ se prolonge de manière lisse à $C_\Gamma(\psi)$,*
- *pour toute arête interne $f = (v, w)$ de Γ, l'application $\left(p^i_f \colon c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto (c_i(v), c_i(w)) \in C_2(M^\circ)\right)$ se prolonge de manière lisse à $C_\Gamma(\psi)$.*

Définition 3.6.2. Pour toute arête f d'un diagramme BCR, on pose

- si f est interne, $C_f = C_2(\mathbb{R}^n)$, et $p_f = p^i_f \colon C_\Gamma(\psi) \to C_e$.
- si f est externe, $C_f = C_2(M^\circ)$, et $p_f = p^e_f \colon C_\Gamma(\psi) \to C_e$.

3.7 Formes propagatrices

Dans le chapitre 5, nous introduisons les formes propagatrices, qui vont nous permettre de remplacer les formes $G^*_{\mathbb{S}^{n(e)}}(\omega_{n(e)})$ du chapitre précédent.

Definition 3.7.1. Soit m un entier naturel. On dit qu'une forme différentielle ω de degré m sur $\mathbb{S}^m$ est *antisymétrique* si $(-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^m})^*(\omega) = -\omega$.

Definition 3.7.2. Soit k un entier naturel non nul. On appellera *k-famille de formes propagatrices* de (M°, τ) la donnée de $F = (\alpha_i, \beta_i)_{i \in \underline{2k}}$ où, pour tout $i \in \underline{2k}$,

- α_i est une forme fermée de degré $n-1$ sur $C_2(\mathbb{R}^n)$, telle que $(\alpha_i)_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)} = (G_{\mathbb{S}^{n-1}})_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)}{}^*(\omega_{\alpha_i})$, où ω_{α_i} est une $(n-1)$-forme antisymétrique sur $\mathbb{S}^{n-1}$ telle que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_{\alpha_i} = 1$,
- β_i est une forme fermée de degré $n+1$ sur $C_2(M^\circ)$, telle que $(\beta_i)_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_\tau{}^*(\omega_{\beta_i})$, où ω_{β_i} est une $(n+1)$-forme antisymétrique sur $\mathbb{S}^{n+1}$ telle que $\int_{\mathbb{S}^{n+1}} \omega_{\beta_i} = 1$.

Definition 3.7.3. Soient (Γ, σ) un diagramme BCR numéroté de degré k, ψ un nœud long, et $F = (\alpha_i, \beta_i)_{i \in \underline{2k}}$ une k-famille de formes propagatrices de (M°, τ). On définit, pour chaque arête, une forme de degré pair $\omega_e^F(\Gamma, \sigma, \psi)$ par la formule

$$\omega_e^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \begin{cases} p_e^*(\alpha_{\sigma(e)}) & \text{si } e \text{ est une arête interne,} \\ p_e^*(\beta_{\sigma(e)}) & \text{si } e \text{ est une arête externe,} \end{cases}$$

et on pose alors $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \bigwedge\limits_{e \in E(\Gamma)} \omega_e^F(\Gamma, \sigma, \psi)$.

3.8 Invariants de Bott-Cattaneo-Rossi généralisés

Le résultat suivant donne une définition plus souple des invariants (Z_k) du théorème 2.4.1, et les étend aux nœuds longs dans un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière parallélisé. C'est l'objet du théorème 5.2.10 pour $n \geq 3$, et des cinq premières propriétés du théorème 7.3.1 pour $n = 1$.

Théorème 3.8.1. *Soit n un entier naturel impair. Soit (M°, τ) un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière parallelisé, soit F une k-famille de formes propagatrices de (M°, τ), et posons*

$$Z_k^F(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}} I^F(\Gamma, \sigma, \psi).$$

1. *La valeur de $Z_k^F(\psi)$ ne dépend pas du choix de la k-famille F de formes propagatrices de (M°, τ).*

2. *La valeur de* $Z_k(\psi) = Z_k^F(\psi)$ *ne dépend pas du choix de la parallélisation* τ *de la variété* M°.

3. *Pour tout difféomorphisme* $\varphi \in \mathrm{Diffeo}^+(M^\circ)$ *dont la restriction à* B_∞° *est l'identité, et tout nœud long* ψ *de* M°, $Z_k(\psi) = Z_k(\varphi \circ \psi)$. *En particulier,* Z_k *définit un invariant isotopique des nœuds longs.*

4. *L'invariant* Z_k *prend ses valeurs dans* $\mathbb{Q}$.

5. *Si l'entier* k *est impair, l'invariant* Z_k *est toujours nul.*

L'invariant Z_k *ainsi obtenu est appelé* invariant BCR généralisé de degré k.

Remarquons qu'à ce stade, il est encore nécessaire de se donner une parallélisation pour définir les invariants $(Z_k)_{k\geq 2}$. La partie 3.10 montre comment s'en passer en utilisant la proposition 3.2.2. Dans le cas où $M^\circ = \mathbb{R}^{n+2}$, on retrouve les invariants du chapitre précédent en prenant comme formes propagatrices les formes $\alpha_i = G^*_{\mathbb{S}^{n-1}}(\omega_{n-1})$ et $\beta_i = G^*_{\mathbb{S}^{n+1}}(\omega_{n+1})$ pour tout indice $i \in \underline{2k}$.

3.9 Sommes connexes

Soient M_1° et M_2° deux $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotiques d'homologie entière. Nous allons définir leur somme connexe $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$. Soit $B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}}$ le complémentaire dans $\mathbb{R}^{n+2}$ des deux boules $\mathring{B}_1$ et $\mathring{B}_2$ de rayon $\frac{1}{4}$ centrées respectivement en $\Omega_1 = (0,0,\dots,0,-\frac{1}{2})$ et en $\Omega_2 = (0,0,\dots,0,\frac{1}{2})$. Pour $i \in \{1,2\}$ et $x \in \partial B(M_i) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, posons $\varphi_i(x) = \frac{1}{4}x + \Omega_i$. L'application φ_i est un difféomorphisme entre $\partial B(M_i)$ et ∂B_i.

Posons $M_1^\circ \sharp M_2^\circ = B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}} \cup B(M_1) \cup B(M_2)$, où $B(M_i)$ est recollé[4] à $B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}}$ le long de ∂B_i grâce à l'application φ_i, et posons $B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) = \overline{(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) \setminus B_\infty^\circ}$.

Définition 3.9.1. La variété $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ avec la décomposition $M_1^\circ \sharp M_2^\circ = B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) \cup B_\infty^\circ$ est appelée la *somme connexe* de M_1° et de M_2°.

Proposition 3.9.2. *La variété* $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ *est encore un* $\mathbb{R}^{n+2}$ *asymptotique d'homologie entière, et l'on a deux plongements canoniques* $\iota_i \colon B(M_i) \hookrightarrow B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) \subset M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ *pour* $i \in \{1,2\}$. *Deux parallélisations de* M_1° *et* M_2° *induisent une parallélisation de* $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ *à homotopie près.*

[4]En toute rigueur, il faudrait recoller le long d'un collier, mais cela alourdirait inutilement la description.

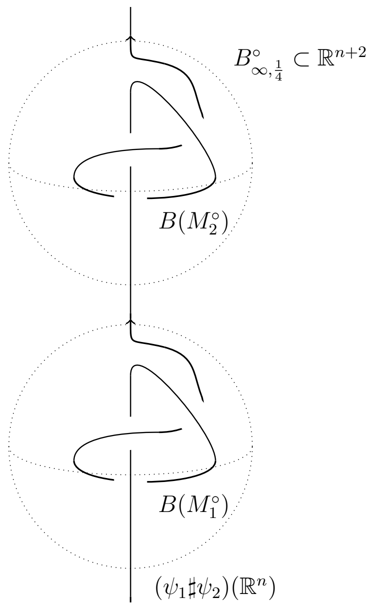


FIGURE 3.3 – Un exemple de somme connexe de deux nœuds longs

Définition 3.9.3. Soient M_1° et M_2° deux $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotiques d'homologie entière, et soient $\psi_1 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ et $\psi_2 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$ deux nœuds longs. La formule

$$(\psi_1 \sharp \psi_2)(x) = \begin{cases} \iota_2(\psi_2(4.x_1, \ldots, 4.x_{n-1}, 4.x_n - 2)) & \text{si } ||x - (0, \ldots, 0, \frac{1}{2})|| \leq \frac{1}{4}, \\ \iota_1(\psi_1(4.x_1, \ldots, 4.x_{n-1}, 4.x_n + 2)) & \text{si } ||x - (0, \ldots, 0, -\frac{1}{2})|| \leq \frac{1}{4}, \\ (0, 0, x) \in B^\circ_{\infty, \frac{1}{4}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

définit un nœud long $\psi_1 \sharp \psi_2$ de $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$. Le nœud long $\psi_1 \sharp \psi_2$ est appelé la *somme connexe* de ψ_1 et de ψ_2.

La figure 3.3 montre un exemple de somme connexe de deux nœuds longs.

3.10 Additivité des invariants BCR, extension au cas non-parallélisable

Dans la partie 5.9, on démontre le théorème 5.2.17 suivant en dimension $n \geq 3$. Le cas de la dimension 1 est la dernière propriété du théorème 7.3.1.

Théorème 3.10.1. *Soient $\psi_1 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ et $\psi_2 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$ deux nœuds longs dans des $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotiques d'homologie entière parallélisables M_1° et M_2°. Alors, pour tout entier $k \geq 2$,*

$$Z_k(\psi_1 \sharp \psi_2) = Z_k(\psi_1) + Z_k(\psi_2).$$

Le théorème 3.10.1 et la proposition 3.2.2 nous permettent de définir Z_k pour les nœuds longs dans tout $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière.

Définition 3.10.2. Soit ψ un nœud long d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière M°. Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $Z_k(\psi) = \frac{1}{2} Z_k(\psi \sharp \psi)$.

3.11 Chaînes rationnelles

Dans cette thèse, les chaînes manipulées sont définies comme suit. Une *d-chaîne rationnelle d'une variété P* est une combinaison linéaire à coefficients rationnels $\sum\limits_{i=1}^{r} w_i Y_i$ de sous-variétés orientées à bords et à coins $(Y_i)_{i \in \underline{r}}$ de dimension d, avec les identifications usuelles, dont notamment $-1.Y = 1.(-Y)$ pour tout Y (où $-Y$ désigne la variété Y avec l'orientation opposée), et $1.(Y \sqcup Z) = 1.Y + 1.Z$, pour tous Y et Z disjoints. Dans ce cadre, on définit :

- le *support* $\mathrm{Supp}(Y)$ de Y comme la réunion des Y_i,
- l'*intérieur* $\mathrm{Int}(Y)$ de Y comme la réunion des intérieurs de toutes les variétés Y_i,
- le *bord* de Y comme la $(d-1)$-chaîne $\sum\limits_{i=1}^{r} w_i \partial Y_i$.

Une *d-chaîne rationnelle plongée* est une d-chaîne rationnelle comme ci-dessus, dont les Y_i sont d'intérieurs deux à deux disjoints. Toute d-chaîne rationnelle est homologue à une d-chaîne rationnelle plongée. Si Y est une chaîne rationnelle plongée, l'intérieur $\mathrm{Int}(Y)$ est une sous-variété de P, et il existe une unique application $w_Y \colon \mathrm{Int}(Y) \to \mathbb{Q}$, telle que $w_Y(\mathrm{Int}(Y_i)) = \{w_i\}$. Ceci nous permet de définir une notion de d-cycles et de d-bords et de retrouver les groupes d'homologie rationnelle de notre variété P via la relation habituelle

$$\begin{aligned} H_d(P, \mathbb{Q}) &= \{d\text{-cycles}\}/\{d\text{-bords}\} \\ &= \{d\text{-cycles plongés}\}/\{\text{bords d'une } (d+1)\text{-chaîne plongée}\}. \end{aligned}$$

3.12 Chaînes propagatrices, version discrète des invariants BCR

Dans cette partie, on définit une notion duale des formes propagatrices en utilisant des chaînes.

Définition 3.12.1. On appelle *chaîne propagatrice interne* une $(n+1)$-chaîne rationnelle plongée A de $C_2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial A = \frac{1}{2}(G_{\mathbb{S}^{n-1}})^{-1}(\{-x_A, x_A\})$ pour un certain $x_A \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Étant donné une parallélisation τ de M°, on appelle *chaîne propagatrice externe de* (M°, τ) une $(n+3)$-chaîne rationnelle plongée B de $C_2(M^\circ)$ telle que $\partial B = \frac{1}{2}(G_\tau)^{-1}(\{-x_B, x_B\})$ pour un certain $x_B \in \mathbb{S}^{n+1}$.

Pour tout entier naturel non nul k, une *k-famille $F = (A_i, B_i)_{i\in\underline{2k}}$ de chaînes propagatrices de* (M°, τ) est la donnée de $2k$ chaînes propagatrices internes $(A_i)_{i\in\underline{2k}}$ et de $2k$ chaînes propagatrices externes $(B_i)_{i\in\underline{2k}}$ de (M, τ).

Au chapitre 8, on démontre en théorème 8.1.2 que ces chaînes peuvent être choisies comme étant des sous-variétés lisses hors d'une boule arbitrairement petite.

Pour $\Gamma \in \mathcal{G}_k$, définissons l'application

$$\begin{array}{rccl} P_\Gamma\colon & C_\Gamma(\psi) & \to & \prod\limits_{e\in E(\Gamma)} C_e \\ & c & \mapsto & (p_e(c))_{e\in E(\Gamma)}, \end{array}$$

où les applications $(p_e)_{e\in E(\Gamma)}$ et les espaces $(C_e)_{e\in E(\Gamma)}$ sont ceux de la définition 3.6.2.

Étant donné une k-famille $F = (A_i, B_i)_{i\in\underline{2k}}$ de chaînes propagatrices de (M°, τ), un nœud long ψ, et un diagramme BCR numéroté $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, on dit que F est *en position générale pour* (Γ, σ, ψ) si les conditions suivantes sont réalisées pour tout $c \in C_\Gamma(\psi)$ tel que $P_\Gamma(c) \in \prod\limits_{e\in E_i(\Gamma)} \mathrm{Supp}(A_{\sigma(e)}) \times \prod\limits_{e\in E_e(\Gamma)} \mathrm{Supp}(B_{\sigma(e)})$.

- Pour toute arête interne, $p_e(c) \in \mathrm{Int}(A_{\sigma(e)})$.
- Pour toute arête externe, $p_e(c) \in \mathrm{Int}(B_{\sigma(e)})$.
- On a la propriété de transversalité suivante,

  $$\begin{aligned} &\varepsilon(c) T_{P_\Gamma(c)}\left(\prod_{e\in E(\Gamma)} C_e\right) \\ &\qquad = T_c P_\Gamma(T_c C_\Gamma(\psi)) + \left(\prod_{e\in E_i(\Gamma)} T_{p_e(c)}\mathrm{Int}(A_{\sigma(e)}) \times \prod_{e\in E_e(\Gamma)} T_{p_e(c)}\mathrm{Int}(B_{\sigma(e)})\right), \end{aligned}$$

  où $\varepsilon(c) = \pm 1$, et où l'égalité ci-dessus est une égalité entre espaces vectoriels orientés.

Étant donné une k-famille $F = (A_i, B_i)_{i\in\underline{2k}}$ et un diagramme BCR numéroté $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$ tels que F est en position générale pour (Γ, σ, ψ), on pose $D_F(\Gamma, \sigma, \psi) =$

$(P_\Gamma(c))^{-1}\left(\prod_{e\in E_i(\Gamma)} A_{\sigma(e)} \times \prod_{e\in E_e(\Gamma)} B_{\sigma(e)}\right)$ et l'on définit le nombre d'intersection algébrique

$$I^F(\Gamma,\sigma,\psi) = \sum_{c\in D_F(\Gamma,\sigma,\psi)} \left(\varepsilon(c) \prod_{e\in E_i(\Gamma)} w_{A_{\sigma(e)}}(p_e(c)) \prod_{e\in E_e(\Gamma)} w_{B_{\sigma(e)}}(p_e(c))\right).$$

On dit enfin que F est *en position générale pour* ψ si elle est en position générale pour (Γ,σ,ψ) pour tout $(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}$.

Ceci nous permet d'obtenir une formulation de l'invariant Z_k du théorème 3.8.1 en termes d'intersections algébriques.

Théorème 3.12.2. *Soit* ψ *un nœud long. Soit* F *une* k*-famille de chaînes propagatrices de* (M°,τ) *en position générale pour* ψ*. Alors,*

$$Z_k(\psi) = \frac{1}{(2k)!}\sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} I_F(\Gamma,\sigma,\psi).$$

Pour la dimension $n\geq 3$, ce théorème est le théorème 5.2.13, démontré en partie 5.4. En dimension $n=1$, c'est l'objet du théorème 7.4.1. Comme le théorème 5.4.3 affirme l'existence de familles de chaînes propagatrices en position générale pour ψ, ceci implique en particulier que les invariants BCR généralisés prennent uniquement des valeurs rationnelles.

Chapitre 4

Lien entre invariants BCR et torsion de Reidemeister

4.1 Définition des polynômes d'Alexander et de la torsion de Reidemeister

4.1.1 Polynômes d'Alexander d'un nœud long

On rappelle dans cette partie la définition des polynômes d'Alexander de l'article [Lev66] de Levine. Le cadre est ici un peu plus large, puisque l'article de Levine ne porte que sur les nœuds dans $\mathbb{S}^{n+2}$, mais la méthode est essentiellement identique.

On se donne $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ un nœud long dans un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, et l'on pose $X = M^\circ \setminus \psi(\mathbb{R}^n)$ et $K = \psi(\mathbb{R}^n) \cup \{\infty\} \subset M$. Le lemme suivant s'obtient facilement, par exemple à l'aide d'une suite exacte de Mayer-Vietoris.

Lemme 4.1.1. *L'extérieur X du nœud a l'homologie d'un cercle, et si μ désigne un méridien du nœud (c'est-à-dire le bord d'un disque tranverse au nœud et le rencontrant en exactement un point),*

$$H_*(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si * = 0, \\ \mathbb{Z}.[\mu] & si * = 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Puisque X est connexe, on peut noter son groupe fondamental $\pi_1(X)$ sans préciser le point base. On déduit du lemme précédent que le quotient $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ du groupe fondamental par son groupe dérivé est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (et engendré par la classe d'un méridien μ). Le sous-groupe dérivé $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ correspond donc à un revêtement $\tilde{X} \to X$, muni d'une action canonique de $\mathbb{Z}.[\mu]$ sur les fibres. Notons

$T\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ le difféomorphisme induit par l'action du méridien μ par monodromie. Ceci induit une action naturelle de l'anneau $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ des séries de Laurent à coefficients dans $\mathbb{Q}$ sur $H_*(\tilde{X};\mathbb{Q})$, en faisant agir t par l'isomorphisme T_* induit par T en homologie. Avec cette structure, $H_*(\tilde{X};\mathbb{Q})$ est un $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$-module de type fini. L'anneau $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ étant principal, on peut alors définir les invariants d'Alexander comme suit.

Définition 4.1.2. Pour tout entier $d \in \underline{n}$, il existe un unique entier r_d et une suite $(D_{d,i,\psi}(t))_{i\in\underline{r_d}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ tels que $D_{d,r_d,\psi}(t) \mid D_{d,r_{d-1},\psi}(t) \mid \cdots \mid D_{d,1,\psi}(t)$, tels que

$$H_d(\tilde{X};\mathbb{Q}) = \left(\mathbb{Q}[t,t^{-1}]/D_{d,1,\psi}(t)\mathbb{Q}[t,t^{-1}]\right) \oplus \cdots \oplus \left(\mathbb{Q}[t,t^{-1}]/D_{d,r_d,\psi}(t)\mathbb{Q}[t,t^{-1}]\right),$$

et les éléments $(D_{d,i,\psi}(t))_{i\in\underline{r_d}}$ sont uniques à multiplication par un monôme qt^m près (où $q \in \mathbb{Q}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$).

Les séries de Laurent $(D_{d,i,\psi}(t))_{i,d}$ sont appelés les *invariants d'Alexander* du nœud long ψ.

Définition 4.1.3. On appelle *polynôme*[1] *d'Alexander de dimension d* du nœud long ψ le produit $\Delta_{d,\psi}(t) = \prod\limits_{i\in\underline{r_d}} D_{d,i,\psi}(t)$. Il est défini à multiplication par un monôme qt^m près[2] (où $q \in \mathbb{Q}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$), et est l'ordre du $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$-module $H_d(\tilde{X},\mathbb{Q})$.

4.1.2 Nombre d'enlacement de deux cycles

On définit le nombre d'enlacement de deux cycles d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière comme suit.

Définition 4.1.4. Soit M° un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, soit $d \in \underline{n}$, et soient X^d et Y^{n+1-d} deux cycles de $M = M^\circ \cup \{\infty\}$. Soient W_X et W_Y deux chaînes transverses telles que $\partial W_X = X$ et $\partial W_Y = Y$. On définit le *nombre d'enlacement* de X et Y comme l'intersection algébrique

$$\mathrm{lk}(X^d, Y^{n+1-d}) = \langle X^d, W_Y^{n+2-d}\rangle_M = (-1)^{d+1}\langle W_X^{d+1}, Y^{n+1-d}\rangle.$$

Comme n est impair, $\mathrm{lk}(X^d, Y^{n+1-d}) = (-1)^{d+1}\mathrm{lk}(Y^{n+1-d}, X^d)$.

Le lemme (6.2.15) suivant exprime le nombre d'enlacement en termes de chaînes propagatrices.

[1] Le polynôme d'Alexander est a priori une classe de $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]/(qt^m)_{m\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Q}^*}$, mais est tout de même appelé polynôme.

[2] Quand $n = 1$, le polynôme d'Alexander normalisé habituel est un représentant du polynôme d'Alexander de dimension 1.

Lemme 4.1.5. *Soit M° un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, et soient X^d et Y^{n+1-d} deux cycles de M. Alors, pour toute chaîne propagatrice externe B,*

$$\mathrm{lk}(X,Y) = \langle [X \times Y], [B] \rangle_{C_2(M^\circ)}.$$

4.1.3 Surfaces et matrices de Seifert

Définition 4.1.6. Soit ψ un nœud long d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière M°. Une *surface de Seifert de ψ* est une sous-variété connexe Σ de dimension $n+1$ de M°, telle que :

- le bord de Σ est la sous-variété orientée $\psi(\mathbb{R}^n)$,
- l'intersection $\Sigma \cap B(M)$ est compacte,
- il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Sigma \cap B_\infty^\circ = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+\} \cap B_\infty^\circ$.

Étant donné une surface de Seifert Σ, l'intersection algébrique induit pour tout $d \in \underline{n}$ une forme bilinéaire non dégénérée

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot,\cdot \rangle_\Sigma \colon & H_d(\Sigma;\mathbb{Q}) \times H_{n+1-d}(\Sigma;\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Q} \\ & ([a^d],[z^{n+1-d}]) & \mapsto & \langle [a^d],[z^{n+1-d}] \rangle_\Sigma . \end{array}$$

Définition 4.1.7. Pour tout d, soit b_d le d-ième nombre de Betti de Σ. Soient $\mathcal{B} = ([a_i^d])_{d\in\underline{n}, i\in\underline{b_d}}$ et $\tilde{\mathcal{B}} = ([z_i^d])_{d\in\underline{n}, i\in\underline{b_d}}$ deux bases de l'homologie réduite $\overline{H}_*(\Sigma) = \bigoplus_{d=1}^{n} H_d(\Sigma)$ de Σ.

On dit que $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ est *un couple de bases duales* si pour tout $d \in \underline{n}$, et tous $i,j \in \underline{b_d}$, $\langle [a_i^d], [z_j^{n+1-d}] \rangle_\Sigma = \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le coefficient de Kronecker.

De telles bases existent grâce à la dualité de Poincaré.

Définition 4.1.8. Soit Σ une surface de Seifert, et soit Σ^+ la surface obtenue en poussant légèrement Σ dans la direction normale positive. Pour tout cycle a de Σ, notons a^+ le cycle de Σ^+ obtenu en poussant a dans cette direction normale positive. Soit $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ un couple de bases duales de l'homologie réduite de Σ. Les *matrices de Seifert* associées sont les matrices suivantes, pour $d \in \underline{n}$:

$$V_d^+\left(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}\right) = \left(\mathrm{lk}\left(z_i^d, (a_j^{n+1-d})^+\right)\right)_{1\le i,j\le b_d}$$

$$V_d^-\left(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}\right) = \left(\mathrm{lk}\left((z_i^d)^+, a_j^{n+1-d}\right)\right)_{1\le i,j\le b_d}$$

En annexe A, on démontre que l'on peut construire des nœuds longs de $\mathbb{R}^{n+2}$ avec des matrices de Seifert données.

4.1.4 Expression du polynôme d'Alexander en fonction de matrices de Seifert

Levine démontre dans [Lev66, p. 542] le résultat suivant.

Théorème 4.1.9 (Levine)**.** *Soit Σ une surface de Seifert pour ψ, et soit $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ un couple de bases duales de $\overline{H}_*(\Sigma)$. Pour tout $d \in \underline{n}$, posons*

$$\Delta_{d,\Sigma}(t) = \det\left(t^{-\frac{1}{2}} V_d^+\left(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}\right) - t^{\frac{1}{2}} V_d^-\left(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}\right)\right),$$

où les matrices $V_d^{\pm}\left(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}\right)$ sont celles de la définition 4.1.8.

Alors, pour tout $d \in \underline{n}$, le polynôme $\Delta_{d,\Sigma}(t)$ fournit un représentant du polynôme d'Alexander $\Delta_{d,\psi}(t)$ de la définition 4.1.3.

À surface de Seifert Σ fixée, ce polynôme ne dépend pas du choix des bases duales $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$, et l'on démontre dans le lemme 6.2.27 que $\Delta_{d,\Sigma}(t^{-1}) = \Delta_{n+1-d,\Sigma}(t)$ pour tout $d \in \underline{n}$. Le produit $\widehat{\Delta_{d,\Sigma}}(t) = \Delta_{d,\Sigma}(t)\Delta_{n+1-d,\Sigma}(t)$ ne dépend donc que du nœud ψ.

Définition 4.1.10. La série de Laurent $\widehat{\Delta_{d,\Sigma}}(t) = \Delta_{d,\Sigma}(t)\Delta_{n+1-d,\Sigma}(t)$ est simplement notée $\widehat{\Delta_{d,\psi}}(t)$ et est appelée *polynôme d'Alexander symétrisé de dimension d de ψ*.[3] On a en particulier $\widehat{\Delta_{d,\psi}}(t) = \widehat{\Delta_{d,\psi}}(t^{-1})$ et $\widehat{\Delta_{d,\psi}}(1) = 1$.

4.1.5 Torsion de Reidemeister

On définit à partir des polynômes d'Alexander une torsion de Reidemeister, appelée aussi parfois fonction d'Alexander, étudiée notamment par [Mil68][4].

Définition 4.1.11. Soit n un entier naturel impair. Soit $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ un nœud long dans un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière.

La *torsion de Reidemeister de ψ* est le produit alterné

$$\mathcal{T}_\psi(t) = \prod_{d \in \underline{n}} \Delta_{d,\Sigma}(t)^{(-1)^{d+1}} \in \mathbb{Q}(t).$$

Elle ne dépend pas du choix de la surface de Seifert Σ, et vérifie $\mathcal{T}_\psi(1) = 1$ et $\mathcal{T}_\psi(t^{-1}) = \mathcal{T}_\psi(t)$.[5]

[3] Pour les nœuds longs de $\mathbb{R}^3$, le polynôme d'Alexandre symétrisé de dimension 1 est le carré du polynôme d'Alexander normalisé usuel.

[4] À ceci près qu'ici, nous ne prenons pas en compte la contribution du degré homologique 0, qui est indépendante du nœud.

[5] En dimension 1, on retrouve simplement le polynôme d'Alexander normalisé.

4.2 Résultats sur les nœuds rubans longs de $\mathbb{R}^{n+2}$

4.2.1 Nœuds rubans longs

Définition 4.2.1. Un $(n+1)$-*disque ruban* d'une $(n+2)$-variété M est l'image du $(n+1)$-disque $\mathbb{D}^{n+1}$ par une immersion $\varphi\colon \mathbb{D}^{n+1} \to M$ tel que tout point a au plus deux préimages par φ, et que l'ensemble des points doubles de φ est la réunion d'un nombre fini de n-disques $s_1, \dots, s_r$ tels que, pour tout $i \in \underline{r}$, $\varphi^{-1}(s_i)$ est la réunion disjointe de deux n-disques $s_{a,i}$ et $s_{b,i}$ de $\mathbb{D}^{n+1}$ où

- pour tout $i \in \underline{r}$, $s_{a,i}$ est contenu dans l'intérieur de $\mathbb{D}^{n+1}$,
- pour tout $i \in \underline{r}$, $s_{b,i}$ rencontre le bord de $\mathbb{D}^{n+1}$ transversalement et $\partial s_{b,i} = s_{b,i} \cap \partial \mathbb{D}^{n+1}$.

Les lieux doubles $(s_i)_{i \in \underline{r}}$ sont appelés les *singularités rubans* de $\varphi(\mathbb{D}^{n+1})$. La partie gauche de la figure 4.1 en donne un exemple.

Définition 4.2.2. Soit M° un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, et soit $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ un nœud long de M°. On dit que ψ est un *nœud ruban long* s'il existe une $(n+1)$-variété immergée Σ de M°, telle que

- la surface Σ est standard à l'infini : il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Sigma \cap B_\infty^\circ = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+\} \cap B_\infty^\circ$,
- la sous-variété immergée $\Sigma \cup \{\infty\} \subset M = M^\circ \cup \{\infty\}$ est un disque ruban de M,
- le bord de Σ est le nœud orienté $\psi(\mathbb{R}^n)$.

Une telle surface est appelée un *disque ruban long* de ψ.

Définition 4.2.3. Soit $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ un nœud ruban long d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière. Un *bon disque ruban long de* ψ est un disque ruban long de ψ pour lequel les singularités $s_1, \dots, s_r$ sont respectivement comprises dans des $(n+2)$-boules fermées $B_1, \dots, B_r$ deux à deux disjointes, pour lesquelles il existe des difféomorphismes $\varphi_i\colon B_i \to \mathbb{D}^{n+2}$ tels que $\varphi_i(\Sigma \cap B_i) = D \cup R$ où

- le « disque » D est la réunion[6] du $(n+1)$-disque $\left\{(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \mid \sum\limits_{i=1}^{n+1} {x_i}^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}$ et du cylindre plein $\left\{(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \mid x_1 \geq 0, \sum\limits_{i=2}^{n+1} {x_i}^2 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}$.
- la « bande » R est le cylindre $\left\{x \in \mathbb{D}^{n+2} \mid x_1 = 0, \sum\limits_{i=2}^{n+1} {x_i}^2 \leq \left(\frac{1}{6}\right)^2\right\} \cong \mathbb{D}^n \times [0,1]$.

[6] Pour garantir le caractère $\mathcal{C}^\infty$, il faudrait lisser cette réunion, ce qui peut être fait sans difficulté mais rend la description des ensembles plus technique sans ajouter de clarté.

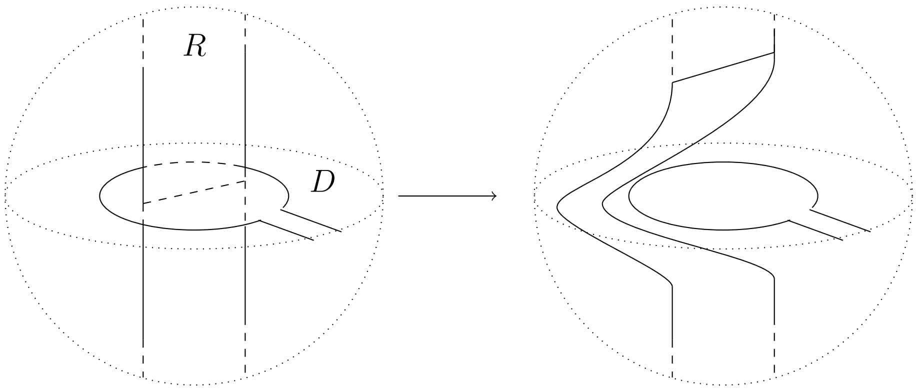


FIGURE 4.1 – Résolution d'une singularité ruban

4.2.2 Invariants de type fini pour les nœuds rubans longs de $\mathbb{R}^{n+2}$

Pour $n \geq 2$, Habiro, Kanenobu, et Shima ont développé dans [HKS99] une théorie d'invariants de type fini pour la classe des nœuds rubans longs de $\mathbb{R}^{n+2}$, dont nous présentons un court aperçu ici.

Étant donné un nœud ruban long ψ, les arguments de la démonstration de [HS01, Proposition 4.5] impliquent qu'il existe toujours un nœud ruban long ψ' isotope à ψ admettant un bon disque ruban long Σ. Pour toute singularité ruban s_i, on dispose d'une opération de résolution de la singularité, définie comme suit. On prend une boule B_i et un difféomorphisme φ_i comme en définition 4.2.3. On modifie Σ à l'intérieur de B_i, en laissant ∂B_i inchangé, comme en figure 4.1. La surface obtenue est encore un disque ruban long pour un certain nœud ruban long $\psi' = (\psi, s)$. Le nœud (ψ, s) est bien défini, à isotopie près, et ceci définit donc une opération sur l'ensemble $\mathcal{K}_{rub}$ des classes d'isotopie de nœuds rubans longs.

Étant donné des singularités rubans deux-à-deux distinctes $s_1, \ldots, s_r$ de Σ, on note $(\psi, (s_1, \ldots, s_r))$ le nœud obtenu en résolvant les singularités $s_1, \ldots, s_r$ dans des boules deux à deux disjointes comme ci-avant.

Définition 4.2.4. Soit $k \geq 0$ un entier. Un *invariant de type ruban au plus k* est une fonction $Z\colon \mathcal{K}_{rub} \to \mathbb{Q}$ telle que, pour tout nœud ruban long $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$, et toutes singularités rubans deux-à-deux distinctes $s_1, \ldots, s_{k+1}$ d'un bon disque ruban long de ψ,

$$\sum_{I \subset \{s_1, \ldots, s_{k+1}\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} Z((\psi, (s_i)_{i \in I})) = 0.$$

On note $\mathcal{I}_k$ l'espace vectoriel formé par les invariants de type ruban au plus k.

On dit que Z est un *invariant de type ruban fini* s'il existe un entier k tel que

Z soit un invariant de type ruban au plus k. Le *type ruban* d'un invariant de type ruban fini est le plus petit entier k tel que $Z \in \mathcal{I}_k$.

Habiro et Shima ont démontré dans [HS01, Theorem 6.12] le théorème suivant.[7]

Théorème 4.2.5 (Habiro, Shima)**.** *Soit $\mathcal{I}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre graduée formée par les invariants de type ruban fini à valeurs rationnelles, avec la graduation donnée par $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \cdots$.*

Pour tout nœud ruban $\psi \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, soit Δ_ψ le polynôme d'Alexander de dimension 1 de ψ de la définition 4.1.3, normalisé par les conditions $\Delta_\psi(1) = 1$ et $\Delta'_\psi(1) = 0$. Écrivons pour tout nœud ruban long $\psi \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$

$$\mathrm{Ln}(\Delta_\psi(e^h)) = \sum_{k \geq 2} \beta_k(\psi) h^k \in \mathbb{Q}[[h]].$$

Alors, si n est supérieur ou égal à 2,

- *pour tout $k \geq 2$, β_k est un invariant de type ruban k, et est additif pour la somme connexe,*
- *l'algèbre graduée $\mathcal{I}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Q}[\beta_2, \beta_3, \ldots]$, graduée par la formule $\deg(\beta_k) = k$ pour tout $k \geq 2$,*
- *le sous-espace vectoriel de $\mathcal{I}$ formé par les invariants de type ruban fini additifs pour la somme connexe est engendré par $(\beta_k)_{k \geq 2}$.*

4.2.3 Relation entre les invariants BCR $(Z_k)_{k \geq 2}$ et le polynôme d'Alexander pour les nœuds rubans longs de $\mathbb{R}^{n+2}$

Dans [Wat07], Watanabe a démontré les résultats suivants, qui font le lien entre les invariants BCR des nœuds rubans longs de $\mathbb{R}^{n+2}$ et la théorie d'invariants de type fini de Habiro, Kanenobu et Shima.

Théorème 4.2.6 (Watanabe)**.** *Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3. Soit Z_k l'invariant de Bott-Cattaneo-Rossi des nœuds longs de $\mathbb{R}^{n+2}$ défini au chapitre 2. Alors, pour tout entier $k \geq 2$,*

- *si k est impair, Z_k est nul pour tout nœud long,*
- *si k est pair, il existe un nœud (ruban) long ψ_k tel que $Z_k(\psi_k) \neq 0$,*

[7] Leur article traite le cas de la dimension 2, mais le raisonnement est valable en toute dimension au moins 2.

- *si k est pair, la restriction de Z_k aux nœuds rubans longs est un invariant de type ruban k.*
- *si k est pair, $\frac{1}{2}Z_k$ est la somme de $-\beta_k$ et d'un invariant de type ruban au plus $k-1$.*

Dans le théorème supra, le facteur $\frac{1}{2}$ de la dernière propriété vient de ce que l'invariant étudié dans l'article de Watanabe est défini comme la moitié de celui étudié dans cette thèse. Dans cet article, Watanabe démontre d'abord que l'invariant Z_k est de type au plus k, et exhibe un nœud ruban long particulier ψ_k donné par une surface ruban à k singularités. Ce nœud a la propriété notable que toute résolution d'un nombre fini non nul de ces singularités le rend trivial. Comme le calcul de la dérivée de $\frac{1}{2}Z_k$ en ψ_k par rapport aux k singularités est 1 pour k pair, ceci implique que $\frac{1}{2}Z_k(\psi_k) = 1$. Le théorème 4.2.5 implique alors que $\frac{1}{2}Z_k$ (qui est additif) est la somme d'un multiple de β_k et d'un invariant de type au plus $k-1$. La constante de proportionnalité est obtenue en calculant β_k sur le nœud ψ_k. Dans la suite, nous démontrons que l'on a exactement $\frac{1}{2}Z_k = -\beta_k$ pour tout nœud ruban long et que cette formule est également valable pour $n=1$.

4.3 Invariants BCR comme fonctions de nombres d'enlacement

4.3.1 Nœuds rectifiables, virtuellement rectifiables

Soit $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$ l'ensemble des injections linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$, et soit ι_0 l'injection $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (0,0,x) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Voyons $\pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$ comme l'ensemble des classes des applications $\mathbb{R}^n \to \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$ envoyant $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ sur ι_0 pour l'homotopie parmi les applications vérifiant la même propriété. On démontre en partie 6.2.10 le lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Soit M° un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière, et soit ψ un nœud long de M°. À une parallélisation τ de M°, on associe l'application $\iota(\tau,\psi)\colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\tau_{\psi(x)})^{-1} \circ T_x\psi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$. Alors, la classe*

$$[\iota(\tau,\psi)] \in \pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$$

ne dépend pas de la parallélisation.

Définition 4.3.2. Avec les notations du lemme 4.3.1, si M° est parallélisable, la classe $\iota(\psi) = [\iota(\tau,\psi)]$ est appelée *obstruction de rectifiabilité* du nœud ψ. On dit que ψ est *rectifiable* si M° est parallélisable, et si $\iota(\psi) = 0$. On dit que ψ

est *virtuellement rectifiable* s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que la somme connexe $\psi^{(r)}\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \underbrace{M^\circ \sharp \cdots \sharp M^\circ}_{r \text{ copies}}$ de r copies de ψ soit rectifiable.

Commençons par l'exemple suivant.

Lemme 4.3.3. *Soit ψ un nœud long dans un $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière. Alors ψ est rectifiable.*

Démonstration. D'après la proposition 3.2.2, tout $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière est parallélisable. Il suffit donc de vérifier que l'obstruction $\iota(\psi)$ de la définition 6.2.20 est nulle. Il s'agit d'une classe d'homotopie dans

$$\pi_1(\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \iota_0) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, (0,0,1)) = \pi_1(\mathbb{S}^2, (0,0,1)) = 0,$$

ce qui conclut. □

Le résultat suivant est démontré en partie 6.5.

Proposition 4.3.4. *Soit ψ un nœud long d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière avec $n \geq 3$. Si $n \equiv 1 \mod 4$, alors $\psi \sharp \psi \sharp \psi \sharp \psi$ est rectifiable.*

Énonçons ici le résultat suivant qui fournit une autre classe de nœuds virtuellement rectifiables.

Proposition 4.3.5. *Soit $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ un nœud ruban long d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière. Alors $\psi \sharp \psi$ est rectifiable. Si M° est parallélisable, ψ lui-même est rectifiable.*

Avant de démontrer cette proposition énonçons le lemme immédiat suivant.

Lemme 4.3.6. *Soit une famille d'immersions $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$, lisse en t, telle que ψ_0 et ψ_1 soient des plongements, et que pour tout $t \in [0,1]$, et tout $x \in B_\infty^\circ$, $\psi_t(x) = (0,0,x)$. Alors, si ψ_0 est rectifiable, ψ_1 est également rectifiable.*

Démonstration de la proposition 4.3.5. Soit ψ un nœud ruban long. À isotopie près, on peut supposer que ψ admet un bon disque ruban long Σ. Notons $(B_i, \varphi_i)_{i \in \underline{r}}$ les difféomorphismes associés, de telle sorte que pour tout $i \in \underline{r}$, $\varphi_i(\Sigma \cap B_i) = \varphi_i(R \cup D)$ avec les notations de la définition 4.2.3. Pour tout $i \in \underline{r}$, il existe $R_i' \subset \psi^{-1}(B_i)$, homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times I$ telle que $\psi(R_i') = \varphi_i(\partial R) \cap \mathrm{Int}(B_i)$.

Soit $\chi\colon \mathbb{D}^{n+2} \to [0,1]$ une fonction lisse égale à 1 sur $\{x \in \mathbb{D}^{n+2} \mid |x_{n+2}| < \frac{1}{4}\}$, et dont le support de χ est contenu dans $\{x \in \mathbb{D}^{n+2} \mid |x_{n+2}| < \frac{1}{2}\}$.

Pour tout $t \in [0,1]$, soit $\psi_t\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$, l'application telle que

$$\psi_t(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \text{ n'est dans aucun des } R_i', \\ {\varphi_i}^{-1}\left(y + \chi(y)(\frac{t-1}{2}, 0, 0, \ldots, 0)\right) & \text{si } x \in R_i', \text{ et } y = \varphi_i(\psi(x)). \end{cases}$$

Le nœud ψ_0 est le bord de la surface obtenue en résolvant toute les singularités de Σ. Il borde donc un disque plongé et est isotope au nœud trivial. Par conséquent, il est rectifiable. Le lemme 4.3.6 implique alors que $\psi_1 = \psi$ est également rectifiable. □

4.3.2 La formule de Z_k en terme de nombres d'enlacement

Dans le chapitre 6, on démontre le théorème suivant (Corollary 6.2.25)[8].

Théorème 4.3.7. *Soit ψ un nœud long virtuellement rectifiable, soit Σ une surface de Seifert de ψ, et soit $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ une paire de bases duales de $\overline{H}_*(\Sigma)$. Alors, pour tout entier $k \geq 2$,*

$$Z_k(\psi) = \sum_{d \in \underline{n}} (-1)^{d+1} \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} \mathrm{Tr}\left(\left(V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})\right)^{\nu} \left(V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})\right)^{k-\nu}\right),$$

où pour tout $\nu \in \underline{k-1}$,

$$\lambda_{k,\nu} = \frac{1}{(k-1)!} \mathrm{Card}\left(\{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1} \mid \mathrm{Card}\{i \in \underline{k-2} \mid \sigma(i) < \sigma(i+1)\} = \nu - 1\}\right).$$

4.3.3 Lien entre invariants BCR et torsion de Reidemeister

Le théorème 4.3.7 nous permet d'obtenir le résultat suivant[9].

Théorème 4.3.8. *Soit ψ un nœud long virtuellement rectifiable, alors l'égalité suivante est vérifiée dans $\mathbb{Q}[[h]]$:*

$$\mathrm{Ln}(\mathcal{T}_\psi(e^h)) = \sum_{d=1}^{n} (-1)^{d+1} \mathrm{Ln}(\Delta_{d,\Sigma}(e^h)) = -\sum_{k \geq 2} Z_k(\psi) h^k.$$

Pour $n = 1$, si Δ_ψ désigne la normalisation habituelle du polynôme d'Alexander,

$$\mathrm{Ln}(\Delta_\psi(e^h)) = -\sum_{k \geq 2} Z_k(\psi) h^k.$$

4.4 Lien avec les résultats précédents pour les nœuds rubans de $\mathbb{R}^{n+2}$

Démontrons le lemme suivant qui permet de faire le lien entre disque ruban long et surface de Seifert pour les nœuds rubans longs.

[8] La démonstration y est faite dans le cas $n \geq 3$, mais elle est valable pour $n = 1$.
[9] La démonstration y est faite dans le cas $n \geq 3$, mais elle est valable pour $n = 1$.

Lemme 4.4.1. *Soit* $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ *un nœud ruban long de dimension* $n \geq 3$ *d'un* $\mathbb{R}^{n+2}$ *asymptotique d'homologie entière. Alors il existe une surface de Seifert* Σ *de* ψ *telle que, pour tout* $d \in \{2, \ldots, n-1\}$*,* $\Delta_{d,\Sigma}(t) = 1$*.*

Démonstration. Soit ψ un nœud ruban long, et soit Σ_0 un bon disque ruban long pour ψ. Soient $s_1, \ldots, s_r$ les singularités rubans de Σ_0, et soient $(B_i, \varphi_i)_{i \in \underline{r}}$ des boules deux à deux disjointes et des difféomorphismes comme en définition 4.2.3. Pour tout $i \in \underline{r}$, remplaçons $(B_i \cap \Sigma, B_i)$ par $(\varphi_i(X), \varphi_i(\mathbb{D}^{n+2}))$, où X est la sous-variété de $\mathbb{D}^{n+2}$ décrite en figure 4.2 et obtenue comme suit :

- On démarre avec $D \cup R$ comme en définition 4.2.3.
- On retire à D le disque D_a de centre 0 et de rayon $\frac{1}{5}$, et l'on note D' la surface obtenue.
- On retire à R le cylindre plein $R \cap \{x \in \mathbb{D}^{n+2} \mid 0 \leq x_{n+2} \leq \frac{1}{8}\}$, et le disque D_b de centre $(0, \ldots, 0, \frac{1}{3})$ et de rayon $\frac{1}{8}$. Notons R' la surface obtenue.
- On recolle les n-sphères ∂D_a et ∂D_b par un cylindre $\mathcal{C}_1 \cong \mathbb{S}^n \times [0,1]$ qui ne rencontre pas $D' \cup R'$, et de telle sorte que $\mathcal{C}_1 \cup D' \cup R'$ est orientable.
- On recolle les n-disques $\{x \in R \mid x_{n+2} = 0\}$ et $\{x \in R \mid x_{n+2} = \frac{1}{6}\}$ par un cylindre plein $\mathcal{C}_2 \cong \mathbb{D}^n \times [0,1]$ qui ne rencontre pas $D' \cup R' \cup \mathcal{C}_1$, et de telle sorte que $D' \cup R' \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ soit orientable, et l'on note X la variété obtenue, dont le bord est le même que celui de $D \cup R$.

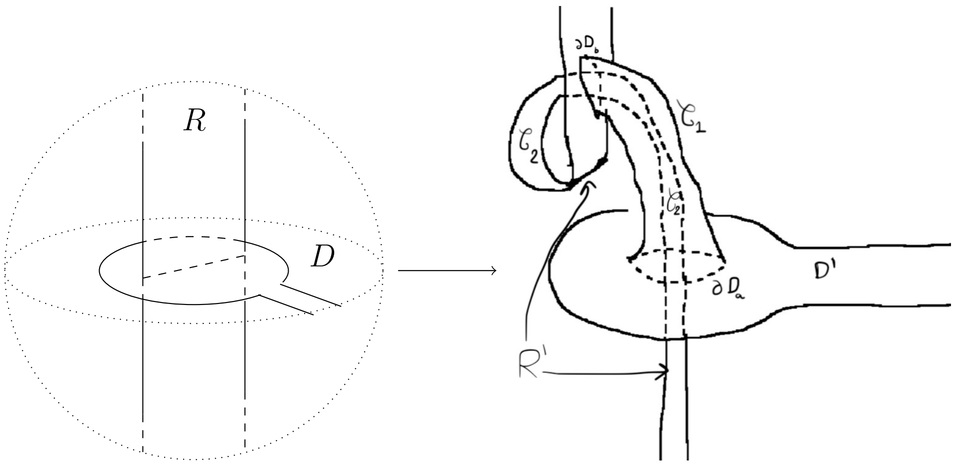


FIGURE 4.2 – Le procédé de désingularisation du disque ruban.

Notons Σ la surface obtenue. Si l'on choisit les cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ comme en figure 4.2, le bord de Σ est isotope à celui de Σ_0. Par conséquent, Σ est une surface de

Seifert d'un nœud long isotope à ψ. Soit U un voisinage ouvert régulier dans Σ de $(\Sigma \setminus \bigcup_{i\in\underline{r}} B_i) \cup \bigcup_{i\in\underline{r}} \varphi_i(D' \cup R')$ et V un voisinage ouvert régulier de $\bigcup_{i\in\underline{r}} \varphi_i(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$. Remarquons que :

- l'ouvert U a l'homologie d'une réunion disjointe de bouquets de n-sphères,
- l'ouvert V se rétracte sur une réunion disjointe de points et de n-sphères,
- l'ouvert $U \cap V$ se rétracte sur une réunion disjointe de points et de n-sphères.
- La surface Σ est la réunion de U et de V.

Par conséquent, une application immédiate de la suite de Mayer-Vietoris implique que $H_*(\Sigma) = 0$ si $* \notin \{0, 1, n\}$. Le lemme s'en déduit immédiatement. □

Le lemme suivant nous permet d'obtenir le résultat suivant, qui étend celui de Watanabe.

Théorème 4.4.2. *Soit ψ un nœud ruban long d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière. Soit $\Delta_\psi(t)$ la normalisation du polynôme d'Alexander de dimension* 1 *de ψ vérifiant $\Delta_\psi(1) = 1$ et ${\Delta_\psi}'(1) = 0$, et posons*

$$\mathrm{Ln}(\Delta_\psi(e^h)) = \sum_{k\geq 2} \beta_k(\psi) h^k.$$

Alors, pour tout $k \geq 2$,

$$Z_k(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ -2\beta_k(\psi) & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. La proposition 4.3.5 implique que le théorème 4.3.8 s'applique aux nœuds rubans longs, et, d'après le lemme 4.4.1, on a

$$\mathrm{Ln}\left(\widehat{\Delta_{1,\psi}}(e^h)\right) = -\sum_{k\geq 2} Z_k(\psi) h^k.$$

De plus, avec les notations du théorème 4.2.5, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}\left(\widehat{\Delta_{1,\psi}}(e^h)\right) &= \mathrm{Ln}\left(\Delta_\psi(e^h)\right) + \mathrm{Ln}\left(\Delta_\psi(e^{-h})\right) \\ &= \sum_{k\geq 1} 2\beta_{2k}(\psi) h^{2k}. \end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Généralisation des invariants de Bott-Cattaneo-Rossi aux nœuds longs dans les $\mathbb{R}^{n+2}$ d'homologie entière

Ce chapitre reproduit la prépublication [Let19]. Si celle ci ne traite pas le cas $n = 1$, la plupart des arguments restent valables dans ce cas. Les seuls arguments différents sont présentés en chapitre 7 et concernent la partie 5.7.1, et les lemmes 5.7.4, et 5.9.1. Les formes $\Omega_{e_\pm}$ et le signe $\varepsilon(\Gamma)$ de la partie 5.2.4 diffèrent de celles de la partie 2.3, mais définissent la même orientation de $C_\Gamma(\psi)$.

Abstract

Bott, Cattaneo and Rossi defined invariants of long knots $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ as combinations of configuration space integrals for n odd ≥ 3. Here, we give a more flexible definition of these invariants. Our definition allows us to interpret these invariants as counts of diagrams. It extends to long knots inside more general $(n+2)$-manifolds, called asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, and provides invariants of these knots.

5.1 Introduction

In [Bot96], Bott introduced an isotopy invariant Z_2 of knots $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ in odd dimensional Euclidean spaces. The invariant Z_2 is defined as a linear combination of configuration space integrals associated to graphs by integrating forms associated to the edges, which represent directions in $\mathbb{R}^n$ or in $\mathbb{R}^{n+2}$. The involved graphs have four vertices of two kinds and four edges of two kinds.

This invariant was generalized to a whole family $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ of isotopy invariants of long knots $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, for odd $n \geq 3$, by Cattaneo and Rossi in [CR05] and by Rossi in his thesis [Ros02]. The *degree k Bott-Cattaneo-Rossi* (BCR for short) *invariant Z_k* involves diagrams with $2k$ vertices.

In [Wat07], Watanabe proved that, when restricted to ribbon long knots, the BCR invariants are finite type invariants with respect to some operations on ribbon knots, and he used this property to prove that the invariants Z_k are not trivial for even $k \geq 1$, and that they are related to the Alexander polynomial, for long ribbon knots.

In Theorem 5.2.10, which is the main theorem of this article, we generalize the invariants $(Z_k)_{k\geq 2}$ to long knots in the parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ of Section 5.2.1 when $n \geq 3$ is odd, using the notion of *propagating forms*. When the ambient space is $\mathbb{R}^{n+2}$, our extended definition also provides a more flexible definition for the original invariants $(Z_k)_{k\geq 2}$. In Theorem 5.2.13, we equivalently define our generalized BCR invariants as rational combinations of intersection numbers of chains in configuration spaces. In particular, our generalized invariants are rational. Theorem 5.2.17 asserts that Z_k is additive under connected sum. In [Let20], we use our flexible definition to express our generalized Z_2 in terms of linking numbers or of Alexander polynomials for all long knots in parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, when $n \equiv 1 \mod 4$.

Our invariants Z_k are precisely defined in Section 5.2, where the three forementioned theorems are stated. Their proofs are given in the following sections.

Our definition of Z_k involves a parallelization of the ambient space, which is a trivialization of its tangent bundle that is standard outside a compact as precisely explained in Definition 5.2.1. In Section 5.6, we prove that Z_k does not depend on the parallelization when it exists. In order to prove this result, we prove Theorem 5.6.2, which asserts that, up to homotopy, any two parallelizations of a parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ that are standard outside a compact coincide outside an (arbitrarily small) ball.

I do not know whether any asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ admits a parallelization in the sense of Definition 5.2.1. However, using the fact that the connected sum of any odd-dimensional asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with itself is parallelizable in the sense of Definition 5.2.1 (Proposition 5.2.18) and that Z_k is additive (Theorem 5.2.17), we extend our invariants to long knots in any (possibly non-parallelizable) asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with n odd ≥ 3 in Definition 5.2.19.

I thank my advisor Christine Lescop for her help with the redaction of this article. I also thank the referee for her/his helpful comments.

5.2 Definition of the BCR invariants

5.2.1 Parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ and long knots

In this article, we fix an odd integer $n \geq 3$, and M denotes an $(n+2)$-dimensional closed smooth oriented manifold, such that $H_*(M;\mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{S}^{n+2};\mathbb{Z})$. Such a manifold is called a *homology $(n+2)$-sphere*.

In such a homology sphere, choose a point ∞ and a closed ball $B_\infty(M)$ around this point. Fix an identification of this ball $B_\infty(M)$ with the complement B_∞ of the open unit ball of $\mathbb{R}^{n+2}$ in $\mathbb{S}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2} \cup \{\infty\}$. Let M° denote the manifold $M \setminus \{\infty\}$ and let $B^\circ_\infty(M)$ denote the punctured ball $B_\infty(M) \setminus \{\infty\}$. In all the following, this punctured ball $B^\circ_\infty(M)$ is identified with the complement B°_∞ of the open unit ball in $\mathbb{R}^{n+2}$. Let $B(M)$ denote the closure of $M^\circ \setminus B^\circ_\infty$. Then, the manifold M° can be seen as $M^\circ = B(M) \cup B^\circ_\infty$, where $B^\circ_\infty \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (see Figure 5.1). Note that such a manifold M° has the same homology as $\mathbb{R}^{n+2}$. The manifold M° equipped with the decomposition $M^\circ = B(M) \cup B^\circ_\infty$ is called an *asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$.

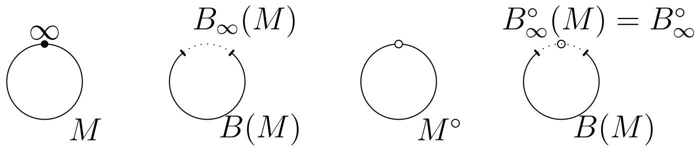


Figure 5.1

Long knots of such a space M° are smooth embeddings $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ such that $\psi(x) = (0,0,x) \in B^\circ_\infty$ when $||x|| \geq 1$, and $\psi(x) \in B(M)$ when $||x|| \leq 1$.

Two long knots ψ and ψ' are *isotopic* if there exists a family $(\psi_t)_{0\leq t\leq 1}$ of long knots, such that the map $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \mapsto \psi_t(x) \in M^\circ$ is smooth, and such that $\psi_0 = \psi$ and $\psi_1 = \psi'$. Such a family is called an *isotopy* (between ψ and ψ').

Definition 5.2.1. A *parallelization* of an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ is a bundle isomorphism $\tau\colon M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2} \to TM^\circ$ that coincides with the canonical trivialization of $T\mathbb{R}^{n+2}$ on $B^\circ_\infty \times \mathbb{R}^{n+2}$. An asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ equipped with such a parallelization is called a *parallelized asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$.

Two parallelizations τ and τ' are homotopic if there exists a smooth family $(\tau_t)_{0\leq t\leq 1}$ of parallelizations such that $\tau_0 = \tau$ and $\tau_1 = \tau'$. Given a parallelization τ and $x \in M^\circ$, τ_x denotes the isomorphism $\tau(x,\cdot)\colon \mathbb{R}^{n+2} \to T_xM^\circ$.

5.2.2 BCR diagrams

The definition of the BCR invariants involves the following graphs, called *BCR diagrams*.

Definition 5.2.2. A *BCR diagram* is an oriented connected graph Γ, defined by a set $V(\Gamma)$ of vertices, decomposed into $V(\Gamma) = V_i(\Gamma) \sqcup V_e(\Gamma)$, and a set $E(\Gamma)$ of ordered pairs of distinct vertices, decomposed into $E(\Gamma) = E_i(\Gamma) \sqcup E_e(\Gamma)$, whose elements are called *edges*[1], where the elements of $V_i(\Gamma)$ are called *internal vertices*, those of $V_e(\Gamma)$, *external vertices*, those of $E_i(\Gamma)$, *internal edges*, and those of $E_e(\Gamma)$, *external edges*, and such that, for any vertex v, one of the five following properties holds:

1. v is external and trivalent, with two incoming external edges and one outgoing external edge, and one of the incoming edges comes from a univalent vertex.

2. v is internal and trivalent, with one incoming internal edge, one outgoing internal edge, and one incoming external edge, which comes from a univalent vertex.

3. v is internal and univalent, with one outgoing external edge.

4. v is internal and bivalent, with one incoming external edge and one outgoing internal edge.

5. v is internal and bivalent, with one incoming internal edge and one outgoing external edge.

The external edges that come from a (necessarily internal) univalent vertex are called the *legs* of Γ. The subgraph of Γ made of all the other edges, and the non univalent vertices is called the *cycle* of Γ.

Define the *degree* of a BCR diagram Γ as $\deg(\Gamma) = \frac{1}{2}\mathrm{Card}(V(\Gamma))$, and let $\mathcal{G}_k$ denote the set of all BCR diagrams of degree k.

In the following, internal edges are depicted by solid arrows, external edges by dashed arrows, internal vertices by black dots, and external vertices by white dots (circles). This is the same convention as in [Wat07], but it is the opposite of what was done in [CR05], where the internal edges are dashed, and the external ones are solid. With these conventions, the five behaviors of Definition 5.2.2 are depicted in Figure 5.2.

[1] Note that this implies that our graphs have neither loops nor multiple edges with same orientation.

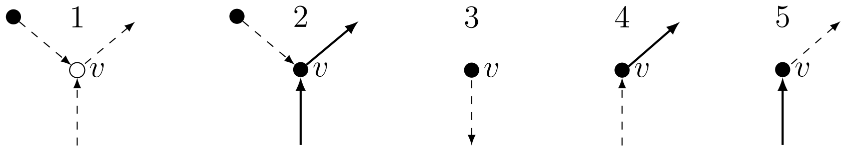


Figure 5.2

Definition 5.2.2 implies that any BCR diagram consists of one cycle with some legs attached to it, which is a cyclic sequence of pieces as in Figure 5.3 with as many pieces of the first type than of the second type. In particular, the degree of a BCR diagram is an integer.

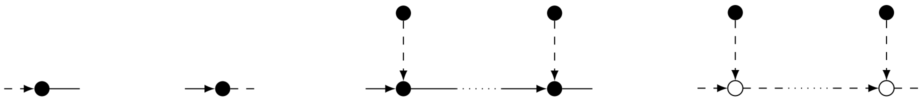


Figure 5.3

For example, Figure 5.4 depicts the five degree 2 BCR diagrams, which respectively have two, two, one, one, and no leg.

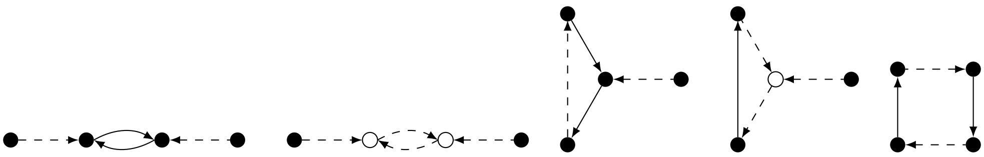


Figure 5.4 – The degree 2 Jacobi diagrams

Since any vertex has exactly one outgoing edge, every BCR diagram of degree k has exactly $2k$ edges. A *numbering* of a degree k BCR diagram Γ is a bijection $\sigma\colon E(\Gamma) \to \underline{2k}$, and $\widetilde{\mathcal{G}_k}$ denotes the set of all degree k numbered BCR diagrams (Γ, σ) (up to numbered graph isomorphisms).

5.2.3 Two-point configuration spaces

If P is a submanifold of a manifold Q such that P is transverse to the boundary ∂Q of Q and $\partial P = P \cap \partial Q$, its *normal bundle* $\mathfrak{N}P$ is the bundle over P whose fibers are $\mathfrak{N}_x P = T_x Q / T_x P$. A fiber $U\mathfrak{N}_x P$ of the *unit normal bundle* $U\mathfrak{N}P$ *of* P is the quotient of $\mathfrak{N}_x P \setminus \{0\}$ by dilations[2]. The *differential blow-up* of Q along P is the manifold obtained by replacing P with its unit normal bundle $U\mathfrak{N}P$. It is diffeomorphic to the complement in Q of an open tubular neighborhood of P. The

[2]Dilations are homotheties with positive ratio.

boundary of the obtained manifold is canonically identified with $(\partial Q \setminus \partial P) \cup U\mathfrak{N}P$, and its interior is $Q \setminus (P \cup \partial Q)$.

Let X be a d-dimensional closed smooth oriented manifold, let ∞ be a point of X, and set $X^\circ = X \setminus \{\infty\}$. Here, we give a short overview of the compactification $C_2(X^\circ)$ of the two-point configuration space defined in [Les15b, Section 2.2]. Let $C_2(X^\circ)$ be the space defined from X^2 by blowing up the point (∞, ∞), and next the closures of the sets $\infty \times X^\circ$, $X^\circ \times \infty$ and $\Delta_{X^\circ} = \{(x, x) \mid x \in X^\circ\}$.

The manifold $C_2(X^\circ)$ is compact and comes with a canonical map $p_b \colon C_2(X^\circ) \to X^2$. This map induces a diffeomorphism from the interior of $C_2(X^\circ)$ to the open configuration space $C_2^0(X^\circ) = \{(x, y) \in (X^\circ)^2 \mid x \neq y\}$, and $C_2(X^\circ)$ has the same homotopy type as $C_2^0(X^\circ)$. The manifold $C_2(X^\circ)$ is called the *two-point configuration space of* X°.

Let $T_\infty X$ denote the tangent bundle to X at ∞. Identify a punctured neighborhood of ∞ in X with B_∞°. Identify $T_\infty X \setminus \{0\}$ with $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ so that $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ is the tangent vector at 0 of the path γ such that $\gamma(0) = \infty$ and for any $t \in \left]0, \frac{1}{||u||}\right]$, $\gamma(t) = \frac{tu}{||tu||^2} \in B_\infty^\circ \subset X^\circ$. Use this identification to see the unit tangent space $U_\infty X$ to X at ∞ as $\mathbb{S}^{d-1}$, so that we have the following description of $\partial C_2(X^\circ)$.

Notation 5.2.3. The boundary of $C_2(X^\circ)$ is the union of:

- the closed face $\partial_{\infty,\infty} C_2(X^\circ) = p_b^{-1}(\{(\infty, \infty)\})$, whose interior[3] is the set of all classes of pairs $(u, v) \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})^2 \cong (T_\infty X \setminus \{0\})^2$ such that $u \neq v$, up to dilations.
- the unit normal bundles to $X^\circ \times \{\infty\}$ and $\{\infty\} \times X^\circ$, which are $\partial_{X^\circ,\infty} C_2(X^\circ) = X^\circ \times U_\infty X \cong X^\circ \times \mathbb{S}^{d-1}$ and $\partial_{\infty,X^\circ} C_2(X^\circ) = U_\infty X \times X^\circ \cong \mathbb{S}^{d-1} \times X^\circ$,
- the face $\partial_\Delta C_2(X^\circ) = p_b^{-1}(\Delta_{X^\circ})$, which identifies with the unit normal bundle to the diagonal Δ_{X°, which is diffeomorphic to the unit tangent bundle UX° via the map $[(u, v)]_{(x,x)} \in U\mathfrak{N}_{(x,x)}\Delta_{X^\circ} \mapsto [v - u]_x \in U_x X^\circ$.

The following lemma can be proved as [Les15b, Lemma 2.2].

Lemma 5.2.4. *When $X^\circ = \mathbb{R}^d$, the Gauss map*

$$\begin{array}{ccc} C_2^0(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{S}^{d-1} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{y-x}{||y-x||} \end{array}$$

extends to a map $G \colon C_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{S}^{d-1}$.

[3] The boundary of this closed face contains the three codimension 2 faces of $C_2(X^\circ)$, which we do not describe here.

Furthermore, G reads as follows on the faces[4] *of codimension* 1 *of $C_2(\mathbb{R}^d)$:*

$$G(c) = \begin{cases} \frac{\frac{v}{||v||^2}-\frac{u}{||u||^2}}{\left|\left|\frac{v}{||v||^2}-\frac{u}{||u||^2}\right|\right|} & \textit{if } c = [u,v] \textit{ is in the interior of } \partial_{\infty,\infty}C_2(\mathbb{R}^d) \\ -u & \textit{if } c = (u,y) \in \partial_{\infty,\mathbb{R}^d}C_2(\mathbb{R}^d) = \mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}^d \\ u & \textit{if } c = (x,u) \in \partial_{\mathbb{R}^d,\infty}C_2(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1} \\ \frac{u}{||u||} & \textit{if } c = [u]_x \in U_x\mathbb{R}^d \subset U\mathbb{R}^d \cong \partial_\Delta C_2(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

This map G exists only when $X^\circ = \mathbb{R}^d$, but, if (M°,τ) is a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, it is possible to define an analogue G_τ of G on the boundary of $C_2(M^\circ)$, as in [Les15b, Proposition 2.3].

Definition 5.2.5. Let (M°,τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Note that the face $\partial_{\infty,\infty}C_2(M^\circ)$ is canonically identified with $\partial_{\infty,\infty}C_2(\mathbb{R}^{n+2})$.

Then, we can define a smooth map $G_\tau\colon \partial C_2(M^\circ) \to \mathbb{S}^{n+1}$ by the following formula:

$$G_\tau(c) = \begin{cases} G(c) & \text{if } c \in \partial_{\infty,\infty}C_2(M^\circ) \cong \partial_{\infty,\infty}C_2(\mathbb{R}^{n+2}) \\ -u & \text{if } c = (u,y) \in \partial_{\infty,M^\circ}C_2(M^\circ) = \mathbb{S}^{n+1}\times M^\circ \\ u & \text{if } c = (x,u) \in \partial_{M^\circ,\infty}C_2(M^\circ) = M^\circ\times\mathbb{S}^{n+1} \\ \frac{\tau_x^{-1}(u)}{||\tau_x^{-1}(u)||} & \text{if } c = [u]_x \in U_xM^\circ \subset UM^\circ \cong \partial_\Delta C_2(M^\circ) \end{cases}$$

One can think of this map as a limit of the Gauss map when one or both points approach infinity (where everything is standard), or when they are close to each other. In the latter case, the limit is defined by the parallelization.

5.2.4 Configuration spaces

Let Γ be a BCR diagram, let (M°,τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, and let $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ be a long knot. Let $C^0_\Gamma(\psi)$ denote the *open configuration space*

$$C^0_\Gamma(\psi) = \{c\colon V(\Gamma) \hookrightarrow M^\circ \mid \text{there exists } c_i\colon V_i(\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \text{ satisfying } c_{|V_i(\Gamma)} = \psi\circ c_i\}.$$

An element c of $C^0_\Gamma(\psi)$ is called a *configuration*. By definition, the images of the vertices under a configuration are distinct, and the images of internal vertices are on the knot.

This configuration space is a non-compact smooth manifold. It admits a compactification $C_\Gamma(\psi)$, which is defined in [Ros02, Section 2.4], and which is the

[4]Here, we do not give the expression of G on the three codimension 2 faces. It can be found inside the proof of [Les15b, Lemma 2.2]

closure of the image of the map $c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto c^* \in C_{V(\Gamma)\cup\{*\}}(M)$, where $c^*{}_{|V(\Gamma)} = c$ and $c^*(*) = \infty$, and where $C_{V(\Gamma)\cup\{*\}}(M)$ is the compact configuration space defined in [Sin04].

Theorem 5.2.6 (Rossi, Sinha)**.** *The manifold $C_\Gamma(\psi)$ is a compact manifold with ridges and edges, such that:*

- *The interior of $C_\Gamma(\psi)$ is canonically diffeomorphic to $C^0_\Gamma(\psi)$.*
- *For any two internal vertices v and w, the map $c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto (c_i(v), c_i(w)) \in C_2(\mathbb{R}^n)$ extends to a smooth map $p^{\psi,i}_{v,w} \colon C_\Gamma(\psi) \to C_2(\mathbb{R}^n)$.*
- *For any two vertices v and w, the map $c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto (c(v), c(w)) \in C_2(M^\circ)$ extends to a smooth map $p^\psi_{v,w} \colon C_\Gamma(\psi) \to C_2(M^\circ)$.*

Definition 5.2.7. The manifold $C_\Gamma(\psi)$ is called the *(compact) configuration space associated to* Γ *and* ψ. For any edge e of Γ going from a vertex v to a vertex w, C_e denotes the configuration space $C_2(\mathbb{R}^n)$ if e is internal, and $C_2(M^\circ)$ if e is external, and $p^\psi_e \colon C_\Gamma(\psi) \to C_e$ denotes the map $p^{\psi,i}_{v,w}$ if e is internal, and the map $p^\psi_{v,w}$ if e is external. When there is no ambiguity on the knot ψ, p^ψ_e is simply denoted by p_e.

Orient $C^0_\Gamma(\psi)$ as follows.

Let $\mathrm{d}Y^v_i$ denote the i-th coordinate form of the internal vertex v (parametrized by $\mathbb{R}^n$) and $\mathrm{d}X^v_i$ denote the i-th coordinate form of the external vertex v (in an oriented chart of M°).

Split each external edge e in two halves: the tail e_- and the head e_+. Define a form $\Omega_{e_\pm}$ for these external half-edges as follows:

- for the head e_+ of a leg going to an external vertex v, $\Omega_{e_+} = \mathrm{d}X^1_v$,
- for the head e_+ of an edge that is not a leg, going to an external vertex v, $\Omega_{e_+} = \mathrm{d}X^2_v$,
- for the tail e_- of an edge coming from an external vertex v, $\Omega_{e_-} = \mathrm{d}X^3_v \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}X^{n+2}_v$,
- for any (external) half-edge $e_\pm$ adjacent to an internal vertex v, $\Omega_{e_\pm} = \mathrm{d}Y^1_v \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}Y^n_v$.

Note that this distributes the coordinates of each vertex on the half-edges that are adjacent to it, as in Figure 5.5.

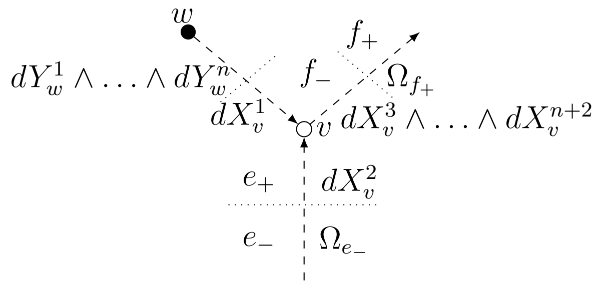


Figure 5.5 – The forms associated to some external half-edges

Let $N_{T,i}(\Gamma)$ denote the number of internal trivalent vertices, and define the *sign* of a BCR diagram as $\varepsilon(\Gamma) = (-1)^{N_{T,i}(\Gamma)+\mathrm{Card}(E_e(\Gamma))}$. The orientation of $C^0_\Gamma(\psi)$ is given by the form $\Omega(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma) \bigwedge\limits_{e\in E_e(\Gamma)} \Omega_e$, where $\Omega_e = \Omega_{e_-} \wedge \Omega_{e_+}$ for any external edge e.

5.2.5 Propagating forms

Here we define the notion of propagating forms, which allows us to extend the definition of the BCR invariants to all parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$.

For any even integer d, an *antisymmetric form* on $\mathbb{S}^d$ is a form ω such that $(-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^d})^*(\omega) = -\omega$, where $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^d}$ is the antipodal map of the sphere.

Definition 5.2.8. An *internal propagating form* (or *internal propagator*) is a closed $(n-1)$-form α on $C_2(\mathbb{R}^n)$ such that $\alpha_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)} = (G_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)})^*(\omega_\alpha)$ where ω_α is an antisymmetric volume form on $\mathbb{S}^{n-1}$ such that $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_\alpha = 1$, and where $G\colon C_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ is the map defined in Lemma 5.2.4.

An *external propagating form* (or *external propagator*) of (M°, τ) is a closed $(n+1)$-form β on $C_2(M^\circ)$ such that $\beta_{|\partial C_2(M^\circ)} = {G_\tau}^*(\omega_\beta)$ where ω_β is an antisymmetric volume form on $\mathbb{S}^{n+1}$ such that $\int_{\mathbb{S}^{n+1}} \omega_\beta = 1$, and where G_τ is the map of Definition 5.2.5.

For a given integer k, a *family* $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ *of propagating forms of* (M°, τ) is the data of $2k$ internal propagating forms $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 2k}$ and $2k$ external propagating forms $(\beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of (M°, τ).

Given such a family and a degree k numbered BCR diagram (Γ, σ), for each edge e of Γ, set

$$\omega^F_{e,\sigma} = \begin{cases} {p_e}^*(\alpha_{\sigma(e)}) & \text{if } e \text{ is internal,} \\ {p_e}^*(\beta_{\sigma(e)}) & \text{if } e \text{ is external.} \end{cases}$$

For any edge e, $n(e)$ denotes the integer $n-1$ if e is internal, and $n+1$ if e is external, so that $\omega^F_{e,\sigma}$ is an $n(e)$-form on $C_\Gamma(\psi)$. We will see in Corollary 5.3.4 that families of propagating forms exist.

5.2.6 Definition and properties of generalized BCR invariants of long knots

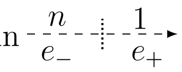
Fix an integer $k \geq 2$, and a family $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ).

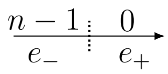
Let ψ be a long knot.

For any numbered BCR diagram (Γ, σ) of degree k, define[5] the form $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi)$ on $C_\Gamma(\psi)$ as $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \bigwedge\limits_{e\in E(\Gamma)} \omega^F_{e,\sigma}$, and set $I^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \int_{C_\Gamma(\psi)} \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi)$. This integral is a real number because of the following lemma.

Lemma 5.2.9. *For any BCR diagram* Γ*,* $\dim(C_\Gamma(\psi)) = \deg(\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi))$.

Proof. Split any edge e of Γ in two halves e_- (the tail) and e_+ (the head), and let $v(e_\pm)$ denote the vertex adjacent to the half-edge $e_\pm$. Assign an integer $d(e_\pm)$ to each half-edge as follows:

- If e is external, $d(e_+) = 1$ and $d(e_-) = n$ as in 

- If e is internal, $d(e_+) = 0$ and $d(e_-) = n-1$ as in 

Note that, with these notations:

- for any edge $e \in E(\Gamma)$, $d(e_+) + d(e_-) = n(e)$.
- for any vertex $v \in V(\Gamma)$, as it can be checked in Figure 5.6,

$$\sum_{e_\pm, v(e_\pm)=v} d(e_\pm) = \begin{cases} n & \text{if } v \text{ is internal,} \\ n+2 & \text{if } v \text{ is external.} \end{cases}$$

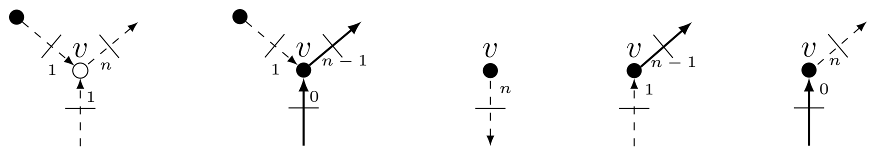


Figure 5.6

Then,

$$\begin{aligned} \deg(\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi)) &= \sum_{e\in E(\Gamma)} (d(e_+) + d(e_-)) = \sum_{v\in V(\Gamma)} \sum_{e_\pm, v(e_\pm)=v} d(e_\pm) \\ &= \sum_{v\in V_i(\Gamma)} n + \sum_{v\in V_e(\Gamma)} (n+2) = \dim(C_\Gamma(\psi)). \quad \square \end{aligned}$$

[5]The order of the forms inside the wedge product is not important since they have even degree.

Theorem 5.2.10. *Set*

$$Z_k^F(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} I^F(\Gamma,\sigma,\psi).$$

The following properties hold:

1. *The value of $Z_k^F(\psi)$ does not depend on the choice of the family F of propagating forms of (M°,τ).*

2. *The value of $Z_k(\psi) = Z_k^F(\psi)$ does not depend on the choice of the parallelization τ of the ambient manifold M°.*

3. *For any $\varphi \in \mathrm{Diffeo}^+(M^\circ)$ that fixes B_∞° pointwise, and for any long knot ψ of M°, $Z_k(\psi) = Z_k(\varphi\circ\psi)$. In particular, Z_k is a long knot isotopy invariant.*

4. *The invariant Z_k takes only rational values.*

5. *If k is odd, Z_k is always zero.*

The obtained invariant Z_k is called the generalized BCR invariant of degree k.

When $M^\circ = \mathbb{R}^{n+2}$, and when all the propagators are pullbacks of the homogoneous unit volume form on $\mathbb{S}^{n-1}$ and $\mathbb{S}^{n+1}$ with total volume one, our definition matches the definition of the invariants[6] $(\Theta_k)_{k\geq 2}$ of [CR05, Section 6] and of the invariants $2z_k$ of [Wat07, Section 2.4] (we have $Z_k = \Theta_k = 2z_k$). Our definition allows more flexibility on the choice of the forms. It extends the invariant to an invariant for long knots in any parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. In [Wat07, Theorem 4.1], Watanabe proved that z_k is not trivial when k is even and $M^\circ = \mathbb{R}^{n+2}$, and he related z_k to Alexander polynomial for long ribbon knots.

5.2.7 Propagating chains

Let us first fix some notations on the chains used in this article.

Definition 5.2.11. A *rational k-chain A* of a manifold X is a finite rational combination $\sum\limits_{i=1}^{r} q_iY_i$ of compact oriented k-submanifolds with ridges and corners $(Y_i)_{1\leq i\leq r}$ of X. The boundary ∂A of A is the rational $(k-1)$-chain $\partial A = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i\partial Y_i$, up to the usual algebraic cancellations[7].

[6] Only Θ_2 and Θ_3 are explicitly defined in [CR05], but the definition for higher k is mentioned.

[7] These cancellations allow us to write $1.(-Y) + (-1).Y = 0$ for a submanifold Y, where $-Y$ denotes the manifold Y with the opposite orientation, and $1.(Y \sqcup Z) = 1.Y + 1.Z$ for disjoint submanifolds Y and Z, for example.

If the $(Y_i)_{1\leq i\leq r}$ have pairwise disjoint interiors, A is called an *embedded rational k-chain.*[8] If A is an embedded rational k-chain, $\mathrm{Supp}(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{r} Y_i$ denotes the *support* of A, $A^{(k-1)} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \partial Y_i$ denotes its $(k-1)$-skeleton, and $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Supp}(A) \setminus A^{(k-1)}$ its *interior*.

Let us now define the notion of *propagating chains*, which will give us another way of computing the invariant Z_k, and help us to prove the fourth assertion of Theorem 5.2.10.

Definition 5.2.12. An *internal propagating chain* (or internal propagator) is an embedded rational $(n+1)$-chain A of $C_2(\mathbb{R}^n)$ such that there exists $x_A \in \mathbb{S}^{n-1}$ such that $\partial A = \frac{1}{2}(G_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)})^{-1}(\{-x_A, x_A\})$.

An *external propagating chain* (or external propagator) of (M°, τ) is an embedded rational $(n+3)$-chain B of $C_2(M^\circ)$ such that there exists $x_B \in \mathbb{S}^{n+1}$ such that $\partial B = \frac{1}{2}G_\tau^{-1}(\{-x_B, x_B\})$.

A *family $F_* = (A_i, B_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating chains of* (M°, τ) is the data of $2k$ internal propagating chains $(A_i)_{1\leq i\leq 2k}$ and $2k$ external propagating chains $(B_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of (M°, τ).

Consider a family $F_* = (A_i, B_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating chains of (M°, τ). For any BCR diagram Γ, let P_Γ be the following map:

$$\begin{array}{cccc} P_\Gamma\colon & C_\Gamma(\psi) & \to & \prod\limits_{e\in E_i(\Gamma)} C_2(\mathbb{R}^n) \times \prod\limits_{e\in E_e(\Gamma)} C_2(M^\circ) \\ & c & \mapsto & (p_e(c))_{e\in E(\Gamma)} \end{array}$$

The family F_* is in *general position* if, for any $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, and for any $c \in C_\Gamma(\psi)$ such that $P_\Gamma(c) \in \left(\prod\limits_{e\in E_i(\Gamma)} \mathrm{Supp}(A_{\sigma(e)})\right) \times \left(\prod\limits_{e\in E_e(\Gamma)} \mathrm{Supp}(B_{\sigma(e)})\right)$:

- For any internal edge e of Γ, $p_e(c) \in \mathrm{Int}(A_{\sigma(e)})$.
- For any external edge e of Γ, $p_e(c) \in \mathrm{Int}(B_{\sigma(e)})$.
- We have the transversality property

$$\begin{aligned} & T_{P_\Gamma(c)}\left(\prod_{e\in E(\Gamma)} C_e\right) \\ & = T_c P_\Gamma(T_c C_\Gamma(\psi)) + \left(\left(\prod_{e\in E_i(\Gamma)} T_{p_e(c)}\mathrm{Int}(A_{\sigma(e)})\right) \times \left(\prod_{e\in E_e(\Gamma)} T_{p_e(c)}\mathrm{Int}(B_{\sigma(e)})\right)\right). \end{aligned}$$

In the following, $D_{e,\sigma}^{F_*}$ denotes the chain $p_e^{-1}(A_{\sigma(e)})$ if e is internal, and the chain $p_e^{-1}(B_{\sigma(e)})$ if e is external. This is a chain of codimension $n(e)$ of $C_\Gamma(\psi)$.

[8] Note that any rational chain is homologous to an embedded one.

5.2.8 Computation of Z_k in terms of propagating chains

We can now give a discrete definition of our generalized BCR invariants.

Theorem 5.2.13. *Let $F_* = (A_i, B_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ be a family of propagating chains of (M°, τ) in general position.*

The algebraic intersection number $I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi)$ of the chains $(D^{F_*}_{e,\sigma})_{e \in E(\Gamma)}$ inside $C_\Gamma(\psi)$ makes sense and

$$Z_k(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}} I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi).$$

This theorem is proved in Section 5.4.1, where a more precise definition of this intersection number is given.

5.2.9 Additivity of Z_k under connected sum

Let M_1° and M_2° be two asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Let us define the connected sum $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$. Let $B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}}$ be the complement in $\mathbb{R}^{n+2}$ of the two open balls $\mathring{B}_1$ and $\mathring{B}_2$ of radius $\frac{1}{4}$ and with respective centers $\Omega_1 = (0, 0, \ldots, 0, -\frac{1}{2})$ and $\Omega_2 = (0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$. For $i \in \{1, 2\}$ and x in $\partial B(M_i) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, define the map $\varphi_i(x) = \frac{1}{4}x + \Omega_i$, which is a diffeomorphism from $\partial B(M_i)$ to ∂B_i.

Set $M_1^\circ \sharp M_2^\circ = B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}} \cup B(M_1) \cup B(M_2)$, where $B(M_i)$ is glued to $B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}}$ along ∂B_i using the map φ_i, and set $B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) = \overline{(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) \setminus B^\circ_\infty}$, where B°_∞ is defined in Section 5.2.1. The manifold $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ with the decomposition $M_1^\circ \sharp M_2^\circ = B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) \cup B^\circ_\infty$ is called the *connected sum* of M_1° and M_2°.

Proposition 5.2.14. *The obtained manifold $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ is an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with two canonical injections $\iota_i \colon B(M_i) \hookrightarrow B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) \subset M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ for $i \in \{1, 2\}$.*

If M_1° and M_2° are parallelized, $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ inherits a natural parallelization, up to homotopy.

Proof. This is immediate. □

Definition 5.2.15. Let M_1° and M_2° be two asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$.

Let $\psi_1 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ and $\psi_2 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$ be two long knots. The formula

$$(\psi_1 \sharp \psi_2)(x) = \begin{cases} \iota_2(\psi_2(4.x_1, \ldots, 4.x_{n-1}, 4.x_n - 2)) & \text{if } ||x - (0, \ldots, 0, \frac{1}{2})|| \leq \frac{1}{4}, \\ \iota_1(\psi_1(4.x_1, \ldots, 4.x_{n-1}, 4.x_n + 2)) & \text{if } ||x - (0, \ldots, 0, -\frac{1}{2})|| \leq \frac{1}{4}, \\ (0, 0, x) \in B^\circ_{\infty,\frac{1}{4}} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

defines a long knot $\psi_1 \sharp \psi_2 \hookrightarrow M_1^\circ \sharp M_2^\circ$, which is called the *connected sum* of ψ_1 and ψ_2.

Let us assert the following immediate result about connected sum.

Lemma 5.2.16. *Set* $\psi_{triv}\colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto (0,0,x) \in \mathbb{R}^{n+2}$. *The embedding* ψ_{triv} *is called the* trivial knot*.*

For any parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ M° *and for any long knot* ψ *in* M°*, there exist two diffeomorphisms* $\mathcal{T}^{(1)}_{M^\circ,\psi}\colon \mathbb{R}^{n+2}\sharp M^\circ \to M^\circ$ *and* $\mathcal{T}^{(2)}_{M^\circ,\psi}\colon M^\circ\sharp\mathbb{R}^{n+2} \to M^\circ$ *such that* $\mathcal{T}^{(1)}_{M^\circ,\psi} \circ (\psi_{triv}\sharp\psi) = \psi = \mathcal{T}^{(2)}_{M^\circ,\psi} \circ (\psi\sharp\psi_{triv})$*.*

Similarly, the connected sum is associative and commutative up to ambient diffeomorphisms.

In Section 5.9, we prove the following theorem.

Theorem 5.2.17. *Let* M_1° *and* M_2° *be two parallelizable asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$ *and let* $\psi_1\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ *and* $\psi_2\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$ *be two long knots. Then, for any* $k \geq 2$*,*

$$Z_k(\psi_1\sharp\psi_2) = Z_k(\psi_1) + Z_k(\psi_2).$$

5.2.10 Extension of Z_k to any asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$

We prove the following proposition at the end of Section 5.8.

Proposition 5.2.18. *For any odd* $n \geq 1$*, the connected sum of any asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$ *with itself is parallelizable in the sense of Definition 5.2.1.*

Theorem 5.2.10, Proposition 5.2.18 and the additivity of Z_k under connected sum of Theorem 5.2.17 show that the following definition is consistent.

Definition 5.2.19. Let ψ be a long knot in a (possibly non-parallelizable) asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with n odd ≥ 3. Define $Z_k(\psi)$ as $\frac{1}{2}Z_k(\psi\sharp\psi)$.

By construction, Z_k still satisfies the three last points of Theorem 5.2.10: it is invariant under ambient diffeomorphisms, takes rational values, and is trivial when k is even. The associativity and commutativity of connected sum up to ambient diffeomorphisms of Lemma 5.2.16 and Theorem 5.2.17 show the following proposition, which extends Theorem 5.2.17.

Proposition 5.2.20. *Let* M_1° *and* M_2° *be two asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$ *and let* $\psi_1\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ *and* $\psi_2\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$ *be two long knots. Then, for any* $k \geq 2$*,*

$$Z_k(\psi_1\sharp\psi_2) = Z_k(\psi_1) + Z_k(\psi_2).$$

5.3 Independence of the propagating forms

In this section, we study the effect on Z_k of a change in the family of propagating forms. Without loss of generality, it suffices to study how Z_k changes when α_1 and β_1 change.

5.3.1 Expression of the dependence in terms of boundary integrals

For later purposes, we allow a more general context: as previously, we suppose that a family $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating forms is given, but we allow the forms β_i to be compatible with different parallelizations τ_i of M° (which means that $(\beta_i)_{|\partial C_2(M^\circ)} = G^*_{\tau_i}(\omega_{\beta_i})$). This will allow us to use the results of this section in the proof of the independence of the parallelization in Section 5.6.2. For simplicity, we set $\omega_i^{n-1} = \omega_{\alpha_i}$ and $\omega_i^{n+1} = \omega_{\beta_i}$.

Let τ_1' be a parallelization of M°. Let $F' = (\alpha_i', \beta_i')_{1\leq i\leq 2k}$ be a family of propagating forms such that for any $i \geq 2$, $(\alpha_i', \beta_i') = (\alpha_i, \beta_i)$, and such that β_1' is an external propagating form for τ_1', and $\alpha_1' - \alpha_1$ and $\beta_1' - \beta_1$ are exact forms. We set $(\omega_1^{n-1})' = \omega_{\alpha_1'}$ and $(\omega_1^{n+1})' = \omega_{\beta_1'}$.

Let ζ_1^{n-2} be an $(n-2)$-form on $C_2(\mathbb{R}^n)$ and let ζ_1^n be an n-form on $C_2(M^\circ)$ such that $\alpha_1' = \alpha_1 + \mathrm{d}\zeta_1^{n-2}$ and $\beta_1' = \beta_1 + \mathrm{d}\zeta_1^n$.

We say that $(\alpha_1' - \alpha_1, \beta_1' - \beta_1)$ *has the sphere factorization property* if we can choose the forms $(\zeta_1^{n-2}, \zeta_1^n)$ such that there exists an antisymmetric $(n-2)$-form η_1^{n-2} on $\mathbb{S}^{n-1}$ such that ${\zeta_1^{n-2}}_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)} = {G_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)}}^*(\eta_1^{n-2})$ and an antisymmetric n-form η_1^n on $\mathbb{S}^{n+1}$ such that ${\zeta_1^n}_{|\partial C_2(M^\circ)} = {G_{\tau_1}}^*(\eta_1^n)$. In the following, when this property is assumed, we always choose such primitives.

For any $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, and for any edge e of Γ, define the form

$$\tilde{\omega}_{e,\sigma} = \begin{cases} \omega^F_{e,\sigma} & \text{if } \sigma(e) \neq 1, \\ p_e^*(\zeta_1^{n-2}) & \text{if } \sigma(e) = 1 \text{ and } e \text{ is internal,} \\ p_e^*(\zeta_1^n) & \text{if } \sigma(e) = 1 \text{ and } e \text{ is external,} \end{cases}$$

and set $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi) = \bigwedge\limits_{e\in E(\Gamma)} \tilde{\omega}_{e,\sigma}$, where the order of the forms is not important since all of them except one have even degree.

Lemma 5.3.1. *With these notations,*

$$Z_k^{F'}(\psi) - Z_k^F(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} \int_{\partial C_\Gamma(\psi)} \tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi).$$

Proof. From the Stokes formula, it directly follows that

$$I^{F'}(\Gamma, \sigma, \psi) - I^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \int_{C_\Gamma(\psi)} \mathrm{d}\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi) = \int_{\partial C_\Gamma(\psi)} \tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi). \qquad \square$$

5.3.2 Codimension 1 faces of $C_\Gamma(\psi)$

The codimension 1 open faces of $C_\Gamma(\psi)$ are in bijection with the subsets S of cardinality at least two of $V^*(\Gamma) = V(\Gamma) \sqcup \{*\}$. Let $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ denote the face associated to such an S and let $\mathcal{F}(\Gamma)$ denote the set of the codimension 1 faces. There are four types of faces in $\mathcal{F}(\Gamma)$:

- If S contains $*$, $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ is called an *infinite face*, and its elements are configurations of $C_\Gamma(\psi)$ that map the vertices of $S \setminus \{*\}$ to infinity, and all the other vertices to pairwise distinct points of M°.

- If $S = V(\Gamma)$, $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ is called the *anomalous face*. Its elements are configurations that map all the vertices to one point, which is necessarily on the knot.

- If S has exactly two points, which are connected by exactly one edge, $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ is called a *principal face* and its elements are configurations that map the two vertices of S to one point x_S and all the other ones to pairwise distinct vertices of $M^\circ \setminus \{x_S\}$.

- Otherwise, $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ is called a *hidden face*, and its elements are configurations that map all the vertices of S to one point x_S, and all the other ones to pairwise distinct points of $M^\circ \setminus \{x_S\}$.

One can find precise descriptions of these faces in Section 5.7 or in [Ros02, pp 61-62].

A *numbered (codimension* 1*) face* of $C_\Gamma(\psi)$ is a face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ as above, together with a numbering σ of Γ.

For any numbered face $(\partial_S C_\Gamma(\psi), \sigma)$, set $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = \int_{\partial_S C_\Gamma(\psi)} \tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)$, so that $Z_k^{F'}(\psi) - Z_k^F(\psi) = \dfrac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} \sum_{S\in\mathcal{F}(\Gamma)} \delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$.

5.3.3 Vanishing lemma for the face contributions

Lemma 5.3.2. *If $S \subset V(\Gamma)$, Γ_S denotes the subgraph of Γ whose vertices are the elements of S and whose edges are the edges of Γ that connect two vertices of S.*

- *For any numbered infinite face $(\partial_S C_\Gamma(\psi), \sigma)$, such that no end of $\sigma^{-1}(1)$ is in S, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.*

- *The set of hidden faces splits into two sets $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ and $\mathcal{H}_2(\Gamma)$, such that:*
  - *For any hidden face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ of $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ and any numbering σ of Γ, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.*
  - *For any hidden face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ of $\mathcal{H}_2(\Gamma)$, we have an involution $\sigma \mapsto \sigma^*$ of the numberings of Γ such that $\delta_S I(\Gamma, \sigma^*, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$.*

- *Represent the principal faces by pairs* (Γ, e) *where* $\Gamma \in \mathcal{G}_k$ *and* $e \in E(\Gamma)$*. For any numbering* σ*, let* $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *denote the integral* $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *where* S *is the set of the two ends of* e*. Let* $\mathcal{N}_{\neq 1}(\Gamma, e)$ *denote the set of the numberings of* Γ *such that* $\sigma(e) \neq 1$*, and let* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *denote the set of all the numberings of* Γ*. Then:*
  - *There exists an involution* $s\colon (\Gamma, e) \mapsto (\Gamma^*, e^*)$ *of the set of principal faces such that, for any* (Γ, e)*, there exists a canonical map* $s_{\Gamma,e}\colon \sigma \in \mathcal{N}_{\neq 1}(\Gamma, e) \mapsto \sigma^* \in \mathcal{N}_{\neq 1}(\Gamma^*, e^*)$*, such that* $\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = -\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *and such that* $s_{\Gamma,e} \circ s_{\Gamma^*,e^*} = \mathrm{Id}$*.*
  - *If* σ *is a numbering of* Γ *such that* $\sigma(e) = 1$*, and, if* e *is internal, or if* e *is external with at least one external end, then* $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$*.*

Furthermore, if $(\alpha'_1 - \alpha_1, \beta'_1 - \beta_1)$ *has the sphere factorization property:*

- *For any infinite face* $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ *such that* S *contains an end of the edge* $\sigma^{-1}(1)$*,* $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$*.*
- *The anomalous faces do not contribute: for any* $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$*,* $\delta_{V(\Gamma)} I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$*.*
- *For the principal faces* (Γ, e) *associated to an edge* e *where* e *is external with internal ends, the map* $s_{\Gamma,e}$ *above can be extended to a map* $\mathcal{N}(\Gamma) \to \mathcal{N}(\Gamma^*)$ *such that* $\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = -\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *and* $s_{\Gamma,e} \circ s_{\Gamma^*,e^*} = \mathrm{Id}$*.*

The proof of this lemma is given in Section 5.7.

5.3.4 Cohomology groups of two-point configuration spaces

In this section, we study the cohomology of configuration spaces. This allows us to prove the existence of families of propagating forms and the independence of Z_k^F of the propagating forms (first point of Theorem 5.2.10) up to Lemma 5.3.2 in the next subsection.

Lemma 5.3.3. *Let* (M°, τ) *be a parallelized asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$*. The relative cohomology of* $C_2(M^\circ)$ *is*

$$H^*(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ); \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } * = n+3 \text{ or } * = 2n+4, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. Since $C_2(M^\circ)$ is a $(2n+4)$-dimensional compact oriented manifold, we have $H^{2n+4}(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ); \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Fix $0 \leq \ell \leq 2n+3$. The Poincaré-Lefschetz duality yields $H^\ell(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ)) = H_{2n+4-\ell}(C_2(M^\circ)) = H_{2n+4-\ell}(C_2^0(M^\circ))$. Furthermore, we have a long exact sequence

$$H_{2n+5-\ell}((M^\circ)^2) \to H_{2n+5-\ell}((M^\circ)^2, C_2^0(M^\circ)) \to H_{2n+4-\ell}(C_2^0(M^\circ)) \to H_{2n+4-\ell}((M^\circ)^2)$$

where $H_*((M^\circ)^2) = H_*(\mathrm{pt})$ by the Künneth formula. Then, we have an isomorphism $H_{2n+4-\ell}(C_2^0(M^\circ)) \cong H_{2n+5-\ell}((M^\circ)^2, C_2^0(M^\circ))$.

The excision theorem yields $H_{2n+5-\ell}((M^\circ)^2, C_2^0(M^\circ)) = H_{2n+5-\ell}(\mathcal{N}(\Delta_{M^\circ}), \mathcal{N}(\Delta_{M^\circ}) \setminus \Delta_{M^\circ}) = H_{2n+5-\ell}(\Delta_{M^\circ} \times \mathbb{D}^{n+2}, \Delta_{M^\circ} \times (\mathbb{D}^{n+2} \setminus \{0\}))$, where $\mathcal{N}(\Delta_{M^\circ})$ is a tubular neighborhood of Δ_{M°, which can be identified with $\Delta_{M^\circ} \times \mathbb{D}^{n+2}$ using the parallelization.

By Künneth's formula,

$$\begin{aligned} H_{2n+5-\ell}(\Delta_{M^\circ} \times \mathbb{D}^{n+2}, \Delta_{M^\circ} \times (\mathbb{D}^{n+2} \setminus \{0\})) &= \bigoplus_{i+j=2n+5-\ell} H_i(\Delta_{M^\circ}) \otimes H_j(\mathbb{D}^{n+2}, \mathbb{S}^{n+1}) \\ &= H_{n+3-\ell}(M^\circ) \otimes \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Then, $H^\ell(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ)) \cong H_{n+3-\ell}(M^\circ)$. □

5.3.5 Existence of propagating forms. Independence of Z_k^F of a choice of propagating forms

The results of this section are applications of Lemma 5.3.3.

Corollary 5.3.4. *For any parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ (M°, τ), there exist external propagating forms for (M°, τ).*

Proof. The triviality of the cohomology group $H^{n+2}(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ))$ follows from the lemma. The restriction map $H^{n+1}(C_2(M^\circ)) \to H^{n+1}(\partial C_2(M^\circ))$ is therefore surjective. Thus, given an antisymmetric closed $(n+1)$-form ω^{n+1} on $\mathbb{S}^{n+1}$, there exists a closed form β_0^{n+1} on $C_2(M^\circ)$ such that $[(\beta_0^{n+1})_{|\partial C_2(M^\circ)}] = [G_\tau{}^*(\omega^{n+1})]$ in $H^{n+1}(\partial C_2(M^\circ))$. There exists a form ξ_0^n on $\partial C_2(M^\circ)$ such that $(\beta_0^{n+1})_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_\tau{}^*(\omega^{n+1}) + \mathrm{d}\xi_0^n$. Extend ξ_0^n to a form ξ^n on $C_2(M^\circ)$, and set $\beta^{n+1} = \beta_0^{n+1} - \mathrm{d}\xi^n$. The form β^{n+1} is closed, and $(\beta^{n+1})_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_\tau{}^*(\omega^{n+1})$. The corollary is proved. □

Let us now prove the first point of Theorem 5.2.10, i. e. that Z_k^F does not depend on the choice of the family F of propagating forms of (M°, τ). Fix (M°, τ), and choose two families $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ and $F' = (\alpha_i', \beta_i')_{1 \leq i \leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ).

As previously said, it suffices to show that Z_k^F does not change if α_1 and β_1 change. Therefore, we assume that for any $i \geq 2$, $(\alpha_i', \beta_i') = (\alpha_i, \beta_i)$, without loss of generality, and we use the notations of Section 5.3.1.

Lemma 5.3.5. *The pair $(\alpha_1' - \alpha_1, \beta_1' - \beta_1)$ has the sphere factorisation property.*

Proof. By construction, $(\beta_1' - \beta_1)_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_\tau^*((\omega_1^{n+1})' - \omega_1^{n+1})$. Since $\int_{\mathbb{S}^{n+1}} (\omega_1^{n+1})' = \int_{\mathbb{S}^{n+1}} \omega_1^{n+1}$, there exists an n-form η_1^n on $\mathbb{S}^{n+1}$ such that $\mathrm{d}\eta_1^n = (\omega_1^{n+1})' - \omega_1^{n+1}$. Since ω_1^{n+1} and $(\omega_1^{n+1})'$ are antisymmetric, η_1^n can be assumed to be antisymmetric. Extend the form ${G_\tau}^*(\eta_1^n)$ to a form θ_1^n on $C_2(M^\circ)$. Then, $\beta_1' - \beta_1 - \mathrm{d}\theta_1^n$ is a closed form on $C_2(M^\circ)$, whose restriction to $\partial C_2(M^\circ)$ vanishes. Since $H^{n+1}(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ)) = 0$, there exists an n-form θ_2^n on $C_2(M^\circ)$, which vanishes on $\partial C_2(M^\circ)$, such that $\beta_1' - \beta_1 - \mathrm{d}\theta_1^n = \mathrm{d}\theta_2^n$. Set $\zeta_1^n = \theta_1^n + \theta_2^n$, so that $\beta_1' - \beta_1 = \mathrm{d}\zeta_1^n$, ${\zeta_1^n}_{|\partial C_2(M^\circ)} = {G_\tau}^*(\eta_1^n)$ and η_1^n is antisymmetric.

The same argument on $\alpha_1' - \alpha_1$ concludes the proof of Lemma 5.3.5. □

From the previous lemma and Lemma 5.3.2, it follows that $Z_k^{F'} - Z_k^F = 0$. This proves the independence of $Z_k^F(\psi)$ of the family F of propagating forms of (M°, τ). This is the first point of Theorem 5.2.10.

5.4 Rationality of Z_k

5.4.1 Proof of Theorem 5.2.13

Fix a family $F_* = (A_i, B_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ of propagating chains of (M°, τ) in general position. In order to prove that Z_k can be computed with these propagators, we are going to define forms dual to them, and use the definition of Z_k. Fix Riemannian metrics on the configuration spaces $C_2(M^\circ)$, $C_2(\mathbb{R}^n)$, and $C_\Gamma(\psi)$, and denote by $N_\varepsilon(X) = \{c \mid d(c, X) \leq \varepsilon\}$ the closed ε-neighborhood of a subset X of any of these spaces. Define

$$\begin{aligned} D(\Gamma, \sigma) &= \{c \in C_\Gamma(\psi) \mid (p_e(c))_{e \in E(\Gamma)} \in \prod_{e \in E_i(\Gamma)} \mathrm{Supp}(A_{\sigma(e)}) \times \prod_{e \in E_e(\Gamma)} \mathrm{Supp}(B_{\sigma(e)})\} \\ &= \bigcap_{e \in E(\Gamma)} D_{e,\sigma}^{F_*}. \end{aligned}$$

Let $\varepsilon > 0$ be such that for any internal edge e, $p_e(D(\Gamma, \sigma)) \subset \mathrm{Supp}(A_{\sigma(e)}) \setminus N_\varepsilon(A_{\sigma(e)}^{(n)})$, and such that for any external edge e, $p_e(D(\Gamma, \sigma)) \subset \mathrm{Supp}(B_{\sigma(e)}) \setminus N_\varepsilon(B_{\sigma(e)}^{(n+2)})$.

Set $A_i^0 = A_i \setminus N_\varepsilon(A_i^{(n)})$, $N_\varepsilon(A_i) = N_\varepsilon(\mathrm{Supp}(A_i))$,$B_i^0 = B_i \setminus N_\varepsilon(B_i^{(n+2)})$, and $N_\varepsilon(B_i) = N_\varepsilon(\mathrm{Supp}(B_i))$. For ε small enough, for any x in A_i^0, there exists an open neighborhood $V_x \subset N_\varepsilon(A_i)$ of x in $C_2(\mathbb{R}^n)$, which can be thought of as a tubular neighborhood of an open neighborhood W_x of x in A_i^0, so that there is a local (orientation-preserving) trivialization $V_x \to W_x \times \mathbb{D}^{n-1}$. This induces a local fiber projection map $p_x \colon V_x \to \mathbb{D}^{n-1}$. This construction can be made so that if $V_x \cap V_{x'} \neq \emptyset$, there exists a rotation $r_{x,x'} \in SO(\mathbb{R}^{n-1})$ such that $(p_x)_{|V_x \cap V_{x'}} = (r_{x,x'} \circ p_{x'})_{|V_x \cap V_{x'}}$.

For any $x \in B_i^0$, similarly define an open neighborhood $V_x \subset N_\varepsilon(B_i)$ of x in $C_2(M^\circ)$, and a local fiber projection map $p_x \colon V_x \to \mathbb{D}^{n+1}$.

Some use of linear algebra and inverse function theorem proves the following lemma.

Lemma 5.4.1. *For any $c \in D(\Gamma, \sigma)$, there exists a neighborhood U_c of c in $C_\Gamma(\psi)$ such that for any $e \in E(\Gamma)$, $p_e(U_c) \subset V_{p_e(c)}$ and*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_c \colon & U_c & \to & \prod\limits_{e \in E(\Gamma)} \mathbb{D}^{n(e)} \\ & y & \mapsto & (p_{p_e(c)}(p_e(y)))_{e \in E(\Gamma)} \end{array}$$

is a diffeomorphism onto its image.

Lemma 5.4.1 implies that $D(\Gamma, \sigma)$ is discrete in the compact space $C_\Gamma(\psi)$, so it is a finite set.

Since $n(e)$ is even for any edge, $\prod\limits_{e \in E(\Gamma)} \mathbb{D}^{n(e)}$ is naturally oriented, and we can define $\mathrm{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi_c))$ as the sign of the Jacobian $\det(\mathrm{d}\varphi_c)$. For $c \in D(\Gamma, \sigma)$, set $i(c) = \mathrm{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi_c)) \prod\limits_{e \in E(\Gamma)} q(p_e(c))$, where $q(p_e(c))$ is the coefficient q_j of the submanifold Y_j in which $p_e(c)$ lies in the rational chain $A_{\sigma(e)}$ (if e is internal) or $B_{\sigma(e)}$ (if e is external), which reads $\sum\limits_i q_i Y_i$. Then, the *intersection number* $I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi)$ is defined as $I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi) = \sum\limits_{c \in D(\Gamma, \sigma)} i(c)$.

The following lemma, which can be obtained as in [Les20, Section 11.4, Lemma 11.13] connects this intersection number to a configuration space integral, thus to the Z_k invariant.

Lemma 5.4.2. *There exists a family $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ) such that for any $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$:*

- *The support of $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi)$ is a disjoint union of some neighborhoods U_c of $c \in D(\Gamma, \sigma)$ as in Lemma 5.4.1.*
- *For any $c \in D(\Gamma, \sigma)$, $\int_{U_c} \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi) = i(c)$.*

Sketch of proof. The main idea is to define the form α_i supported on $N_\varepsilon(A_i)$, such that for any $x \in A_i^0$ $(\alpha_i)_{|V_x} = q(x).p_x^*(\omega^{n-1})$ where ω^{n-1} is a volum form of total volume one on $\mathbb{D}^{n-1}$ supported in the interior of $\mathbb{D}^{n-1}$ and $q(x)$ is the coefficient of the submanifold Y_j in which x lies in $A_i = \sum\limits_k q_k Y_k$. The proof of [Les20, Section 11.4, Lemma 11.13] explains how these forms can be "glued" along $N_\varepsilon(A_i^{(n)})$ in order to get a closed form and how they can be defined on a collar of the boundary to get an internal propagating form. The construction of β_i is similar. $\square$

Lemma 5.4.2 implies Theorem 5.2.13. Indeed, with the family F of propagating forms of the lemma, the integrals $I^F(\Gamma, \sigma, \psi)$ of the definition of Z_k in Theorem 5.2.10 are exactly the rational numbers $I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi)$ of Theorem 5.2.13.

5.4.2 Existence of propagating chains in general position

Lemma 5.3.3 and the Poincaré duality imply that $H_n(C_2(\mathbb{R}^n))$ and $H_{n+2}(C_2(M^\circ))$ are trivial groups. Therefore, propagating chains exist.

As stated in the following theorem, these propagating chains can also be assumed to be in general position.

Theorem 5.4.3. *For any family $(A_i, B_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating chains of (M°, τ), and any $\varepsilon > 0$, there exists a family $(A'_i, B'_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating chains of (M°, τ) in general position such that for any $1 \leq i \leq 2k$, $\mathrm{Supp}(A'_i) \subset N_\varepsilon(A_i)$ and $\mathrm{Supp}(B'_i) \subset N_\varepsilon(B_i)$.*

Sketch of proof. This theorem could be proved as in [Les20, Section 11.3, Lemma 11.11]. The main idea is to look at families of diffeomorphisms (φ_i, φ'_i) isotopic to the identity of the tubular neighborhoods $N_\varepsilon(A_i), N_\varepsilon(B_i)$ that act only fiberwise. In the space of such diffeomorphisms, the condition of general position on $(\varphi_i(A_i), \varphi'_i(B_i))$ can be proved to correspond to an open dense (so non empty) subset. Therefore, there exist some diffeomorphisms such that these perturbed chains are in general position. □

In particular, Z_k can be computed with such propagating chains. By construction, this gives a rational number. This proves the fourth assertion of Theorem 5.2.10.

5.5 Nullity of Z_k when k is odd

In this section, we prove the fifth assertion of Theorem 5.2.10. The method is the same as in [Wat07, Section 2.5], but we have to deal with some more general propagating forms, and our orientations are not the same[9].

Let (M°, τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$.

Let us fix an integer $k \geq 1$, a long knot ψ, and a family $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ).

Let $T_\alpha\colon C_2(\mathbb{R}^n) \to C_2(\mathbb{R}^n)$ denote the extension of the map $(x, y) \in C^0_2(\mathbb{R}^n) \mapsto (y, x) \in C_2(\mathbb{R}^n)$ to $C_2(\mathbb{R}^n)$. Similarly define $T_\beta\colon C_2(M^\circ) \to C_2(M^\circ)$.

Set $F' = (\alpha'_i, \beta'_i)_{1\leq i\leq 2k} = (\frac{1}{2}(\alpha_i - T^*_\alpha(\alpha_i)), \frac{1}{2}(\beta_i - T^*_\beta(\beta_i)))_{1\leq i\leq 2k}$. Since the forms ω_{α_i} and ω_{β_i} are antisymmetric for any $1 \leq i \leq 2k$, F' is again a family of

[9]The orientation of our configuration spaces is $w_k(\Gamma).\Omega_{Wat}(\Gamma)$ with the notations of [Wat07].

propagating forms of (M°, τ). For any $1 \leq i \leq 2k$, $T_\alpha^*(\alpha'_i) = -\alpha'_i$ and $T_\beta^*(\beta'_i) = -\beta'_i$.

Proposition 5.5.1. *For any $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, let (Γ^*, σ^*) denote the numbered BCR diagram obtained from (Γ, σ) by reversing all the edges of the cycle. Then,*

$$I^{F'}(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = (-1)^k I^{F'}(\Gamma, \sigma, \psi).$$

Proof. Since the vertices and their natures are the same for Γ and Γ^*, we have a canonical diffeomorphism $C_\Gamma(\psi) \cong C_{\Gamma^*}(\psi)$, but it may change the orientation.

It follows from the definition of the orientation of configuration spaces in Section 5.2.4 that the orientation $\Omega(\Gamma^*)$ can be obtained from $\Omega(\Gamma)$ as follows: first, exchange the coordinate forms $\mathrm{d}X_v^2$ and $\mathrm{d}X_v^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}X_v^{n+2}$ for any external vertex v ; next, for any external edge e of the cycle, exchange the forms Ω_{e_-} and Ω_{e_+}.

Set $r = 0$ if there is no internal edge in Γ. In this case, there are k external vertices and k external edges in the cycle, so $\Omega(\Gamma^*) = (-1)^{k+k}\Omega(\Gamma) = \Omega(\Gamma)$. Otherwise, any external edge of the cycle is contained in one maximal sequence of consecutive external edges of the cycle. If such a sequence has d edges, it has $d-1$ external vertices. Let us denote by $(d_1, \ldots, d_r)$ the lengths of the r maximal sequences of consecutive external edges of the cycle. Then, the previous analysis yields $\Omega(\Gamma^*) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{r}(d_i + (d_i - 1))}\Omega(\Gamma) = (-1)^r\Omega(\Gamma)$.

Let L denote the number of edges of the cycle of Γ. Since F' is such that for any $1 \leq i \leq 2k$, $T_\alpha^*(\alpha'_i) = -\alpha'_i$ and $T_\beta^*(\beta'_i) = -\beta'_i$, we have[10] $\omega^{F'}(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = (-1)^L\omega^{F'}(\Gamma, \sigma, \psi)$. Then, $I^{F'}(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = (-1)^{L+r}I^{F'}(\Gamma, \sigma, \psi)$.

It remains to check that $L + r \equiv k \mod 2$. It is direct when there is no internal edge.

Otherwise, let u (resp. b, resp. t) denote the number of univalent (resp. bivalent, resp. trivalent) vertices of Γ. By definition of the BCR diagrams, $u = t$, and $2k = u + b + t = b + 2t$.

Note that there is a bijection between maximal sequences of consecutive external edges of the cycle and bivalent vertices with an external outgoing edge. This bijection is defined by taking the source of the first edge of a sequence. Taking the head of the last edge of a sequence also gives a bijection between the maximal sequences of consecutive external edges of the cycle and the bivalent vertices with an internal outgoing edge. Then, $r = \frac{b}{2} = k - t$.

The cycle is composed of all the bivalent and trivalent vertices, and has as many vertices and edges. Then, $L = b + t = 2k - t$.

Eventually, $L + r = 3k - 2t \equiv k \mod 2$. This concludes the proof of Proposition 5.5.1. $\square$

[10] We consider $\omega^{F'}(\Gamma^*, \sigma^*, \psi)$ as a form on $C_\Gamma(\psi)$ via the canonical identification $C_\Gamma(\psi) \cong C_{\Gamma^*}(\psi)$.

Proposition 5.5.1 directly implies that $Z_k(\psi) = 0$ when k is odd.

5.6 Independence of the parallelization, invariance under ambient diffeomorphisms

In this section, we prove the second and third assertions of Theorem 5.2.10.

5.6.1 Homotopy classes of parallelizations of M°

Let M° be a fixed parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Let Z_k^τ denote the value of the invariant Z_k when computed with a family of propagating forms of (M°, τ).

We recall that two parallelizations τ and τ' are homotopic if there exists a smooth family $(\tau_t)_{0\leq t\leq 1}$ of parallelizations such that $\tau_0 = \tau$ and $\tau_1 = \tau'$, as in Definition 5.2.1.

Denote by $\mathrm{Par}(M^\circ)$ the set of homotopy classes of parallelizations of M°.

Lemma 5.6.1. *If τ and τ' are homotopic, then $Z_k^\tau = Z_k^{\tau'}$.*

Proof. Let $(\tau_t)_{0\leq t\leq 1}$ be a smooth homotopy of parallelizations. Assume without loss of generality that there exists $\varepsilon > 0$ such that $\tau_t = \tau_0$ for any $t \in [0, \varepsilon]$. Let (α_i, β_i) be a family of propagating forms of (M°, τ_0). For any $1 \leq i \leq 2k$, there exists a form ω_{β_i} such that $(\beta_i)_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_{\tau_0}^*(\omega_{\beta_i})$.

For any $1 \leq i \leq 2k$, we define a smooth family $(\beta_i^s)_{0\leq s\leq 1}$ of external propagating forms such that $(\beta_i^s)_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_{\tau_s}^*(\omega_{\beta_i})$ as follows.

Let $[-1, 0] \times UM^\circ$ be a collar of $UM^\circ = \partial_\Delta C_2(M^\circ)$ such that $\{0\} \times UM^\circ$ corresponds to $\partial_\Delta C_2(M^\circ)$. Let $N(\partial C_2(M^\circ))$ be a regular neighborhood of $\partial C_2(M^\circ)$ that contains $[-1, 0] \times UB(M)$. Extend G_{τ_0} to a smooth map $\overline{G_{\tau_0}}$ on $N(\partial C_2(M^\circ))$ such that for any $(t, x) \in [-1, 0] \times UB(M)$, $\overline{G_{\tau_0}}(t, x) = G_{\tau_0}(x)$. Assume that $(\beta_i)_{|N(\partial C_2(M^\circ))} = \overline{G_{\tau_0}}^*(\omega_{\beta_i})$. Since $(G_{\tau_s})_{|\partial UB(M)} = (G_{\tau_0})_{|\partial UB(M)}$ for any $s \in [0, 1]$, the map $p_s\colon (t, x) \in [-1, 0] \times UB(M) \mapsto G_{\tau_{(1+t)s}}(x) \in \mathbb{S}^{n+1}$ coincide with $\overline{G_{\tau_0}}$ on $([-1, 0] \times \partial UB(M)) \cup (\{-1\} \times UB(M))$. The forms $p_s{}^*(\omega_{\beta_i})$ and β_i coincide on $([-1, 0] \times \partial UB(M)) \cup (\{-1\} \times UB(M))$. This allows us to define a closed form β_i^s such that $(\beta_i^s)_{|[-1,0]\times UB(M)} = p_s{}^*(\omega_{\beta_i})$ and $(\beta_i^s)_{|C_2(M^\circ)\setminus([-1,0]\times UB(M))} = \beta_i$.

Then, $F_s = (\alpha_i, \beta_i^s)_{1\leq i\leq 2k}$ is a family of propagating forms of (M°, τ_s), and $Z_k^{\tau_s} = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} \int_{C_\Gamma(\psi)} \omega^{F_s}(\Gamma, \sigma, \psi)$. By construction, $\omega^{F_s}(\Gamma, \sigma, \psi)$ depends continuously on s, and then, $Z_k^{\tau_s}$ depends continuously on s. Since it takes only rational values, it is constant, and $Z_k^{\tau_0} = Z_k^{\tau_1}$. □

The following theorem will allow us to obtain the independence of Z_k of the parallelization in the next subsection. It is proved in Section 5.8.

Theorem 5.6.2. *Let M° be an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, and let $\mathbb{B} \subset B(M)$ be a standard $(n+2)$-ball. Let $[\tau]$ and $[\tau']$ be two homotopy classes of parallelizations of M° as defined in Definition 5.2.1.*

It is possible to choose representatives τ and τ' of the classes $[\tau]$ and $[\tau']$, such that τ and τ' coincide on $(M^\circ \setminus \mathbb{B}) \times \mathbb{R}^{n+2}$.

5.6.2 Proof of the independence of the parallelization

Let $[\tau_0]$ and $[\tau_1]$ be two homotopy classes of parallelizations of M°. Let $\mathbb{B}$ be a ball of $B(M)$ such that $\mathbb{B} \cap \psi(\mathbb{R}^n) = \emptyset$. Theorem 5.6.2 allows us to pick representatives τ_0 and τ_1 that coincide outside $\mathbb{B}$.

Fix a family $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ_0). The following lemma defines a family of propagating forms of (M°, τ_1).

Lemma 5.6.3. *There exists a family of n-forms $(\zeta_i^n)_{1 \leq i \leq 2k}$ on $C_2(M^\circ)$ such that:*

- *The family of forms $F' = (\alpha_i, \beta'_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ obtained by setting $\beta'_i = \beta_i + \mathrm{d}\zeta_i^n$ is a family of propagating forms of (M°, τ_1).*
- *For any index $1 \leq i \leq 2k$, the form $\zeta^n_{i\,|\partial C_2(M^\circ)}$ is supported on $U\mathbb{B} \subset UM^\circ \cong \partial_\Delta C_2(M^\circ)$ (with the notations of Notation 5.2.3).*

Proof. Fix the index $i \in \{1, \ldots, 2k\}$. First note that G_{τ_1} and G_{τ_0} coincide outside $U\mathbb{B}$. Then, the form $G^*_{\tau_1}(\omega_{\beta_1}) - G^*_{\tau_0}(\omega_{\beta_1})$ defines a class in $H^{n+1}(U\mathbb{B}, \partial U\mathbb{B}) = H^{n+1}(\mathbb{D}^{n+2} \times \mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^{n+1}) = H_{n+2}(\mathbb{D}^{n+2} \times \mathbb{S}^{n+1}) = 0$. Therefore, there exists an n-form $(\zeta_i^n)^0$ on $U\mathbb{B}$, which vanishes on $\partial U\mathbb{B}$, such that $(G_{\tau_1} - G_{\tau_0})^*(\omega_{\beta_1}) = \mathrm{d}(\zeta_i^n)^0$. It remains to extend this form $(\zeta_i^n)^0$. Since $(\zeta_i^n)^0$ is zero on the boundary of $U\mathbb{B}$, we can extend it by 0 to a form $(\zeta_i^n)^1$ on $\partial C_2(M^\circ)$. Then, pull this form $(\zeta_i^n)^1$ back on a collar N of $\partial C_2(M^\circ)$, and multiply it by a smooth function, which sends $\partial C_2(M^\circ)$ to 1 and the other component of ∂N to 0. Eventually, extend this last form to $C_2(M^\circ)$ by 0 outside N. This gives a n-form ζ_i^n as in the statement. □

Let F_j denote the family of propagating forms with internal forms $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ and external forms $(\beta'_1, \ldots, \beta'_j, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_{2k})$, so that $F_0 = F$ and $F_{2k} = F'$. For any $1 \leq j \leq 2k$, set $\Delta_j Z_k(\psi) = \left(Z_k^{F_j}(\psi) - Z_k^{F_{j-1}}(\psi)\right)$, so that $Z_k^{\tau_1}(\psi) - Z_k^{\tau_0}(\psi) = Z_k^{F'}(\psi) - Z_k^F(\psi) = \sum\limits_{1 \leq j \leq 2k} \Delta_j Z_k(\psi)$.

Let us prove that $\Delta_1 Z_k(\psi) = 0$. Since $j = 1$, with the notations of Section 5.3.2, Lemma 5.3.1 reads $\Delta_1 Z_k(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum\limits_{(\Gamma,\sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}}_k} \sum\limits_{S \in \mathcal{F}(\Gamma)} \delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$. Since the internal forms are the same for F_1 and F_2, the numbered faces such that $e_0 = \sigma^{-1}(1)$ is internal do not contribute. According to Lemma 5.3.2, the only possibly contributing codimension 1 numbered faces are:

- numbered infinite faces $(\partial_S C_\Gamma(\psi), \sigma)$, such that S contains at least one end of e_0, where e_0 is external,
- numbered principal faces $(\partial_S C_\Gamma(\psi), \sigma)$, such that S is composed of the ends of e_0, and such that e_0 is external with internal ends,
- all the numbered anomalous faces $(\partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi), \sigma)$ such that e_0 is external.

In these three cases, the map p_{e_0} maps the face to $\partial C_2(M^\circ)$. Infinite faces are sent to configurations with at least one of the two points at infinity. Anomalous and principal faces are sent to configurations where points of S coincide, but since there exists at least one internal vertex, these points are necessarily on the knot, which does not meet $\mathbb{B}$. Then, p_{e_0} maps the face outside the support of ζ_1, and the restriction of the form $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)$ to the face vanishes.

This proves that $\Delta_1 Z_k(\psi) = 0$. Similarly $\Delta_i Z_k(\psi) = 0$ for any $2 \leq i \leq 2k$. The independence of Z_k of the parallelization follows.

5.6.3 Invariance of Z_k under ambient diffeomorphisms

In this section, we prove the third assertion of Theorem 5.2.10.

Fix a knot ψ_0 inside a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ denoted by (M°, τ), and fix a family $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ) .

Let $\varphi \in \mathrm{Diffeo}(M^\circ)$ be a diffeomorphism that fixes B°_∞ pointwise, and let ψ_1 denote the knot $\varphi \circ \psi_0$. In this section, for any $i \in \{0, 1\}$ and for any edge e of a BCR diagram Γ, $p_{e,i}$ denotes the map $p_e^{\psi_i} \colon C_\Gamma(\psi_i) \to \mathbb{S}^{n(e)}$ of Definition 5.2.7.

With these notations, φ induces a diffeomorphism $\Phi\colon C_\Gamma(\psi_0) \to C_\Gamma(\psi_1)$, and a diffeomorphism $\Phi_\beta \colon C_2(M^\circ) \to C_2(M^\circ)$. These diffeomorphisms extend the maps given by the formula $c \mapsto \varphi\circ c$ on the interiors of these configuration spaces. Then,

$$\begin{aligned}
Z^\tau_k(\psi_1) &= \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \int_{C_\Gamma(\psi_1)} \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1) \\
&= \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \int_{C_\Gamma(\psi_0)} \Phi^*(\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1)) \\
&= \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \int_{C_\Gamma(\psi_0)} \bigwedge_{e\in E(\Gamma)} \Phi^*(\omega^F_e(\Gamma, \sigma, \psi_1)) \\
&= \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \int_{C_\Gamma(\psi_0)} \bigwedge_{e\in E_i(\Gamma)} \Phi^*(p^*_{e,1}(\alpha_{\sigma(e)})) \wedge \bigwedge_{e\in E_e(\Gamma)} \Phi^*(p^*_{e,1}(\beta_{\sigma(e)})).
\end{aligned}$$

Note that, by construction, if $e \in E_i(\Gamma)$, we have $p_{e,1}\circ\Phi = p_{e,0}$, and if $e \in E_e(\Gamma)$, we have $p_{e,1}\circ\Phi = \Phi_\beta\circ p_{e,0}$. Define the family $F' = (\alpha_i, \Phi^*_\beta(\beta_i))_{1\leq i\leq 2k}$ of propagating forms of (M°, τ'), where τ' is the parallelization defined for any x by the formula $\tau'_x = T_{\varphi(x)}\varphi^{-1} \circ \tau_{\varphi(x)}$. The previous equation becomes

$$Z_k^{\tau}(\psi_1) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\mathcal{G}_k} \int_{C_\Gamma(\psi_0)} \bigwedge_{e\in E(\Gamma)} \omega_e^{F'}(\Gamma,\sigma,\psi_0) = Z_k^{\tau'}(\psi_0).$$

Since Z_k does not depend on the parallelization, this reads $Z_k(\varphi\circ\psi_0) = Z_k(\psi_0)$. This proves the third assertion of Theorem 5.2.10.

5.7 Proof of Lemma 5.3.2

In this section, we analyse the variations of the integral $I^F(\Gamma,\sigma,\psi)$ under a change of the forms (α_1,β_1). These variations can be expressed as the sum of the integrals $\delta_S I(\Gamma,\sigma,\psi)$ over the numbered codimension 1 faces $(\partial_S C_\Gamma(\psi),\sigma)$ of $C_\Gamma(\psi)$ described in Section 5.3.2. Here, we study all these integrals in order to obtain the face cancellations precisely described in Lemma 5.3.2.

Recall that for any edge e, $n(e) = n-1$ if e is internal, and $n(e) = n+1$ if e is external. In all this section, for any edge e that has at least one end in S, let $G_{e,S}\colon \partial_S C_\Gamma(\psi) \to \mathbb{S}^{n(e)}$ be the map $G\circ(p_e)_{|\partial_S C_\Gamma(\psi)}$ if e is internal, and the map $G_{\tau_{\sigma(e)}}\circ(p_e)_{|\partial_S C_\Gamma(\psi)}$ if e is external.

5.7.1 Infinite faces

In this section, we prove that the infinite face contributions vanish. Let $S^* = S\sqcup\{*\}$ represent an infinite face $\partial_{S^*}C_\Gamma(\psi)$. As in Section 5.3.2, $V^*(\Gamma) = V(\Gamma)\sqcup\{*\}$. When $S^* \subsetneq V^*(\Gamma)$, our proof is inspired from the proof of [Ros02, Lemma 6.5.9].

For infinite faces, the open face $\partial_{S^*}C_\Gamma(\psi)$ is diffeomorphic to the product $C^0_{\Gamma_{|V(\Gamma)\setminus S}} \times C_{S,\infty}$ where:

- The manifold $C^0_{\Gamma_{|V(\Gamma)\setminus S}}$ is the set of configurations $c\colon V(\Gamma)\setminus S \hookrightarrow M^\circ$ such that $c(V_i(\Gamma)\setminus(S\cap V_i(\Gamma))) \subset \psi(\mathbb{R}^n)$.
- The manifold $C_{S,\infty}$ is the quotient set of maps $u_S\colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}\setminus\{0\}$ such that $u_S(S\cap V_i(\Gamma)) \subset \{0\}^2\times\mathbb{R}^n$ by dilations.

Denote by $(c,[u_S])$ a generic element of the infinite face $\partial_{S^*}C_\Gamma(\psi)$. Such a configuration can be seen as the limit of the map

$$c_\lambda\colon v\in V(\Gamma) \mapsto \begin{cases} c(v) & \text{if } v\notin S, \\ \frac{\lambda u_S(v)}{||\lambda u_S(v)||^2} & \text{if } v\in S, \end{cases} \in M^\circ$$

when λ approaches zero (c_λ is well-defined for λ sufficiently close to 0).

First case: $S^* = V^*(\Gamma)$ and $(\alpha_1' - \alpha_1, \beta_1' - \beta_1)$ has the sphere factorization property. In this case, $\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)$ is diffeomorphic to $C_{V(\Gamma),\infty}$. The following lemma directly implies that $\delta_{V^*(\Gamma)} I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.

Lemma 5.7.1. *The form $(\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi))_{|\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)}$ is zero.*

Proof. Define the equivalence relation on $C_{V(\Gamma),\infty}$ such that $[u_{V(\Gamma)}]$ and $[u'_{V(\Gamma)}]$ are equivalent if and only if there exist representatives $u_{V(\Gamma)}$ and $u'_{V(\Gamma)}$, and a vector $x \in \{0\}^2 \times \mathbb{R}^n$, such that, for any $v \in V(\Gamma)$,

$$\frac{u'_{V(\Gamma)}(v)}{||u'_{V(\Gamma)}(v)||^2} = \frac{u_{V(\Gamma)}(v)}{||u_{V(\Gamma)}(v)||^2} + x.$$

Let $\varphi \colon \partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi) = C_{V(\Gamma),\infty} \to Q$ denote the induced quotient map. Then, for any $e \in E(\Gamma)$, the map $G_{e,V^*(\Gamma)}$ factors through φ. Since $(\alpha_1' - \alpha_1, \beta_1' - \beta_1)$ has the sphere factorization property, $(\tilde{\omega}_{e,\sigma})_{|\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)}$ is the pullback of a form on the sphere by the map $G_{e,V^*(\Gamma)}$, for any edge e, including $\sigma^{-1}(1)$. Then, $(\tilde{\omega}_{e,\sigma})_{|\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)} = \varphi^*(\theta_{e,\sigma})$ where $\theta_{e,\sigma}$ is a form on Q, and $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)_{|\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)}$ therefore reads $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)_{|\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)} = \varphi^*(\theta_\sigma)$ where $\theta_\sigma = \bigwedge\limits_{e \in E(\Gamma)} \theta_{e,\sigma}$. Since $\deg(\theta_\sigma) = \deg(\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)) = \dim(\partial C_\Gamma(\psi)) > \dim(Q)$, we have $\theta_\sigma = 0$, so $(\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi))_{|\partial_{V^*(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)} = 0$. □

Second case: $S^* \subsetneq V^*(\Gamma)$ and either $\sigma^{-1}(1)$ has no end in S, or $\sigma^{-1}(1)$ has at least one end in S and $(\alpha_1' - \alpha_1, \beta_1' - \beta_1)$ has the sphere factorization property. In this case, let $E_i^S(\Gamma)$ (resp. $E_e^S(\Gamma)$) denote the set of internal (resp. external) edges with at least one end in S, and set $E^S(\Gamma) = E_i^S(\Gamma) \sqcup E_e^S(\Gamma)$.

Lemma 5.7.2. *For any $S^* = S \sqcup \{*\} \subsetneq V^*(\Gamma)$,*

$$n.\mathrm{Card}(S \cap V_i(\Gamma)) + (n+2).\mathrm{Card}(S \cap V_e(\Gamma)) < (n-1).\mathrm{Card}(E_i^S(\Gamma)) + (n+1).\mathrm{Card}(E_e^S(\Gamma)).$$

Proof. Split any edge e of Γ in two halves e_- (the tail) and e_+ (the head), and let $v(e_\pm)$ denote the vertex adjacent to the half-edge $e_\pm$, as in the proof of Lemma 5.2.9.

Recall the definition of the integers $d(e_\pm)$ from the proof of Lemma 5.2.9:

- If e is external, $d(e_+) = 1$ and $d(e_-) = n$ as in $\underset{e_-}{\overset{n}{\dashrightarrow}} \vdots \underset{e_+}{\overset{1}{\dashrightarrow}}$
- If e is internal, $d(e_+) = 0$ and $d(e_-) = n-1$ as in $\underset{e_-}{\overset{n-1}{\longrightarrow}} \vdots \underset{e_+}{\overset{0}{\longrightarrow}}$

As in the proof of Lemma 5.2.9 and Figure 5.6, these integers satisfy:

- for any vertex $v \in V(\Gamma)$, $\sum\limits_{e_\pm, v(e_\pm)=v} d(e_\pm) = \begin{cases} n & \text{if } v \text{ is internal,} \\ n+2 & \text{if } v \text{ is external.} \end{cases}$
- for any edge $e \in E(\Gamma)$, $d(e_+) + d(e_-) = n(e)$.

Since $S \subsetneq V^*(\Gamma)$, one of the following behaviors happens:

- S contains only univalent vertices, and there exists an external edge going from S to $V(\Gamma) \setminus S$.
- S contains at least one vertex of the cycle of Γ, and there exists an edge going from $V(\Gamma) \setminus S$ to S.

In both cases, there exists a half-edge $e_\pm$ such that $v(e_\pm) \in S$, $v(e_\mp) \notin S$, and $d(e_\mp) \neq 0$ ($n-1$ is indeed positive since $n \neq 1$). Therefore:

$$\begin{aligned} n.\mathrm{Card}(S \cap V_i(\Gamma)) \quad &+ \quad (n+2).\mathrm{Card}(S \cap V_e(\Gamma)) \\ &= \sum_{e_\pm, v(e_\pm) \in S} d(e_\pm) \\ &< \sum_{e \in E^S(\Gamma)} (d(e_+) + d(e_-)) \\ &= (n-1).\mathrm{Card}(E_i^S(\Gamma)) + (n+1).\mathrm{Card}(E_e^S(\Gamma)) \quad \square \end{aligned}$$

Since the edges of $E^S(\Gamma)$ have at least one vertex at infinity, their directions do not depend on the position of the points that are not at infinity, and we have the following.

Lemma 5.7.3. *For any edge $e \in E^S(\Gamma)$, the map G_{e,S^*} factors through $\varphi\colon \partial_S C_\Gamma(\psi) \to C_{S,\infty}$.*

From this lemma, and since either $(\alpha_1' - \alpha_1, \beta_1' - \beta_1)$ has the sphere factorization property, or $\sigma^{-1}(1) \notin E^S(\Gamma)$, we can write $\tilde{\omega}_{e,\sigma} = \varphi^*(\theta_{e,\sigma})$ for any $e \in E^S(\Gamma)$, where

$$\deg(\theta_{e,\sigma}) = \begin{cases} n(e) & \text{if } \sigma(e) \neq 1, \\ n(e) - 1 & \text{if } \sigma(e) = 1. \end{cases}$$

Then, $\deg\left(\bigwedge\limits_{e \in E^S(\Gamma)} \theta_{e,\sigma}\right) \geq \left(\sum\limits_{e \in E^S(\Gamma)} n(e)\right) - 1$. Since $\dim(C_{S,\infty}) = n.\mathrm{Card}(S \cap V_i(\Gamma)) + (n+2).\mathrm{Card}(S \cap V_e(\Gamma)) - 1$, Lemma 5.7.2 implies that $\left(\sum\limits_{e \in E^S(\Gamma)} n(e)\right) - 1 > \dim(C_{S,\infty})$, and $\deg\left(\bigwedge\limits_{e \in E^S(\Gamma)} \theta_{e,\sigma}\right) > \dim(C_{S,\infty})$. Therefore, $\bigwedge\limits_{e \in E^S(\Gamma)} \theta_{e,\sigma}$ and $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)_{|\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi)}$ are zero. Then, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$, as expected.

5.7.2 Finite faces

In this section, we study the contribution of the anomalous, hidden and principal faces. Our analysis resembles the analysis in [Wat07, Appendix A], but we have to take care of the fact that the propagating forms are not the same on each edge, and that they may not be pullbacks of forms on the spheres.

5.7.2.1 Description and restriction to the connected case

Let S be a subset of $V(\Gamma)$ of cardinality at least two, and let $\delta_S\Gamma$ be the graph obtained from Γ by collapsing all the vertices in S to a unique vertex $*_S$, internal if at least one of the vertices of S is, external otherwise. Let $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$ denote the space of linear injections of $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n+2}$. Define the following spaces:

- The space $C^0_{\delta_S\Gamma}$ is composed of the injective maps $c\colon V(\delta_S\Gamma) \hookrightarrow M^\circ$ such that there exists $c_i\colon V_i(\delta_S\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ such that $c_{|V_i(\delta_S\Gamma)} = \psi \circ c_i$.

- If S contains internal vertices, the space $\widehat{C_S}$ is the quotient of the set $\widehat{C_S}^0$ of pairs (u, ι) where ι is a linear injection of $\mathbb{R}^n$ inside $\mathbb{R}^{n+2}$ and u is an injective map $u\colon S \to \mathbb{R}^{n+2}$ such that $u(S \cap V_i(\Gamma)) \subset \iota(\mathbb{R}^n)$, by dilations and by translations of u along $\iota(\mathbb{R}^n)$.

  If S contains only external vertices, $\widehat{C_S}$ is the quotient of the set of maps $S \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ by dilations and translations along $\mathbb{R}^{n+2}$.

Then:

- If S contains an internal vertex,
$$\partial_S C_\Gamma(\psi) = C^0_{\delta_S\Gamma} \times_{\mathcal{I}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+2})} \widehat{C_S} = \{(c, [u, \iota]) \in C^0_{\delta_S\Gamma} \times \widehat{C_S} \mid \iota = \tau^{-1}_{c(*_S)} \circ T\psi_{c_i(*_S)}\}.$$

- If S contains only external vertices, $\partial_S C_\Gamma(\psi) = C^0_{\delta_S\Gamma} \times \widehat{C_S}$.

Keep the notation $\partial_S C_\Gamma(\psi) = C^0_{\delta_S\Gamma} \times_{\mathcal{I}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+2})} \widehat{C_S}$ in both cases. In the following, an element of $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ will be represented by $(c, [u])$ since ι can be deduced from c when $S \cap V_i(\Gamma) \neq \emptyset$.

Lemma 5.7.4. *Let Γ_S be the graph defined in Lemma 5.3.2. If Γ_S is not connected, then $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.*

Proof. Suppose that Γ_S is not connected. Then, there exists a partition $S = S_1 \sqcup S_2$ such that no edge connects S_1 and S_2, and where S_1 and S_2 are non-empty sets.

Suppose that S contains at least one internal vertex, and set $\iota(c) = \tau^{-1}_{c(*_S)} \circ T\psi_{c_i(*_S)}$. Define the equivalence relation on $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ such that $(c, [u])$ and $(c', [u'])$

are equivalent if and only if $c = c'$ and there exist representatives u and u' and a vector $x \in \mathbb{R}^n$ such that, for any $v \in S$,

$$u'(v) = \begin{cases} u(v) + \iota(c)(x) & \text{if } v \in S_1, \\ u(v) & \text{if } v \in S_2. \end{cases}$$

Let $\varphi\colon \partial_S C_\Gamma(\psi) \to Q$ denote the quotient map. With these notations, for any edge e, the map p_e factors through φ. We conclude as in the proof of Lemma 5.7.1, since $\deg(\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)) > \dim(Q)$.

If S contains only external vertices, we proceed similarly with the equivalence relation such that $(c, [u])$ and $(c', [u'])$ are equivalent if and only if $c = c'$ and there exist representatives u and u' and a vector $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ such that, for any $v \in S$,

$$u'(v) = \begin{cases} u(v) + x & \text{if } v \in S_1, \\ u(v) & \text{if } v \in S_2. \end{cases} \qquad \square$$

5.7.2.2 Anomalous face

In this section, according to the hypotheses of Lemma 5.3.2, assume that $(\alpha'_1 - \alpha_1, \beta'_1 - \beta_1)$ has the sphere factorization property.

Lemma 5.7.5. *There exists an orientation-reversing diffeomorphism of the anomalous face* $T\colon \partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi) \to \partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)$*, such that, for any edge* $e \in E(\Gamma)$*, we have* $G_{e,S} \circ T = (-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{n(e)}}) \circ G_{e,S}$*, where* $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{n(e)}}$ *is the antipodal map.*

Proof. Here, since $\delta_{V(\Gamma)}\Gamma$ is a graph with only one internal vertex $*_{V(\Gamma)}$, the face is diffeomorphic to $\psi(\mathbb{R}^n) \times_{\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})} \widehat{C_{V(\Gamma)}}$. Choose an internal vertex v of Γ. For $[u] \in \widehat{C_{V(\Gamma)}}$, define $[u'] \in \widehat{C_{V(\Gamma)}}$ as the class of the map u' such that, for any vertex w, $u'(w) = 2u(v) - u(w)$. Then the map $T\colon (c, [u]) \in \partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi) \mapsto (c, [u']) \in \partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)$ is a diffeomorphism. The sign of its Jacobian determinant is $(-1)^{(2k-1)(n+2)} = -1$, since n is odd. It is easy to check that $G_{e,S} \circ T = (-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{n(e)}}) \circ G_{e,S}$ for any edge e. $\square$

Since $(\alpha'_1 - \alpha_1, \beta'_1 - \beta_1)$ has the sphere factorization property, $(\tilde{\omega}_{e,\sigma})_{|\partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)}$ reads ${G_{e,S}}^*(\theta_e)$, where, for any edge e, θ_e is an antisymmetric form on the sphere. Then, Lemma 5.7.5 yields $T^*((\tilde{\omega}_{e,\sigma})_{|\partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)}) = {G_{e,S}}^*((-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{n(e)}})^*(\theta_e)) = -(\tilde{\omega}_{e,\sigma})_{|\partial_{V(\Gamma)} C_\Gamma(\psi)}$.

Then,

$$\begin{aligned}
\delta_{V(\Gamma)}I(\Gamma,\sigma,\psi) &= \int_{\partial_{V(\Gamma)}C_\Gamma(\psi)} \tilde{\omega}(\Gamma,\sigma,\psi)_{|\partial_{V(\Gamma)}C_\Gamma(\psi)} \\
&= -\int_{\partial_{V(\Gamma)}C_\Gamma(\psi)} T^*\left(\tilde{\omega}(\Gamma,\sigma,\psi)_{|\partial_{V(\Gamma)}C_\Gamma(\psi)}\right) \\
&= -\int_{\partial_{V(\Gamma)}C_\Gamma(\psi)} (-1)^{\mathrm{Card}(E(\Gamma))}\tilde{\omega}(\Gamma,\sigma,\psi)_{|\partial_{V(\Gamma)}C_\Gamma(\psi)} \\
&= -\delta_{V(\Gamma)}I(\Gamma,\sigma,\psi) \quad \text{since } \mathrm{Card}(E(\Gamma)) = 2k.
\end{aligned}$$

Eventually, this implies that $\delta_{V(\Gamma)}I(\Gamma,\sigma,\psi) = 0$.

5.7.2.3 Hidden faces

Lemma 5.7.6. *Let $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ be the set of hidden faces such that at least one of the following properties hold:*

- *Γ_S is non-connected.*
- *Γ_S has at least three vertices, Γ_S has a univalent vertex v_0, and, if this vertex is internal, then its only adjacent edge e_0 in Γ_S is internal (as in Figure 5.7).*

For any face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ in $\mathcal{H}_1(\Gamma)$, $\delta_S I(\Gamma,\sigma,\psi) = 0$.

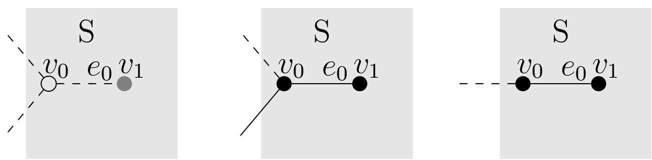


Figure 5.7 – The second property in the definition of $\mathcal{H}_1(\Gamma)$

Proof. If Γ_S is not connected, this is Lemma 5.7.4.

If Γ_S is connected, we have a univalent vertex v_0 as in Figure 5.7. There is a natural map $\partial_S C_\Gamma(\psi) \to C^0_{\delta_S\Gamma} \times_{\mathcal{I}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+2})} \times \widehat{C_{S\setminus\{v_0\}}}$. Let $\varphi\colon \partial_S C_\Gamma(\psi) \to Q = (C^0_{\delta_S\Gamma} \times_{\mathcal{I}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+2})} \times \widehat{C_{S\setminus\{v_0\}}}) \times \mathbb{S}^{n(e_0)}$ denote the product of this map and the Gauss map $G_{e_0,S}$. As in the similar lemmas of the previous subsection, for any edge whose ends are both in S, $G_{e,S}$ factors through φ, and for any other edge, p_e factors through φ. Then, all the forms $\tilde{\omega}_{e,\sigma}$ are pullbacks of forms on Q by φ, and $\tilde{\omega}(\Gamma,\sigma,\psi)$ also is. The hypotheses of the lemma imply that $\dim(Q) < \dim(\partial_S C_\Gamma(\psi))$, so $\delta_S I(\Gamma,\sigma,\psi) = 0$. $\square$

Lemma 5.7.7. *Let $\mathcal{H}_2^a(\Gamma)$ denote the set of hidden faces that are not in $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ and such that Γ_S contains a bivalent vertex v, which is trivalent in Γ, and which has one incoming and one outgoing edge in Γ_S, which are both internal if v is internal.*

For any face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ in $\mathcal{H}_2^a(\Gamma)$, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma \circ \rho, \psi)$, where ρ denotes the transposition of e and f.

Figure 5.8 – Hypotheses of Lemma 5.7.7.

Proof. Let e and f denote the incoming and the outgoing edge of v in Γ_S, and let a and b denote the other ends of e and f, as in Figure 5.8.[11]

Let T be the orientation-reversing diffeomorphism of $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ defined as follows: if $(c, [u]) \in \partial_S C_\Gamma(\psi)$, let $u' \colon S \to \mathbb{R}^{n+2}$ be the map such that, for any $w \in S$,

$$u'(w) = \begin{cases} u(w) & \text{if } w \neq v, \\ u(b) + u(a) - u(v) & \text{if } w = v, \end{cases}$$

and set $T(c, [u]) = (c, [u'])$.

For any $g \in E(\Gamma)$, $p_g \circ T = p_{\rho(g)}$, so that

$$T^*((\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi))_{|\partial_S C_\Gamma(\psi)}) = (\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma \circ \rho, \psi))_{|\partial_S C_\Gamma(\psi)},$$

and thus $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma \circ \rho, \psi)$. □

Lemma 5.7.8. *Let $\mathcal{H}_2^b(\Gamma)$ be the set of hidden faces that are neither in $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ nor in $\mathcal{H}_2^a(\Gamma)$. For any face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ in $\mathcal{H}_2^b(\Gamma)$, we have the following properties :*

- *If S contains the head of an external edge, then it contains its tail.*
- *If S contains a univalent vertex, then it contains its only adjacent vertex.*

In particular, S necessarily contains at least one vertex of the cycle, but cannot contain all of them, since it would imply $S = V(\Gamma)$.

Proof. Let $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ be a face in $\mathcal{H}_2^b(\Gamma)$. The second point directly follows from the connectedness of Γ_S. Let us prove the first point. Let $e = (v, w)$ be an external edge with w in S.

[11]Note that we may have $a = b$.

- If e is a leg, we have three possible cases:
  - If the two neighbors of w in the cycle are in S, then v is in S. Indeed, otherwise S would contain a piece as in Figure 5.8.
  - If S contains one of the neighbors of w in the cycle, then $v \in S$. Indeed, otherwise S would contain a piece such as in the two first pieces of Figure 5.7.
  - If none of the neighbors of w in the cycle are in S, then Γ_S is not connected, which is impossible.
- Otherwise, e is an external edge of the cycle, and we have two possible cases:
  - If w is bivalent, then it has two neighbors v and w'.
    * If $w' \in S$, then $v \in S$: otherwise, we would have a piece as the third one of Figure 5.7.
    * If $w' \notin S$, then $v \in S$ because of the connectedness of Γ_S.
  - Otherwise w is trivalent, and external.
    * If its two other neighbors than v are in S, v is in S: otherwise, we would have a piece as the first one of Figure 5.8.
    * If S contains one of these two neighbors, v is in S: otherwise, we would have a piece as the first one of Figure 5.7.
    * Eventually, if none of these two neighbors are in S, v is in S because of the connectedness of Γ_S. □

Lemma 5.7.9. *Suppose that $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ is a face of $\mathcal{H}_2^b(\Gamma)$ and that S contains at least one external vertex.*

Then, there exists a transposition ρ of two edges such that $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma \circ \rho, \psi)$.

Proof. Choose an external vertex of S and follow the cycle backwards until getting out of S. Let d be the last met vertex in S. It follows from the previous lemma that d is an internal vertex, with an incoming internal edge coming from $V(\Gamma) \setminus S$. From d, move forward along the cycle, and let v_0 be the first seen external vertex. There are two incoming edges in v_0, one coming from a univalent vertex b, denoted by f, and one coming from a bivalent vertex a, denoted by e (we may have $a = d$). Let S_0 be the set of vertices of the cycle between d and a, with their univalent adjacent vertices. The obtained situation is like in Figure 5.9.

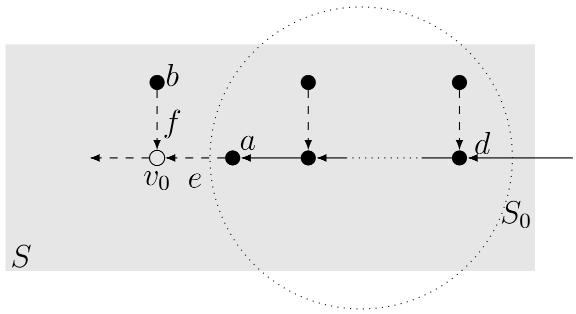


Figure 5.9 – Notations for the proof of Lemma 5.7.9.

Then, if $(c, [u]) \in \partial_S C_\Gamma(\psi)$, let u' denote the map such that, for any $w \in S$,

$$u'(w) = \begin{cases} u(a) & \text{if } w = b, \\ u(w) + u(b) - u(a) & \text{if } w \in S_0, \\ u(w) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and define an orientation-reversing diffeomorphism $T\colon \partial_S C_\Gamma(\psi) \to \partial_S C_\Gamma(\psi)$ by the formula $T(c, [u]) = (c, [u'])$. Thus, if ρ denotes the transposition of e and f, we have $p_g \circ T = p_{\rho(g)}$ for any g, and we conclude as in Lemma 5.7.7. $\square$

Lemma 5.7.10. *Suppose that the face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ is in $\mathcal{H}_2^b(\Gamma)$, and that Γ_S contains no external vertex. Then, it contains at least one of the following pieces:*

- *Two non adjacent external edges with their sources a and b univalent in Γ_S (not necessarily in Γ).*
- *A sequence of one external, one internal and one external edge, as in the second part of Figure 5.10.*
- *A trivalent internal vertex with all its neighbors.*

In all of these three cases, we have a transposition of two edges ρ such that $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma \circ \rho, \psi)$.

Proof. Figure 5.10 describes the three possible cases of the lemma, and we use its notations.

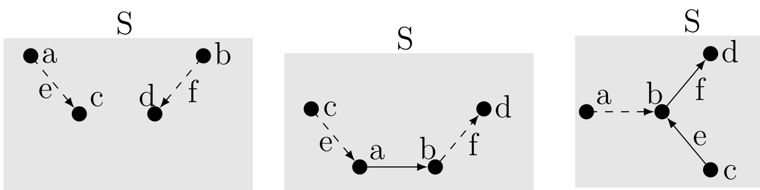


Figure 5.10 – The three behaviors of Lemma 5.7.10

Let ρ be the transposition swapping e and f. The involution T is defined by $T(c,[u]) = (c,[u'])$ where, for any vertex $w \in S$:

- In the first case,

$$u'(w) = \begin{cases} u(c) + u(b) - u(d) & \text{if } w = a, \\ u(d) + u(a) - u(c) & \text{if } w = b, \\ u(w) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- In the second case,

$$u'(w) = \begin{cases} u(c) + u(d) - u(b) & \text{if } w = a, \\ u(c) + u(d) - u(a) & \text{if } w = b, \\ u(w) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- In the third case,

$$u'(w) = \begin{cases} u(c) + u(d) + u(a) - 2u(b) & \text{if } w = a, \\ u(c) + u(d) - u(b) & \text{if } w = b, \\ u(w) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

As in the previous proofs, T reverses the orientation, and $p_g \circ T = p_{\rho(g)}$ for any edge g of Γ_S. $\square$

For a given Γ, set $\mathcal{H}_2(\Gamma) = \mathcal{H}_2^a(\Gamma) \cup \mathcal{H}_2^b(\Gamma)$. For any $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ in $\mathcal{H}_2(\Gamma)$, define the involution $\sigma \mapsto \sigma^*$ of Lemma 5.3.2 as follows: put a total order on non-ordered pairs of $\{1, \ldots, 2k\}$. If there is a v as in Lemma 5.7.7, choose the one minimizing $\{\sigma(e), \sigma(f)\}$, and set $\sigma^* = \sigma \circ \rho$ as in the lemma. Otherwise, if there is an external vertex in S, choose one such that the outgoing edge is of minimal σ, and proceed as in Lemma 5.7.9, setting $\sigma^* = \sigma \circ \rho$. Otherwise, if there are two edges e and f as in the first case of Lemma 5.7.10, choose the pair that minimizes $\{\sigma(e), \sigma(f)\}$. If not, and if there is a piece as in the second case, choose the one with minimal $\{\sigma(e), \sigma(f)\}$, and otherwise, there is a piece as in the third case: take the one of minimal $\{\sigma(e), \sigma(f)\}$. In these last three cases, set $\sigma^* = \sigma \circ \rho$ where ρ is the transposition of e and f.

5.7.2.4 Principal faces

It only remains to study the principal faces, which are the faces such that the ends of an edge e collide, and where this edge is the only edge between its two ends. Then, $\partial_e C_\Gamma(\psi) \cong C^0_{\delta_e \Gamma} \times \mathbb{S}^{m(e)}$, where

$$m(e) = \begin{cases} n-1 & \text{if the ends of } e \text{ are both internal,} \\ n+1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Choose this diffeomorphism in such a way that the Gauss map reads as the second projection map pr_2 in the product, and orient $C^0_{\delta_e\Gamma}$ in such a way that this diffeomorphism preserves the orientation.

Lemma 5.7.11. *If $\sigma(e) = 1$, and if e is either an internal edge or an external edge with at least one external end, then $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.*

Proof. For any edge $f \neq e$, the map p_f factors through $\mathrm{pr}_1 \colon \partial_e C_\Gamma(\psi) \to C^0_{\delta_e\Gamma}$. Then $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)_{|\partial_e C_\Gamma(\psi)} = \tilde{\omega}_{e,\sigma} \wedge \bigwedge\limits_{f\in E(\Gamma), f\neq e} \mathrm{pr}_1^*(\theta_{f,\sigma})$, where $\theta_{f,\sigma}$ are forms on $C^0_{\delta_e\Gamma}$.

But we have

$$\deg\left(\bigwedge_{f\in E(\Gamma), f\neq e} \theta_{f,\sigma}\right) = \dim(\partial_S C_\Gamma(\psi)) - (n(e) - 1) = \dim(C^0_{\delta_e\Gamma}) + 1,$$

since $m(e) = n(e)$ under the hypotheses of the lemma.

Then, $\deg\left(\bigwedge\limits_{f\in E(\Gamma), f\neq e} \theta_{f,\sigma}\right) > \dim(C^0_{\delta_e\Gamma})$, and $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$. □

Lemmas 5.7.12 to 5.7.16 are proved after the statement of Lemma 5.7.16.

Lemma 5.7.12. *Suppose that Γ looks as in Figure 5.11 around e.*

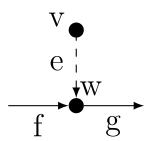


Figure 5.11

Let Γ^* denote the BCR diagram where this part of Γ is replaced as in Figure 5.12.

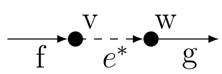


Figure 5.12

If $(\alpha'_1 - \alpha_1, \beta'_1 - \beta_1)$ has the sphere factorization property, or if $\sigma(e) \neq 1$, then $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi)$, where σ^* is naturally induced by σ.

In all the remaining cases, $\sigma(e) \neq 1$, since the numbered faces with $\sigma(e) = 1$ are all studied by Lemmas 5.7.11 and 5.7.12.

Lemma 5.7.13. *Suppose that Γ looks as in Figure 5.13 around e.*

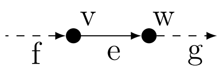


Figure 5.13

Let Γ^* denote the BCR diagram where this part of Γ is replaced as in Figure 5.14.

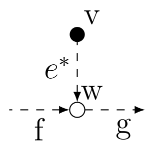


Figure 5.14

If $\sigma(e) \neq 1$, then $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi)$, where σ^* is naturally induced by σ.

Lemma 5.7.14. *Suppose that Γ looks as in Figure 5.15 around e.*

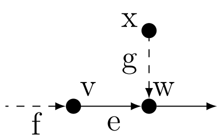


Figure 5.15

Let Γ^* denote the BCR diagram where this part of Γ is replaced as in Figure 5.16.

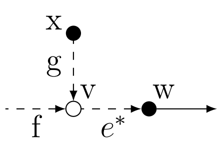


Figure 5.16

If $\sigma(e) \neq 1$, then $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi)$, where σ^* is naturally induced by σ.

Lemma 5.7.15. *Suppose that Γ looks as in Figure 5.17 around e.*

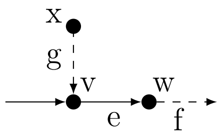


Figure 5.17

Let Γ^* denote the BCR diagram where this part of Γ is replaced as in Figure 5.18.

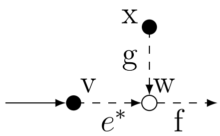


Figure 5.18

If $\sigma(e) \neq 1$, then $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi)$, where σ^* is naturally induced by σ.

Lemma 5.7.16. *Suppose that Γ looks as in Figure 5.19 around e.*

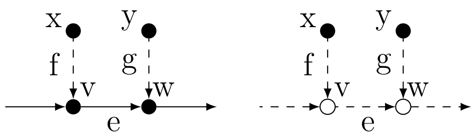


Figure 5.19

If $\sigma(e) \neq 1$, then $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_e I(\Gamma, \sigma \circ \rho, \psi)$, where ρ is the transposition of f and g.

Proof. Let us prove Lemma 5.7.13, and explain why it is possible to deal with $\sigma(e) = 1$ in Lemma 5.7.12. Lemmas 5.7.14 and 5.7.15 are proved similarly. Lemma 5.7.16 is proved as Lemma 5.7.7 (for example), using the orientation-reversing diffeomorphism that exchanges x and y.

In Lemma 5.7.13, we have $\partial_e C_\Gamma(\psi) = C^0_{\delta_e\Gamma} \times \mathbb{S}^{n-1}$ and $\partial_{e^*} C_{\Gamma^*}(\psi) = -C^0_{\delta_e\Gamma} \times \mathbb{S}^{n+1}$ since the graphs $\delta_e\Gamma$ and $\delta_{e^*}\Gamma^*$ are identical, and one can check by computation that the orientations are different, as in the second row of Figure 5.20. For any edge $h \neq e$ of Γ or Γ^* the maps $p_h \colon \partial_e C_\Gamma(\psi) \to C_e$ and $p^*_h \colon \partial_{e^*} C_{\Gamma^*}(\psi) \to C_e$ factor through the maps $\mathrm{pr}_1 \colon \partial_e C_\Gamma(\psi) \to C^0_{\delta_e\Gamma}$ and $\mathrm{pr}_{1,*} \colon \partial_{e^*} C_{\Gamma^*}(\psi) \to C^0_{\delta_e\Gamma}$. The maps $G \circ p_e$ and $G_{\tau_{\sigma(e)}} \circ p_{e^*}$ are exactly the maps $\mathrm{pr}_2 \colon \partial_e C_\Gamma(\psi) \to \mathbb{S}^{n-1}$ and $\mathrm{pr}_{2,*} \colon \partial_{e^*} C_{\Gamma^*}(\psi) \to \mathbb{S}^{n+1}$. Then, one can write $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi) = \mathrm{pr}^*_1(\lambda) \wedge \mathrm{pr}^*_2(\omega_{\alpha_{\sigma(e)}})$

and $\tilde{\omega}(\Gamma^*,\sigma^*,\psi) = \mathrm{pr}_{1,*}^*(\lambda) \wedge \mathrm{pr}_{2,*}^*(\omega_{\beta_{\sigma(e)}})$ for some form λ on $C^0_{\delta_e\Gamma}$. This implies that

$$\delta_e I(\Gamma,\sigma,\psi) = \int_{C^0_{\delta_e\Gamma}} \left(\lambda \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_{\alpha_{\sigma(e)}}\right) = \int_{C^0_{\delta_e\Gamma}} \lambda = \int_{C^0_{\delta_e\Gamma}} \left(\lambda \int_{\mathbb{S}^{n+1}} \omega_{\beta_{\sigma(e)}}\right) = -\delta_{e^*} I(\Gamma^*,\sigma^*,\psi),$$

where the minus sign comes from the identification $\partial_{e^*} C_{\Gamma^*}(\psi) = -C^0_{\delta_e\Gamma} \times \mathbb{S}^{n+1}$. This proves Lemma 5.7.13.

In the proof of Lemma 5.7.12, we can similarly prove that $\tilde{\omega}(\Gamma,\sigma,\psi) = \mathrm{pr}_1^*(\lambda) \wedge \mathrm{pr}_2^*(\mu_e)$ and $\tilde{\omega}(\Gamma^*,\sigma^*,\psi) = \mathrm{pr}_{1,*}^*(\lambda) \wedge \mathrm{pr}_{2,*}^*(\mu_e)$ where λ is a form on $C^0_{\delta_e\Gamma}$ and where

$$\mu_e = \begin{cases} \omega_{\beta_{\sigma(e)}} & \text{if } \sigma(e) \neq 1, \\ \eta_1^n & \text{if } \sigma(e) = 1 \text{ and } (\alpha'_1 - \alpha_1, \beta'_1 - \beta_1) \text{ has the sphere factorization property,} \end{cases}$$

so that $\tilde{\omega}(\Gamma,\sigma,\psi) = \tilde{\omega}(\Gamma^*,\sigma^*,\psi)$. Since both faces are diffeomorphic with opposite orientations, $\delta_e I(\Gamma,\sigma,\psi) = -\delta_{e^*} I(\Gamma^*,\sigma^*,\psi)$.

Figure 5.20 describes the different orientations used to check Lemmas 5.7.12 to 5.7.15, where Ω' denotes the wedge products of the Ω_h, on the external edges h not named on the pictures, $\mathrm{d}Y_* = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{d}Y_*^i$, and $\mathrm{d}X_* = \bigwedge_{i=1}^{n+2} \mathrm{d}X_*^i$. □

Lemma	$\varepsilon(\Gamma^*)/\varepsilon(\Gamma)$	$\Omega(C_{\delta_e\Gamma})$	$\Omega(C_{\delta_e\Gamma^*})$
5.7.12	-1	$\varepsilon(\Gamma)\mathrm{d}Y_v\Omega'$	$\varepsilon(\Gamma^*)\mathrm{d}Y_v\Omega'$
5.7.13	-1	$\varepsilon(\Gamma)\mathrm{d}Y_v\Omega_{f_-}\Omega_{g_+}\Omega'$	$\varepsilon(\Gamma^*)\mathrm{d}Y_v\Omega_{f_-}\Omega_{g_+}\Omega'$
5.7.14	$+1$	$\varepsilon(\Gamma)\mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_x\Omega_{f_-}\Omega'$	$-\varepsilon(\Gamma^*)\mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_x\Omega_{f_-}\Omega'$
5.7.15	$+1$	$\varepsilon(\Gamma)\mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_x\Omega_{f_+}\Omega'$	$-\varepsilon(\Gamma^*)\mathrm{d}Y_v\mathrm{d}Y_x\Omega_{f_+}\Omega'$

Figure 5.20 – Face orientations

5.8 Proofs of Theorem 5.6.2 and Proposition 5.2.18

A topological pair (X,A) is the data of a topological space X and a subset $A \subset X$. A map $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ between two such pairs is a continuous map $f\colon X \to Y$ such that $f(A) \subset B$.

If (X,A) and (Y,B) are two topological pairs, $[(X,A),(Y,B)]$ denotes the set of homotopy classes of maps from (X,A) to (Y,B).

Lemma 5.8.1. *Let M° be a parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, and fix a parallelization τ_0 of M°. For any map $g\colon M^\circ \to SO(n+2)$ that sends B°_∞ to the* *identity matrix I_{n+2}, define the map $\psi(g)\colon (x,v) \in M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2} \mapsto (x, g(x)(v)) \in M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2}$.*

The map

$$\begin{array}{rcl} [(M^\circ, B^\circ_\infty), (SO(n+2), I_{n+2})] & \to & \mathrm{Par}(M^\circ) \\ [g] & \mapsto & [\tau_0 \circ \psi(g)] \end{array}$$

is well-defined and is a bijection.

Proof. The lemma would be direct with $GL^+_{n+2}(\mathbb{R})$ instead of $SO(n+2)$, and $SO(n+2)$ is a deformation retract of $GL^+_{n+2}(\mathbb{R})$. $\square$

A *homology* $(n+2)$*-ball* is a compact smooth manifold that has the same integral homology as a point, and whose boundary is the $(n+1)$-sphere $\mathbb{S}^{n+1}$.

We are going to prove the following theorem, which implies Theorem 5.6.2.

Theorem 5.8.2. *Let $\mathbb{B}$ be a standard $(n+2)$-ball inside the interior of a homology $(n+2)$-ball $B(M)$. For any map $f\colon (\mathbb{B}, \partial\mathbb{B}) \to (SO(n+2), I_{n+2})$, define the map $I(f)\colon (B(M), \partial B(M)) \to (SO(n+2), I_{n+2})$ such that*

$$I(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in \mathbb{B}, \\ I_{n+2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, the induced map

$$\begin{array}{rcl} [(\mathbb{B}, \partial\mathbb{B}), (SO(n+2), I_{n+2})] & \to & [(B(M), \partial B(M)), (SO(n+2), I_{n+2})] \\ [f] & \mapsto & [I(f)] \end{array}$$

is surjective.

In order to prove this theorem, we are going to build a right inverse to this map. To a map $f\colon (B(M), \partial B(M)) \to (SO(n+2), I_{n+2})$, we will associate a map g homotopic to f, such that $g(M \setminus \mathbb{B}) = \{I_{n+2}\}$.

Lemma 5.8.3. *Let (Y, y_0) be a path-connected pointed space with abelian fundamental group, and let $B(M)$ be a homology $(n+2)$-ball. Let $f\colon (B(M), \partial B(M)) \to (Y, y_0)$ be a continuous map. Then, f is homotopic to a map g that sends the complement of $\mathbb{B}$ to y_0, among the maps that send $\partial B(M)$ to y_0.*

Proof. In this proof, "homotopic" will always mean "homotopic among the maps that send $\partial B(M)$ to y_0."

Fix a triangulation T of $(B(M), \partial B(M))$, and denote by $T^{(k)}$ its k-skeleton. The first projection map $p\colon \mathcal{B} = B(M) \times Y \to B(M)$ defines a trivial bundle over $(B(M), \partial B(M))$. Set $f_0\colon x \in B(M) \mapsto (x, f(x)) \in \mathcal{B}$ and $f_1\colon x \in B(M) \mapsto (x, y_0) \in \mathcal{B}$. Since $H^q(B(M), \partial B(M), \mathbb{Z}) = 0$ for any $0 \leq q \leq n+1$, the groups

$H^q(B(M), \partial B(M), \pi_q(Y, y_0))$ are also trivial. Obstruction theory defined by Steenrod in [Ste99], or more precisely in Theorem 34.10, therefore guarantees the existence of a homotopy between f_0 and a map f_2 such that $(f_2)_{|T^{(n+1)}} = (f_1)_{|T^{(n+1)}}$ among maps from $B(M)$ to $\mathcal{B}$ that coincide with f_1 on $\partial B(M)$. This implies that f is homotopic to a map g that maps $T^{(n+1)}$ to y_0.

It remains to prove that g is homotopic to a map that sends the complement of $\mathbb{B}$ to y_0. Let U be a regular neighborhood of $T^{(n+1)}$. Up to a homotopy, assume that g sends U to y_0. There exists a ball V such that $U \cup V = B(M)$ and such that V contains $\mathbb{B}$. Then, g maps the complement of V to y_0. Since V is a ball, and $\mathbb{B}$ a ball inside V, $g_{|V}$ is homotopic to a map that sends $V \setminus \mathbb{B}$ to y_0, among the maps that send ∂V to y_0. This implies Lemma 5.8.3. □

Then, any element of $[(B(M), \partial B(M)), (SO(n+2), I_{n+2})]$ can be represented by a map $f\colon M^\circ \to SO(n+2)$, such that $f(B(M) \setminus \mathbb{B}) = \{I_{n+2}\}$. This proves Theorem 5.8.2, and therefore Theorem 5.6.2.

Proof of Proposition 5.2.18. We are going to prove that the connected sum of any asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with itself is parallelizable in the sense of Definition 5.2.1.

As in the previous proof, obstruction theory shows that for any ball $\mathbb{B}$ inside the interior of $B(M)$, there exists a parallelization on $B(M) \setminus \mathbb{B}$ that coincides with the standard one on $\partial B(M) = \partial B^\circ_\infty \subset \mathbb{R}^{n+2}$, and that the obstruction to extending it to a parallelization as in Definition 5.2.1 lies in the cohomology group $H^{n+2}(B(M), \partial B(M), \pi_{n+1}(SO(n+2), I_{n+2})) \cong \pi_{n+1}(SO(n+2), I_{n+2})$.

This group is known (see for example [Ker60]) and, for any $n \geq 1$:

- If n is even, then $\pi_{n+1}(SO(n+2), I_{n+2})$ is infinite.
- The groups $\pi_2(SO(3), I_3)$ and $\pi_6(SO(7), I_7)$ are trivial.
- If $n+2 \equiv 1 \mod 8$, then $\pi_{n+1}(SO(n+2), I_{n+2}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- In any other case, $\pi_{n+1}(SO(n+2), I_{n+2}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

This proves Proposition 5.2.18 and yields the following remark. □

Remark 5.8.4. Any asymptotic homology $\mathbb{R}^3$ or $\mathbb{R}^7$ is parallelizable in the sense of Definition 5.2.1.

5.9 Proof of Theorem 5.2.17: additivity of Z_k

Recall that G is the Gauss map $C_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{S}^{n-1}$. In this section, G_{ext} denotes the Gauss map $C_2(\mathbb{R}^{n+2}) \to \mathbb{S}^{n+1}$.

The proof in this section is an adaptation to the higher dimensional case of the method developed in [Les20, Sections 16.1-16.2]. Important differences appear in Section 5.9.1.

5.9.1 Definition of extended BCR diagrams

Fix an integer $k \geq 2$, and let $\psi_{triv} \colon x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow (0,0,x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ be the trivial knot.

For any $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, and any $S_1 \sqcup S_2 \subsetneq V(\Gamma)$, define the graph Γ_{S_1,S_2} as follows: remove the edges of Γ between two vertices of S_1 or two vertices of S_2. Next, remove the isolated vertices. Eventually blow up the obtained graph at each vertex of $S_1 \sqcup S_2$, by replacing such a vertex with a univalent vertex for each adjacent half-edge on the corresponding half-edge. Note that the corresponding half-edges do not meet anymore in Γ_{S_1,S_2}. Let $\overline{S}_i$ denote the set of all the vertices in Γ_{S_1,S_2} coming from a (possibly blown-up) vertex of S_i in Γ. The graph Γ_{S_1,S_2} is endowed with a partition $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2 \sqcup (V(\Gamma) \setminus (S_1 \sqcup S_2))$, and its edges are the edges of Γ that do not have both ends in S_1 or both ends in S_2.

Figure 5.21 shows an example of the obtained graph Γ_{S_1,S_2}.

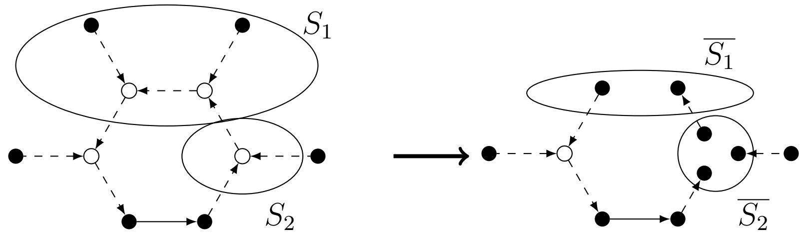


Figure 5.21 – Construction of Γ_{S_1,S_2} for some degree 5 BCR diagram

Since any edge of Γ_{S_1,S_2} comes from an edge of Γ, the numbering σ induces a map $\sigma_{S_1,S_2} \colon E(\Gamma_{S_1,S_2}) \hookrightarrow \{1, \ldots, 2k\}$. Set $\Omega_i = (0, 0, \ldots, 0, \frac{(-1)^i}{2})$ as in Section 5.2.9. One can associate the configuration space

$$C^0_{\Gamma_{S_1,S_2}}(\psi_{triv}) = \left\{ c \colon V(\Gamma_{S_1,S_2}) \to \mathbb{R}^{n+2} \;\middle|\; \begin{array}{l} c_{|V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)} \text{ is injective} \\ \text{ and does not take the values } \Omega_1 \text{ or } \Omega_2, \\ c(V_i(\Gamma) \setminus ((S_1 \sqcup S_2) \cap V_i(\Gamma))) \subset \psi_{triv}(\mathbb{R}^n), \\ c(\overline{S}_1) = \{\Omega_1\}, c(\overline{S}_2) = \{\Omega_2\} \end{array} \right\}$$

to the obtained graph Γ_{S_1,S_2}. As before, $c_i \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ denotes the map such that $c_{|V_i(\Gamma_{S_1,S_2})} = \psi_{triv} \circ c_i$. This space admits a compactification $C_{\Gamma_{S_1,S_2}}(\psi_{triv})$ as in Section 5.2.4 such that for any $e = (v, w) \in E(\Gamma_{S_1,S_2})$ the map

$$G^0_e \colon c \in C^0_{\Gamma_{S_1,S_2}}(\psi_{triv}) \mapsto \begin{cases} \frac{c_i(w) - c_i(v)}{||c_i(w) - c_i(v)||} & \text{if } e \text{ is internal,} \\ \frac{c(w) - c(v)}{||c(w) - c(v)||} & \text{if } e \text{ is external,} \end{cases} \in \mathbb{S}^{n(e)}$$

extends to a smooth map $G_e\colon C_{\Gamma_{S_1,S_2}}(\psi_{triv}) \to \mathbb{S}^{n(e)}$. For simplicity, we will simply denote this compact space by $C_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ in the following.

Lemma 5.9.1. *For any $(\Gamma,\sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$ and any $S_1 \sqcup S_2 \subsetneq V(\Gamma)$,*

$$\dim(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}) \leq \sum_{e \in E(\Gamma_{S_1,S_2})} n(e).$$

Furthermore, this inequality is an equality if and only if $S_1 = S_2 = \emptyset$.

Proof. We use the same method as in the proof of Lemmas 5.2.9 and 5.7.2. Split any edge of Γ_{S_1,S_2} into two halves e_- and e_+, and assign an integer $\tilde{d}(e_\pm)$ to each half-edge $e_\pm$ as follows:

- if $e_\pm$ is adjacent to a vertex of $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2$, $\tilde{d}(e_\pm) = 0$,
- otherwise, $\tilde{d}(e_\pm)$ is the integer $d(e_\pm)$ of Lemma 5.2.9.

Note that for any vertex v,

$$\sum_{e_\pm \text{ adjacent to } v} \tilde{d}(e_\pm) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \in \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2, \\ n & \text{if } v \text{ is internal and } v \notin \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2, \\ n+2 & \text{if } v \text{ is external and } v \notin \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2. \end{cases}$$

This implies that $\sum_{e \in E(\Gamma_{S_1,S_2})} (\tilde{d}(e_+) + \tilde{d}(e_-)) = \dim(C_{\Gamma_{S_1,S_2}})$. This construction also ensures that $\tilde{d}(e_-) + \tilde{d}(e_+) \leq n(e)$ for any edge $e = (v,w)$, with equality if and only if $(v,w) \in (V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2))^2$ or if e is an internal edge coming from $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$ and going to $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2$. This proves the inequality of the lemma.

Let us prove that the inequality is strict when $S_1 \sqcup S_2 \neq \emptyset$. In this case, $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2 \neq \emptyset$, so there exists an edge e with one end in $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2$ and the other one in $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$. If there exists such an edge that is not an internal edge going from $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$ to $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2$, it satisfies $\tilde{d}(e_-) + \tilde{d}(e_+) < n(e)$, and the inequality of the lemma is strict. But if there is an internal edge from $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$ to $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2$, neither $S_1 \sqcup S_2$ nor $V(\Gamma) \setminus (S_1 \sqcup S_2)$ contains the whole cycle of Γ. This implies that there is at least one edge from $\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2$ to $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$, and concludes.

If $S_1 \sqcup S_2 = \emptyset$, the inequality of the lemma is an equality, since $\Gamma_{\emptyset,\emptyset} = \Gamma$. □

Corollary 5.9.2. *For any (Γ, S_1, S_2) as in Lemma 5.9.1 and any numbering σ of Γ, define the maps*

$$\begin{array}{rccl} G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\colon & C_{\Gamma_{S_1,S_2}} & \to & \prod_{e \in E(\Gamma_{S_1,S_2})} \mathbb{S}^{n(e)} \\ & c & \mapsto & (G_e(c))_{e \in E(\Gamma_{S_1,S_2})} \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}\colon & (\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k} & \to & \prod_{e\in E(\Gamma_{S_1,S_2})}\mathbb{S}^{n(e)} \\ & (X_i^{n-1},X_i^{n+1})_{1\leq i\leq 2k} & \mapsto & (X_{\sigma(e)}^{n(e)})_{e\in E(\Gamma_{S_1,S_2})} \end{array}$$

For any maps $\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'\colon\{1,\ldots,2k\}\to\{\pm1\}$*, set*

$$\begin{array}{rccc} T_{\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}\colon & (\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k} & \to & (\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k} \\ & (X_i^{n-1},X_i^{n+1})_{1\leq i\leq 2k} & \mapsto & (\hat{\varepsilon}(i)X_i^{n-1},\hat{\varepsilon}'(i)X_i^{n+1})_{1\leq i\leq 2k} \end{array}.$$

For any $(\Gamma,\sigma,S_1,S_2,\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}')$*, the set* $T_{\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}{}^{-1}\left(\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}{}^{-1}\left(G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)\right)\right)$ *is a closed subset with empty interior of* $(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k}$*.*

Then, $\mathcal{O}_k=\bigcap_{\Gamma,S_1,S_2,\sigma,\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}\left((\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k}\setminus T_{\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}{}^{-1}\left(\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}{}^{-1}\left(G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)\right)\right)\right)$ *is an open dense set of* $(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k}$*.*

Proof. Since $C_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ is compact, $G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)$ is compact and therefore closed. Let us prove that its interior is empty.

If $S_1\sqcup S_2\neq\emptyset$, Lemma 5.9.1 and the Morse-Sard theorem ensure that the image of $G_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ has empty interior, since the target of this map has greater dimension than its source.

If $S_1\sqcup S_2=\emptyset$, $G_{\Gamma_{\emptyset,\emptyset}}$ is a map between two manifolds of same dimension. Let $\mathbb{R}^n$ act by translations along $\{0\}^2\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{n+2}$ on $C_{\Gamma_{\emptyset,\emptyset}}(\psi_{triv})$. The map $G_{\Gamma_{\emptyset,\emptyset}}$ factors through the quotient map of this action. Using the Morse-Sard theorem, this again implies that the image of $G_{\Gamma_{\emptyset,\emptyset}}$ has empty interior.

Then, $G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)$ is always closed with empty interior. This implies that $\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}{}^{-1}\left(G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)\right)$ is also closed with empty interior since $\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}$ is an open map. Since $T_{\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}$ is a diffeomorphism, the first assertion of the lemma follows. Then, $\mathcal{O}_k$ is a finite intersection of open dense sets in the complete metric space $(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n+1})^{2k}$. The lemma follows from the Baire category theorem. □

Lemma 5.9.2, which is used in Section 5.9.3 to prove Theorem 5.2.17, also yields a proof of the following result.

Corollary 5.9.3. *For the trivial knot* ψ_{triv}*,* $Z_k(\psi_{triv})=0$*.*

Proof. Because of Corollary 5.9.2, $\mathcal{O}_k$ is non empty. Fix $(X_i^{n-1},X_i^{n+1})_{1\leq i\leq 2k}\in\mathcal{O}_k$. Compute Z_k with the propagating chains $A_i=\frac{1}{2}G^{-1}(\{-X_i^{n-1},+X_i^{n-1}\})$ and $B_i=\frac{1}{2}G_{ext}^{-1}(\{-X_i^{n+1},+X_i^{n+1}\})$. The definition of $\mathcal{O}_k$ implies that the intersection numbers in Theorem 5.2.13 are all zero. □

5.9.2 An extension of the Gauss map

Let (M_1°, τ_1) and (M_2°, τ_2) be two parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Fix two knots $\psi_1 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ and $\psi_2 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$, and an integer $k \geq 2$.

Fix $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, and let $B^\circ_{\infty,\eta}$ be the complement in $\mathbb{R}^{n+2}$ of the open balls $\mathring{B}^1_\eta$ and $\mathring{B}^2_\eta$ of respective centers $\Omega_1 = (0, \ldots, 0, -\frac{1}{2})$ and $\Omega_2 = (0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$ and radius η.

Glue $B^\circ_{\infty,\eta}$ and the two closed balls $B(M_1)$ and $B(M_2)$ along ∂B^1_η and ∂B^2_η. In this setting, $B_\eta(M_1)$ and $B_\eta(M_2)$ denote the images of $B(M_1)$ and $B(M_2)$, since they "replace" the balls B^1_η and B^2_η. The obtained manifold M° identifies with $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ and comes with a decomposition $B^\circ_{\infty,\eta} \cup B_\eta(M_1) \cup B_\eta(M_2)$ and a parallelization τ naturally induced by τ_1, τ_2, and the standard parallelization of $B^\circ_{\infty,\eta} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ up to homotopy. For $\eta < r < \frac{1}{2}$, $B_r(M_i)$ denotes the union of $B_\eta(M_i)$ with $\{x \in B^\circ_{\infty,\eta} \mid d(x, \Omega_i) \leq r\}$.

Definition 5.9.4. Let $\chi_\pi \colon [0, 3\eta] \to \mathbb{R}_+$ be a smooth increasing map such that $\chi_\pi^{-1}(\{0\}) = [0, \eta]$ and $\chi_\pi([2\eta, 3\eta]) = \{1\}$. Let $\pi \colon M_1^\circ \sharp M_2^\circ \to \mathbb{R}^{n+2}$ be the smooth map such that, for any $x \in M_1^\circ \sharp M_2^\circ$,

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in B^\circ_{\infty,2\eta}, \\ \Omega_1 & \text{if } x \in B_\eta(M_1), \\ \Omega_2 & \text{if } x \in B_\eta(M_2), \\ \Omega_1 + \chi_\pi(||x - \Omega_1||).(x - \Omega_1) & \text{if } x \in B_{2\eta}(M_1) \setminus B_\eta(M_1), \\ \Omega_2 + \chi_\pi(||x - \Omega_2||).(x - \Omega_2) & \text{if } x \in B_{2\eta}(M_2) \setminus B_\eta(M_2). \end{cases}$$

Set $C_2(B_{2\eta}(M_i)) = p_b^{-1}(B_{2\eta}(M_i)^2)$, and set $D(G_{\tau,\eta}) = (C_2(M^\circ) \setminus (C_2(B_{2\eta}(M_1)) \cup C_2(B_{2\eta}(M_2)))) \cup UM^\circ$. Define the analogue $G_{\tau,\eta} \colon D(G_{\tau,\eta}) \to \mathbb{S}^{n+1}$ of the Gauss map as the map such that for any $c \in D(G_{\tau,\eta})$,

$$G_{\tau,\eta}(c) = \begin{cases} \frac{\pi(y) - \pi(x)}{||\pi(y) - \pi(x)||} & \text{if } c = (x, y) \notin C_2(B_{2\eta}(M_1)) \cup C_2(B_{2\eta}(M_2)) \cup UM^\circ, \\ G_\tau(c) & \text{if } c \in UM^\circ. \end{cases}$$

Note that this map is such that $(G_{\tau,\eta})_{|C_2(B_{\infty,2\eta})} = (G_{ext})_{|C_2(B_{\infty,2\eta})}$ and $(G_{\tau,\eta})_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_\tau$.

5.9.3 Proof of the additivity

Define the distance on $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n+1})^{2k}$ given by the maximum of the Euclidean distances on each spherical factor. For $d = n \pm 1$, set $\mathbb{S}^d_h = \{X \in \mathbb{S}^d \mid {X_{d+1}}^2 < \frac{1}{2}\}$. Let $\mathcal{O}'_k$ denote the intersection $\mathcal{O}_k \cap (\mathbb{S}^{n-1}_h \times \mathbb{S}^{n+1}_h)^{2k}$. Corollary 5.9.2 ensures that $\mathcal{O}'_k$ is a non-empty open set.

Fix $(X_i^{n-1}, X_i^{n+1}) \in \mathcal{O}'_k$, and $\frac{1}{4} > \delta > 0$ such that the ball of radius 9δ and center (X_i^{n-1}, X_i^{n+1}) in $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n+1})^{2k}$ is contained in $\mathcal{O}'_k$. Choose $\eta > 0$ in Section 5.9.2 such that $\eta < \frac{1}{8}(\frac{\delta}{2})^{2k}$.

Proposition 5.9.5. *For any $1 \leq i \leq 2k$, fix a closed antisymmetric $(n+1)$-form ω_{β_i} on $\mathbb{S}^{n+1}$ with total mass one, and with support contained in the union of the two balls of center $\pm X_i^{n+1}$ and radius δ.*

For any $1 \leq i \leq 2k$, there exists an external propagating form β_i such that $(\beta_i)_{|D(G_{\tau,\eta})} = G^*_{\tau,\eta}(\omega_{\beta_i})$.

Furthermore, $\beta_{i|B_{\frac{1}{4}}(M_1)\times B_{\frac{1}{4}}(M_2)} = 0$ and $\beta_{i|B_{\frac{1}{4}}(M_2)\times B_{\frac{1}{4}}(M_1)} = 0$.

For any $1 \leq i \leq 2k$, fix a closed antisymmetric $(n-1)$-form ω_{α_i} on $\mathbb{S}^{n-1}$ with total mass one, with support contained in the union of the two balls of center $\pm X_i^{n-1}$ and radius δ, and set $\alpha_i = G^*(\omega_{\alpha_i})$.

Then, $\alpha_{i|\psi^{-1}(B_{\frac{1}{4}}(M_1))\times\psi^{-1}(B_{\frac{1}{4}}(M_2))} = 0$ and $\alpha_{i|\psi^{-1}(B_{\frac{1}{4}}(M_2))\times\psi^{-1}(B_{\frac{1}{4}}(M_1))} = 0$, where $\psi = \psi_1 \sharp \psi_2$.

Proof. Let us first construct the forms β_i. First note that the condition on the restriction is compatible with the property of being a propagating form since $(G_{\tau,\eta})_{|\partial C_2(M^\circ)} = G_\tau$. It remains to prove that the closed form $G^*_{\tau,\eta}(\omega_{\beta_i})$ on $D(G_{\tau,\eta})$ extends to a closed form on $C_2(M^\circ)$. It suffices to prove that the restrictions to $\partial C_2(B_{2\eta}(M_1))$ and to $\partial C_2(B_{2\eta}(M_2))$ extend to $C_2(B_{2\eta}(M_1))$ and to $C_2(B_{2\eta}(M_2))$ as closed $(n+1)$-forms. Note that $C_2(B_{2\eta}(M_i))$ is diffeomorphic to $C_2(M_i^\circ)$. Then, Lemma 5.3.3 yields $H^{n+2}(C_2(B_{2\eta}(M_i)), \partial C_2(B_{2\eta}(M_2))) = 0$ and implies the existence of the form β_i. Since the support of ω_{β_i} is contained in $\mathbb{S}^{n+1}_h$, the restriction $\beta_{i|B_{\frac{1}{4}}(M_1)\times B_{\frac{1}{4}}(M_2)} = 0$ vanishes. The same argument proves the similar assertion about α_i. □

We are going to prove the following proposition, which implies Theorem 5.2.17.

Proposition 5.9.6. *Fix propagating forms $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 2k}$ and $(\beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$ as in Proposition 5.9.5, and set $F = (\alpha_i, \beta_i)_{1\leq i\leq 2k}$. Then, for any $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{G}}}_k$,*

$$I^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2) = I^F(\Gamma, \sigma, \psi_1) + I^F(\Gamma, \sigma, \psi_2).$$

Proof. Fix $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$. For $1 \leq j \leq 2k+1$, set $r_j = \frac{1}{4}(\frac{\delta}{2})^{2k+1-j}$, and note that $r_1 + \cdots + r_j < \frac{\delta}{2-\delta} r_{j+1} < \delta r_{j+1}$ and that $r_{2k+1} = \frac{1}{4}$.

A *coloring* is a map $\chi \colon V(\Gamma) \to \{(1,1), \ldots, (1,2k)\} \cup \{(2,1), \ldots, (2,2k)\} \cup \{\infty\}$. For a given coloring χ, define $U(\chi)$ as the set of configurations in $C_\Gamma(\psi_1 \sharp \psi_2)$ such that:

- If $\chi(v) = (1,1)$, then $c(v)$ is in $\mathring{B}_{2r_1}(M_1)$, and if $\chi(v) = (2,1)$, $c(v)$ is in $\mathring{B}_{2r_1}(M_2)$.

- If $\chi(v) \notin \{(1,1),(2,1)\}$, then $c(v)$ is neither in $B_{r_1}(M_1)$ nor in $B_{r_1}(M_2)$. In particular, since $2\eta < r_1$, $c(v) \in B^{\circ}_{\infty,r_1} \subset B^{\circ}_{\infty,2\eta}$, and it makes sense to use the Euclidean norm of $\mathbb{R}^{n+2}$ for such vertices.
- If $\chi(v) = (i,2)$ (for some $i \in \{1,2\}$), then $c(v) \in \mathring{B}_{2r_2}(M_i)$, and there exists a vertex w, adjacent[12] to v, such that $\chi(w) = (i,1)$.
- If $\chi(v) = (i, j+1)$ for some $2 \leq j \leq 2k-1$, then there exists a vertex w adjacent to v, such that $\chi(w) = (i,j)$ and $||c(v) - c(w)|| < 2r_{j+1}$.
- If $\chi(v) = \infty$, and if there exists a vertex w adjacent to v such that $\chi(w) = (i,1)$, then $||c(v) - \Omega_i|| > r_2$.
- If $\chi(v) = \infty$, and if there exists a vertex w adjacent to v such that $\chi(w) = (i,j)$ with $j > 1$, then $||c(v) - c(w)|| > r_{j+1}$.

Note that if $c \in U(\chi)$, and if $\chi(v) = (i,j)$, $c(v) \in \mathring{B}_{2r_1+\ldots+2r_j}(M_i) \subset \mathring{B}_{2\delta r_{j+1}}(M_i)$. In the following, if e is an edge which connects two vertices v and w, such that $\chi(v), \chi(w) \notin \{(1,1),(1,2)\}$, the distance $||c(v) - c(w)||$ is called the *length* of e.

Lemma 5.9.7. *The family $(U(\chi))_{\chi coloring}$ defines an open cover of $C_\Gamma(\psi_1 \sharp \psi_2)$.*

Proof. The fact that the $U(\chi)$ are open subsets is immediate. Let us prove that any configuration is in at least one of these sets. Fix a configuration c.

First color all the vertices v such that $c(v) \in \mathring{B}_{2r_1}(M_i)$ with $\chi(v) = (i,1)$.

Next, for $i \in \{1,2\}$, color with $\chi(w) = (i,2)$ the vertices w adjacent to those of color $(i,1)$ such that $c(w) \in \mathring{B}_{2r_2}(M_2)$.

Next, for any $2 \leq j \leq 2k-1$, define the vertices of color $(i,j+1)$ inductively: when the vertices of color (i,j) are defined, color with $(i,j+1)$ the vertices v which are not already colored, and such that there exists an edge of length less than $2r_{j+1}$ between v and a vertex w colored by (i,j).

With this method, no vertex can be simultaneously colored by $(1,j)$ and $(2,j')$. Indeed, the construction above ensures that any vertex colored by (i,j) is in $B_{2\delta r_{j+1}}(M_i)$. Since $2\delta r_{j+1} = \delta\frac{1}{2}(\frac{\delta}{2})^{2k-j} \leq \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{4}$, we have $B_{2\delta r_{j+1}}(M_1) \cap B_{2\delta r_{j'+1}}(M_2) = \emptyset$, which concludes.

Setting $\chi(v) = \infty$ for all the vertices that remain still uncolored after this induction gives a coloring such that $c \in U(\chi)$. □

We are going to use the following two lemmas in the proof of Theorem 5.2.17.

Lemma 5.9.8. *If χ is a coloring such that there exists an edge between a vertex colored by some $(1,j)$ and a vertex colored by some $(2,j')$, then $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2)_{|U(\chi)} = 0$.*

[12] i. e. such that there is an edge that connects v to w.

Lemma 5.9.9. *If χ is a coloring such that at least one vertex is colored by ∞, then $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2)_{|U(\chi)} = 0$.*

Proof of Proposition 5.9.6 assuming Lemmas 5.9.8 and 5.9.9.

First note that these two lemmas imply that $I^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2) = \int_U \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2)$ where U is the union of all the $U(\chi)$ where χ is a coloring such that no vertex is colored by ∞, and no edge connects two vertices colored by some $(1, j)$ and $(2, j')$. By construction, since Γ is connected, such a coloring χ takes only values of the form $(1, j)$ or only values of the form $(2, j)$. Let U_1 be the union of the $U(\chi)$ such that χ takes only values of the form $(1, j)$ and similarly define U_2, so that $U = U_1 \sqcup U_2$. This implies that

$$I^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2) = \int_{U_1} \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2) + \int_{U_2} \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2).$$

Note that the form $(\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2))_{|U_i}$ does not depend on the knot ψ_{3-i}, since U_i is composed of configurations which send all vertices in $B_{\frac{1}{2}}(M_i)$. This implies that $Z_k(\psi_1 \sharp \psi_2) = F_1(\psi_1) + F_2(\psi_2)$ for some functions F_1 and F_2. For the trivial knot ψ_{triv}, Corollary 5.9.3 directly implies that $F_1(\psi_{triv}) + F_2(\psi_{triv}) = 0$. Lemma 5.2.16 implies that:

$$Z_k(\psi_1) = Z_k(\psi_1 \sharp \psi_{triv}) = F_1(\psi_1) + F_2(\psi_{triv})$$

$$Z_k(\psi_2) = Z_k(\psi_{triv} \sharp \psi_2) = F_1(\psi_{triv}) + F_2(\psi_2)$$

The sum of these two equalities gives $Z_k(\psi_1) + Z_k(\psi_2) = F_1(\psi_1) + F_2(\psi_2) = Z_k(\psi_1 \sharp \psi_2)$. This concludes the proof of Proposition 5.9.6, hence of Theorem 5.2.17. □

Proof of Lemma 5.9.8. Lemma 5.9.8 directly follows from Proposition 5.9.5, since it implies that if c is in the support of $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2)$, no edge of Γ can connect a vertex of $B_{\frac{1}{4}}(M_1)$ and a vertex of $B_{\frac{1}{4}}(M_2)$. □

Proof of Lemma 5.9.9. Fix a coloring χ that maps at least one vertex to ∞. For $j \in \{1, 2\}$, let S_j be the set of the vertices of Γ colored by a color of $\{j\} \times \{1, \ldots, 2k\}$.

Take $c \in U(\chi)$ and suppose that c is in the support of $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2)$. For any external edge $e = (v, w)$ of Γ_{S_1, S_2}, since $p_e(c) \in D(G_{\tau,\eta})$, there exists a sign $\varepsilon_\sigma(e)$ such that $||G_{\tau,\eta}(c(v), c(w)) - \varepsilon_\sigma(e) X^{n+1}_{\sigma(e)}|| < \delta$, and for any internal edge $e = (v, w)$, there exists a sign $\varepsilon_\sigma(e)$ such that $||G(c_i(v), c_i(w)) - \varepsilon_\sigma(e) X^{n-1}_{\sigma(e)}|| < \delta$.

Lemma 5.9.10. *Endow the spheres $\mathbb{S}^{n(e)}$ with the usual distance coming from the Euclidean norms $|| \cdot ||$ on $\mathbb{R}^{n(e)+1}$.*

Let χ be a coloring that maps at least one vertex to ∞, and let $c \in U(\chi)$. Define a configuration c_0 of $C_{\Gamma_{S_1,S_2}}(\psi_{triv})$ from c as follows:

- *If v is a vertex of $\overline{S}_1$ in Γ_{S_1,S_2}, $c_0(v) = \Omega_1 = (0, 0, \dots, -\frac{1}{2})$.*
- *If v is a vertex of $\overline{S}_2$ in Γ_{S_1,S_2}, $c_0(v) = \Omega_2 = (0, 0, \dots, \frac{1}{2})$.*
- *If v is a vertex of $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2) = V(\Gamma) \setminus (S_1 \cup S_2)$, $c_0(v) = c(v)$.*

Then, $d(G_e(c_0), \varepsilon_\sigma(e) X^{n(e)}_{\sigma(e)}) < 9\delta$ for any edge e of Γ_{S_1,S_2}.

Proof. The edges of Γ_{S_1,S_2} are of four types:

- Those joining two vertices v and w of $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$.
- Those joining one vertex v of $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$ and one vertex w of $\overline{S}_1$.
- Those joining one vertex v of $V(\Gamma_{S_1,S_2}) \setminus (\overline{S}_1 \sqcup \overline{S}_2)$ and one vertex w of $\overline{S}_2$.
- Those joining one vertex v of $\overline{S}_1$ and one vertex w of $\overline{S}_2$.

We have to check that in any of these four cases, the direction of the edge e between $c_0(v)$ and $c_0(w)$ is at distance less than 9δ from $\varepsilon_\sigma(e) X^{n(e)}_{\sigma(e)}$. We prove this for external edges, the case of internal edges can be proved with the same method. Assume that e goes from v to w (the proof is similar in the other case). In this case, the construction of G_e implies that the direction to look at is $G_{ext}(c_0(v), c_0(w))$. Since c is in the support of $\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi_1 \sharp \psi_2)$,

$$||G_{\tau,\eta}(c(v), c(w)) - \varepsilon_\sigma(e) X^{n+1}_{\sigma(e)}|| = \left|\left| \frac{\pi(c(w)) - \pi(c(v))}{||\pi(c(w)) - \pi(c(v))||} - \varepsilon_\sigma(e) X^{n+1}_{\sigma(e)} \right|\right| < \delta.$$

Note the following easy lemma.

Lemma 5.9.11. *For any a and h in $\mathbb{R}^{n+2}$ such that a and $a+h$ are non zero vectors:*

$$\left|\left| \frac{a}{||a||} - \frac{a+h}{||a+h||} \right|\right| \leq \frac{2||h||}{||a||}.$$

Now, let us study the previous four cases:

- In the first case, $c(v)$ and $c(w)$ are in $B^\circ_{\infty,2\eta}$, then the direction of the edge is $G_{ext}(c_0(v), c_0(w)) = G_{ext}(c(v), c(w)) = G_{\tau,\eta}(c(v), c(w))$. Therefore, it is at distance less than δ from $\varepsilon_\sigma(e) X^{n+1}_{\sigma(e)}$.
- In the second case, w comes from a vertex w_0 of Γ with $\chi(w_0) = (1, j)$, so $c_0(w) = \Omega_1$ and $c_0(v) = c(v)$. First suppose $j = 1$. This implies that

$||\pi(c(w)) - \Omega_1|| < 2r_1$. Since $\chi(v) = \infty$, we have $||\Omega_1 - c(v)|| > r_2$. Then, using the previous lemma and triangle inequalities:

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{c_0(v) - c_0(w)}{||c_0(v) - c_0(w)||} - \varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| = \left|\left|\frac{c(v) - \Omega_1}{||c(v) - \Omega_1||} - \varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{c(v) - \pi(c(w))}{||c(v) - \pi(c(w))||} - \varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| + \left|\left|\frac{c(v) - \Omega_1}{||c(v) - \Omega_1||} - \frac{c(v) - \pi(c(w))}{||c(v) - \pi(c(w))||}\right|\right| \\
&< \delta + 2\frac{||\Omega_1 - \pi(c(w))||}{||\Omega_1 - c(v)||} \\
&\leq \delta + 2\frac{2r_1}{r_2} = 3\delta < 9\delta
\end{aligned}$$

Suppose now $j > 1$. Then $||\Omega_1 - c(w)|| < 2\delta r_{j+1}$, and $\pi(c(w)) = c(w)$. Since $\chi(v) = \infty$, we have $||c(v) - c(w)|| > r_{j+1}$. As in the previous computation, and since $\delta < \frac{1}{4}$, we get

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{c_0(v) - c_0(w)}{||c_0(v) - c_0(w)||} - \varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{c(v) - c(w)}{||c(v) - c(w)||} - \varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| + \left|\left|\frac{c_0(v) - c_0(w)}{||c_0(v) - c_0(w)||} - \frac{c(v) - c(w)}{||c(v) - c(w)||}\right|\right| \\
&< \delta + 2\frac{||\Omega_1 - c(w)||}{||c(w) - c(v)||} \\
&\leq \delta + 2\frac{2\delta r_{j+1}}{r_{j+1}} < 9\delta.
\end{aligned}$$

- The third case, can be studied exactly like the second one.
- In the last case, note that $c(v) \in B_{2\delta r_{2k+1}}(M_1) = B_{\frac{\delta}{2}}(M_1)$ and $c(w) \in B_{\frac{\delta}{2}}(M_2)$. The direction we look at is $G_{ext}(c_0(v), c_0(w)) = G_{ext}(\Omega_1, \Omega_2) = (0, \dots, 0, 1)$. But, we have $\left|\left|\frac{\pi(c(v))-\pi(c(w))}{||\pi(c(v))-\pi(c(w))||} - \varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| < \delta$. The previous method yields

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{c_0(v)-c_0(w)}{||c_0(v)-c_0(w)||}-\varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{\pi(c(v))-\pi(c(w))}{||\pi(c(v))-\pi(c(w))||}-\varepsilon_\sigma(e)X^{n+1}_{\sigma(e)}\right|\right| + \left|\left|\frac{\Omega_1-\Omega_2}{||\Omega_1-\Omega_2||}-\frac{\pi(c(v))-\pi(c(w))}{||\pi(c(v))-\pi(c(w))||}\right|\right| \\
&< \delta + \left|\left|\frac{\Omega_1-\Omega_2}{||\Omega_1-\Omega_2||}-\frac{\pi(c(v))-\Omega_2}{||\pi(c(v))-\Omega_2||}\right|\right| + \left|\left|\frac{\pi(c(v))-\Omega_2}{||\pi(c(v))-\Omega_2||}-\frac{\pi(c(v))-\pi(c(w))}{||\pi(c(v))-\pi(c(w))||}\right|\right| \\
&\leq \delta + 2\frac{||\pi(c(v))-\Omega_1||}{||\Omega_1-\Omega_2||}+2\frac{||\pi(c(w))-\Omega_2||}{||\pi(c(v))-\Omega_2||} \\
&\leq \delta + 2\frac{\frac{\delta}{2}}{1}+2\frac{\frac{\delta}{2}}{1-\frac{\delta}{2}} \leq \left(1+1+\frac{8}{7}\right)\delta < 9\delta.
\end{aligned}$$

This concludes the proof of Lemma 5.9.10. □

For any $1 \leq i \leq 2k$, set

$$\hat{\varepsilon}(i) = \hat{\varepsilon}'(i) = \begin{cases} \varepsilon_\sigma(\sigma^{-1}(i)) & \text{if } e \in \sigma_{S_1,S_2}(E(\Gamma_{S_1,S_2})), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For any $1 \leq i \leq 2k$, also set

$$Y_i^{n-1} = \begin{cases} G_{\sigma(e)}(c_0) & \text{if } i \in \sigma(E_i(\Gamma_{S_1,S_2})), \\ X_i^{n-1} & \text{otherwise,} \end{cases} \text{ and } Y_i^{n+1} = \begin{cases} G_{\sigma(e)}(c_0) & \text{if } i \in \sigma(E_e(\Gamma_{S_1,S_2})), \\ X_i^{n+1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 5.9.10 implies that $\overline{Y} = T_{\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}((Y_i^{n-1},Y_i^{n+1})_{1\leq i\leq 2k})$ is at distance less than 9δ from $(X_i^{n-1},X_i^{n+1})_{1\leq i\leq 2k}$. So it belongs to $\mathcal{O}'_k$ and then to the set $\mathcal{O}_k$ of Corollary 5.9.2, which is a contradiction since $\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}(T_{\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}'}(\overline{Y})) = G_{\Gamma_{S_1,S_2}}(c_0)$. This concludes the proof of Lemma 5.9.9. □

Chapitre 6

La torsion de Reidemeister des nœuds longs comme combinaison d'intégrales sur des espaces de configurations

Ce chapitre reproduit la prépublication "The Reidemeister torsion of high-dimensional long knots from configuration space integrals" [Let20].[1] Les résultats sont énoncés en dimension $n \geq 3$, mais tous les arguments sont valables pour $n = 1$, sauf dans la démonstration du lemme 6.2.23, dont le résultat est alors l'objet du lemme 4.3.3.

Abstract:

In a previous article, we gave a more flexible definition of an invariant $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ of Bott, Cattaneo, and Rossi, which is a combination of integrals over configuration spaces for long knots $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, for odd $n \geq 3$. This extended the definition of the invariant $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ to all long knots in asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, for odd $n \geq 3$. In this article, we obtain a formula for Z_k in terms of linking numbers of some cycles of a surface bounded by the knot and we express the Reidemeister torsion of the knot complement in terms of $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, when $n \equiv 1 \mod 4$.

6.1 Introduction

In [Bot96], Bott introduced an isotopy invariant Z_2 of knots $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ in odd dimensional Euclidean spaces. The invariant reads as a linear combination of

[1] Cette prépublication aura significativement changé après la publication du manuscrit de la thèse, pour contenir notamment des résultats en dimension 1 et en dimension paire.

configuration space integrals associated to graphs by integrating some forms associated to the edges, which represent directions in $\mathbb{R}^n$ or in $\mathbb{R}^{n+2}$. The involved graphs have four vertices of two kinds, and four edges of two kinds.

This invariant was generalized to a whole family $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ of isotopy invariants of long knots $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, for odd $n \geq 3$, by Cattaneo and Rossi in [CR05] and by Rossi in his thesis [Ros02]. The invariant Z_k involves graphs with $2k$ vertices of two kinds and $2k$ edges of two kinds.

In [Wat07, Corollary 4.9], Watanabe proved that these so-called Bott-Cattaneo-Rossi (BCR for short) invariants are finite type invariants with respect to some operations on *long ribbon knots*. His study allowed him to prove that the invariants Z_k are not trivial for even $k \geq 2$, and that they are related to the Alexander polynomial for long ribbon knots. He obtained an exact formula for Z_2 in terms of the Alexander polynomial for any long ribbon knot.

In [Let19], we introduced more flexible definitions for the invariants Z_k. Our definitions allowed us to generalize these invariants in the larger setting of long knots inside *asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$ when n is odd ≥ 3.

In this article, we obtain a formula for the generalized Z_k invariant in terms of linking numbers of some cycles of a surface bounded by the knot, which holds at least when $n \equiv 1 \mod 4$. Theorem 6.2.24 gives this formula for the *rectifiable knots* of Definition 6.2.20, which are particular long knots. More generally, Corollary 6.2.25 extends this formula to *virtually rectifiable knots*, which are the long knots ψ such that the connected sum $\psi\sharp\cdots\sharp\psi$ of r copies of ψ is rectifiable for some $r \geq 1$. Section 6.5 shows that the connected sum of any long knot with three copies of itself is rectifiable when $n \equiv 1 \mod 4$.

In Theorem 6.2.29, we use Corollary 6.2.25 to express the Reidemeister torsion $\mathcal{T}_\psi(t)$, for virtually rectifiable knots, as the following combination of integrals over configuration spaces:

$$\mathcal{T}_\psi(e^h) = \exp\left(-\sum_{k\geq 2} Z_k(\psi)h^k\right).$$

This formula also determines the invariant Z_k as an explicit function of the Alexander polynomials of the knot. To our knowledge, our induced explicit determination of $(Z_k)_{k\geq 2}$ is the first complete computation of an invariant defined from configuration space integrals in degree higher than five. Our formula for $(Z_k)_{k\geq 2}$ extends and refines the forementioned result of Watanabe [Wat07, Corollary 4.9] for virtually rectifiable knots.

In Section 6.2, we first give a self-contained definition of the invariant Z_k of [Let19] using intersection numbers of preimages of *propagators*, where propagators are special chains in the two-point configuration space of the ambient asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, which are presented in Definition 6.2.9. We state all the forementioned theorems in this section. Section 6.3 describes how to obtain the formula for Z_k in terms of linking numbers, for rectifiable knots, using some suitable propagators. The details of the construction of such propagators for any rectifiable knot are presented in Section 6.4. In Section 6.6, we derive the formula of Theorem 6.2.29 for the Reidemeister torsion from Corollary 6.2.25.

I thank my advisor Christine Lescop for her help with the redaction of this article.

6.2 Definition of $(Z_k)_{k\geq 2}$ and main statements

6.2.1 Parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ and long knots

In this article, n is an odd integer ≥ 3, and M is an $(n+2)$-dimensional closed smooth oriented manifold, such that $H_*(M;\mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{S}^{n+2};\mathbb{Z})$. Such a manifold is called a *homology* $(n+2)$*-sphere*. In such a homology sphere, choose a point ∞ and a closed ball $B_\infty(M)$ around this point. Fix an identification of this ball $B_\infty(M)$ with the complement B_∞ of the open unit ball of $\mathbb{R}^{n+2}$ in $\mathbb{S}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2} \cup \{\infty\}$, such that this smooth identification extends from a neighborhood of $B_\infty(M)$ to a neighborhood of B_∞ in $\mathbb{S}^{n+2}$. Let M° denote the manifold $M\setminus\{\infty\}$ and let $B^\circ_\infty(M)$ denote the punctured ball $B_\infty(M)\setminus\{\infty\}$, which is identified with the complement B°_∞ of the open unit ball in $\mathbb{R}^{n+2}$. Let $B(M)$ denote the closure of $M^\circ \setminus B^\circ_\infty$, so that the manifold M° can be seen as $M^\circ = B(M) \cup B^\circ_\infty$, where $B^\circ_\infty \subset \mathbb{R}^{n+2}$. The manifold M° endowed with the decomposition $M^\circ = B(M)\cup B^\circ_\infty$ is called an *asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$.

Long knots of such a space M° are smooth embeddings $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ such that $\psi(x) = (0,0,x) \in B^\circ_\infty$ when $||x|| \geq 1$, and $\psi(x) \in B(M)$ when $||x|| \leq 1$.

Definition 6.2.1. A *parallelization* of an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ is a bundle isomorphism $\tau\colon M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2} \to TM^\circ$ that coincides with the canonical trivialization $\tau_0\colon \mathbb{R}^{n+2}\times\mathbb{R}^{n+2} \to T\mathbb{R}^{n+2}$ of $T\mathbb{R}^{n+2}$ on $B^\circ_\infty\times\mathbb{R}^{n+2}$. An asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with such a parallelization is called a *parallelized asymptotic homology* $\mathbb{R}^{n+2}$. An asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ that admits a parallelization is called *parallelizable*. Given a parallelization τ and a point $x \in M^\circ$, τ_x denotes the isomorphism $\tau(x,\cdot)\colon \mathbb{R}^{n+2} \to T_xM^\circ$.

6.2.2 BCR diagrams

In this section, we describe the diagrams involved in the definition of the invariant Z_k, which are the BCR diagrams of [Let19, Section 2.2] (Definition 5.2.2 in this thesis).

Definition 6.2.2. A *BCR diagram* is an oriented connected graph Γ, defined by a set $V(\Gamma)$ of vertices, decomposed into $V(\Gamma) = V_i(\Gamma) \sqcup V_e(\Gamma)$, and a set $E(\Gamma)$ of ordered pairs of distinct vertices, decomposed into $E(\Gamma) = E_i(\Gamma) \sqcup E_e(\Gamma)$, whose elements are called *edges*[2], where the elements of $V_i(\Gamma)$ are called *internal vertices*, those of $V_e(\Gamma)$ *external vertices*, those of $E_i(\Gamma)$ *internal edges*, and those of $E_e(\Gamma)$ *external edges*, and such that, for any vertex v of Γ, one of the five following properties holds:

1. v is external, with two incoming external edges and one outgoing external edge, and one of the incoming edges comes from a univalent vertex.
2. v is internal and trivalent, with one incoming internal edge, one outgoing internal edge, and one incoming external edge, which comes from a univalent vertex.
3. v is internal and univalent, with one outgoing external edge.
4. v is internal and bivalent, with one incoming external edge and one outgoing internal edge.
5. v is internal and bivalent, with one incoming internal edge and one outgoing external edge.

In the following, internal edges are depicted by solid arrows, external edges by dashed arrows, internal vertices by black dots, and external vertices by white dots, as in Figure 6.1, where all the five behaviors of Definition 6.2.2 appear.

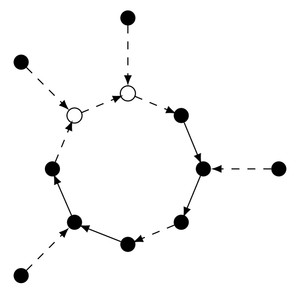


Figure 6.1 – An example of a BCR diagram of degree 6

Definition 6.2.2 implies that any BCR diagram consists of one cycle with some legs attached to it, where *legs* are external edges that come from a (necessarily internal) univalent vertex, and where the graph is a cyclic sequence of pieces as

[2]Note that this implies that our graphs have neither loops nor multiple edges with the same orientation.

in Figure 6.2 with as many pieces of the first type than of the second type. In particular, a BCR diagram has an even number of vertices.

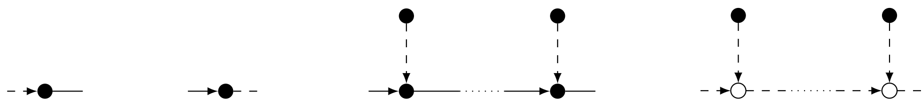


Figure 6.2

For any positive integer k, set $\underline{k} = \{1, \dots, k\}$.

Definition 6.2.3. Define the *degree* of a BCR diagram Γ as $\deg(\Gamma) = \frac{1}{2}\mathrm{Card}(V(\Gamma))$, and let $\mathcal{G}_k$ denote the set of all BCR diagrams of degree k. Note that a degree k BCR diagram has $2k$ edges.

A *numbering* of a BCR diagram Γ of degree k is a bijection $\sigma \colon E(\Gamma) \to \underline{2k}$. A *numbered BCR diagram* is a pair (Γ, σ) where Γ is a BCR diagram and σ is a numbering of Γ. Let $\widetilde{\mathcal{G}_k}$ denote the set of numbered BCR diagrams up to numbered graph isomorphisms.

6.2.3 Two-point configuration spaces

Let X be a d-dimensional closed smooth oriented manifold, let ∞ be a point of X, and set $X^\circ = X \setminus \{\infty\}$. We give a short overview of a compactification $C_2(X^\circ)$ of the two-point configuration space $C_2^0(X^\circ) = \{(x,y) \in (X^\circ)^2 \mid x \neq y\}$, as defined in [Les15b, Section 2.2].

If P is a submanifold of a manifold Q, such that P is transverse to ∂Q and $\partial P = P \cap \partial Q$, its *normal bundle* $\mathfrak{N}P$ is the bundle whose fibers are $\mathfrak{N}_x P = T_x Q / T_x P$. A fiber $U\mathfrak{N}_x P$ of the *unit normal bundle* $U\mathfrak{N}P$ *of* P is the quotient of $\mathfrak{N}_x P \setminus \{0\}$ by the dilations[3].

Here, we use the blow-up in differential topology, which replaces a compact submanifold P of a compact manifold Q as above with its unit normal bundle $U\mathfrak{N}P$. The obtained manifold is a smooth compact manifold. It is diffeomorphic to the complement in Q of an open tubular neighborhood of P. Its interior is $Q \setminus (\partial Q \cup P)$, and its boundary is $U\mathfrak{N}P \cup (\partial Q \setminus \partial P)$ as a set.

Define the space $C_1(X^\circ)$ as the blow-up of X along $\{\infty\}$. It is a compact manifold with interior X° and with boundary the unit normal bundle $\mathbb{S}^{d-1}_\infty X$ to X at ∞.

Blow up the point (∞, ∞) in X^2. In the obtained manifold, blow up the closures of the sets $\{\infty\} \times X^\circ$, $X^\circ \times \{\infty\}$ and $\Delta_{X^\circ} = \{(x,x) \mid x \in X^\circ\}$.

[3]Dilations are homotheties with positive ratio.

The obtained manifold $C_2(X^\circ)$ is compact and it comes with a canonical map $p_b\colon C_2(X^\circ) \to X^2$. Its interior is canonically diffeomorphic to the open configuration space $C_2^0(X^\circ) = \{(x,y) \in (X^\circ)^2 \mid x \neq y\}$, and $C_2(X^\circ)$ has the same homotopy type as $C_2^0(X^\circ)$. The manifold $C_2(X^\circ)$ is called the *two-point configuration space of* X°. Its boundary is the union of:

- the closed part $p_b^{-1}(\{(\infty,\infty)\})$,
- the unit normal bundles to $X^\circ \times \{\infty\}$ and $\{\infty\} \times X^\circ$, which are $X^\circ \times \mathbb{S}^{d-1}_\infty X$ and $\mathbb{S}^{d-1}_\infty X \times X^\circ$,
- the unit normal bundle to the diagonal Δ_{X°, which is identified with the unit tangent bundle UX° via the map $[(u,v)]_{(x,x)} \in U\mathfrak{N}_{(x,x)}\Delta_{X^\circ} \mapsto [v-u]_x \in U_xX^\circ$.

The following lemma can be proved as [Les15b, Lemma 2.2].

Lemma 6.2.4. *When $X^\circ = \mathbb{R}^d$, the Gauss map*

$$\begin{array}{ccc} C_2^0(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{S}^{d-1} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{y-x}{||y-x||} \end{array}$$

extends to a smooth map $G\colon C_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{S}^{d-1}$.

We now define an analogue of G on the boundary of $C_2(M^\circ)$ for any parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$.

Definition 6.2.5. Let (M°, τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Identify the sphere $\mathbb{S}^{n+1}_\infty M$ with $\mathbb{S}^{n+1}$ in such a way that $u \in \mathbb{S}^{n+1}$ is the limit when t approaches $+\infty$ of the map $t \in \left[\frac{1}{||u||}, +\infty\right[\mapsto t.u \in B^\circ_\infty \subset \mathbb{R}^{n+2}$. The boundary of $C_2(M^\circ)$ is the union of:

- the closed part $\partial_{\infty,\infty}C_2(M^\circ) = p_b^{-1}(\{\infty \times \infty\})$, which identifies with the similar part $\partial_{\infty,\infty}C_2(\mathbb{R}^{n+2}) \subset C_2(\mathbb{R}^{n+2})$,
- an open[4] face $\partial_{\infty,M^\circ}C_2(M^\circ) = p_b^{-1}(\{\infty\} \times M^\circ) = \mathbb{S}^{n+1}_\infty M \times M^\circ = \mathbb{S}^{n+1} \times M^\circ$.
- an open face $\partial_{M^\circ,\infty}C_2(M^\circ) = p_b^{-1}(M^\circ \times \{\infty\}) = M^\circ \times \mathbb{S}^{n+1}$.
- an open face $\partial_\Delta C_2(M^\circ) = p_b^{-1}(\Delta_{M^\circ}) = UM^\circ$.

[4] as a subset of $\partial C_2(M^\circ)$.

Define the smooth map $G_\tau\colon \partial C_2(M^\circ) \to \mathbb{S}^{n+1}$ by the following formula:

$$G_\tau(c) = \begin{cases} G(c) & \text{if } c \in \partial_{\infty,\infty} C_2(M^\circ) = \partial_{\infty,\infty} C_2(\mathbb{R}^{n+2}), \\ -u & \text{if } c = (u, y) \in \partial_{\infty, M^\circ} C_2(M^\circ) = \mathbb{S}^{n+1} \times M^\circ, \\ u & \text{if } c = (x, u) \in \partial_{M^\circ, \infty} C_2(M^\circ) = M^\circ \times \mathbb{S}^{n+1}, \\ \frac{\tau_x^{-1}(u)}{\|\tau_x^{-1}(u)\|} & \text{if } c = [u]_x \in U_x M^\circ \subset UM^\circ = \partial_\Delta C_2(M^\circ). \end{cases}$$

In order to simplify the notations, for any configuration in one of the three above open faces, we write $c = (x, y, u)$ where $(x, y) = p_b(c)$, and u denotes the coordinate in the previous definition, which is either in $\mathbb{S}^{n+1}$ or in $U_x M^\circ$.

6.2.4 Configuration spaces

Let Γ be a BCR diagram, and let M° be an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Fix a long knot $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$. Let $C^0_\Gamma(\psi)$ denote the open *configuration space*

$$C^0_\Gamma(\psi) = \{c\colon V(\Gamma) \hookrightarrow M^\circ \mid \text{There exists } c_i\colon V_i(\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \text{ such that } c_{|V_i(\Gamma)} = \psi \circ c_i\}.$$

An element c of $C^0_\Gamma(\psi)$ is called a *configuration*. Note that c_i is uniquely determined by c. By definition, the images of the vertices under a configuration are pairwise distinct, and the images of the internal vertices are on the knot.

This configuration space is a non-compact smooth manifold. It admits a compactification $C_\Gamma(\psi)$, which is defined in [Ros02, Section 2.4, pp. 51-61].

Theorem 6.2.6 (Rossi)**.** *There exists a compact manifold with ridges and edges $C_\Gamma(\psi)$, such that:*

- *its interior is canonically diffeomorphic to $C^0_\Gamma(\psi)$,*
- *for any two internal vertices v and w, the map $\Big(c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto (c_i(v), c_i(w)) \in C_2(\mathbb{R}^n)\Big)$ extends to a smooth map $p^i_{v,w}\colon C_\Gamma(\psi) \to C_2(\mathbb{R}^n)$,*
- *for any two vertices v and w, the map $\Big(c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto (c(v), c(w)) \in C_2(M^\circ)\Big)$ extends to a smooth map $p^e_{v,w}\colon C_\Gamma(\psi) \to C_2(M^\circ)$,*
- *for any vertex v, the map $\Big(c \in C^0_\Gamma(\psi) \mapsto c(v) \in C_1(M^\circ)\Big)$ extends to a smooth map $p_v\colon C_\Gamma(\psi) \to C_1(M^\circ)$.*

Definition 6.2.7. For any edge f of Γ, which goes from a vertex v to a vertex w, C_f denotes the configuration space $C_2(\mathbb{R}^n)$ if f is internal, and $C_2(M^\circ)$ if f is external, and $p_f\colon C_\Gamma(\psi) \to C_f$ denotes the map $p^i_{v,w}$ if f is internal, and $p^e_{v,w}$ if f is external.

Orient the space $C_\Gamma(\psi)$ as follows. For any $i \in \underline{n}$, let $\mathrm{d}Y_i^v$ denote the i-th coordinate form of the internal vertex v (parametrized by $\mathbb{R}^n$) and for any $i \in \underline{n+2}$, let $\mathrm{d}X_i^v$ denote the i-th coordinate form of the external vertex v (in an oriented chart of M°). Split any external edge e in two halves: the tail e_- and the head e_+. Define a form $\Omega_{e_\pm}$ for any half-edge $e_\pm$ of an external edge e, as follows:

- for the head e_+ of a leg going to an external vertex v, $\Omega_{e_+} = \mathrm{d}X_v^1$,
- for the head e_+ of an edge that is not a leg, going to an external vertex v, $\Omega_{e_+} = \mathrm{d}X_v^2$,
- for the tail e_- of an edge coming from an external vertex v, $\Omega_{e_-} = \mathrm{d}X_v^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}X_v^{n+2}$,
- for any external half-edge $e_\pm$ adjacent to an internal vertex v, $\Omega_{e_\pm} = \mathrm{d}Y_v^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}Y_v^n$.

Let $N_{T,i}(\Gamma)$ denote the number of internal trivalent vertices, and define the *sign* of a BCR diagram as $\varepsilon(\Gamma) = (-1)^{N_{T,i}(\Gamma)+\mathrm{Card}(E_e(\Gamma))}$. The orientation of $C_\Gamma(\psi)$ is $\Omega(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma) \bigwedge_{e\in E_e(\Gamma)} \Omega_e$, where $\Omega_e = \Omega_{e_-} \wedge \Omega_{e_+}$ for any external edge e.

Lemma 6.2.8. *Let Γ_k be the degree k BCR diagram of Figure 6.3.*

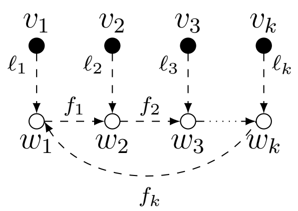


Figure 6.3 – The graph Γ_k

Then, $-C_{\Gamma_k}(\psi)$ is oriented by the coordinates $(c_i(v_j), c(w_j))_{j\in\underline{k}} \in (\mathbb{R}^n \times M^\circ)^k$.

Proof. For any $j \in \underline{k}$, let j^+ denote the integer

$$j^+ = \begin{cases} j+1 & \text{if } j < k, \\ 1 & \text{if } j = k. \end{cases}$$

First note that $\varepsilon(\Gamma_k) = 1$ since there are $2k$ external edges and no internal trivalent vertices. For any $j \in \underline{k}$, ℓ_j denotes the leg from v_j to w_j, and f_j denotes the external edge of the cycle from w_j to w_{j^+} as in Figure 6.3. Set $\mathrm{d}Y_{v_j} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{d}Y_{v_j}^i$,

$\mathrm{d}\overline{X_{w_j}} = \bigwedge\limits_{i=3}^{n+2} \mathrm{d}X^i_{w_j}$ and $\mathrm{d}X_{w_j} = \bigwedge\limits_{i=1}^{n+2} \mathrm{d}X^i_{w_j}$. We have $\Omega_{\ell_j} = \mathrm{d}Y_{v_j} \wedge \mathrm{d}X^1_{w_j}$ and $\Omega_{f_j} = \mathrm{d}\overline{X_{w_j}} \wedge \mathrm{d}X^2_{w_{j+}}$. Then,

$$\begin{aligned}
\Omega(\Gamma_k) &= \bigwedge_{j=1}^{k} (\mathrm{d}Y_{v_j} \wedge \mathrm{d}X^1_{w_j} \wedge \mathrm{d}\overline{X_{w_j}} \wedge \mathrm{d}X^2_{w_{j+}}) \\
&= \mathrm{d}Y_{v_1} \wedge \mathrm{d}X^1_{w_1} \wedge \mathrm{d}\overline{X_{w_1}} \wedge \bigwedge_{j=2}^{k} (\mathrm{d}X^2_{w_j} \wedge \mathrm{d}Y_{v_j} \wedge \mathrm{d}X^1_{w_j} \wedge \mathrm{d}\overline{X_{w_j}}) \wedge \mathrm{d}X^2_{w_1} \\
&= -\bigwedge_{j=1}^{k} (\mathrm{d}X^2_{w_j} \wedge \mathrm{d}Y_{v_j} \wedge \mathrm{d}X^1_{w_j} \wedge \mathrm{d}\overline{X_{w_j}}) = -\bigwedge_{j=1}^{k} (\mathrm{d}Y_{v_j} \wedge \mathrm{d}X_{w_j}). \quad \square
\end{aligned}$$

6.2.5 Conventions about orientations and rational chains

From now on, homology groups are taken with rational coefficients unless otherwise mentioned, all the manifolds are oriented, and their boundaries are oriented with the "outward normal first" convention. The ordered products of manifolds are naturally oriented, and this orientation does not depend on the order if the manifolds are even-dimensional. The fibers of the normal bundle of an oriented submanifold P of a manifold Q are oriented in such a way that the orientation of $\mathfrak{N}_xP$ followed by the orientation of T_xP is the orientation of T_xQ. The orientation of $\mathfrak{N}_xP$ is called the *coorientation* of P. The preimages of submanifolds are oriented in such a way that coorientations are preserved. The intersection $A_\cap = \bigcap\limits_{i=1}^{r} A_r$ of submanifolds is oriented in such a way that $\mathfrak{N}A_\cap$ is oriented as $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{N}A_i$. If A is an oriented manifold, $-A$ denotes the same manifold, with opposite orientation. In this article, an *embedded rational d-chain* A of a manifold X is a finite rational combination of compact oriented d-submanifolds with ridges and corners with pairwise disjoint interiors of X. The *support* $\mathrm{Supp}(A)$ of A is the union of these submanifolds, and the *interior* $\mathrm{Int}(A)$ of A is the union of their interiors.

6.2.6 Propagators and first definition of Z_k

In this section, we define Z_k for long knots in parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Let (M°, τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$.

Definition 6.2.9. An *internal propagator*[5] is an embedded rational $(n+1)$-chain A in $C_2(\mathbb{R}^n)$ such that $\partial A = \frac{1}{2}(G_{|\partial C_2(\mathbb{R}^n)})^{-1}(\{-x_A, +x_A\})$ for some $x_A \in \mathbb{S}^{n-1}$.

[5] In [Let19], propagators were called propagating chains.

An *external propagator* of (M°, τ) is an embedded rational $(n+3)$-chain B in $C_2(M^\circ)$ such that $\partial B = \frac{1}{2}(G_\tau)^{-1}(\{-x_B, +x_B\})$ for some $x_B \in \mathbb{S}^{n+1}$.

For any $k \geq 2$, a k-family $F_* = (A_i, B_i)_{i \in \underline{2k}}$ of propagators of (M°, τ) is the data of $2k$ internal propagators $(A_i)_{i\in\underline{2k}}$ and $2k$ external propagators $(B_i)_{i\in\underline{2k}}$ of (M°, τ).

The existence of such propagators follows from [Let19, Section 4.2] (Section 5.4.2 in this thesis). We recall the discrete definition of the invariant Z_k from our previous article [Let19, Sections 2.7-2.8] (Sections 5.2.7 and art1-Section28 in this thesis).

Let ψ be a long knot of M°. Consider a k-family $F_* = (A_i, B_i)_{i\in\underline{2k}}$ of propagators of (M°, τ). For any BCR diagram Γ, let P_Γ be the product map

$$\begin{array}{cccc} P_\Gamma\colon & C_\Gamma(\psi) & \mapsto & \prod\limits_{e\in E_i(\Gamma)} C_2(\mathbb{R}^n) \times \prod\limits_{e\in E_e(\Gamma)} C_2(M^\circ) = \prod\limits_{e\in E(\Gamma)} C_e \\ & c & \to & (p_e(c))_{e\in E(\Gamma)} \end{array}.$$

The k-family F_* is in *general position for* ψ if, for any numbered BCR diagram $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, and for any $c \in C_\Gamma(\psi)$ such that $P_\Gamma(c) \in \prod\limits_{e\in E_i(\Gamma)} A_{\sigma(e)} \times \prod\limits_{e\in E_e(\Gamma)} B_{\sigma(e)}$

- for any internal edge e, $p_e(c) \in \mathrm{Int}(A_{\sigma(e)})$,
- for any external edge e, $p_e(c) \in \mathrm{Int}(B_{\sigma(e)})$,
- the following transversality property is satisfied.

$$\varepsilon(c) T_{P_\Gamma(c)} \left(\prod_{e\in E(\Gamma)} C_e \right)$$
$$= T_c P_\Gamma(T_c C_\Gamma(\psi)) + \left(\prod_{e\in E_i(\Gamma)} T_{p_e(c)}\mathrm{Int}(A_{\sigma(e)}) \times \prod_{e\in E_e(\Gamma)} T_{p_e(c)}\mathrm{Int}(B_{\sigma(e)}) \right),$$

where $\varepsilon(c) = \pm 1$ is called the *sign* of the intersection point c, and where the above equality is an equality between oriented vector spaces.

In the following, $D^{F_*}_{e,\sigma}$ denotes the chain $p_e^{-1}(A_{\sigma(e)})$ if e is internal, and the chain $p_e^{-1}(B_{\sigma(e)})$ if e is external. The chain $D^{F_*}_{e,\sigma}$ lies in $C_\Gamma(\psi)$.

[Let19, Theorem 4.3] (Theorem 5.4.3 of the thesis) guarantees the existence of k-families of propagators in general position for any ψ and any k. In [Let19, Theorem 2.13] (Theorem 5.2.13 of the thesis), we proved that the extended BCR invariant Z_k of [Let19, Theorem 2.10] (Theorem 5.2.10 of the thesis) can be computed as follows.

Theorem 6.2.10. *Let (M°, τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, and let ψ be a long knot of M°. Let $F_* = (A_i, B_i)_{i \in \underline{2k}}$ be a k-family of propagators of (M°, τ) in general position for ψ.*

For any numbered BCR diagram $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, the algebraic intersection number $I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi)$ of the chains $(D^{F_*}_{e,\sigma})_{e \in E(\Gamma)}$ inside $C_\Gamma(\psi)$ makes sense.[6] *Furthermore,*

$$Z_k(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}} I^{F_*}(\Gamma, \sigma, \psi).$$

In [Let19, Theorem 2.10]/Theorem 5.2.10, we proved that this quantity depends neither on the choice of the propagators nor on the parallelization, and is invariant under ambient diffeomorphisms. In particular, it is an isotopy invariant for long knots.

6.2.7 Connected sum and general definition of Z_k

In this section, we review the connected sum defined in [Let19, Section 2.9]/Section 5.2.9.

Let M_1° and M_2° be two asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, respectively decomposed as $B(M_1) \cup B_\infty^\circ$ and $B(M_2) \cup B_\infty^\circ$. Let $B^\circ_{\infty, \frac{1}{4}}$ be the complement in $\mathbb{R}^{n+2}$ of the two open balls $\mathbb{B}_1$ and $\mathbb{B}_2$ of radius $\frac{1}{4}$ and with respective centers $(0, 0, \ldots, 0, -\frac{1}{2})$ and $(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$. For $i \in \{1, 2\}$ and x in $\partial B(M_i) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, define the map $\varphi_i(x) = \frac{1}{4}x + (-1)^i \frac{1}{2}$, which is a diffeomorphism from $\partial B(M_i)$ to $\partial \mathbb{B}_i$.

Set $M_1^\circ \sharp M_2^\circ = B^\circ_{\infty, \frac{1}{4}} \cup B(M_1) \cup B(M_2)$, where $B(M_i)$ is glued to $\partial \mathbb{B}_i$ via the map φ_i. Set $B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ) = B(M_1^\circ) \cup B(M_2^\circ) \cup \overline{(B^\circ_{\infty, \frac{1}{4}} \setminus B^\circ_\infty)}$. This defines an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, with two canonical injections $\iota_i \colon B(M_i) \hookrightarrow B(M_1^\circ \sharp M_2^\circ)$ for $i \in \{1, 2\}$.

If M_1° and M_2° contain two long knots ψ_1 and ψ_2, define the long knot $\psi_1 \sharp \psi_2$ of $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ by the following formula, for any $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(\psi_1 \sharp \psi_2)(x) = \begin{cases} \iota_2(\psi_2(4.x_1, \ldots, 4.x_{n-1}, 4.x_n - 2)) & \text{if } ||x - (0, \ldots, 0, \frac{1}{2})|| \leq \frac{1}{4}, \\ \iota_1(\psi_1(4.x_1, \ldots, 4.x_{n-1}, 4.x_n + 2)) & \text{if } ||x - (0, \ldots, 0, -\frac{1}{2})|| \leq \frac{1}{4}, \\ (0, 0, x) \in B^\circ_{\infty, \frac{1}{4}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Similarly, any two parallelizations τ_1 and τ_2 of M_1° and M_2° induce a parallelization $\tau_1 \sharp \tau_2$ of $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$, which is well-defined up to homotopy. In particular, if

[6] This intersection number counts the intersection points of these chains with the previously defined signs and the coefficients of the rational chains. For more details, see [Let19, Section 4.1] or Section 5.4.1 here.

M_1° and M_2° are parallelizable, then $M_1^\circ \sharp M_2^\circ$ is also parallelizable in the sense of Definition 6.2.1. We recall the result of [Let19, Theorem 2.17]/Theorem 5.2.17.

Theorem 6.2.11. *For any long knots $\psi_1 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_1^\circ$ and $\psi_2 \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M_2^\circ$,*

$$Z_k(\psi_1 \sharp \psi_2) = Z_k(\psi_1) + Z_k(\psi_2).$$

Let us state [Let19, Proposition 2.18]/Proposition 5.2.18.

Proposition 6.2.12. *For any positive odd integer n, the connected sum of any asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ with itself is parallelizable in the sense of Definition 6.2.1.*

This allows us to extend Z_k as follows.

Definition 6.2.13. Let ψ be a long knot in an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. Define $Z_k(\psi) = \frac{1}{2} Z_k(\psi \sharp \psi)$, where Z_k is the invariant of Theorem 6.2.10.

[Let19, Prop 2.20]/Proposition 5.2.20 implies that Theorem 6.2.11 is still valid for this extended Z_k.

6.2.8 Linking number

We use the following definition and basic properties of the linking number.

Definition 6.2.14. Let X^d and Y^{n+1-d} be two disjoint cycles of our homology $(n+2)$-sphere M, with $d \in \underline{n}$. Let W_X and W_Y be two chains with respective boundaries X and Y, such that W_X and W_Y are transverse to each other. The *linking number* of X and Y is defined as the intersection number $\langle X, W_Y \rangle_M$, so that

$$\mathrm{lk}(X, Y) = \langle X, W_Y \rangle_M = (-1)^{d+1} \langle W_X, Y \rangle_M.$$

Furthermore, since n is odd, $\mathrm{lk}(X^d, Y^{n+1-d}) = (-1)^{d+1} \mathrm{lk}(Y^{n+1-d}, X^d)$.

These linking numbers will appear in the computation of our invariant Z_2 because of the following lemma, which relates external propagators to linking numbers.

Lemma 6.2.15. *Let X^d and Y^{n+1-d} be two disjoint cycles of M°. For any external propagator B,*

$$\mathrm{lk}(X, Y) = \langle X \times Y, B \rangle_{C_2(M^\circ)}.$$

Proof. The class of the cycle $X \times Y$ is an element of $H_{n+1}(C_2(M^\circ))$. [Let19, Lemma 3.3] implies that $H_{n+3}(C_2(M^\circ)) = 0$. Therefore, the intersection number $\langle X \times Y, B\rangle_{C_2(M^\circ)}$ only depends on the homology class $[X \times Y]$. Let W_X and W_Y be chains such that $\partial W_X = X$ and $\partial W_Y = Y$ as above. For the proof, assume that W_X and W_Y are manifolds (the general case follows easily). Let W'_X be obtained from W_X by removing a little ball $\mathbb{D}^{d+1}_x$ with boundary $\mathbb{S}^d_x$ around each point $x \in W_X \cap Y$. Then, $\partial(W'_X \times Y) = X \times Y - \sum\limits_{x \in W_X \cap Y} \mathbb{S}^d_x \times Y$, and $[X \times Y] = \sum\limits_{x \in W_X \cap Y} [\mathbb{S}^d_x \times Y]$.

For any $x \in W_X \cap Y$, assume that $\mathbb{D}^{d+1}_x$ meets W_Y transversely along an interval $[x, x']$. For any $x \in W_X \cap Y$, remove a little ball $\mathbb{D}^{n+2-d}_{x'}$ with boundary $\mathbb{S}^{n+1-d}_{x'}$ around the point x' (which is the intersection of $\mathbb{S}^d_x$ and W_Y) from W_Y, in order to get $[X \times Y] = \sum\limits_{x \in W_X \cap Y} [\mathbb{S}^d_x \times \mathbb{S}^{n+1-d}_{x'}]$.

It suffices to prove that $(-1)^{d+1}\langle \mathbb{S}^d_x \times \mathbb{S}^{n+1-d}_{x'}, B\rangle_{C_2(M^\circ)}$ is the sign of the intersection point x in $W_X \cap Y$. Since the balls $\mathbb{D}^{d+1}_x$ and $\mathbb{D}^{n+2-d}_{x'}$ can be taken arbitrarily small, assume without loss of generality that $M^\circ = \mathbb{R}^{n+2}$,

$$\begin{array}{rl} \mathbb{S}^d_x & = \{(x_1, \dots, x_{d+1}, 0, \dots, 0) \mid (x_1)^2 + \dots + (x_{d+1})^2 = 1\}, \\ \mathbb{S}^{n+1-d}_{x'} & = \{(0, \dots, x_{d+1}, \dots, x_{n+2}) \mid (x_{d+1} - 1)^2 + (x_{d+2})^2 + \dots + (x_{n+2})^2 = 1\}, \\ \text{and } B & = \frac{1}{2}\left(G^{-1}(\{-e_{d+1}\}) + G^{-1}(\{+e_{d+1}\})\right), \end{array}$$

where e_{d+1} is the $(d+1)$-th vector of the canonical basis of $\mathbb{R}^{n+2}$. Now $\langle \mathbb{S}^d_x \times \mathbb{S}^{n+1-d}_{x'}, B\rangle_{C_2(\mathbb{R}^{n+2})}$ is the degree of the Gauss map $\mathbb{S}^d_x \times \mathbb{S}^{n+1-d}_{x'} \to \mathbb{S}^{n+1}$, which is $(-1)^d$. Since $\langle \mathbb{B}^{d+1}_x, \mathbb{S}^{n+1-d}_{x'}\rangle_{\mathbb{R}^{n+2}} = -1$, this concludes the proof. ☐

6.2.9 Seifert surfaces and matrices

Definition 6.2.16. A *Seifert surface* for a long knot $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ is an oriented connected $(n+1)$-submanifold Σ of M° such that $\partial\Sigma = \psi(\mathbb{R}^n)$, such that $\Sigma \cap B(M)$ is compact, and such that $\Sigma \cap B^\circ_\infty = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n, r \geq 0\} \cap B^\circ_\infty$ for some $\theta \in \mathbb{R}$.

Let ψ be a long knot, let Σ be a Seifert surface for ψ, and, for any $d \in \underline{n}$, let b_d denote the d-th Betti number of Σ. Let Σ^+ denote a parallel surface obtained from Σ by slightly pushing it in the positive normal direction. For any cycle z in Σ, let z^+ denote the image of z in the parallel surface Σ^+.

Definition 6.2.17. Let Σ be a Seifert surface for a long knot ψ. For any $d \in \underline{n}$, let $([a^d_i])_{i \in \underline{b_d}}$ and $([z^d_i])_{i \in \underline{b_d}}$ be two bases of $H_d(\Sigma)$. We say that the bases $\mathcal{B} = ([a^d_i])_{i,d}$ and $\tilde{\mathcal{B}} = ([z^d_i])_{i,d}$ of the reduced homology $\overline{H}_*(\Sigma)$ are *dual* to each other if, for any $d \in \underline{n}$, and any $(i,j) \in (\underline{b_d})^2$, $\langle [a^d_i], [z^{n+1-d}_j]\rangle_\Sigma = \delta_{i,j}$, where $\langle \cdot, \cdot\rangle_\Sigma$ denotes the intersection pairing of Σ and $\delta_{i,j}$ denotes the Kronecker delta. Given such *a pair* $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ *of dual bases of* $\overline{H}_*(\Sigma)$, for any $d \in \underline{n}$, define the *Seifert matrices*

$$V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = (\mathrm{lk}(z_i^d, (a_j^{n+1-d})^+))_{1\leq i,j\leq b_d}$$

$$V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = (\mathrm{lk}((z_i^d)^+, a_j^{n+1-d}))_{1\leq i,j\leq b_d}$$

and set $\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = \frac{1}{k} \sum\limits_{d\in\underline{n}} (-1)^{(d+1)} \mathrm{Tr}(V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})^\nu V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})^{k-\nu})$ for any $k \geq 2$ and any $\nu \in \{0, \ldots, k\}$.

Note that pairs of dual bases as above exist thanks to Poincaré duality. The following immediate lemma describes how the $\mathcal{L}_{k,\nu}$ behave under connected sum.

Lemma 6.2.18. *Let Σ_1 and Σ_2 be Seifert surfaces for two long knots ψ_1 and ψ_2. For $i \in \{1, 2\}$, let $(\mathcal{B}_i, \tilde{\mathcal{B}}_i)$ be a pair of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma_i)$ as in Definition 6.2.17.*

There exists a natural Seifert surface $\Sigma_{1,2}$ for the connected sum $\psi_1 \sharp \psi_2$ and a pair $(\mathcal{B}_{1,2}, \tilde{\mathcal{B}}_{1,2})$ of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma_{1,2})$ such that, for any $d \in \underline{n}$,

$$V_d^\pm(\mathcal{B}_{1,2}, \tilde{\mathcal{B}}_{1,2}) = \begin{pmatrix} V_d^\pm(\mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{B}}_1) & 0 \\ 0 & V_d^\pm(\mathcal{B}_2, \tilde{\mathcal{B}}_2) \end{pmatrix}.$$

In particular, for any $k \geq 2$ and any $\nu \in \{0, \ldots, k\}$,

$$\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}_{1,2}, \tilde{\mathcal{B}}_{1,2}) = \mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{B}}_1) + \mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}_2, \tilde{\mathcal{B}}_2).$$

6.2.10 Rectifiability and virtual rectifiability

Let $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$ denote the space of injections $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, and let ι_0 be the standard injection $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (0, 0, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Let $\mathbb{D}^n$ be the unit ball of $\mathbb{R}^n$, and see $\pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$ as the set $[(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n), (\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)]$ of homotopy classes of maps $\mathbb{R}^n \to \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$ that map $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ to ι_0 among such maps.

Lemma 6.2.19. *Let M° be a parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ and let ψ be a long knot of M°. For any parallelization τ of M°, the tangent map $T\psi$ induces a map $\iota(\tau, \psi) \colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\tau_{\psi(x)})^{-1} \circ T_x\psi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})$.*

The class

$$[\iota(\tau, \psi)] \in \pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$$

is independent of the parallelization τ.

Proof. Let τ and τ' be two parallelizations of M°. [Let19, Theorem 6.2]/Theorem 5.6.2 implies the existence of a smooth family $(\tau_t)_{t\in[0,1]}$ of parallelizations of M° such that $\tau_0 = \tau$ and that τ_1 and τ' coincide on $\psi(\mathbb{R}^n)$. This yields an homotopy $(\iota(\tau_t, \psi))_{t\in[0,1]}$ from $\iota(\tau, \psi)$ to $\iota(\tau', \psi)$. □

Definition 6.2.20. Under the assumptions of Lemma 6.2.19, the class $\iota(\psi) = [\iota(\tau, \psi)] \in \pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$ is called the *rectifiability obstruction of* ψ. The long knot ψ is *rectifiable* if its rectifiability obstruction is zero.

In Section 6.5.1, we prove the following lemma.

Lemma 6.2.21. *For any rectifiable knot ψ of a parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, there exists a parallelization τ such that $\iota(\tau, \psi)$ is the constant map with value ι_0.*

For long knots in a possibly non-parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, we have the following weaker definition.

Definition 6.2.22. Let M° be an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. A long knot $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ is *virtually rectifiable* if there exists a positive integer r such that the connected sum $\psi^{(r)} = \psi \sharp \cdots \sharp \psi$ of r copies of ψ is rectifiable.

In Section 6.5, we establish the following lemma.

Lemma 6.2.23. *If $n \equiv 1 \mod 4$, then any long knot in an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ is virtually rectifiable.*

6.2.11 A formula for Z_k in terms of linking numbers

In Section 6.3, we prove the following theorem.

Theorem 6.2.24. *For any rectifiable knot ψ in an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, any Seifert surface Σ for ψ, and any pair $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma)$,*

$$Z_k(\psi) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} \mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}),$$

where $\lambda_{k,\nu} = \frac{1}{(k-1)!}\mathrm{Card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1} \mid \mathrm{Card}\{i \in \underline{k-2} \mid \sigma(i) < \sigma(i+1)\} = \nu - 1\})$, and where $\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ is introduced in Definition 6.2.17.

Theorem 6.2.24 yields the following more general corollary.

Corollary 6.2.25. *For any virtually rectifiable knot ψ in an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, any Seifert surface Σ for ψ, and any pair $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma)$,*

$$Z_k(\psi) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu} \mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}).$$

In particular, this formula holds for any long knot when $n \equiv 1 \mod 4$.

Proof. Let ψ be a virtually rectifiable knot, and let r be an integer such that $\psi^{(r)}$ is rectifiable. Let Σ, $\mathcal{B}$ and $\tilde{\mathcal{B}}$ be as in the theorem. From Theorem 6.2.11, we get that $Z_k(\psi^{(r)}) = rZ_k(\psi)$. For any $k \geq 2$ and $\nu \in \underline{k-1}$, Lemma 6.2.18 yields $\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}_r, \tilde{\mathcal{B}_r}) = r\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$, where $(\mathcal{B}_r, \tilde{\mathcal{B}_r})$ is a pair of dual bases of the reduced homology of a Seifert surface for $\psi^{(r)}$. On the other hand, Theorem 6.2.24 implies that $Z_k(\psi^{(r)}) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k,\nu}\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B}_r, \tilde{\mathcal{B}_r})$. This concludes the proof of Corollary 6.2.25. Lemma 6.2.23 ensures that the theorem holds for all knots when $n \equiv 1 \mod 4$. □

6.2.12 Alexander polynomials and Reidemeister torsion

We use the following formula of [Lev66, p.542] as a definition of Alexander polynomials.

Theorem 6.2.26 (Levine)**.** *The* Alexander polynomials *of the Seifert surface* Σ *are defined, for* $d \in \underline{n}$*, by the formula*[7]

$$\Delta_{d,\Sigma}(t) = \det\left(t^{-\frac{1}{2}}V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) - t^{\frac{1}{2}}V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})\right)$$

and do not depend on the choice of the pair $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ *of dual bases of* $\overline{H}_*(\Sigma)$*.*

Furthermore, for any $d \in \underline{n}$*,* $V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) - V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = I_{b_d}$*, so that* $\Delta_{d,\psi}(1) = 1$*.*

If Σ *and* Σ' *are two Seifert surfaces for* ψ*, then there exists an integer* $a \in \mathbb{Z}$ *such that*[8] $\Delta_{d,\Sigma'}(t) = t^{\frac{a}{2}}.\Delta_{d,\Sigma}(t)$*.*

Lemma 6.2.27. *For any Seifert surface* Σ*, and any* $d \in \underline{n}$*,* $\Delta_{d,\Sigma}(t^{-1}) = \Delta_{n+1-d,\Sigma}(t)$*.*

Furthermore, for any pair $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ *of dual bases of the reduced homology of* Σ*,*

$$\sum_{d\in\underline{n}}(-1)^{d+1}\left(\mathrm{Tr}(V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})) + \mathrm{Tr}(V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}))\right) = 0,$$

and

$$\sum_{d\in\underline{n}}(-1)^{d+1}\mathrm{Tr}(V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})) = \frac{\chi(\Sigma) - 1}{2}.$$

Proof. There exists a pair $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ of dual bases $\mathcal{B} = ([a_i^d])_{i,d}$ and $\tilde{\mathcal{B}} = ([z_i^d])_{i,d}$ of $\overline{H}_*(\Sigma)$ such that $a_i^d = z_i^d$ for $d > \frac{n+1}{2}$, and such that $z_i^d = (-1)^d a_i^d$ for $d < \frac{n+1}{2}$. It follows that for $d \neq \frac{n+1}{2}$, ${}^TV_d^{\pm}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = -V_{n+1-d}^{\mp}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$. This implies that $\Delta_{d,\Sigma}(t^{-1}) = \Delta_{n+1-d,\Sigma}(t)$. Let $\mathcal{B}'$ be the basis defined from $\mathcal{B}$ by replacing $a_i^{\frac{n+1}{2}}$

[7] With the notations of [Lev66, Theorem 1], our Alexander polynomial $\Delta_{d,\Sigma}$ is the product $\prod_{i\in\underline{b_d}} \lambda_i^d$.

[8] This follows from the fact that the (λ_i^d) from [Lev66] are defined from the knot up to multiplication by a monomial.

with $(-1)^{\frac{n+1}{2}} z_i^{\frac{n+1}{2}}$ for any $i \in \{1, \dots, b_{\frac{n+1}{2}}\}$, and let $\tilde{\mathcal{B}}'$ be the basis defined from $\tilde{\mathcal{B}}$ by replacing $z_i^{\frac{n+1}{2}}$ with $a_i^{\frac{n+1}{2}}$, so that $(\mathcal{B}', \tilde{\mathcal{B}}')$ is a pair of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma)$. We have ${}^T V^{\pm}_{\frac{n+1}{2}}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = -V^{\mp}_{\frac{n+1}{2}}(\mathcal{B}', \tilde{\mathcal{B}}')$, hence $\Delta_{\frac{n+1}{2},\Sigma}(t^{-1}) = \Delta_{\frac{n+1}{2},\Sigma}(t)$. The first point of the lemma follows.

This implies that for any $d \in \underline{n}$, $\Delta'_{d,\Sigma}(1) + \Delta'_{n+1-d,\Sigma}(1) = 0$, so

$$\sum_{d \in \underline{n}} (-1)^{d+1} \left(\mathrm{Tr}(V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})) + \mathrm{Tr}(V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})) \right) = 0.$$

On the other hand, since $V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) - V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = I_{b_d}$ for any $d \in \underline{n}$, we have

$$\sum_{d \in \underline{n}} (-1)^{d+1} \left(\mathrm{Tr}(V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})) - \mathrm{Tr}(V_d^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})) \right) = 1 - \chi(\Sigma).$$

The two equations above imply the second and third point of the lemma. Note that since the Alexander polynomials do not depend on the choice of the bases, neither do these equalities. □

We use [Mil68, Theorem p.131] to compute the Reidemeister torsion of the knot (i.e. the Reidemeister torsion of the knot complement) as follows.

Definition 6.2.28. The *Reidemeister torsion* $\mathcal{T}_\psi(t)$ of a long knot ψ is defined as

$$\mathcal{T}_\psi(t) = \prod_{d \in \underline{n}} (\Delta_{d,\Sigma}(t))^{(-1)^{d+1}} \in \mathbb{Q}(t),$$

where Σ is a Seifert surface for ψ. We have $\mathcal{T}_\psi(1) = 1$ and $\mathcal{T}_\psi(t^{-1}) = \mathcal{T}_\psi(t)$, so that the torsion does not depend on the surface Σ.

6.2.13 The Reidemeister torsion in terms of BCR invariants

The following theorem is proved in Section 6.6.2.

Theorem 6.2.29. *For any virtually rectifiable knot ψ of an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, we have the following equality in $\mathbb{Q}[[h]]$:*

$$\mathrm{Ln}(\mathcal{T}_\psi(e^h)) = \sum_{d=1}^{n} (-1)^{d+1} \mathrm{Ln}(\Delta_{d,\Sigma}(e^h)) = -\sum_{k \geq 1} Z_k(\psi) h^k.$$

If $n \equiv 1 \mod 4$, this formula holds for any long knot.

6.3 Computing Z_k from admissible propagators

6.3.1 Admissible propagators

Let M° be a fixed parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ and let $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ be a fixed long knot. Let $\psi_0\colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto (0,0,x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ denote the trivial knot.

Fix a real number $R \geq 3$.

For $1 \leq r \leq R$, let N^0_r denote the following neighborhood of the trivial knot $N^0_r = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq r^2 \text{ or } ||x|| \geq \frac{2R^2}{r}\}$.

Choose a neighborhood N_R of $\psi(\mathbb{R}^n)$ in M° such that $N_R \cap B^\circ_\infty = N^0_R \cap B^\circ_\infty$, and such that $N_R \cap B(M)$ is a tubular neighborhood of $\psi(\mathbb{R}^n) \cap B(M)$. Choose a diffeomorphism $\Theta\colon N^0_R \to N_R$ such that Θ reads as the identity function on $N^0_R \cap B^\circ_\infty$ and such that Θ is a bundle isomorphism on $N^0_R \cap B(M)$ such that $\Theta \circ \psi_0 = \psi$.

Lemma 6.3.1. *The knot ψ is rectifiable if and only if there exists a parallelization τ of M° such that, for any $x \in N^0_R$, $T_x\Theta \circ (\tau_0)_x = \tau_{\Theta(x)}$, where τ_0 denotes the canonical parallelization of $\mathbb{R}^{n+2}$ introduced in Definition 6.2.1.*

Proof. If there exists such a τ, then $T_{\psi_0(x)}\Theta \circ T_x\psi_0 = \tau_{\Theta(\psi_0(x))} \circ \iota_0$, so $\tau_{\psi(x)} \circ \iota_0 = T_x\psi$. Therefore, $\iota(\tau, \psi) = \iota_0$ and ψ is rectifiable.

Let us prove the converse. Suppose that ψ is rectifiable, and let τ_1 be a parallelization such that $\iota(\tau_1, \psi)$ is the constant map of value ι_0. Recall that if (X, A) and (Y, B) are two topological pairs, $[(X, A), (Y, B)]$ denotes the set of homotopy classes of maps $X \to Y$ that map A to B. Let $\mathbb{D}^n$ denote the unit ball of $\mathbb{R}^n$. The map $\left(x \in N^0_R \mapsto (\tau_1)^{-1}_{\Theta(x)} \circ T_x\Theta \circ (\tau_0)_x \in GL^+_{n+2}(\mathbb{R})\right)$ induces an element $\kappa(\tau_1)$ of the set $[(N^0_R, N^0_R \cap B^\circ_\infty), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})] \cong [(N^0_R \cap B(M), N^0_R \cap \partial B(M)), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})]$. Since $N^0_R \cap B(M)$ is a disk bundle over $\psi_0(\mathbb{R}^n) \cap B(\mathbb{S}^{n+2}) = \psi_0(\mathbb{D}^n)$, the restriction map

$$\begin{aligned}&[(N^0_R \cap B(M), N^0_R \cap \partial B(M)), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})]\\ &\quad \to [(\psi_0(\mathbb{D}^n), \psi_0(\partial\mathbb{D}^n)), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})] \cong [(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})]\end{aligned}$$

is an isomorphism, and $[(N^0_R, N^0_R \cap B^\circ_\infty), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})] \cong \pi_n(GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})$. The fibers of the fibration $\left(g \in GL^+_{n+2}(\mathbb{R}) \mapsto g_{|\{0\}^2\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2})\right)$ have the homotopy type of $SO(2)$. Since $n \geq 3$, this fibration induces an isomorphism $\pi_n(GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2}) \to \pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$. The obtained isomorphism $[(N^0_R, N^0_R \cap B^\circ_\infty), (GL^+_{n+2}(\mathbb{R}), I_{n+2})] \cong \pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$ maps $\kappa(\tau_1)$ to $[\iota(\tau_1, \psi)]$. By definition of τ_1, $\iota(\tau_1, \psi) = \iota_0$, and $\kappa(\tau_1)$ is trivial. This proves the existence of a parallelization $\tau\colon N_R \times \mathbb{R}^{n+2} \to TN_R$ homotopic to τ_1 such that, for any $x \in N^0_R$, $\tau^{-1}_{\Theta(x)} \circ T_x\Theta \circ (\tau_0)_x = I_{n+2}$. Since $\tau_{1|N_R\times\mathbb{R}^{n+2}}$ extends to $M^\circ \times \mathbb{R}^{n+2}$, it is immediate to see that τ also does. □

Note that the previous proof also yields the following lemma, since $GL^+_{n+2}(\mathbb{R})$ and $SO(n+2)$ have the same homotopy type.

Lemma 6.3.2. *For $n \geq 3$, $\pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$ is isomorphic to $\pi_n(SO(n{+}2), I_{n+2})$.*

Suppose now that ψ is rectifiable, and fix the identification Θ and the parallelization τ as in Lemma 6.3.1. For any $r \in [1, R]$, let E_r denote the closure of $M^\circ \setminus N_r$. With the identification induced by Θ, M° reads $N^0_r \cup E_r$.

Notation 6.3.3. In $N_R = N^0_R$, use the coordinates $x = (x_1, x_2, \overline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. For $r \in [1, R]$, $\mathbb{D}_\mu(r)$ denotes the disk $\{(x_1, x_2, \overline{0}) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq r^2\} \subset N_r$. For $\theta \in \mathbb{R}$, set $L^\pm_\theta(r) = \{\pm(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \overline{0}) \mid \rho \geq \frac{2R^2}{r}\}$, $L_\theta(r) = L^+_\theta(r) + L^-_\theta(r)$, and orient these lines by $\mathrm{d}\rho$.

Let Θ_2 denote the diffeomorphism $C_2(N^0_R) \to C_2(N_R)$ induced by Θ. We now define the main objects of this article, which will be used to compute Z_k.

Definition 6.3.4. Fix $\theta \in \mathbb{R}$. Fix Seifert surfaces Σ^+ and Σ^- with disjoint interiors such that $\Sigma^\pm \cap N_R = ({}_\theta\Sigma^\pm)^0 \cap N_R$, where $({}_\theta\Sigma^\pm)^0 = \{\pm(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n, r \geq 0\}$. For any $r \in [1, R]$, let $\Sigma(r)$ denote the submanifold $E_r \cap (\Sigma^+ \cup \Sigma^-)$. The restriction of the Gauss map of $C_2(\mathbb{R}^{n+2})$ to $C_2(N^0_1)$ and the identification $C_2(N_1) \cong C_2(N^0_1)$ given by Θ_2 induce a map $G_0 \colon C_2(N_1) \to \mathbb{S}^{n+1}$.

An external propagator B is called *R-admissible* (with respect to $(\Sigma^+, \Sigma^-, \psi)$) if:

- $B \cap p_b^{-1}(N_1 \times N_1) = \frac{1}{2}{G_0}^{-1}(\{-(\cos(\theta), \sin(\theta), \overline{0}), +(\cos(\theta), \sin(\theta), \overline{0})\})$.
- If $c \in B \cap \overline{p_b^{-1}(\psi(\mathbb{R}^n) \times M^\circ)}$, then $p_2(c)$ lies in the closure $\overline{\Sigma^+ \cup \Sigma^-}$ of $\Sigma^- \cup \Sigma^+$ in $C_1(M^\circ)$, where p_2 is the smooth map $p_2 \colon C_2(M^\circ) \to C_1(M^\circ)$ that extends $(x, y) \in C^0_2(M^\circ) \mapsto y \in M^\circ \subset C_1(M^\circ)$.
- For any $r \in]1, R-1]$,
$$B \cap p_b^{-1}(N_r \times E_{r+1}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{D}_\mu(r) \times \Sigma(r+1) - \overline{p_b^{-1}(L_\theta(r) \times E_{r+1})}\right).$$
- If T denotes the smooth map of $C_2(M^\circ)$ such that for any $(x, y) \in C^0_2(M^\circ)$, $T(x, y) = (y, x)$, then $T(B) = B$. In particular, for any $r \in]1, R-1]$,
$$B \cap p_b^{-1}(E_{r+1} \times N_r) = \frac{1}{2}\left(\Sigma(r+1) \times \mathbb{D}_\mu(r) + \overline{p_b^{-1}(E_{r+1} \times L_\theta(r))}\right).$$

In Section 6.4, we prove the following technical lemma.

Lemma 6.3.5. *For any integer $k \geq 1$, any long knot ψ, any pairwise distinct real numbers $(\theta_i)_{i\in\underline{2k}}$ in $[0,\pi[$, and any Seifert surfaces $(\Sigma_i^-, \Sigma_i^+)_{i\in\underline{2k}}$ such that $\Sigma_i^\pm \cap N_R = ({}_{\theta_i}\Sigma^\pm)^0 \cap N_R$, there exist external propagators $(B^R(\Sigma_i^+, \Sigma_i^-, \psi))_{i\in\underline{2k}}$, such that for any $i \in \underline{2k}$, the propagator $B^R(\Sigma_i^+, \Sigma_i^-, \psi)$ is R-admissible with respect to $(\Sigma_i^+, \Sigma_i^-, \psi)$.*

Furthermore, we can fix such propagators $(B^R(({}_{\theta_i}\Sigma^+)^0, ({}_{\theta_i}\Sigma^-)^0, \psi_0))_{i\in\underline{2k}}$ for the trivial knot such that Θ_2 maps the chain $B^R(({}_{\theta_i}\Sigma^+)^0, ({}_{\theta_i}\Sigma^-)^0, \psi_0) \cap p_b^{-1}(N_R^0 \times N_R^0)$ to $B^R(\Sigma_i^+, \Sigma_i^-, \psi) \cap p_b^{-1}(N_R \times N_R)$ for any $i \in \underline{2k}$.

6.3.2 Use of admissible propagators to compute Z_k

6.3.2.1 Three reduction lemmas

We work with the following notations, and we fix the following setting for Section 6.3.2.

Setting 6.3.6.

- The integer $k \geq 2$ is fixed.
- The real number R of the previous subsection is fixed to some arbitrary value $R \geq k+1$.
- The numbers $(\theta_i)_{i\in\underline{2k}}$ are such that $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{2k} < \pi$.
- For any $i \in \underline{2k}$, $(\Sigma_i^\pm)^0 = ({}_{\theta_i}\Sigma^\pm)^0$.
- $(\Sigma_i^\pm)_{i\in\underline{2k}}$ are pairwise isotopic and parallel[9] Seifert surfaces for ψ, such that $\Sigma_i^\pm \cap N_R = (\Sigma_i^\pm)^0 \cap N_R$, and such that for any $(i,\varepsilon) \in \underline{2k} \times \{\pm\} \setminus \{(1,+)\}$, $\Sigma_i^\varepsilon \cap E_1$ is obtained from $\Sigma_1^+ \cap E_1$ by pushing it in the positive normal direction, so that the order of these surfaces in the positive normal direction is $(\Sigma_1^+, \dots, \Sigma_{2k}^+, \Sigma_1^-, \dots, \Sigma_{2k}^-)$.
- With the notations of Lemma 6.3.5, $F_*^0 = (A_i, B_i^0)_{i\in\underline{2k}}$ is a k-family of propagators of $(\mathbb{R}^{n+2}, \tau_0)$ in general position for ψ_0, such that for any $i \in \underline{2k}$, B_i^0 is an arbitrarily small perturbation of $B^R((\Sigma_i^+)^0, (\Sigma_i^-)^0, \psi_0)$.
- With the notations of Lemma 6.3.5, $F_* = (A_i, B_i)_{i\in\underline{2k}}$ is a k-family of propagators of (M°, τ) in general position for ψ such that for any $i \in \underline{2k}$, B_i is an arbitrarily small perturbation of $B^R(\Sigma_i^+, \Sigma_i^-, \psi)$ and $B_i \cap p_b{}^{-1}(N_R \times N_R)$ is the image of $B_i^0 \cap p_b{}^{-1}(N_R^0 \times N_R^0)$ under the identification Θ_2.

[9] They only meet along the knot.

For any edge e of a numbered degree k BCR diagram (Γ, σ) as in Definition 6.2.3, define the chains $D_{e,\sigma} \subset C_\Gamma(\psi)$ and $D^0_{e,\sigma} \subset C^0_\Gamma(\psi)$ as

$$D_{e,\sigma} = \begin{cases} {p_e}^{-1}(A_{\sigma(e)}) & \text{if } e \text{ is internal,} \\ {p_e}^{-1}(B_{\sigma(e)}) & \text{if } e \text{ is external,} \end{cases} \text{ and } D^0_{e,\sigma} = \begin{cases} {p_e}^{-1}(A^0_{\sigma(e)}) & \text{if } e \text{ is internal,} \\ {p_e}^{-1}(B^0_{\sigma(e)}) & \text{if } e \text{ is external.} \end{cases}$$

Lemma 6.3.7. *If Γ has an external edge from an internal vertex to an internal vertex, then, for any numbering σ, $\bigcap\limits_{f \in E(\Gamma)} D_{f,\sigma} = \emptyset$, and $\bigcap\limits_{f \in E(\Gamma)} D^0_{f,\sigma} = \emptyset$.*

Proof. We first ignore the perturbations of the external propagators. Let $e = (v, w)$ be an external edge between two internal vertices of a numbered BCR diagram (Γ, σ). For a configuration c in $D_{e,\sigma}$, set $c(v) = p_v(c)$ and $c(w) = p_w(c)$, where p_v and p_w are the maps defined in Theorem 6.2.6. Since v and w are internal, we have $G_0(p_e(c)) \in \{0\}^2 \times \mathbb{S}^{n-1}$. On the other hand, by Definition 6.3.4 of admissible propagators, since $(c(v), c(w)) \in N_1 \times N_1$, we have $G_0(p_e(c)) = \pm(\cos(\theta_{\sigma(e)}), \sin(\theta_{\sigma(e)}), \overline{0})$. Thus, $D_{e,\sigma} = \emptyset$ and $\bigcap\limits_{f \in E(\Gamma)} D_{f,\sigma} = \emptyset$. Similarly, $\bigcap\limits_{f \in E(\Gamma)} D^0_{f,\sigma} = \emptyset$.

Now, note that the properties $\bigcap\limits_{f \in E(\Gamma)} D_{f,\sigma} = \emptyset$ and $\bigcap\limits_{f \in E(\Gamma)} D^0_{f,\sigma} = \emptyset$ are stable under small perturbations since the $D_{f,\sigma}$ and the $D^0_{f,\sigma}$ are compact. □

Lemma 6.3.8. *Let $\Gamma \in \mathcal{G}_k \setminus \{\Gamma_k\}$, where Γ_k is the degree k BCR diagram of Figure 6.3. For any numbering σ of Γ, $\bigcap\limits_{e \in E(\Gamma)} D_{e,\sigma} = \emptyset$ and $\bigcap\limits_{e \in E(\Gamma)} D^0_{e,\sigma} = \emptyset$.*

Proof. Fix a numbering σ. If Γ has only internal vertices, conclude with Lemma 6.3.7. If $\Gamma \neq \Gamma_k$ and $V_e(\Gamma) \neq \emptyset$, then Γ contains a maximal sequence $(w_1, \ldots, w_p)$ of consecutive external vertices with $p \geq 1$ like in Figure 6.4. Let a be the bivalent vertex such that there is an external edge from a to w_1 and let b be the bivalent vertex such that there is an external edge from w_p to b, and note that $a \neq b$.

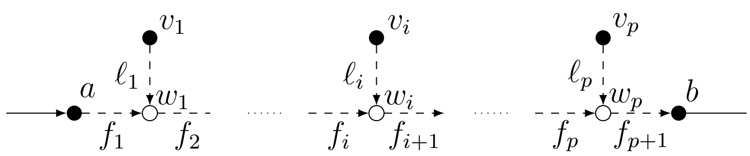


Figure 6.4 – Notations for Lemma 6.3.8

As in the previous proof, we first ignore the perturbations. Let c in $\bigcap\limits_{e \in E(\Gamma)} D_{e,\sigma}$. For any $i \in \underline{p}$, since $p_{\ell_i}(c) \in B_{\sigma(\ell_i)}$ and v_i is internal, $c(w_i) = p_{w_i}(c)$ lies in the closure $\overline{\Sigma^+_{\theta_{\sigma(\ell_i)}} \cup \Sigma^-_{\theta_{\sigma(\ell_i)}}}$ of $\Sigma^+_{\theta_{\sigma(\ell_i)}} \cup \Sigma^-_{\theta_{\sigma(\ell_i)}}$ in $C_1(M^\circ)$. Similarly, since a is internal, $c(w_1) \in \overline{\Sigma^+_{\theta_{\sigma(f_1)}} \cup \Sigma^-_{\theta_{\sigma(f_1)}}}$. Then, $c(w_1)$ lies in the closure $\overline{\psi(\mathbb{R}^n)}$ of $\psi(\mathbb{R}^n)$ in $C_1(M^\circ)$. The same argument now proves that $c(w_2)$ is in $\overline{\psi(\mathbb{R}^n)}$. By induction, $c(w_i)$ lies in $\overline{\psi(\mathbb{R}^n)}$ for any $i \in \underline{p}$.

By construction of $C_\Gamma(\psi)$, c is the limit of configurations $(c_t)_{t\in]0,1]}$ of the interior of $C_\Gamma(\psi)$ when t approaches 0. Since $c(w_i)$ is in $\overline{\psi(\mathbb{R}^n)}$ for any $i \in \underline{p}$ when $t = 0$, we can assume that c_t maps all the vertices $(w_i)_{i\in\underline{p}}$ in $N_1 \subset \mathbb{R}^{n+2}$, for any $t \in]0,1]$. For any $t \in]0,1]$, the vector $c_t(b) - c_t(a)$ is the sum of the vectors $c_t(w_1) - c_t(a), c_t(w_2) - c_t(w_1), \ldots, c_t(w_p) - c_t(w_{p-1})$, and $c_t(b) - c_t(w_p)$. Since the propagators are admissible, and since $c(a)$, $c(b)$ and the $(c(w_i))_{i\in\underline{p}}$ are in N_1, this implies that $G_0(c_t(a), c_t(b))$ is a linear combination of the vectors $((\cos(\theta_{\sigma(f_i)}), \sin(\theta_{\sigma(f_i)}), \overline{0}))_{i\in\underline{p+1}}$. Thus, $G_0(c_t(a), c_t(b))$ is in $\mathbb{S}^1 \times \{0\}^n$ for any $t \in]0,1]$. But since a and b are internal, for any $t \in]0,1]$, $G_0(c_t(a), c_t(b))$ reads $(0, 0, \overline{x}_t)$ for some $\overline{x}_t \in \mathbb{S}^{n-1}$. This is a contradiction, so $\bigcap_{e\in E(\Gamma)} D_{e,\sigma} = \emptyset$. Similarly, $\bigcap_{e\in E(\Gamma)} D^0_{e,\sigma} = \emptyset$.

Again, this property is stable since the $D_{e,\sigma}$ and the $D^0_{e,\sigma}$ are compact. □

The two above lemmas allow us to reduce our study to the graph Γ_k. The following lemma will help us in this study in the next subsection.

Lemma 6.3.9. *Let Γ_k be the BCR diagram of Figure 6.3. If c is a configuration of $\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} D_{e,\sigma}$ (resp. of $\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} D^0_{e,\sigma}$), and if there exists $j \in \underline{k}$ such that $c(w_j) \in E_{k+1}$ (resp. $c(w_j) \in E^0_{k+1}$), then $c(w_i) \notin N_2$ for any $i \in \underline{k}$.*

Proof. It suffices to prove the statement on $\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} D_{e,\sigma}$, the proof for $\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} D^0_{e,\sigma}$ is the same. Let us first ignore the perturbations, and assume without loss of generality that $j = k$, so that $c(w_k) \in E_{k+1}$.

Since v_k is internal, and since the propagators are admissible, $c(w_k) \in \Sigma_{\sigma(\ell_k)}(k+1)$. Let us prove that $c(w_{k-1}) \notin N_k$. Assume by contradiction that $c(w_{k-1}) \in N_k$. Since the external propagators are admissible, $p_{f_{k-1}}(c) = (c(w_{k-1}), c(w_k)) \in \mathbb{D}_\mu(k) \times \Sigma_{\sigma(f_{k-1})}(k+1) \cup \overline{p_b^{-1}(L_{\theta_{\sigma(f_{k-1})}}(k) \times E_{k+1})}$. Since the surfaces $\Sigma_{\sigma(f_{k-1})}(k+1)$ and $\Sigma_{\sigma(\ell_k)}(k+1)$ are disjoint, $c(w_k) \notin \Sigma_{\sigma(f_{k-1})}(k+1)$. Thus, $c(w_{k-1}) \in \overline{L_{\theta_{\sigma(f_{k-1})}}(k)} \subset C_1(M^\circ)$. But since v_{k-1} is internal, $c(w_{k-1}) \in \overline{\Sigma_{\sigma(\ell_{k-1})}(k)} \subset C_1(M^\circ)$, which is impossible since $\overline{L_{\theta_{\sigma(f_{k-1})}}(k)}$ and $\overline{\Sigma_{\sigma(\ell_{k-1})}(k)}$ do not intersect in $C_1(M^\circ)$. Thus, $c(w_{k-1}) \notin N_k$. By induction, we prove that $c(w_i) \notin N_{1+i}$ for any $i \in \underline{k}$.

Since the set $p_{w_k}{}^{-1}(E_{k+1}) \cap \left(\bigcup_{j\in\underline{k}} p_{w_j}{}^{-1}(N_2)\right)$ is compact, the property of the lemma is stable under small perturbations and the lemma is therefore true for small enough perturbations. □

6.3.2.2 A first formula for the contribution of Γ_k

For any $(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}$, set $\Delta_{\Gamma,\sigma}Z_k = I^{F_*}(\Gamma,\sigma,\psi) - I^{F^0_*}(\Gamma,\sigma,\psi_0)$, so that

$$Z_k(\psi) - Z_k(\psi_0) = \frac{1}{(2k)!}\sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} \Delta_{\Gamma,\sigma}Z_k.$$

Lemma 6.3.8 implies that $\Delta_{\Gamma,\sigma}Z_k = 0$ if Γ is not isomorphic to Γ_k.

Since $R\geq k+1$, $B_i\cap {p_b}^{-1}(N_{k+1}\times N_{k+1}) = \Theta_2(B^0_i\cap {p_b}^{-1}(N^0_{k+1}\times N^0_{k+1}))$. This yields the following lemma.

Lemma 6.3.10. *Let $\langle\cdot,\ldots,\cdot\rangle_X$ denote the algebraic intersection of several chains of a manifold X such that their codimensions add up to $\dim(X)$. Let $X_1(\Gamma_k)$ (respectively $X^0_1(\Gamma_k)$) denote the subset of $C_{\Gamma_k}(\psi)$ (respectively $C_{\Gamma_k}(\psi_0)$), whose elements are the configurations that map at least one vertex to E_{k+1}. For any edge e of Γ_k, set $D^{(1)}_{e,\sigma} = D_{e,\sigma}\cap X_1(\Gamma_k)$ and $D^{(1),0}_{e,\sigma} = D^0_{e,\sigma}\cap X^0_1(\Gamma_k)$.*

The chains $(D^{(1)}_{e,\sigma})_{e\in E(\Gamma_k)}$ and $(D^{(1),0}_{e,\sigma})_{e\in E(\Gamma_k)}$ are transverse, and

$$\Delta_{\Gamma_1,\sigma}Z_k = \big\langle (D^{(1)}_{e,\sigma})_{e\in E(\Gamma_k)}\big\rangle_{X_1(\Gamma_k)} - \big\langle (D^{(1),0}_{e,\sigma})_{e\in E(\Gamma_k)}\big\rangle_{X^0_1(\Gamma_k)}.$$

In this subsection, we prove the following lemma.

Lemma 6.3.11. *Label Γ_k as in Figure 6.3. Fix a pair $(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}})$ of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma^+_1)$ and set $\mathcal{B} = ([a^d_i])_{d\in\underline{n},i\in\underline{b_d}}$ and $\tilde{\mathcal{B}} = ([z^d_i])_{d\in\underline{n},i\in\underline{b_d}}$. For any $i\in\underline{k}$, set*

$$i^+ = \begin{cases} i+1 & \text{if } i<k,\\ 1 & \text{if } i=k.\end{cases}$$

For any $i\in\underline{k}$, any numbering σ of Γ_k, and any $\hat\varepsilon\colon\underline{k}\to\{\pm1\}$, set $\sigma_{\hat\varepsilon}(\ell_i) = \sigma(\ell_i)+(1-\hat\varepsilon(i))k$ and

$$\varepsilon_{\hat\varepsilon,\sigma}(i) = \begin{cases} +1 & \text{if } \sigma_{\hat\varepsilon}(\ell_i)<\sigma_{\hat\varepsilon}(\ell_{i^+}),\\ -1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

The invariant Z_k reads

$$Z_k(\psi) = \frac{1}{k(2k)!2^k}\sum_{\sigma\in\mathrm{Num}(\Gamma_c)}\ \sum_{\hat\varepsilon\colon\underline{k}\to\{\pm\}}\ \sum_{d\in\underline{n}}\ \sum_{p\colon\underline{k}\to\underline{b_d}} (-1)^{d+1}\prod_{j\in\underline{k}}\mathrm{lk}\left(z^d_{p(j)}, (a^{n+1-d}_{p(j^+)})^{\varepsilon_{\hat\varepsilon,\sigma}(i)}\right).$$

The rest of this section is devoted to the proof of Lemma 6.3.11.

Lemma 6.3.12. *Let $Y(\sigma)$ denote the manifold $\prod_{i\in\underline{k}} \Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2)$. Similarly, set $Y^0(\sigma) = \prod_{i\in\underline{k}} \Sigma^0_{\sigma(\ell_i)}(2)$. For any $i \in \underline{k}$, set $Y_i(\sigma) = \Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2) \times \Sigma_{\sigma(\ell_{i+})}(2)$ and $B_{i,\sigma} = B_{\sigma(f_i)} \cap Y_i(\sigma)$ and similarly define $Y^0_i(\sigma)$ and $B^0_{i,\sigma} = B^0_{\sigma(f_i)} \cap Y^0_i(\sigma)$. Let π_i denote the projection map $Y(\sigma) \to Y_i(\sigma)$, and set $P_{i,\sigma} = \pi_i^{-1}(B_{i,\sigma})$. Similarly define $\pi^0_i \colon Y^0(\sigma) \to Y^0_i(\sigma)$ and $P^0_{i,\sigma}$.*

The chains $(P_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ are transverse, the chains $(P^0_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ are transverse, and

$$\Delta_{\Gamma_k,\sigma} Z_k = -\frac{1}{2^k}\left(\langle P_{1,\sigma}, \cdots, P_{k,\sigma}\rangle_{Y(\sigma)} - \langle P^0_{1,\sigma}, \ldots, P^0_{k,\sigma}\rangle_{Y^0(\sigma)}\right).$$

Proof. Let $X_2(\Gamma_k)$ denote the set of configurations such that all the external vertices are mapped to E_2, and set $D^{(2)}_{e,\sigma} = 2D_{e,\sigma} \cap X_2(\Gamma_k)$. For simplicity, we assume that $D^{(2)}_{e,\sigma}$ is a variety. Similarly define $X^0_2(\Gamma_k)$ and $D^{(2),0}_{e,\sigma}$. Lemma 6.3.9 ensures that the intersection of the supports of the $D^{(1)}_{e,\sigma}$ is contained in $\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} D^{(2)}_{e,\sigma}$. On the other hand, $\left(\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} D^{(2)}_{e,\sigma}\right) \setminus \left(\bigcap_{e\in E(\Gamma_k)} \mathrm{Supp}(D^{(1)}_{e,\sigma})\right)$ is contained in $p_b^{-1}((N_R)^k)$. Then,

$$\langle D^{(1)}_{e,\sigma}\rangle_{X_1(\Gamma_k)} = \frac{1}{2^{2k}}\langle D^{(2)}_{e,\sigma}\rangle_{X_2(\Gamma_k)} + \rho_0,$$

where ρ_0 does not depend on the knot. This implies that

$$\Delta_{\Gamma_k,\sigma} Z_k = \frac{1}{2^{2k}}\left(\langle D^{(2)}_{e,\sigma}\rangle_{X_2(\Gamma_k)} - \langle D^{(2),0}_{e,\sigma}\rangle_{X^0_2(\Gamma_k)}\right).$$

Let us check that $\left(\varphi \colon c \in \bigcap_{i\in\underline{k}} D^{(2)}_{\ell_i,\sigma} \mapsto (c(w_i))_{i\in\underline{k}} \in Y(\sigma)\right)$ is well-defined and is an orientation-reversing diffeomorphism.

The definition of $X_2(\Gamma_k)$ and of admissible propagators implies that if $c \in \bigcap_{i\in\underline{k}} D^{(2)}_{\ell_i,\sigma}$, then $(c(v_i), c(w_i)) \in B_{\sigma(\ell_i)}$ for any $i \in \underline{k}$. Then, for any $i \in \underline{k}$, since v_i is internal and because of Definition 6.3.4, $c(w_i) \in \Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2)$. This implies that φ is actually valued in $Y(\sigma)$. It is a diffeomorphism since the disk $\mathbb{D}_\mu(1)$ meets the knot in exactly one point.

Let us check that φ reverses the orientations. Let $n_i(x)$ denote the positive normal direction to $\Sigma_{\sigma(\ell_i)}$ at x. The normal bundle to $\bigcap_{i\in\underline{k}} D^{(2)}_{\ell_i,\sigma}$ at c is

$$\mathfrak{N}_c\left(\bigcap_{i\in\underline{k}} D^{(2)}_{\ell_i,\sigma}\right) = \prod_{i\in\underline{k}} \left(T_{c(v_i)}\psi(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}.n_i(c(w_i))\right),$$

and we proved in Lemma 6.2.8 that $C_{\Gamma_k}(\psi)$ is oriented as

$$\begin{aligned} T_c C_{\Gamma_k}(\psi) &= -\prod_{i\in\underline{k}} \left(T_{c(v_i)}\psi(\mathbb{R}^n) \times T_{c(w_i)}M^\circ\right) \\ &= -\prod_{i\in\underline{k}} \left(T_{c(v_i)}\psi(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}.n_i(c(w_i)) \times T_{c(w_i)}\Sigma_{\sigma(\ell_i)}\right) \\ &= -\left(\prod_{i\in\underline{k}} \left(T_{c(v_i)}\psi(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}.n_i(c(w_i))\right)\right) \times \left(\prod_{i\in\underline{k}} T_{c(w_i)}\Sigma_{\sigma(\ell_i)}\right), \end{aligned}$$

where the last equality comes from the fact that the Seifert surfaces are even-dimensional. This proves that $D_{L,\sigma} = \bigcap\limits_{i\in\underline{k}} D^{(2)}_{\ell_i,\sigma}$ is oriented as $-\varphi^{-1}(Y(\sigma))$.

Let us state without proof the following easy lemma, which we will use in the rest of this proof.

Lemma 6.3.13. *Let P and Q be two oriented submanifolds of an oriented manifold R. Let $\mathfrak{N}^Q(P\cap Q)$ denote the normal bundle of $P\cap Q$ as a submanifold of Q. For any $x \in P\cap Q$,*

$$\mathfrak{N}^Q_x(P\cap Q) = (-1)^{(\dim(R)-\dim(Q))(\dim(R)-\dim(P))}\mathfrak{N}_x P.$$

For any $i \in \underline{k}$, the coorientation of the submanifolds $D^{(2)}_{f_i,\sigma}\cap D_{L,\sigma}$ in $D_{L,\sigma}$ and of the submanifolds $D^{(2)}_{f_i,\sigma}$ in $C_\Gamma(\psi)$ differ by a factor $(-1)^{k(n+1)(n+1)} = 1$, so

$$\begin{aligned} \left\langle \left(D^{(2)}_{e,\sigma}\right)_{e\in E(\Gamma_k)} \right\rangle_{X_1(\Gamma_k)} &= \left\langle D^{(2)}_{f_1,\sigma}\cap D_{L,\sigma}, \ldots, D^{(2)}_{f_k,\sigma}\cap D_{L,\sigma}\right\rangle_{D_{L,\sigma}} \\ &= -\left\langle \varphi(D^{(2)}_{f_1,\sigma}\cap D_{L,\sigma}), \ldots, \varphi(D^{(2)}_{f_k,\sigma}\cap D_{L,\sigma})\right\rangle_{Y(\sigma)}, \end{aligned}$$

where the sign comes from the fact that φ reverses the orientation.

Now, for any $i \in \underline{k}$, $\varphi(D^{(2)}_{f_i,\sigma}\cap D_{L,\sigma})$ is cooriented as $D_{f_i,\sigma} = p_{f_i}^{-1}(B_{\sigma(f_i)})$, i.e. as $B_{\sigma(f_i)}$ in $C_2(M^\circ)$. On the other hand, $P_{i,\sigma}$ is cooriented as $B_{\sigma(f_i)}\cap(\Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2)\times\Sigma_{\sigma(\ell_{i^+})}(2))$ in $\Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2)\times\Sigma_{\sigma(\ell_{i^+})}(2)$, i.e. as $(-1)^{2(n+1)}B_{\sigma(f_i)} = B_{\sigma(f_i)}$ in $C_2(M^\circ)$. Because of the 2 factors in the definition of the $D^{(2)}_{f_i,\sigma}$, this yields

$$\left\langle \left(D^{(2)}_{e,\sigma}\right)_{e\in E(\Gamma_k)} \right\rangle_{X_2(\Gamma_k)} = -2^k\langle P_{1,\sigma},\cdots,P_{k,\sigma}\rangle_{Y(\sigma)}.$$

Similarly, $\left\langle \left(D^{(2),0}_{e,\sigma}\right)_{e\in E(\Gamma_k)} \right\rangle_{X^0_2(\Gamma_k)} = -2^k\langle P^0_{1,\sigma},\cdots,P^0_{k,\sigma}\rangle_{Y^0(\sigma)}$. □

We are going to define a manifold $\overline{Y(\sigma)}$ in which the chains $P_{i,\sigma}$ and $P^0_{i,\sigma}$ embed, in order to compute intersection numbers of the previous chains with boundaries in terms of intersection numbers of cycles inside one common manifold.

Lemma 6.3.14. *For $i \in \underline{2k}$, let $S_i^{\pm}$ denote the gluing of $\Sigma_i^{\pm} \cap E_2$ and $-\left((\Sigma_i^{\pm})^0 \cap E_2^0\right)$ along their boundaries, set $S_i = S_i^+ \sqcup S_i^-$, and let $S_i^{\leq 3}$ denote the set of points of S_i that come from a point in N_3 or N_3^0 before the gluing. For any $i \in \underline{k}$, set $\overline{Y_i}(\sigma) = S_{\sigma(\ell_i)} \times S_{\sigma(\ell_{i^+})}$, and set $\overline{Y}(\sigma) = \prod_{i \in \underline{k}} S_{\sigma(\ell_i)}$. There exist canonical projection maps $\overline{\pi_i}\colon \overline{Y}(\sigma) \to \overline{Y_i}(\sigma)$ for any $i \in \underline{k}$. The chains $(P_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ and $(P^0_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ naturally embed into $\overline{Y}(\sigma)$, and the chains $(B_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ and $(B^0_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ naturally embed into $\overline{Y_i}(\sigma)$. With these notations,*

- *the boundaries $\partial B_{i,\sigma}$ and $\partial B^0_{i,\sigma}$ lie in $S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$,*
- *for any $i \in \underline{k}$, there exists an $(n+1)$-chain $\hat{B}_{i,\sigma}$ in $S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$ such that $\partial \hat{B}_{i,\sigma} = \partial B^0_{i,\sigma} - \partial B_{i,\sigma}$.*

The manifold $S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$ does not depend on the knot. The chains $(\hat{B}_{i,\sigma})_{i\in\underline{k}}$ can be chosen such that they do not depend on the knot, either.

Proof. Fix $i \in \underline{k}$. Since the Seifert surfaces are parallel, the chain $B_{i,\sigma}$ does not meet $Y_i(\sigma) \cap (N_2 \times E_3)$ or $Y_i(\sigma) \cap (E_3 \times N_2)$. Then, $\partial B_{i,\sigma}$ is necessarily contained in $\partial Y_i(\sigma) \cap (N_3 \times N_3)$. The same argument proves that $\partial B^0_{i,\sigma}$ is contained in $\partial Y^0_i(\sigma) \cap (N^0_3 \times N^0_3)$. Therefore, the chain $Q_{i,\sigma} = \partial B^0_{i,\sigma} - \partial B_{i,\sigma}$ is a cycle of $S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$. Since the propagators are standard inside ${p_b}^{-1}(N_3 \times N_3)$, the cycle $Q_{i,\sigma}$ does not depend on the knot.

For any $j \in \underline{k}$, let $\ell_j^{\pm}$ denote the boundary $\partial(\Sigma_j^{\pm} \cap E_2)$, which is involved in the gluing in the definition of $S_j^{\pm}$, and let $x_j^{\pm} \in \ell_j^{\pm}$. Since the product $S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$ retracts onto $(\ell^+_{\sigma(\ell_i)} \sqcup \ell^-_{\sigma(\ell_i)}) \times (\ell^+_{\sigma(\ell_{i^+})} \sqcup \ell^-_{\sigma(\ell_{i^+})})$, $H_n(S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}) = \mathbb{Q}^8$, with a basis given by the eight spheres $[\ell^{\varepsilon}_{\sigma(\ell_i)} \times x^{\varepsilon'}_{\sigma(\ell_{i^+})}]$ and $[x^{\varepsilon}_{\sigma(\ell_i)} \times \ell^{\varepsilon'}_{\sigma(\ell_{i^+})}]$ for $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm\}$. Let $(s_r)_{1\leq r\leq 8}$ denote these spheres.

The manifold $S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$ contains $T^0_1 = (S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}) \cap (\Sigma^0_{\sigma(\ell_i)}(2) \times \Sigma^0_{\sigma(\ell_{i^+})}(2))$ and $T_1 = (S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}) \cap (\Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2) \times \Sigma_{\sigma(\ell_{i^+})}(2))$. T^0_1 and T_1 are diffeomorphic to each other because the surfaces Σ^0_j and Σ_j are identical inside N_3 for any j. Denote by $\Theta_T\colon T^0_1 \to T_1$ the induced diffeomorphism.

Note that the eight chains $(s_r)_{1\leq r\leq 8}$ also define bases $([s_r])_{1\leq r\leq 8}$ of $H_n(T^0_1)$ and $H_n(T_1)$. The definition of the spheres $(s_r)_{1\leq r\leq 8}$ implies that $\Theta_T(s_r) = s_r$ for any $1 \leq r \leq 8$. Since the propagators do not depend on the knot inside $N_3 \times N_3$, $\Theta_T(\partial B^0_{i,\sigma}) = \partial B_{i,\sigma}$. The cycle $\partial B^0_{i,\sigma}$ defines a class in $H_n(T^0_1) = H_n(S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})})$. This class reads $[\partial B^0_{i,\sigma}] = \sum_{r=1}^{8} \alpha_{i,r}[s_r]$ for some rational numbers $(\alpha_{i,r})_{1\leq r\leq 8}$. Apply Θ_T to this identity to get $[\partial B_{i,\sigma}] = \sum_{r=1}^{8} \alpha_{i,r}[s_r]$. This means that $[Q_i] = 0$ in $H_n(S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})})$ and proves the existence of $\hat{B}_{i,\sigma}$.

Since the cycle $Q_i \subset S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_i)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{i^+})}$ is independent of the knot, the chain $\hat{B}_{i,\sigma}$ can be chosen independently of the knot. □

Lemma 6.3.15. *Let b_d denote the d-th Betti number of S^+_1. It is possible to choose two families of cycles $((a^d_{1,j})^+)_{0\leq d\leq n+1, j\in \underline{b_d}}$ and $((z^d_{1,j})^+)_{0\leq d\leq n+1, j\in \underline{b_d}}$ in S^+_1 such that:*

- *For any $d \in \underline{n}$, and any $j \in \underline{b_d}$, $[(a^d_{1,j})^+] = [a^d_j]$ and $[(z^d_{1,j})^+] = [z^d_j]$, where the cycles $(a^d_j)_{j,d}$ and $(z^d_j)_{j,d}$ are defined in Lemma 6.3.11.*

  For $d = n+1$, $(a^{n+1}_{1,1})^+ = (z^{n+1}_{1,1})^+ = S^+_1$. For $d = 0$, $(a^0_{1,1})^+ = (z^0_{1,1})^+$ is a point.

  In particular, for any $d \in \{0, \dots, n+1\}$, $([(a^d_{1,j})^+])_{j\in\underline{b_d}}$ and $([(z^d_{1,j})^+])_{j\in\underline{b_d}}$ are bases of $H_d(S^+_1)$, and for any $(j,j') \in \underline{b_d}^2$, we have the duality relation $\langle [(a^d_{1,j})^+], [(z^{n+1-d}_{1,j'})^+] \rangle_{S^+_1} = \delta_{j,j'}$.

- *For any $d \in \underline{n}$, the cycles $((a^d_{1,j})^+)_{j\in\underline{b_d}}$ and $((z^d_{1,j})^+)_{j\in\underline{b_d}}$ are contained in $\Sigma^+_1 \cap E_{k+1} \subset S^+_1$.*

- *The point $(a^0_{1,1})^+ = (z^0_{1,1})^+$ is in $\partial(\Sigma^+_1 \cap E_2)$.*

- *For any $d > \frac{n+1}{2}$, and any $j \in \underline{b_d}$, $(a^d_{1,j})^+ = (z^d_{1,j})^+$, and for any $d < \frac{n+1}{2}$ and any $j \in \underline{b_d}$, $(z^d_{1,j})^+ = (-1)^d (a^d_{1,j})^+$.*

Since all the Seifert surfaces $(\Sigma^\pm_i)_{i\in\underline{k}}$ are obtained from Σ^+_1 by pushing Σ^+_1 in the positive normal direction, these families yield similar families $((a^d_{i,j})^\pm)_{0\leq d\leq n+1, j\in\underline{b_d}}$ and $((z^d_{i,j})^\pm)_{0\leq d\leq n+1, j\in\underline{b_d}}$ in $H_*(S^\pm_i)$.

Proof. It is possible to choose two families such that the first three properties hold because the map $H_d(\Sigma^+_1 \cap E_3) \to H_d(S^+_1)$ induced by the inclusion is an isomorphism for $0 \leq d \leq n$, which can be deduced from Mayer-Vietoris formula.

Due to the symmetry (and antisymmetry) properties of the intersection number, we can also choose these chains such that the last property holds. □

Lemma 6.3.16. *For any $i \in \underline{k}$, define the cycle $\overline{B_{i,\sigma}} = B_{i,\sigma} - B^0_{i,\sigma} + \hat{B}_{i,\sigma}$ of $\overline{Y_i}(\sigma)$.*

Its class in $H_{n+1}(\overline{Y_i}(\sigma))$ reads

$$[\overline{B_{i,\sigma}}] = \sum_{d\in\underline{n}} \sum_{(p,q,\varepsilon,\varepsilon')\in(\underline{b_d})^2\times\{\pm\}^2} \mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right) \left[(a^d_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right] + R^B_{i,\sigma},$$

where $R^B_{i,\sigma}$ reads $\sum_{d\in\{0,n+1\}} \sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\{\pm\}^2} \alpha^{(i)}_{d,1,1,\varepsilon,\varepsilon'} \left[(a^d_{\sigma(\ell_i),1})^\varepsilon \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}\right]$, with rational coefficients $(\alpha^{(i)}_{d,1,1,\varepsilon,\varepsilon'})_{d\in\{0,n+1\},(\varepsilon,\varepsilon')\in\{\pm\}^2}$ independent of the knot.

Proof. The families of chains $((a^d_{\sigma(\ell_i),p})^+)_{0\leq d\leq n+1, p\in \underline{b_d}}$ and $((z^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p})^+)_{0\leq d\leq n+1, p\in \underline{b_d}}$ induce the two following bases of $H_{n+1}(\overline{Y_i}(\sigma))$:

$$\left([(a^d_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}]\right)_{0\leq d\leq n+1, 1\leq p,q\leq b_d, (\varepsilon,\varepsilon')\in\{\pm\}^2},$$

$$\text{and } \left([(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (a^{d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}]\right)_{0\leq d\leq n+1, 1\leq p,q\leq b_d, (\varepsilon,\varepsilon')\in\{\pm\}^2}.$$

These bases are dual is the sense that for any $p, p', q, q', d, d', \varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$,

$$\left\langle [(a^d_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}], [(z^{n+1-d'}_{\sigma(\ell_i),p'})^\eta \times (a^{d'}_{\sigma(\ell_{i^+}),q'})^{\eta'}]\right\rangle_{\overline{Y}(\sigma)} = \delta^{(d',p',q',\eta,\eta')}_{(d,p,q,\varepsilon,\varepsilon')},$$

where δ^y_x is the Kronecker delta. There exist coefficients such that

$$\left[\overline{B_{i,\sigma}}\right] = \sum_{d=0}^{n+1} \sum_{(p,q,\varepsilon,\varepsilon')\in(\underline{b_d})^2\times\{\pm\}^2} \alpha^{(i)}_{d,p,q,\varepsilon,\varepsilon'} \left[(a^d_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right].$$

For any $d \in \underline{n}$, and any $(p, q, \varepsilon, \varepsilon') \in (\underline{b_d})^2 \times \{\pm\}^2$,

$$\begin{aligned}
\alpha^{(i)}_{d,p,q,\varepsilon,\varepsilon'} &= \left\langle \left[\overline{B_{i,\sigma}}\right], \left[(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right]\right\rangle_{\overline{Y_i}(\sigma)} \\
&= \left\langle B_{\sigma(f_i)}, \left[(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon \times (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right]\right\rangle_{C_2(M^\circ)} \\
&= \mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^\varepsilon, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right),
\end{aligned}$$

where the first equality comes from the duality of the bases above, the second one comes from the second point of Lemma 6.3.15, and the third one comes from Lemma 6.2.15.

Set $R^B_{i,\sigma} = \sum_{d\in\{0,n+1\}} \sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\{\pm\}^2} \alpha^{(i)}_{d,1,1,\varepsilon,\varepsilon'} \left[(a^d_{\sigma(\ell_i),1})^\varepsilon \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}\right]$. The duality allows us to compute the coefficients that appear in $R^B_{i,\sigma}$, too. First, $\alpha^{(i)}_{0,1,1,\varepsilon,\varepsilon'} = \langle[\overline{B_{i,\sigma}}], [S^\varepsilon_{\sigma(\ell_i)} \times (a^0_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}]\rangle_{\overline{Y_i}(\sigma)}$. The chain $S^\varepsilon_{\sigma(\ell_i)} \times (a^0_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}$ is contained in $S^\varepsilon_{\sigma(\ell_i)} \times \partial(\Sigma^{\varepsilon'}_{\sigma(\ell_{i^+})} \cap E_2)$. Then, it only meets $B_{i,\sigma}$ inside $\Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2) \times \partial(\Sigma^{\varepsilon'}_{\sigma(\ell_{i^+})} \cap E_2)$. Let us prove that $B_{i,\sigma} \cap (\Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2) \times \partial(\Sigma^{\varepsilon'}_{\sigma(\ell_{i^+})} \cap E_2))$ lies in $p_b^{-1}(N_3 \times N_3)$. If a configuration in this intersection was in $E_3 \times \partial N_2$, it would be in $(\Sigma_{\sigma(f_i)}(3) \times \mathbb{D}_\mu(2)) \cup (E_3 \times L_{\theta_{\sigma(f_i)}}(2))$. Since $\Sigma_{\sigma(f_i)}(2) \cap \Sigma_{\sigma(\ell_i)}(2) = \emptyset$ and $\Sigma_{\sigma(\ell_{i^+})}(2) \cap L_{\theta_{\sigma(f_i)}}(2) = \emptyset$, this is impossible. Then, $\langle B_{i,\sigma}, S^\varepsilon_{\sigma(\ell_i)} \times (a^0_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}\rangle_{S_{\sigma(\ell_i)}\times S_{\sigma(\ell_{i^+})}}$ only counts intersection points in $p_b^{-1}(N_3 \times N_3)$. By construction, this implies that this intersection number does not depend on the knot. Similarly, $\langle B^0_{i,\sigma}, S^\varepsilon_{\sigma(\ell_i)} \times (a^0_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}\rangle_{S_{\sigma(\ell_i)}\times S_{\sigma(\ell_{i^+})}}$ does not depend on the knot, and $\langle \hat{B}_{i,\sigma}, S^\varepsilon_{\sigma(\ell_i)} \times (a^0_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\varepsilon'}\rangle_{S_{\sigma(\ell_i)}\times S_{\sigma(\ell_{i^+})}}$ does not depend on the knot because of Lemma 6.3.14. This proves that $\alpha^{(i)}_{0,1,1,\varepsilon,\varepsilon'}$ does not depend on the knot. The same argument proves that $\alpha^{(i)}_{n+1,1,1,\varepsilon,\varepsilon'}$ does not depend on the knot, so that the coefficients of $R^B_{i,\sigma}$ do not depend on the knot. $\square$

Lemma 6.3.17. *Let J denote the set of tuples $(d,p,q,\hat\varepsilon)$ such that $d \in \underline{n}$, $(p,q) \in (\underline{b_d})^2$, and $\hat\varepsilon$ is a map $\hat\varepsilon\colon \underline{k} \to \{\pm\}$. For any $i \in \underline{k}$, set $\overline{P_{i,\sigma}} = P_{i,\sigma} - P^0_{i,\sigma} + \overline{\pi}_i^{-1}(\hat{B}_{i,\sigma})$. With these notations,*

$$\begin{aligned}&[\overline{P_{i,\sigma}}] = R_{i,\sigma}\\ &+ \sum_{(d,p,q,\hat\varepsilon)\in J} \mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^{\hat\varepsilon(i)}, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\hat\varepsilon(i^+)}\right)\left[(a^d_{\sigma(\ell_i),p})^{\hat\varepsilon(i)} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\hat\varepsilon(i^+)} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat\varepsilon(j)}_{\sigma(\ell_j)}\right],\end{aligned}$$

where $R_{i,\sigma}$ reads

$$R_{i,\sigma} = \sum_{d\in\{0,n+1\}} \sum_{\hat\varepsilon\colon \underline{k}\to\{\pm\}} \alpha^{(i)}_{d,\hat\varepsilon}\left[(a^d_{\sigma(\ell_i),1})^{\hat\varepsilon(i)} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),1})^{\hat\varepsilon(i^+)} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat\varepsilon(j)}_{\sigma(\ell_j)}\right],$$

with coefficients $(\alpha^{(i)}_{d,\hat\varepsilon})_{d,\hat\varepsilon}$ that do not depend on the knot.

Proof. We have $\overline{P_{i,\sigma}} = \overline{\pi}_i^{-1}(\overline{B_{i,\sigma}})$, so Lemma 6.3.16 implies

$$\begin{aligned}&\overline{P_{i,\sigma}} = R_{i,\sigma}\\ &+\sum_{d\in\underline{n}} \sum_{(p,q,\varepsilon,\varepsilon')\in\underline{b_d}^2\times\{\pm\}^2} \mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^{\varepsilon}, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right)\left[\overline{\pi}_i^{-1}\left((a^d_{\sigma(\ell_i),p})^{\varepsilon} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right)\right],\end{aligned}$$

with $R_{i,\sigma}$ as in the lemma with $\alpha^{(i)}_{d,\hat\varepsilon} = \alpha^{(i)}_{d,1,1,\hat\varepsilon(i),\hat\varepsilon(i^+)}$. But for any $d \in \underline{n}$, any p and q in $\underline{b_d}$, and any $(\varepsilon,\varepsilon') \in \{\pm\}^2$,

$$\begin{aligned}&\overline{\pi}_i^{-1}\left((a^d_{\sigma(\ell_i),p})^{\varepsilon} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}\right)\\ &\qquad = \sum_{\hat\varepsilon\colon \underline{k}\setminus\{i,i^+\}\to\{\pm\}^2} \eta_{\hat\varepsilon}\left((a^d_{\sigma(\ell_i),p})^{\varepsilon} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat\varepsilon(j)}_{\sigma(\ell_j)}\right)\end{aligned}$$

for some signs $(\eta_{\hat\varepsilon})_{\hat\varepsilon}$. Since for any $\hat\varepsilon$ the chain $(a^d_{\sigma(\ell_i),p})^{\varepsilon} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat\varepsilon(j)}_{\sigma(\ell_j)}$ is cooriented by $(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p})^{\varepsilon} \times (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),q})^{\varepsilon'}$, the signs $(\eta_{\hat\varepsilon})_{\hat\varepsilon}$ are all positive. The lemma follows. □

Lemma 6.3.18. *Let J' denote the set of tuples $(d,p,q,\hat\varepsilon)$ such that $d \in \{0,\dots,n+1\}$, $(p,q) \in (\underline{b_d})^2$, and $\hat\varepsilon\colon \underline{k} \to \{\pm\}$. (We have $J \subset J'$.) For $(d_i,p_i,q_i,\hat\varepsilon_i)_{i\in\underline{k}} \in (J')^{\underline{k}}$,*

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(\left[(a^{d_i}_{\sigma(\ell_i),p_i})^{\hat\varepsilon_i(i)} \times (z^{n+1-d_i}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat\varepsilon_i(i^+)} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat\varepsilon_i(j)}_{\sigma(\ell_j)}\right]\right)_{i\in\underline{k}}\right\rangle\\ &\quad = \begin{cases}(-1)^{d_1} & \text{if } d_1 = \ldots = d_k,\ \hat\varepsilon_1 = \ldots = \hat\varepsilon_k, \text{ and for any } i \in \underline{k},\ q_i = p_{i^+},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

Proof. If we do not have $\hat{\varepsilon}_1 = \ldots = \hat{\varepsilon}_k$ the intersection is empty. If we do not have $d_1 = \ldots = d_k$, there exists an integer $i \in \underline{k}$ such that $d_i > d_{i^+}$ and the chains $(z^{n+1-d_i}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}_i(i)}$ and $(a^{d_{i^+}}_{\sigma(\ell_{i^+}),p_{i^+}})^{\hat{\varepsilon}_{i^+}(i)}$ do not intersect, up to small perturbations, so the intersection number of the lemma is zero. Let us now assume $\hat{\varepsilon}_1 = \ldots = \hat{\varepsilon}_k = \hat{\varepsilon}$ and $d_1 = \ldots = d_k = d$. The chain $(a^d_{\sigma(\ell_i),p_i})^{\hat{\varepsilon}(i)} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat{\varepsilon}(j)}_{\sigma(\ell_j)}$ is cooriented by $(-1)^d\mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_i),p_i})^{\hat{\varepsilon}(i)} \times \mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}$. Then, the normal bundle of the intersection of the lemma is oriented as

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\in\underline{k}}\left((-1)^d\mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_i),p_i})^{\hat{\varepsilon}(i)} \times \mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right)\\
=&(-1)^{kd}\mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_1),p_1})^{\hat{\varepsilon}(1)} \times \left(\prod_{i=1}^{k-1}\left(\mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)} \times \mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p_{i^+}})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right)\right) \times \mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_1),q_k})^{\hat{\varepsilon}(1)}\\
=&(-1)^{(k+1)d}\mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_1),q_k})^{\hat{\varepsilon}(1)} \times \mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_1),p_1})^{\hat{\varepsilon}(1)} \times \prod_{i=1}^{k-1}\left(\mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)} \times \mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p_{i^+}})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right)\\
=&(-1)^d\prod_{i\in\underline{k}}\left(\mathfrak{N}(a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p_{i^+}})^{\hat{\varepsilon}(i^+)} \times \mathfrak{N}(z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right).
\end{aligned}$$

This implies that

$$\begin{aligned}
&\left\langle\left(\left[(a^d_{\sigma(\ell_i),p_i})^{\hat{\varepsilon}(i)} \times (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)} \times \prod_{j\notin\{i,i^+\}} S^{\hat{\varepsilon}(j)}_{\sigma(\ell_j)}\right]\right)_{i\in\underline{k}}\right\rangle\\
&\qquad = (-1)^d\prod_{i\in\underline{k}}\left\langle(a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p_{i^+}})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}, (z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_{i^+}),q_i})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right\rangle_{S^{\varepsilon(i^+)}_{\sigma(\ell_{i^+})}} = (-1)^d\prod_{i\in\underline{k}}\delta_{q_i,p_{i^+}}
\end{aligned}$$

and concludes the proof. ☐

Lemma 6.3.19. *For any numbering σ of Γ_k,*

$$\Delta_{\Gamma_k,\sigma}Z_k = \frac{1}{2^k}\sum_{d\in\underline{n}}\sum_{\hat{\varepsilon}\colon \underline{k}\to\{\pm\}}\sum_{p\colon \underline{k}\to\underline{b_d}}(-1)^{(d+1)}\prod_{i\in\underline{k}}\mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p(i)})^{\hat{\varepsilon}(i)}, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p(i^+)})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right).$$

Proof. Lemmas 6.3.17 and 6.3.18 imply that

$$\begin{aligned}
&\langle\overline{P_{1,\sigma}}, \cdots, \overline{P_{k,\sigma}}\rangle_{\overline{Y}(\sigma)}\\
&\qquad =\sum_{d\in\underline{n}}\sum_{\hat{\varepsilon}\colon \underline{k}\to\{\pm\}}\sum_{p\colon \underline{k}\to\underline{b_d}}(-1)^d\prod_{i\in\underline{k}}\mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p(i)})^{\hat{\varepsilon}(i)}, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p(i^+)})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right) + \rho_1,
\end{aligned}$$

where $\rho_1 = \langle R_{1,\sigma}, \ldots, R_{k,\sigma}\rangle_{\overline{Y}(\sigma)}$ does not depend on the knot. For any $i \in \underline{k}$ and $j \in \{0, 1, 2\}$, set

$$P_{i,\sigma}(j) = \begin{cases} P_{i,\sigma} & \text{if } j = 0,\\ P^0_{i,\sigma} & \text{if } j = 1,\\ \widehat{P_{i,\sigma}} = \overline{\pi_i}^{-1}(\hat{B}_{i,\sigma}) & \text{if } j = 2,\end{cases}$$

so that $\overline{P_{i,\sigma}} = P_{i,\sigma}(0) - P_{i,\sigma}(1) + P_{i,\sigma}(2)$. By transversality, $\bigcap_{i\in\underline{k}} \mathrm{Supp}(\overline{P_{i,\sigma}}) \subset \bigcap_{i\in\underline{k}} (\mathrm{Int}(P_{i,\sigma}(0)) \sqcup \mathrm{Int}(P_{i,\sigma}(1)) \sqcup \mathrm{Int}(P_{i,\sigma}(2)))$, so that

$$\langle \overline{P_{1,\sigma}}, \cdots, \overline{P_{k,\sigma}} \rangle_{\overline{Y}(\sigma)} = \sum_{j\colon \underline{k}\to\{0,1,2\}} (-1)^{j(1)+\ldots+j(k)} \langle (P_{i,\sigma}(j(i)))_{i\in\underline{k}} \rangle_{\overline{Y}(\sigma)}.$$

For $r \in [3, R-1]$, let $S_i^{\leq r}$ denote the set of points of S_i that come from a point of N_r or N_r^0 in the gluing that defines S_i in Lemma 6.3.14. Let us prove that for a configuration $c \in \bigcap_{i\in\underline{k}} P_{i,\sigma}(j(i))$, if $c(w_p) \in S^{\leq r}_{\sigma(\ell_p)}$ for some $r \in [3, R-1]$ and $p \in \underline{k}$, then $c(w_{p^+}) \in S^{\leq r+1}_{\sigma(\ell_{p^+})}$.

- If $j(p) = 0$, then $(c(w_p), c(w_{p^+})) \in B_{\sigma(f_p)}$. If $c(w_{p^+})$ was in E_{r+1}, then we would have $(c(w_p), c(w_{p^+})) \in {p_b}^{-1}(N_r \times E_{r+1})$, so $c(w_p) \in L_{\theta_{\sigma(f_p)}}(r)$ or $c(w_{p^+}) \in \Sigma_{\sigma(f_p)}(r+1)$. Since the Seifert surfaces $(\Sigma_j^\varepsilon)_{j\in\underline{k},\varepsilon=\pm}$ are pairwise parallel, this is impossible and $c(w_{p^+}) \in \Sigma_{\sigma(\ell_{p^+})}(2) \cap N_{r+1} \subset S^{\leq r+1}_{\sigma(\ell_{p^+})}$.
- If $j(p) = 1$, we similarly prove that $c(w_{p^+}) \in \Sigma^0_{\sigma(\ell_{p^+})}(2) \cap N^0_{r+1} \subset S^{\leq r+1}_{\sigma(\ell_{p^+})}$.
- If $j(p) = 2$, since $\hat{B}_{p,\sigma} = \overline{\pi_i}(\widehat{P_{p,\sigma}}) \subset S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_p)} \times S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{p^+})}$ and $r \geq 2$, then $c(w_{p^+}) \in S^{\leq 3}_{\sigma(\ell_{p^+})} \subset S^{\leq r+1}_{\sigma(\ell_{p^+})}$

A finite induction proves that if j takes the value 2, then the intersection number $\langle (P_{i,\sigma}(j(i)))_{i\in\underline{k}} \rangle_{\overline{Y}(\sigma)}$ only counts configurations in $\prod_{i\in\underline{k}} S^{\leq R}_{\sigma(\ell_i)}$, where these chains are independent of the knot. This implies that

$$\langle \overline{P_{1,\sigma}}, \cdots, \overline{P_{k,\sigma}} \rangle_{Y(\sigma)} = \langle P_{1,\sigma}, \cdots, P_{k,\sigma} \rangle_{Y(\sigma)} + (-1)^k \langle P^0_{1,\sigma}, \cdots, P^0_{k,\sigma} \rangle_{Y(\sigma)} + \rho_2,$$

where ρ_2 is independent of the knot. Note that the quantity $\rho_3 = -\rho_2 + ((-1)^{k+1} - 1)\langle P^0_{1,\sigma}, \cdots, P^0_{k,\sigma} \rangle_{Y(\sigma)}$ does not depend on the knot. Lemma 6.3.12 reads

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Gamma_k,\sigma} Z_k &= -\frac{1}{2^k}\left(\langle P_{1,\sigma}, \cdots, P_{k,\sigma} \rangle_{Y(\sigma)} - \langle P^0_{1,\sigma}, \ldots, P^0_{k,\sigma} \rangle_{Y^0(\sigma)}\right) \\
&= -\frac{1}{2^k}\left(\langle \overline{P_{1,\sigma}}, \cdots, \overline{P_{k,\sigma}} \rangle_{Y(\sigma)} + \rho_3\right) \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{d\in\underline{n}} \sum_{\hat{\varepsilon}\colon \underline{k}\to\{\pm\}} \sum_{p\colon \underline{k}\to\underline{b_d}} (-1)^{d+1} \prod_{i\in\underline{k}} \mathrm{lk}\left((z^{n+1-d}_{\sigma(\ell_i),p(i)})^{\hat{\varepsilon}(i)}, (a^d_{\sigma(\ell_{i^+}),p(i^+)})^{\hat{\varepsilon}(i^+)}\right) \\
&\quad -\frac{\rho_3 + \rho_1}{2^k}.
\end{aligned}$$

If ψ is the trivial knot, this formula yields $\rho_1 + \rho_3 = 0$. This concludes the proof of Lemma 6.3.19. $\square$

Note that

- for any $\sigma \in \mathrm{Num}(\Gamma_k)$, there are exactly k numberings σ' of Γ_k such that (Γ, σ) and (Γ, σ') are isomorphic as numbered graphs,
- for any $(\sigma, i) \in \mathrm{Num}(\Gamma_k)\times\underline{k}$, if $\Sigma = \Sigma_1^+$, and if Σ^+ denote the surface obtained from Σ by pushing Σ_1^+ in the positive normal direction, then $(\Sigma_{\sigma(\ell_i)}^{\hat{\varepsilon}(i)}, \Sigma_{\sigma(\ell_{i^+})}^{\hat{\varepsilon}(i^+)})$ is isotopic to (Σ, Σ^+) if $\varepsilon_{\hat{\varepsilon},\sigma(i)} = +1$ and to (Σ^+, Σ) if $\varepsilon_{\hat{\varepsilon},\sigma(i)} = -1$.

Therefore, Lemma 6.3.19 and the definition of the Seifert surfaces in Setting 6.3.6 imply Lemma 6.3.11

6.3.3 Proof of Theorem 6.2.24

Lemma 6.3.11 can be rephrased as follows in terms of Seifert matrices.

Lemma 6.3.20. *Fix a pair $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ of dual bases of $\overline{H_*}(\Sigma)$, and set $\mathcal{B} = ([a_i^d])_{0\leq d\leq n, i\in \underline{b_d}}$ and $\tilde{\mathcal{B}} = ([z_i^d])_{0\leq d\leq n, i\in \underline{b_d}}$. For any $d \in \underline{n}$, define the matrices $V_d^\pm = V_d^\pm(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ as in Definition 6.2.17. For any numbering σ of Γ_k and any map $\hat{\varepsilon}\colon \underline{k} \to \{\pm\}$, let $\varepsilon_{\hat{\varepsilon},\sigma}$ be defined as in Lemma 6.3.11, and let $N(\hat{\varepsilon}, \sigma)$ be the number of integers $i \in \underline{k}$ such that $\varepsilon_{\hat{\varepsilon},\sigma} = +1$. For any $\nu \in \{0, \ldots, k\}$, set*

$$\lambda_{k,\nu}^{(0)} = \frac{1}{2^k(2k)!}\mathrm{Card}(\{(\hat{\varepsilon}, \sigma) \in \{\pm\}^{\underline{k}} \times \mathrm{Num}(\Gamma_k) \mid N(\hat{\varepsilon}, \sigma) = \nu\}.$$

With these notations,

$$Z_k(\psi) = \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{d=1}^{n}(-1)^{d+1}\lambda_{k,\nu}^{(0)}\mathrm{Tr}((V_d^+)^\nu(V_d^-)^{k-\nu}).$$

Proof. Note that for any $k \geq 2$, $\lambda_{k,0}^{(0)} = \lambda_{k,k}^{(0)} = 0$. □

In order to prove Theorem 6.2.24, it remains to prove the following lemma.

Lemma 6.3.21. *For any $k \geq 2$ and any $\nu \in \underline{k}$, $\lambda_{k,\nu}^{(0)} = \lambda_{k,\nu}$ with the notations of Theorem 6.2.24.*

Proof. For any $(\hat{\varepsilon}, \sigma) \in \{\pm\}^{\underline{k}} \times \mathrm{Num}(\Gamma_k)$, define

$$F_0(\hat{\varepsilon}, \sigma)\colon i \in \underline{k} \mapsto \sigma(\ell_i) + (1 - \varepsilon(i))k \in \underline{4k},$$

and let $F_1(\hat{\varepsilon}, \sigma) \in \mathfrak{S}_{\underline{k}}$ be the permutation such that for any $i \in \underline{k}$,

$$F_1(\hat{\varepsilon}, \sigma)(i) = 1 + \mathrm{Card}\left(\{j \in \underline{k} \mid F_0(\hat{\varepsilon}, \sigma)(j) < F_0(\hat{\varepsilon}, \sigma)(i)\}\right).$$

By definition, $N(\hat{\varepsilon},\sigma)$ is the number of elements $i \in \underline{k}$ such that $F_0(\hat{\varepsilon},\sigma)(i) < F_0(\hat{\varepsilon},\sigma)(i^+)$. Since for any $i \in \underline{k}$,

$$\Big(F_0(\hat{\varepsilon},\sigma)(i) < F_0(\hat{\varepsilon},\sigma)(i^+)\Big) \Leftrightarrow \Big(F_1(\hat{\varepsilon},\sigma)(i) < F_1(\hat{\varepsilon},\sigma)(i^+)\Big),$$

$N(\hat{\varepsilon},\sigma) = N_1(F_1(\hat{\varepsilon},\sigma))$, where for any $\rho \in \mathfrak{S}_{\underline{k}}$,

$$N_1(\rho) = \mathrm{Card}(\{i \in \underline{k} \mid \rho(i) < \rho(i^+)\}).$$

Let $\rho \in \mathfrak{S}_{\underline{k}}$ act on $(\hat{\varepsilon},\sigma) \in \{\pm\}^{\underline{k}} \times \mathrm{Num}(\Gamma_k)$ as

$$\rho\cdot(\hat{\varepsilon},\sigma) = (\hat{\varepsilon}\circ\rho^{-1},\sigma_\rho), \text{ where for any } i \in \underline{k}, \begin{cases}\sigma_\rho(f_i) = \sigma(f_i),\\ \sigma_\rho(\ell_i) = \sigma(\ell_{\rho^{-1}(i)}).\end{cases}$$

With these notations, $F_1(\rho\cdot(\hat{\varepsilon},\sigma)) = F_1(\hat{\varepsilon},\sigma)\circ\rho^{-1}$. This implies that all the fibers of F_1 have same cardinality $\frac{2^k(2k)!}{k!}$, so that

$$\lambda^{(0)}_{k,\nu} = \frac{1}{k!}\mathrm{Card}\left(\{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{k}} \mid N_1(\sigma) = \nu\}\right).$$

Let $\sigma_+ \in \mathfrak{S}_{\underline{k}}$ denote the permutation such that $\sigma_+(i) = i^+$ for any $i \in \underline{k}$. The subgroup G generated by σ_+ in $\mathfrak{S}_{\underline{k}}$ is cyclic of order k. Let G act on $\mathfrak{S}_{\underline{k}}$ in such a way that $\sigma_+\cdot\sigma = \sigma\circ(\sigma_+)^{-1}$ for any $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{k}}$. We have $N_1(\sigma) = N_1(\sigma_+\cdot\sigma)$ for any $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{k}}$, and each orbit is of cardinality k. The subgroup $G' = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{k}} \mid \sigma(k) = k\}$ contains exactly one element of each orbit. For any $\sigma \in G'$, $N_1(\sigma) = 1 + N_2(\sigma_{|\underline{k-1}})$, where for any $\sigma' \in \mathfrak{S}_{\underline{k-1}}$, $N_2(\sigma') = \mathrm{Card}(\{i \in \underline{k-2} \mid \sigma'(i) < \sigma'(i+1)\})$ Therefore,

$$\lambda^{(0)}_{k,\nu} = \frac{1}{(k-1)!}\mathrm{Card}\left(\{\sigma' \in \mathfrak{S}_{\underline{k-1}} \mid N_2(\sigma') = \nu-1\}\right) = \lambda_{k,\nu}. \qquad \square$$

6.4 Construction of admissible propagators

6.4.1 Preliminary setting

In this section, we prove Lemma 6.3.5. It suffices to prove the following result.

Lemma 6.4.1. *Fix a rectifiable long knot $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$, a diffeomorphism $\Theta\colon N^0_R \to N_R$ as before Lemma 6.3.1, and a parallelisation τ as in Lemma 6.3.1. Fix two real numbers $\theta \in \mathbb{R}$, and $R \geq 3$. Fix Seifert surfaces $\Sigma^\pm$ such that $\Sigma^\pm \cap N_R = ({}_\theta\Sigma^\pm)^0 \cap N_R$.*

Under these assumptions, there exist R-admissible propagators for (Σ^+,Σ^-,ψ) as in Definition 6.3.4. Furthermore, it is possible to choose R-admissible propagators B (for (Σ^+,Σ^-,ψ)) and B_0 (for $(({}_\theta\Sigma^+)^0,({}_\theta\Sigma^-)^0,\psi_0)$) such that $\Theta_2(B_0 \cap p_b^{-1}(N^0_R\times N^0_R)) = B \cap p_b^{-1}(N_R\times N_R)$, where $\Theta_2\colon C_2(N^0_R) \to C_2(N_R)$ is the diffeomorphism induced by $\Theta\colon N^0_R \to N_R$.

From now on, we assume without loss of generality that $\theta = 0$ and $R = 3$, and we prove Lemma 6.4.1 until the end of Section 6.4.

Fix Seifert surfaces $\Sigma^{\pm}$ as in Definition 6.3.4. Identify a neighborhood N_3 of the knot with the neighborhood N_3^0 of the trivial knot in $\mathbb{R}^{n+2}$ defined as the union of the cylinder $\{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 9\}$ and the complement of the open ball of center 0 and radius $\frac{2.3^2}{3} = 6$. In this setting, $(G_\tau)_{|(\partial C_2(M^\circ)) \cap p_b^{-1}(N_3 \times N_3)}$ extends to a smooth map $G_0 \colon p_b^{-1}(N_3 \times N_3) \to \mathbb{S}^{n+1}$, which is the restriction of the Gauss map of $C_2(\mathbb{R}^{n+2})$ to ${p_b}^{-1}(N_3 \times N_3) = {p_b}^{-1}(N_3^0 \times N_3^0) \subset C_2(\mathbb{R}^{n+2})$.

Define the following subsets:

$$X_0 = p_b^{-1}(N_1 \times N_1) \quad X_1 = p_b^{-1}\left(\bigcup_{r \in [1,2]} E_{r+1} \times N_r\right) \quad X_2 = p_b^{-1}\left(\bigcup_{r \in [1,2]} N_r \times E_{r+1}\right),$$

$$Y_1 = p_b^{-1}((N_2 \cap E_1) \times N_1), \qquad Y_2 = p_b^{-1}(N_1 \times (N_2 \cap E_1)),$$

$$X = X_0 \cup X_1 \cup X_2, \qquad Y = Y_1 \cup Y_2, \qquad \text{and } W = \overline{C_2(M^\circ) \setminus (X \cup Y)}.$$

Figure 6.5 shows this decomposition of $C_2(M^\circ)$, where X is in black, Y in gray, and W in white.

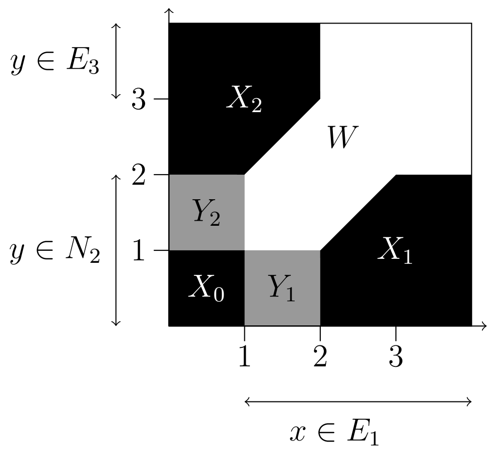


Figure 6.5 – The used decomposition of $C_2(M^\circ)$

Let $(e_i)_{1 \leq i \leq n+2}$ denote the canonical basis of $\mathbb{R}^{n+2}$. The disks $\mathbb{D}_\mu(r)$ and the lines $L_0^{\pm}(r)$ are defined in Notation 6.3.3. Define the following chains in X:

- $B_{X_0} = {G_0}^{-1}(\{e_1\}) \cap {p_b}^{-1}(N_1 \times N_1)$
- $B_{X_1} = \bigcup_{r \in [1,2]} \left((\Sigma^- \cap E_{r+1}) \times \mathbb{D}_\mu(r) + \overline{{p_b}^{-1}(E_{r+1} \times L_0^+(r))}\right)$

- $B_{X_2} = \bigcup_{r\in[1,2]} \left(\mathbb{D}_\mu(r) \times (\Sigma^+ \cap E_{r+1}) - \overline{p_b{}^{-1}(L_0^-(r) \times E_{r+1})}\right)$

Note that B_{X_0} is naturally oriented. We orient B_{X_1} such that the inclusions $(\Sigma^- \cap E_{r+1}) \times \mathbb{D}_\mu(r) + \overline{p_b^{-1}(E_{r+1} \times L_0^+(r))} \hookrightarrow B_{X_1}$ preserve the orientation for any $r \in [1,2]$. The chain B_{X_2} is similarly oriented. We are going to define a chain $B \subset C_2(M^\circ)$ such that $\partial B = G_\tau{}^{-1}(\{e_1\})$ and $B \cap \mathrm{int}(X_i) = \mathrm{int}(B_{X_i})$ for $i \in \{0,1,2\}$.

In $N_3 = N_3^0 \subset \mathbb{R}^{n+2}$, use the coordinates $x = (x_1, x_2, \overline{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. In these coordinates, and for any $r \in [1,3]$, $N_r = \{(x_1, x_2, \overline{x}) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq r^2 \text{ or } ||x|| \geq \frac{18}{r}\}$.

We also define the coordinates $x = (x_1, x_2, h_x.\omega_x)$, such that $h_x \in \mathbb{R}_+$ and $\omega_x \in \mathbb{S}^{n-1}$. This will help us in drawing the next figures in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ with ω_x fixed in $\mathbb{S}^{n-1}$. For example, Figure 6.6 depicts N_r.

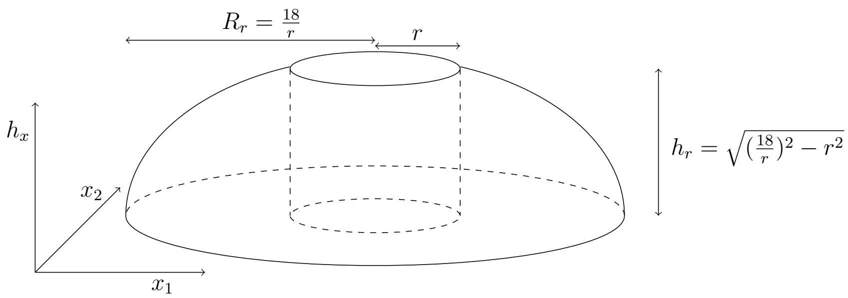


Figure 6.6 – The neighborhood N_r.

Set $R_r = \frac{18}{r}$ and $h_r = \sqrt{{R_r}^2 - r^2}$, so that $\partial N_r = \partial_c N_r \cup \partial_s N_r$, with $\partial_c N_r = \{(x_1, x_2, h_x.\omega_x) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = r^2, h_x \leq h_r\}$ and $\partial_s N_r = \{(x_1, x_2, h_x.\omega_x) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = {R_r}^2 - {h_x}^2, h_x \leq h_r\}$.

We are going to define a chain $B_{Y_1} \subset Y_1$ such that $\partial(B_{X_0} + B_{Y_1} + B_{X_1}) \subset \partial(X_0 \cup Y_1 \cup X_1)$. For any $y \in N_3$, define

$$D^0(y, -e_1) = \{x \in N_1 \mid \text{there exists } t \geq 0 \text{ such that } x = y - t.e_1\},$$

so that $B_{X_0} = \{(x,y) \mid y \in N_1, x \in D^0(y, -e_1)\}$. We orient $D^0(y,-e_1)$ with $\mathrm{d}t$, so that B_{X_0} is oriented by $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t$.

Lemma 6.4.2. *The boundary ∂B_{X_0} splits into three pieces $G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap (\partial C_2(M^\circ) \cap p_b^{-1}(N_1 \times N_1))$, $\partial_1 B_{X_0} = B_{X_0} \cap p_b^{-1}(\partial N_1 \times N_1)$ and $\partial_2 B_{X_0} = B_{X_0} \cap p_b^{-1}(N_1 \times \partial N_1)$. The piece $\partial_1 B_{X_0}$ is exactly $\{(x,y) \mid x \in D^0(y,-e_1) \cap \partial N_1, y \in N_1\}$. For any $y \in N_1$, define the following points :*

- *If $h_y \leq h_1$, $|y_2| \leq \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}$, and $y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}$, $x_s^-(y)$ and $x_s^+(y)$ are the two[10] intersection points of $D^0(y,-e_1)$ with the sphere $\{x \mid ||x|| = R_1\}$.*

[10]They coincide when $|y_2| = \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}$.

- *If* $h_y \leq h_1$*,* $|y_2| \leq 1$*, and* $y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}$*,* $x_c^-(y)$ *and* $x_c^+(y)$ *are the two*[11] *intersection points of* $D^0(y, -e_1)$ *with the cylinder* $\{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$*.*

- *If* $h_y \leq h_1$*, and* ${y_1}^2 + {y_2}^2 \leq 1$*,* $x_c^-(y)$ *and* $x_s^-(y)$ *are the two*[12] *intersection points of* $D^0(y, -e_1)$ *with the cylinder or the sphere as above.*

More precisely, we have the formulas

$$x_c^{\pm}(y) = \left(\pm\sqrt{1 - {y_2}^2}, y_2, \overline{y}\right) \qquad\qquad x_s^{\pm}(y) = \left(\pm\sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}, y_2, \overline{y}\right)\ ,$$

when they make sense.
For any $y \in N_1$*:*

$$D^0(y, -e_1) \cap \partial N_1 = \begin{cases} \emptyset & \text{if } h_y > h_1 \text{ or } |y_2| > \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2} \\ & \quad \text{or } (\ y_1 < 0 \text{ and } ||y|| > R_1), \\ \{x_s^-(y), x_s^+(y)\} & \text{if } h_y \leq h_1,\ 1 < |y_2| \leq \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2} \\ & \quad \text{and } y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}, \\ \{x_c^-(y), x_c^+(y), x_s^-(y), x_s^+(y)\} & \text{if } h_y \leq h_1,\ |y_2| \leq 1, \\ & \quad \text{and } y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}, \\ \{x_s^-(y), x_c^-(y)\} & \text{if } h_y \leq h_1 \text{ and } {y_1}^2 + {y_2}^2 \leq 1. \end{cases}$$

Figure 6.7 depicts the four possible cases, with the conventions of Section 6.4.1.

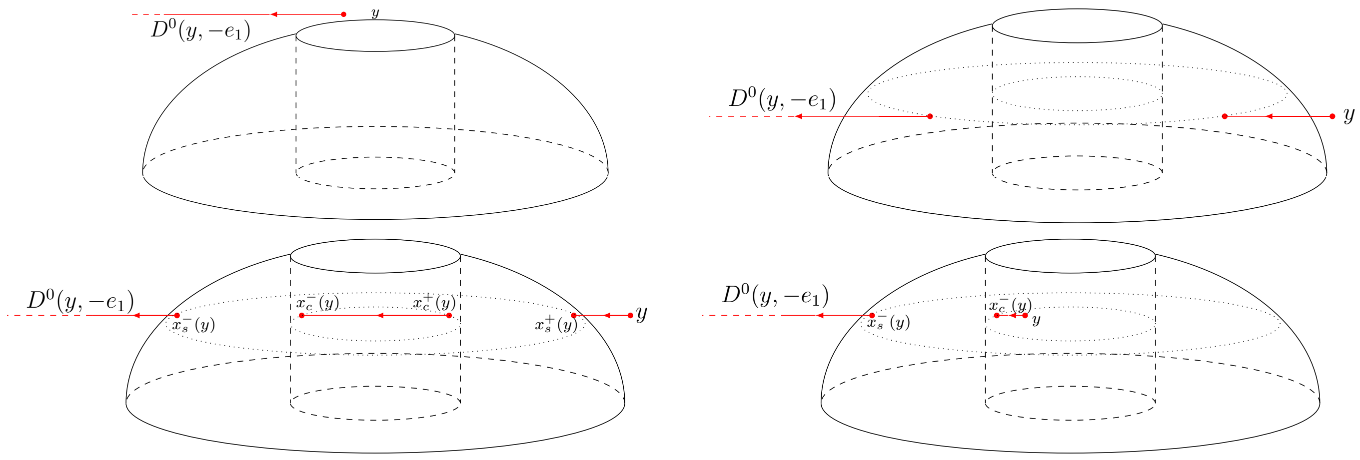


Figure 6.7 – Picture of the four possible cases in Lemma 6.4.2

[11] They coincide when $|y_2| = 1$.
[12] They coincide when $h_y = h_1$.

Then, $\partial_1 B_{X_0}$ splits into six faces:

- The faces $\partial^{\pm}_{s,o} B_{X_0} = \{(x^{\pm}_s(y), y) \mid h_y \leq h_1, |y_2| \leq \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}, y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}\}$, oriented by $\mp \mathrm{d}y$.
- The faces $\partial^{\pm}_{c,o} B_{X_0} = \{(x^{\pm}_c(y), y) \mid h_y \leq h_1, |y_2| \leq 1, y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {y_2}^2 - {h_y}^2}\}$, oriented by $\pm \mathrm{d}y$.
- The face $\partial_{c,i} B_{X_0} = \{(x^{-}_c(y), y) \mid h_y \leq h_1, {y_1}^2 + {y_2}^2 \leq 1\}$, oriented by $-\mathrm{d}y$.
- The face $\partial_{s,i} B_{X_0} = \{(x^{-}_s(y), y) \mid h_y \leq h_1, {y_1}^2 + {y_2}^2 \leq 1\}$, oriented by $+\mathrm{d}y$.

Lemma 6.4.3. *The boundary of B_{X_1} is the union of:*

- *The face $\partial_\ell B_{X_1} = \partial(\Sigma^- \cap E_2) \times \mathbb{D}_\mu(1)$.*
- *The face*[13] $\partial_{\ell,\mu} B_{X_1} = - \bigcup_{r \in [1,2]} \partial(\Sigma^- \cap E_{r+1}) \times \partial \mathbb{D}_\mu(r)$.
- *The face $\partial_\mu B_{X_1} = (\Sigma^- \cap E_3) \times \partial \mathbb{D}_\mu(2)$.*
- *The face $\partial_{E,L} B_{X_1} = \bigcup_{r \in [1,2]} (\partial E_{r+1}) \times \{(R_r, 0, \overline{0})\}$.*
- *The face $\partial_E B_{X_1} = \partial E_2 \times L^+_0(1)$.*
- *The face*[14] $\partial_L B_{X_1} = -E_3 \times \partial L^+_0(2)$.
- *The face $\partial_\infty B_{X_1} = {G_\tau}^{-1}(\{e_1\}) \cap {p_b}^{-1}(E_2 \times \{\infty\})$.*

Among these faces, $\partial_\ell B_{X_1}$, and $\partial_E B_{X_1}$ are contained in ∂Y_1. We are going to extend the half-line $D^0(y, -e_1)$ inside E_1 in order to cancel the faces of $\partial_1 B_{X_0}$ and these faces $\partial_\ell B_{X_1}$ and $\partial_E B_{X_1}$. The goal of Section 6.4.2 is to obtain the following lemma.

Lemma 6.4.4. *There exists a chain $B_{Y_1} \subset Y_1$ such that the codimension 1 faces of B_{Y_1} are:*

- *the faces $-\partial_{c,i} B_{X_0}$, $-\partial_{s,i} B_{X_0}$, $-\partial^{\pm}_{s,o} B_{X_0}$, and $-\partial^{\pm}_{c,o} B_{X_0}$,*
- *the faces $-\partial_\ell B_{X_1}$ and $-\partial_E B_{X_1}$,*
- *the face $\partial_\infty B_{Y_1} = \{(x, y = \infty, u = e_1) \mid x \in N_2 \cap E_1\}$, oriented by $-\mathrm{d}x$,*
- *faces $(\partial_i B_{Y_1})_{1 \leq i \leq 3}$, which are contained in $p_b^{-1}((N_2 \cap E_1) \times \partial N_1) \subset \partial W$ and described in Lemmas 6.4.5, 6.4.6, and 6.4.7.*

[13]The union $- \bigcup_{r \in [1,2]} \partial(\Sigma^- \cap E_{r+1}) \times \partial \mathbb{D}_\mu(r)$ is oriented as $-[1,2] \times \partial(\Sigma^- \cap E_{r+1}) \times \partial \mathbb{D}_\mu(r)$.

[14]In M°, $\partial L^+_0(2)$ reduces to the point $(R_2, 0, \overline{0})$ with a negative sign.

6.4.2 Construction of the chain B_{Y_1}

6.4.2.1 Cancellation of the faces $\partial_{c,i}B_{X_0}$ and $\partial_{s,i}B_{X_0}$

In this section, set $\mathcal{Y}_c = \{y \in N_1 \mid 0 < h_y \leq h_1, {y_1}^2 + {y_2}^2 \leq 1\}$. Let y be a point of $\mathcal{Y}_c$.

If $h_y \geq h_2$, define $D^1(y, -e_1) = \{x - te_1 \in N_2 \cap E_1 \mid t > 0\}$, and orient it by $\mathrm{d}t$. If $h_y \leq h_2$, define $D^1(y, -e_1)$ as the union of the following oriented arcs.

- The line segment $L_c^-(y) \subset N_2$ from $x_c^-(y)$ to ∂N_2 with direction $-e_1$. Let $x_L^c(y) = (-2\cos(\eta_c), -2\sin(\eta_c), \overline{y})$ be the intersection point of this line with ∂N_2 (with $\eta_c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
- The circular arc from $x_L^c(y)$ to $x_\Sigma^c(y) = (-2, 0, \overline{y})$ given by the formula $t \in [0,1] \mapsto (-2\cos((1-t)\eta_c), -2\sin((1-t)\eta_c), \overline{y})$.
- The arc of longitude $\{x \in \partial(\Sigma^- \cap E_2) \mid h_x \geq h_y, \omega_x = \omega_y\}$, from $x_\Sigma^c(y)$ to $x_\Sigma^s(y) = \left(-\sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}, 0, \overline{y}\right)$.
- The circular arc from $x_\Sigma^s(y)$ to the point $x_L^s(y) = \left(-\sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2 - {y_2}^2}, y_2, \overline{y}\right)$, given by $t \in [0,1] \mapsto \left(-\sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}\cos(t\eta_s), -\sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}\sin(t\eta_s), \overline{y}\right)$, where $\eta_s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ satisfies $x_L^s(y) = \left(-\sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}\cos(\eta_s), -\sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}\sin(\eta_s), \overline{y}\right)$.
- The line segment $L_s^-(y) \subset N_2$ from $x_L^s(y)$ to $x_s^-(y)$, which has direction $-e_1$.

Figure 6.8 depicts the curve $D(y, -e_1) = D^0(y, -e_1) \cup D^1(y, -e_1)$, where the dotted part on the right is not in the plane but in the longitude.

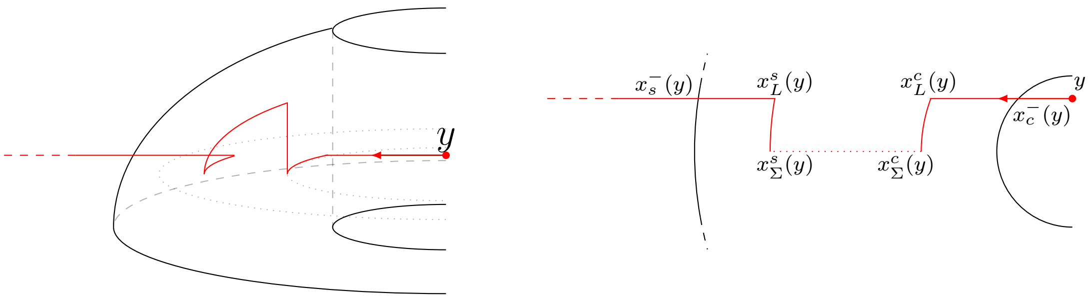


Figure 6.8 – The curve $D(y, -e_1)$ in N_3 (left) or in $\Pi_y = \{x \mid \overline{x} = \overline{y}\}$ (right)

Lemma 6.4.5. *Set* $B_c = \overline{\{(x,y) \mid y \in \mathcal{Y}_c, x \in D^1(y, -e_1)\}}$ *and orient it by* $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t$, *where* $\mathrm{d}t$ *represents the orientation of* $D^1(y, -e_1)$. *The codimension* 1 *faces of* B_c *are:*

- *the face* $-\partial_{c,i}B_{X_0}$*,*
- *the face* $-\partial_{s,i}B_{X_0}$*,*
- *the face* $\partial_1 B_{Y_1} = \{(x,y) \mid y \in \partial_c N_1, x \in D^1(y,-e_1)\}$*, oriented by* $\mathrm{d}t \wedge \Omega(\partial_c N_1)$*,*
- *the face* $-\partial_\ell B_{X_1} = -\partial(\Sigma^- \cap E_2) \times \mathbb{D}_\mu(1)$*.*

If $(x,y) \in B_c$*, and if* $y \in \psi(\mathbb{R}^n)$*, then* $x \in \Sigma^-$*.*

Proof. The first two faces and their orientations directly follow from the construction of $D^1(y,-e_1)$. The next two faces correspond to ${y_1}^2 + {y_2}^2 = 1$, and $h_y = 0$, respectively. The face corresponding to $h_y = h_1$ is of codimension 2, since $D^1(y,-e_1)$ reduces to a point. Note the cancellation at $h_y = h_2$ since $x^s_\Sigma(y) = x^c_\Sigma(y)$ and $x^s_L(y) = x^c_L(y)$ for such a y. □

6.4.2.2 Cancellation of $\partial^+_{c,o}B_{X_0}$, $\partial^-_{c,o}B_{X_0}$, $\partial^+_{s,o}B_{X_0}$, and $\partial^-_{s,o}B_{X_0}$

Set $\mathcal{Y}_s = \{y \mid h_y \leq h_1, 0 < |y_2| \leq \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}, y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2 - {y_2}^2}\}$.

In this section, for any $y \in \mathcal{Y}_s$, we are going to extend $D^0(y,-e_1)$ to a curve $D(y,-e_1)$ in N_2 such that $\partial D(y,-e_1) = -\{y\}$ in M°. In order to do so, we will connect $x^-_s(y)$ and $x^+_s(y)$, and, when they exist, we will connect $x^-_c(y)$ and $x^+_c(y)$.

We split $\mathcal{Y}_s$ in three parts $\mathcal{Y}^1_s = \{y \in \mathcal{Y}_s \mid h_2 \leq h_y \text{ or } |y_2| \geq \sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}\}$, $\mathcal{Y}^2_s = \{y \in \mathcal{Y}_s \mid h_y \leq h_2, 2 < |y_2| \leq \sqrt{{R_2}^2 - {h_y}^2}\}$, and $\mathcal{Y}^3_s = \{y \in \mathcal{Y}_s \mid h_y \leq h_2, 0 < |y_2| \leq 2\}$.

First case: $y \in \mathcal{Y}^1_s$

In this case, the half-line starting at y with direction $-e_1$ is contained in N_2, so we set $D(y,-e_1) = \{x \in N_2 \mid G(x,y) = e_1\}$.

Second case: $y \in \mathcal{Y}^2_s$

In this case, the half-line $\{x \in N_2 \mid G(x,y) = e_1\}$ meets $\partial_s N_2$ in two points $x^\pm_{s,2}(y)$ as in Figure 6.9. Let $\gamma_s(y)$ denote the circular arc contained in the half-circle $\partial_s N_2 \cap \{x \mid x_2 y_2 > 0, \overline{x} = \overline{y}\}$ from $x^+_{s,2}(y)$ to $x^-_{s,2}(y)$. Then, the line $D(y,-e_1)$ is the union of $\{x \in N_2 \mid G(x,y) = e_1\}$ and $\gamma_s(y)$.

Third case: $y \in \mathcal{Y}^3_s$

In this case, the half-line $\{x \in N_2 \mid G(x,y) = e_1\}$ meets $\partial_s N_2$ in two points $x^\pm_{s,2}(y)$ and meets $\partial_c N_2$ in two [15] points $x^\pm_{c,2}(y)$ as in Figure 6.9. Let $\gamma_s(y)$ be defined as in the previous case, and let $\gamma_c(y)$ be the circular arc from $x^-_{c,2}(y)$ to $x^+_{c,2}(y)$ in the half-circle $\partial_c N_2 \cap \{x \mid x_2 y_2 > 0, \overline{x} = \overline{y}\}$. Then, the line $D(y,-e_1)$ is the union of $\{x \in N_2 \mid G(x,y) = e_1\}$, $\gamma_c(y)$, and $\gamma_s(y)$.

[15] which coincide if $|y_2| = 2$.

Figure 6.9 depicts the curves $D^1(y,-e_1) = D(y,-e_1) \cap (N_2 \cap E_1)$ in the plane $\Pi_y = \{x \mid \overline{x} = \overline{y}\}$ for different values of y in $\mathcal{Y}_s$. The two plain circles depict the boundary of N_1 and the two dotted circles depict the boundary of N_2. The orientations are given in the picture by the arrows.

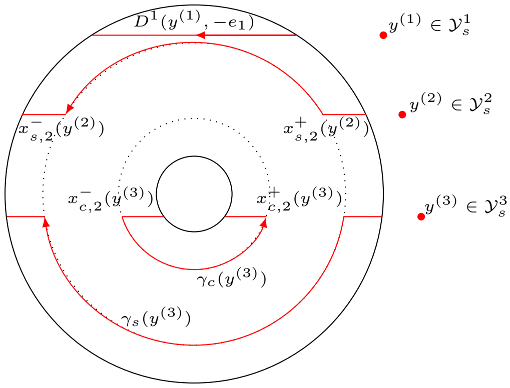


Figure 6.9 – The curves $D^1(y,-e_1)$ in Π_y.

Lemma 6.4.6. *Set* $B_s^{(1)} = \overline{\{(x,y) \mid y \in \mathcal{Y}_s, x \in D^1(y,-e_1)\}} \subset Y_1$*, and orient it with* $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t$*, where* $\mathrm{d}t$ *is the orientation of the lines* $D(y,-e_1)$*. Set* $\mathcal{Y}_s^0 = \{y \mid h_y \leq h_2, y_1 \geq \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}, y_2 = 0\}$*.*

The codimension 1 faces of $B_s^{(1)}$ *are:*

- *the faces* $-\partial^+_{s,o}B_{X_0}$*,* $-\partial^-_{s,o}B_{X_0}$*,* $-\partial^+_{c,o}B_{X_0}$*, and* $-\partial^-_{c,o}B_{X_0}$*,*
- *the face* $\partial_\infty B_{Y_1}$*,*
- *the face* $\partial_2 B_{Y_1} = \overline{\{(x,y) \mid y \in \mathcal{Y}_s, y_1 = \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2 - {y_2}^2}, x \in D^1(y,-e_1)\}}$*, which is contained in* ${p_b}^{-1}((N_2 \cap E_1) \times \partial N_1)$*, and which is oriented by* $-\mathrm{d}y_2 \wedge \mathrm{d}h_y \wedge \mathrm{d}\omega_y \wedge \mathrm{d}t$*,*
- *the face* $\partial_3 B_s^{(1)} = \{(x,y) \mid y \in \mathcal{Y}_s^0, x \in C_s(y) \cup C_c(y)\}$ *where* $C_s(y)$ *denotes* $\Pi_y \cap \partial_s N_2$*, oriented as a direct circle of the plane* Π_y *(i.e. as the boundary of a disk), and* $C_c(y)$ *denotes the intersection* $\Pi_y \cap \partial_c N_2$*, with the opposite orientation.* $\partial_3 B_s^{(1)}$ *is oriented by* $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}h_y \wedge \mathrm{d}\omega_y$*, where* $\mathrm{d}t$ *is the orientation of the circle in which* x *lies.*

Proof. The first four faces follow from the fact that the line $D(y,-e_1)$ extends $D^0(y,-e_1)$. When $y \in \mathcal{Y}_s^3$ and $h_y = h_2$, $\gamma_s(y)$ and $\gamma_c(y)$ cancel each other, so that there is no face corresponding to $h_y = h_2$. Note that there is no discontinuity when $|y_2| = \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}$ since $\gamma_s(y)$ reduces to a point. There is no discontinuity when $|y_2| = 2$ either since $\gamma_c(y)$ reduces to a point.

When y_1 approaches infinity, we obtain the face $\partial_\infty B_{Y_1}$, when y_1 goes to $\sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2 - {y_2}^2}$, we obtain the face $\partial_2 B_{Y_1}$, and when y_2 approaches 0, we obtain the face $\partial_3 B_s^{(1)}$. $\square$

6.4.2.3 Cancellation of the face $\partial_3 B_s^{(1)}$

For any $y \in \mathcal{Y}_s^0$ such that $h_y > 0$, define $A(y)$ as the annulus $\{x \in \partial N_2 \mid \omega_x = \omega_y, h_x \geq h_y\}$ and orient it in such a way that its boundary is $C_s(y) \cup C_c(y)$.

Lemma 6.4.7. *Set* $B_s^{(2)} = \overline{\{(x,y) \mid y \in \mathcal{Y}_s^0, h_y > 0, x \in A(y)\}}$, *and orient this chain by* $-\Omega(A(y)) \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}h_y \wedge \mathrm{d}\omega_y$, *where* $\Omega(A(y))$ *denotes the orientation of the annulus* $A(y)$ *in which* x *lies. The codimension* 1 *faces of* $B_s^{(2)}$ *are :*

- *The face* $-\partial_3 B_s^{(1)}$.
- *The face* $-\partial E_2 \times L_0^+(1) = -\partial_E B_{X_1}$.
- *The face* $\partial_3 B_{Y_1} = \overline{\{(x,y) \mid 0 < h_y \leq h_2, y_1 = \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}, y_2 = 0, x \in A(y)\}}$, *oriented by* $\Omega(A(y)) \wedge \mathrm{d}h_y \wedge \mathrm{d}\omega_y$, *and contained in* $p_b^{-1}((N_2 \cap E_1) \times \partial N_1)$.

Proof. The face $-\partial_3 B_s^{(1)}$ corresponds to the boundary of $A(y)$. The face $\partial_E B_{X_1}$ appears when h_y approaches zero. The face corresponding to $h_y = h_2$ is of codimension 2, since $A(y)$ degenerates to a circle. When $y_1 = \sqrt{{R_1}^2 - {h_y}^2}$, we obtain the face $\partial_3 B_{Y_1}$, and when y_1 approaches infinity, we obtain a face contained in $\{(x, y = \infty, u = e_1) \mid x \in \partial N_2\}$, thus of codimension at least two. $\square$

6.4.2.4 Proof of Lemma 6.4.4 and definition of the chain in $X \cup Y$

Set $B_{Y_1} = B_c + B_s^{(1)} + B_s^{(2)}$. The chain B_{Y_1} satisfies the conditions of Lemma 6.4.4.

Let $S\colon C_2(N_3) \to C_2(N_3)$ and $T\colon C_2(M^\circ) \to C_2(M^\circ)$ be the smooth maps defined on the interior of their respective domains by the formulas $S(x,y) = (-x,-y)$ and $T(x,y) = (y,x)$, and set $B_{Y_2} = -ST(B_{Y_1})$ and $B_{X\cup Y} = B_{X_0} + B_{Y_1} + B_{X_1} + B_{Y_2} + B_{X_2}$. By construction, we have the following lemma.

Lemma 6.4.8. *Let* G_τ *be the map of Definition 6.2.5.*
The chain $\partial B_{X\cup Y} - G_\tau^{-1}(\{e_1\})$ *defines a cycle* δ_W *of* $\partial W \subset W$.

Proof. For any $1 \leq i \leq 3$, set $\partial_i B_{Y_2} = -ST(\partial_i B_{Y_1})$. Set $\partial_L B_{X_2} = -\partial L_0^-(2) \times E_3$ and $\partial_\mu B_{X_2} = (\partial \mathbb{D}_\mu(2)) \times (\Sigma^+ \cap E_3)$. Set $\partial_{\ell,\mu} B_{X_2} = -ST(\partial_{\ell,\mu} B_{X_1})$, and $\partial_{E,L} B_{X_2} = -ST(\partial_{E,L} B_{X_1})$, where the faces $\partial_{\ell,\mu} B_{X_1}$ and $\partial_{E,L} B_{X_1}$ are defined in Lemma 6.4.3.

The boundary of $B_{X\cup Y}$ is the union of :

- The faces $(\partial_i B_{Y_1})_{1\leq i\leq 3}$ and $(\partial_i B_{Y_2})_{1\leq i\leq 3}$.

- The faces $\partial_{\ell,\mu} B_{X_i}$, $\partial_\mu B_{X_i}$, $\partial_{E,L} B_{X_i}$, $\partial_L B_{X_i}$ for $i \in \{1,2\}$.
- The face $G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap (X \cup Y) = (G_{\tau|(\partial C_2(M^\circ))\setminus UE_1})^{-1}(\{e_1\})$.

All the previous faces except the last one are in ∂W. Making the difference with $G_\tau^{-1}(\{e_1\})$ replaces the last part with $-G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W = -(G_{\tau|UE_1})^{-1}(\{e_1\})$, which is contained in ∂W. $\square$

6.4.3 Extension of the chain to W

6.4.3.1 Construction of B_W up to Lemma 6.4.11

In this section, we prove that the cycle δ_W of Lemma 6.4.8 is null-homologous in W.

Lemma 6.4.9. *There exists a chain $B_W \subset W$ such that $\partial B_W = -\delta_W$.*

Proof of Lemma 6.4.1 assuming Lemma 6.4.9. Let B_W be like in the lemma, so that $\partial(B_W + B_{X\cup Y}) = G_\tau^{-1}(\{e_1\})$. Set $B^T = \frac{1}{2}(B_W + B_{X\cup Y} + T(B_W + B_{X\cup Y}))$, so that $\partial B^T = \frac{1}{2} G_\tau^{-1}(\{-e_1, e_1\})$. Note also that if $c = (x,y) \in B^T$, and if $(x,y) \in \overline{p_b{}^{-1}(\psi(\mathbb{R}^n) \times M^\circ)}$, the definition of $\underline{(B_{X_i})_{1\leq i \leq 3}}$ and the construction of B_c in Lemma 6.4.5 imply that y lies in the closure $\overline{\Sigma^- \cup \Sigma^+}$ of $\Sigma^- \cup \Sigma^+$ in $C_1(M^\circ)$.

This proves the first assertion of Lemma 6.4.1. It remains to prove that admissible propagators can be chosen standard in $p_b^{-1}(N_3 \times N_3)$ as stated in the second part of Lemma 6.4.1.

The previous work with the trivial knot and the surfaces $(({}_0\Sigma^+)^0, ({}_0\Sigma^-)^0)$, yields an admissible propagator B_0 for $(({}_0\Sigma^+)^0, ({}_0\Sigma^-)^0, \psi_0)$.

Set $W_2 = p_b^{-1}(N_3 \times N_3) \cap W$ and $W_3 = \overline{W \setminus W_2}$. Set $B_{W_2}^T = B_0 \cap W_2$.

The chain $\delta_{W_3}^T = \frac{1}{2}(\delta_W + T(\delta_W)) + \partial B_{W_2}^T$ is a cycle of W_3, which is null-homologous in W because of Lemma 6.4.9. Since W_3 is a deformation retract of W, this implies that $\delta_{W_3}^T$ is a null-homologous cycle in W_3. Therefore, there exists B_{W_3} such that $\partial B_{W_3}^T = -\delta_{W_3}^T$. Since $T(\delta_{W_3}^T) = \delta_{W_3}^T$, choose $B_{W_3}^T$ such that $T(B_{W_3}^T) = B_{W_3}^T$.

Set $B = \frac{1}{2}(B_{X\cup Y} + T(B_{X\cup Y})) + B_{W_2}^T + B_{W_3}^T$. Since the boundary of $\frac{1}{2}(B_{X\cup Y} + T(B_{X\cup Y})) + B_{W_2}^T$ is $\frac{1}{2} G_\tau^{-1}(\{-e_1, e_1\}) + \frac{1}{2}(\delta_W + T(\delta_W)) + \partial B_{W_2}^T$, the chain B is as requested by Lemma 6.4.1. $\square$

The rest of this section is devoted to the proof of Lemma 6.4.9.

Set $W_1 = p_b^{-1}(E_1 \times E_1)$. Note that $W \hookrightarrow W_1$ is a homotopy equivalence. In order to prove Lemma 6.4.9, it suffices to prove that the class $[\delta_W] \in H_{n+2}(W_1)$ is null. Lemma 6.4.9 directly follows from the following two lemmas.

Lemma 6.4.10. *Let M_W denote the cycle $p_b^{-1}(\{(x,x) \mid x \in \partial \mathbb{D}_\mu(2)\}) = UM^\circ_{|\partial \mathbb{D}_\mu(2)}$. With these notations, $H_{n+2}(W_1) = \mathbb{Q}.[M_W]$.*

Proof. W_1 is nothing but $C_2(E_1)$, and E_1 is homotopic to the complement of $\psi(\mathbb{R}^n) \cup \{\infty\} \subset \mathbb{S}^{n+2}$. Let Δ_{E_1} denote the diagonal of ${E_1}^2$. The construction of the configuration space $C_2(E_1)$ implies that $C_2(E_1)$ has the homotopy type of its interior ${E_1}^2 \setminus \Delta_{E_1}$, so that $H_{n+2}(W_1) \cong H_{n+2}({E_1}^2 \setminus \Delta_{E_1})$.

The Alexander duality implies that $H_*(E_1)$ is non trivial only in degree 0 and 1, and that $H_1(E_1)$ is generated by $[\partial\mathbb{D}_\mu(2)]$. Then, $H_*({E_1}^2) = 0$ for $* > 2$, and the long exact sequence associated to ${E_1}^2 \setminus \Delta_{E_1} \hookrightarrow {E_1}^2$ yields an isomorphism from $H_{n+3}({E_1}^2, {E_1}^2 \setminus \Delta_{E_1})$ to $H_{n+2}({E_1}^2 \setminus \Delta_{E_1})$.

The excision theorem yields an isomorphism between $H_{n+3}({E_1}^2, {E_1}^2 \setminus \Delta_{E_1})$ and $H_{n+3}(\mathcal{N}(\Delta_{E_1}), \mathcal{N}(\Delta_{E_1}) \setminus \Delta_{E_1})$, where $\mathcal{N}(\Delta_{E_1})$ denotes a tubular neighborhood of Δ_{E_1}. Since M° is parallelizable, $\mathcal{N}(\Delta_{E_1})$ is diffeomorphic to the trivial disk bundle $\Delta_{E_1} \times \mathbb{D}^{n+2}$, and

$$\begin{aligned} H_{n+3}(\mathcal{N}(\Delta_{E_1}), \mathcal{N}(\Delta_{E_1}) \setminus \Delta_{E_1}) &\cong H_{n+3}(\Delta_{E_1} \times \mathbb{D}^{n+2}, \Delta_{E_1} \times (\mathbb{D}^{n+2} \setminus \{0\})) \\ &\cong H_1(\Delta_{E_1}) \otimes H_{n+2}(\mathbb{D}^{n+2}, \partial\mathbb{D}^{n+2}) \\ &\cong H_1(\Delta_{E_1}) \otimes H_{n+1}(\partial\mathbb{D}^{n+2}) \\ &= \mathbb{Q}.[\partial\mathbb{D}_\mu(2)] \otimes [\partial\mathbb{D}^{n+2}]. \end{aligned}$$

Therefore, $H_{n+2}(W_1) \cong \mathbb{Q}.[\partial\mathbb{D}_\mu(2)] \otimes [\partial\mathbb{D}^{n+2}]$. This identification maps $[M_W]$ to $\pm[\partial\mathbb{D}_\mu(2)] \otimes [\partial\mathbb{D}^{n+2}]$. □

Lemma 6.4.11. *There exists an $(n+2)$-chain D_W, with $\partial D_W \subset \partial W_1$, such that:*

- *D_W is dual to M_W: $\langle D_W, M_W \rangle_{W_1} = \pm 1$.*
- *The intersection number $\langle D_W, \delta_W \rangle_{W_1}$ is zero.*

Since this lemma implies that $[\delta_W] = 0 \in H_{n+2}(W_1)$, it implies Lemma 6.4.9. We are left with the proof of Lemma 6.4.11.

We will construct the chain $D_W = D_1 + D_2 + D_3$ as the sum of a chain D_1 defined in Lemma 6.4.12, a chain D_2 defined in Lemma 6.4.16, and a chain D_3 defined in Lemma 6.4.17.

6.4.3.2 Construction of the chain D_1

Fix a Seifert surface Σ'^0 parallel to those used in the construction of the chain $B_{X\cup Y}$, such that $\Sigma'^0 \cap N_3 = \{(r\cos(\frac{\pi}{6}), r\sin(\frac{\pi}{6}), \overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n, r \geq 0\} \cap N_3$, and let Σ' denote $\Sigma'^0 \cap E_1$. Fix an embedding $\varphi \colon [-1,1] \times \Sigma' \to E_1$, such that $\varphi(0,x) = x$ for any $x \in \Sigma'$. This allows us to define a normal vector $n_x = \frac{(\frac{\partial\varphi}{\partial t})(0,x)}{||(\frac{\partial\varphi}{\partial t})(0,x)||}$ for any $x \in \Sigma'$. Let Σ'^+ denote the parallel surface $\varphi(\{1\} \times \Sigma')$, and, for any $x \in \Sigma'$, let x^+ denote the associated point $\varphi(1,x)$ in Σ'^+. Assume without loss of generality that $\Sigma'^+ \cap N_3 = \{(r\cos(\frac{\pi}{3}), r\sin(\frac{\pi}{3}), \overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n, r \geq 0\} \cap (E_1 \cap N_3)$.

Lemma 6.4.12. *Set* $D_1 = \overline{p_b^{-1}(\{(\varphi(0,x), \varphi(t,x)) \mid (t,x) \in]0,1] \times \Sigma'\})}$*. The closure adds the configurations* $(x, x, [n_x]) \in \partial_\Delta C_2(M^\circ)$ *where* $x \in \Sigma'$*. The intersection* $D_1 \cap M_W$ *consists of the configuration* $c = (x_0, x_0, [n_{x_0}])$ *where* x_0 *is the unique intersection point of* $\partial \mathbb{D}_\mu(2)$ *and* Σ'*. Orient* D_1 *as* $[0,1] \times \Sigma'$*.*

The boundary of D_1 *is the union of three codimension* 1 *faces:*

- *The face* $\Delta(\Sigma', \Sigma'^+) = \{(x, x^+) \mid x \in \Sigma'\}$*, oriented as* Σ'*.*
- *The face* $\partial_1 D_1 = \{(x, x, [n_x]) \mid x \in \Sigma'\}$*, oriented as* $-\Sigma'$*.*
- *The face* $\partial_2 D_1 = \overline{\{(x, \varphi(t,x)) \mid 0 < t \leq 1, x \in \partial\Sigma'\}}$*, oriented as* $-[0,1] \times \partial\Sigma'$*.*

Furthermore, the last two faces are contained in ∂W_1*.*

Proof. This is a direct check. □

Our chain D_W will be defined from D_1 by gluing other pieces in order to cancel the face $\Delta(\Sigma', \Sigma'^+)$, which is not contained in ∂W_1.

6.4.3.3 Construction of the chain D_2

Let S' denote the closed surface obtained by gluing a disk $\mathbb{D}^{n+1}$ and Σ' along their boundaries. The surface S' is oriented as $\Sigma' \cup -\mathbb{D}^{n+1}$. Let $S' \times S'^+$ denote the product of two copies of S', where the coordinates read (x, y^+), so that $\Sigma' \times \Sigma'^+ \subset W_1$ naturally embeds into $S' \times S'^+$. Set $\Delta(S', S'^+) = \{(x, x^+) \mid x \in S'\}$, and orient it as S'.

Notation 6.4.13. Choose two families $(a_i^d)_{0 \leq d \leq n+1, 1 \leq i \leq b_d}$ and $(z_i^d)_{0 \leq d \leq n+1, 1 \leq i \leq b_d}$ of chains of S' such that:

- For any $d \in \{0, \dots, n+1\}$, the families $([a_i^d])_{1 \leq i \leq b_d}$ and $([z_i^d])_{1 \leq i \leq b_d}$ are two bases of $H_d(S')$.
- For any $d \in \{0, \dots, n+1\}$, and any $(i,j) \in (\underline{b_d})^2$, $\langle [a_i^d], [z_j^{n+1-d}] \rangle_{S'} = \delta_{i,j}$.
- For any $d \in \underline{n}$ and any $i \in \underline{b_d}$, the chains a_i^d and z_i^d are contained in $\Sigma' \cap E_3$.
- The chains a_1^0 and z_1^0 are two distinct points of $\partial\Sigma'$, and $a_1^{n+1} = z_1^{n+1} = S'$.
- For any $d > \frac{n+1}{2}$, and any $j \in \underline{b_d}$, $a_j^d = z_j^d$, and for any $d < \frac{n+1}{2}$ and any $j \in \underline{b_d}$, $z_j^d = (-1)^d a_j^d$.

Such a choice is possible as in Lemma 6.3.15, and the previous chains induce similar families $((a_i^d)^+)_{0 \leq d \leq n+1, i \in \underline{b_d}}$ and $((z_i^d)^+)_{0 \leq d \leq n+1, i \in \underline{b_d}}$ in S'^+.

Lemma 6.4.14. *We have the following equality in $H_{n+1}(S' \times S'^+)$:*

$$[\Delta(S', S'^+)] = \sum_{d=0}^{n+1} \sum_{i \in \underline{b_d}} [a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+].$$

Proof. The Künneth formula implies that $H_{n+1}(S' \times S'^+)$ admits the two families $([a_i^d \times (z_j^{n+1-d})^+])_{0 \le d \le n+1, (i,j) \in (\underline{b_d})^2}$ and $([z_i^d \times (a_j^{n+1-d})^+])_{0 \le d \le n+1, (i,j) \in (\underline{b_d})^2}$ as bases. For any $(d, d') \in \{0, \ldots, n+1\}^2$, any $(i,j) \in (\underline{b_d})^2$, and any $(i', j') \in (\underline{b_{d'}})^2$, we have the following duality property:

$$\langle [a_i^d \times (z_j^{n+1-d})^+], [z_{i'}^{n+1-d'} \times (a_{j'}^{d'})^+] \rangle_{S' \times S'^+} = \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \delta_{d,d'}$$

There exist coefficients such that $[\Delta(S', S'^+)] = \sum\limits_{d=0}^{n+1} \sum\limits_{i=1}^{b_d} \sum\limits_{j=1}^{b_d} \alpha_{i,j}^d [a_i^d \times (z_j^{n+1-d})^+]$, and the duality property above and the definition of $\Delta(S', S'^+)$ yield

$$\alpha_{i,j}^d = \left\langle [\Delta(S', S'^+)], [z_i^{n+1-d} \times (a_j^d)^+] \right\rangle_{S' \times S'^+} = \delta_{i,j}. \qquad \square$$

Let $\mathbb{D}$ denote the $(n+1)$-disk $\mathbb{D}^{n+1}$, which we glued to Σ' above. To express $\Delta(\Sigma', \Sigma'^+)$ from this lemma, we study $\Delta(\mathbb{D}, \mathbb{D}^+) = \Delta(S', S'^+) - \Delta(\Sigma', \Sigma'^+)$.

Lemma 6.4.15. *There exists a chain D_δ in $\partial\Sigma' \times \partial\Sigma'^+$ such that the chain $c_\delta^1 = D_\delta - a_1^0 \times \mathbb{D}^+ - \mathbb{D} \times (z_1^0)^+ + \Delta(\mathbb{D}, \mathbb{D}^+)$ is a null-homologous cycle of $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^+$.*

Proof. Let $\mathbb{S}$ (respectively $\mathbb{S}^+$) denote the sphere that bounds the disk $\mathbb{D}$ (respectively $\mathbb{D}^+$), which we glued to Σ' (respectively Σ'^+). Note that $\mathbb{S} = -\partial\Sigma'$. Assume without loss of generality that a_1^0 is the North Pole P_N of the sphere $\mathbb{S}$, and that z_1^0 is the South Pole P_S. Similarly define P_S^+ and P_N^+.

For any $x \in \mathbb{S} \setminus \{P_N\}$, there exists a unique shortest geodesic parametrized with constant speed $(y_x^+(t))_{0 \le t \le 1}$ on the sphere $\mathbb{S}^+$ going from x^+ to P_S^+. Set $D_\delta = \overline{\{(x, y_x^+(t)) \mid 0 \le t \le 1, x \in \mathbb{S} \setminus \{P_N\}\}}$, and orient it as $[0,1] \times (\mathbb{S} \setminus \{P_N\})$.

The boundary of D_δ is the union of three codimension 1 faces:

- The face $+\{P_N\} \times \mathbb{S}^+$.
- The face $+\mathbb{S} \times \{P_S^+\}$.
- The face $-\partial\Delta(\mathbb{D}, \mathbb{D}^+)$.

The first face appears when x approaches P_N, the second one when $t = 1$, and the third one when $t = 0$. This implies that c_δ^1 is a cycle. Since $H_{n+1}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}^+) = 0$, c_δ^1 is null-homologous. $\square$

Lemma 6.4.16. *There exists a chain $D_2 \subset \Sigma' \times \Sigma'^+ \subset W_1$, such that $D_2 \cap \partial W_1 \subset \partial D_2$, and such that*

$$\partial D_2 = \left(\sum_{d \in \underline{n}} \sum_{i \in \underline{b_d}} a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+ \right) + a_1^0 \times \Sigma'^+ + \Sigma' \times (z_1^0)^+ + D_\delta - \Delta(\Sigma', \Sigma'^+).$$

Proof. Let $c_\delta^2 = c_\delta^1 - \Delta(S', S'^+) + \sum\limits_{d=0}^{n+1} \sum\limits_{i \in \underline{b_d}} a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+$.

Lemma 6.4.14 and 6.4.15 imply that c_δ^2 is null-homologous in $S' \times S'^+$. Now c_δ^2 reads

$$c_\delta^2 = \left(\sum_{d \in \underline{n}} \sum_{i \in \underline{b_d}} a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+ \right) + a_1^0 \times \Sigma'^+ + \Sigma' \times (z_1^0)^+ + D_\delta - \Delta(\Sigma', \Sigma'^+).$$

Therefore, c_δ^2 is a cycle of $\Sigma' \times \Sigma'^+$ and the class $[c_\delta^2]$ is null in $H_{n+1}(S' \times S'^+)$. The Künneth formula proves that $([a_i^d \times (z_j^{n+1-d})^+])_{1 \leq d \leq n, 1 \leq i,j \leq b_d}$ is a basis of $H_{n+1}(\Sigma' \times \Sigma'^+)$. Since it is a subfamily of the basis $([a_i^d \times (z_j^{n+1-d})^+])_{0 \leq d \leq n+1, 1 \leq i,j \leq b_d}$ of $H_{n+1}(S' \times S'^+)$, the inclusion map $H_{n+1}(\Sigma' \times \Sigma'^+) \to H_{n+1}(S' \times S'^+)$ is injective, and $[c_\delta^2] = 0$ in $H_{n+1}(\Sigma' \times \Sigma'^+)$. $\square$

At this point, $\partial(D_1 + D_2)$ is the sum of a chain contained in ∂W_1 and the chain $\left(\sum\limits_{d \in \underline{n}} \sum\limits_{i \in \underline{b_d}} a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+ \right)$, which is not contained in ∂W_1. It remains to define the chain D_3 in order to cancel $\left(\sum\limits_{d \in \underline{n}} \sum\limits_{i \in \underline{b_d}} a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+ \right)$.

6.4.3.4 Construction of the chain D_3

Recall that the unit normal bundle to the diagonal of $M^\circ \times M^\circ$ has been identified with the unit tangent bundle UM° of M°, and that it is a piece of $\partial C_2(M^\circ)$.

Lemma 6.4.17. *There exists a chain $D_3 \subset p_b^{-1}(E_3 \times E_3)$, which meets $\partial p_b^{-1}(E_3 \times E_3)$ only along ∂D_3, and such that ∂D_3 is the union of:*

- *The faces $-a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+$, for $d \in \underline{n}$ and $i \in \underline{b_d}$.*
- *A finite collection of fibers $\varepsilon(x_i).U_{x_i}M \subset \partial W_1 \cap \partial C_2(M^\circ)$, for $1 \leq i \leq m$.*

Furthermore, $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon(x_i) = \frac{\chi(\Sigma')-1}{2}$.

Proof. Recall that $H_*(E_3) = H_*(\mathbb{S}^1)$. Then, for any $d \in \{2, \dots, n\}$ and any $i \in \underline{b_d}$, there exists $A_i^{d+1} \subset E_3$ such that $\partial A_i^{d+1} = a_i^d$.

For any $i \in \underline{b_1}$, there exists $(A_i^2)^0 \subset M^\circ$ such that $\partial (A_i^2)^0 = a_i^1$. Since

$$\begin{aligned}\langle (A_i^2)^0, \psi(\mathbb{R}^n) \cup \{\infty\}\rangle_M &= \langle (A_i^2)^0, \partial(\Sigma'^+ \cup \{\infty\})\rangle_M \\ &= [\partial((A_i^2)^0 \cap (\Sigma'^+ \cup \{\infty\})] + \langle a_i^1, \Sigma'^+ \cup \{\infty\}\rangle_M \\ &= 0,\end{aligned}$$

the chain $(A_i^2)^0$ meets the knot in an even number of points $(x_1, \dots, x_{2r})$ such that x_{2i} and x_{2i+1} have opposite signs. Cut $(A_i^2)^0$ along a disk δ_i around each of these points, and glue an annulus $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ between $\partial\delta_{2i}$ and $\partial\delta_{2i+1}$ for each i, so that the obtained chain A_i^2 does not meet the knot and the boundary of A_i^2 is a_i^1. It can be assumed that A_i^2 is contained in E_3.

Assume without loss of generality that the chains $(A_i^{d+1})_{i,d}$ have been chosen such that A_i^{d+1} and $(z_i^{n+1-d})^+$ are transverse for any i and d. Set $K_{i,d} = A_i^{d+1} \cap (z_i^{n+1-d})^+$ and $K = \bigcup\limits_{d \in \underline{n}} \bigcup\limits_{i \in \underline{b_d}} K_{i,d}$. Define

$$D_3 = -\sum_{d \in \underline{n}} \sum_{i \in \underline{b_d}} \overline{p_b^{-1}\left(\left(A_i^{d+1} \times (z_i^{n+1-d})^+\right) \setminus \Delta\right)},$$

so that

$$\partial D_3 = -\sum_{d \in \underline{n}} \sum_{i \in \underline{b_d}} a_i^d \times (z_i^{n+1-d})^+ + \sum_{x \in K} \varepsilon(x).U_x M,$$

where $(-1)^{d+1}\varepsilon(x)$ is the sign of the intersection point. For $d \in \underline{n}$ and $i \in \underline{b_d}$,

$$\sum_{x \in K_{i,d}} \varepsilon(x) = (-1)^{d+1} \left\langle A_i^{d+1}, (z_i^{n+1-d})^+ \right\rangle_{M^\circ} = \mathrm{lk}\left(a_i^d, (z_i^{n+1-d})^+\right) = (-1)^{d+1}[V_{n+1-d}^-]_{i,i},$$

where $V_{n+1-d}^- = V_{n+1-d}^-(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ as in Definition 6.2.17 with $\mathcal{B} = (a_i^d)_{i,d}$ and $\tilde{\mathcal{B}} = (z_i^d)_{i,d}$, so that

$$\sum_{x \in K}^{m} \varepsilon(x) = \sum_{d \in \underline{n}} \sum_{i \in \underline{b_d}} \sum_{x \in K_{i,d}} \varepsilon(x) = \sum_{d \in \underline{n}} (-1)^{d+1} \mathrm{Tr}(V_{n+1-d}^-).$$

Conclude with Lemma 6.2.27. □

6.4.3.5 End of the proof of Lemma 6.4.11

Set $D_W = D_1 + D_2 + D_3$. By construction, ∂D_W is the union of:

- The faces $\partial_1 D_1$ and $\partial_2 D_1$ of Lemma 6.4.12.

- The faces D_δ, $a_1^0 \times \Sigma'^+$, and $\Sigma' \times (z_1^0)^+$ of Lemma 6.4.16.
- The faces $\varepsilon(x_i)U_{x_i}M$ of Lemma 6.4.17.

All these faces are contained in ∂W_1.

Let us check that $\langle D_W, M_W\rangle_{W_1} = \pm 1$. We already saw that $\langle D_1, M_W\rangle_{W_1} = \pm 1$. Since $D_2 \subset \Sigma' \times \Sigma'^+$, the chain D_2 does not meet M_W, which is contained in the diagonal. Since $D_3 \subset {p_b}^{-1}(E_3 \times E_3)$, $\langle D_3, M_W\rangle_{W_1} = 0$, and $\langle D_W, M_W\rangle_{W_1} = \pm 1$.

It remains to check that $\langle D_W, \delta_W\rangle_{W_1} = 0$ for the cycle δ_W of Lemma 6.4.8. Note that $[\delta_W] = [\delta_W - \partial(B_{X\cup Y} \cap W_1)]$. But $\delta'_W = \delta_W - \partial(B_{X\cup Y} \cap W_1)$ is the union of:

- The faces $\partial_{\mu,1}B = (\Sigma^- \cap E_2) \times (\partial\mathbb{D}_\mu(1))$ and $\partial_{\mu,2}B = (\partial\mathbb{D}_\mu(1)) \times (\Sigma^+ \cap E_2)$.
- The faces $-\partial L_0^-(1) \times E_2$ and $-E_2 \times \partial L_0^+(1)$.
- The faces $(\partial_i B_{Y_1})_{1\leq i\leq 3}$ and $(\partial_i B_{Y_2})_{1\leq i\leq 3}$.
- The face $-G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W_1$.

The faces $\partial L_0^-(1)\times E_2$, $E_2 \times \partial L_0^+(1)$, $\partial_{\mu,1}B$ and $\partial_{\mu,2}B$ cannot meet D_W: indeed, they are contained in $\partial N_1 \times E_2$ or $E_2 \times \partial N_1$, so they do not meet D_1 or D_3, and since the points $\partial L_0^\pm(1)$ are on the Seifert surfaces Σ^+ and Σ^-, and since Σ' and Σ'^+ do not meet the surfaces $\Sigma^\pm$, these faces do not meet D_2, either.

For $1 \leq i \leq 3$, let us study the intersection of the faces $\partial_i B_{Y_1} \subset p_b^{-1}((N_2 \cap E_1) \times \partial N_1)$ and $\partial_i B_{Y_2} \subset p_b^{-1}(\partial N_1 \times (N_2 \cap E_1))$ with D_W:

- They cannot meet D_3, which is contained in $p_b^{-1}(E_3 \times E_3)$.
- They could meet D_1 along $D_1 \cap \partial(X \cup Y) = \partial_2 D_1$, which is composed of configurations where the two points are in ∂N_1. The choice of the longitudes $\partial\Sigma'$ and $\partial\Sigma'^+$, and the description of these faces in Lemmas 6.4.5, 6.4.6, 6.4.7 imply that any configuration $c = (x, y) \in \partial N_1 \times \partial N_1$ in one of these faces is such that $\frac{y-x}{||y-x||} = e_1$. Figure 6.10 shows that this never happens when $(x, y) \in \partial_2 D_1$.
- Eventually, they could meet D_2 along $a_1^0 \times \Sigma'^+$ and $\Sigma' \times (z_1^0)^+$, which would necessarily happen inside $a_1^0 \times (\Sigma'^+ \cap (N_2 \cap E_1))$ or $(\Sigma' \cap (N_2 \cap E_1)) \times (z_1^0)^+$. Assume without loss that $a_1^0 = (\cos(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{6}), \overline{0})$ and that $(z_1^0)^+ = (18\cos(\frac{\pi}{3}), 18\sin(\frac{\pi}{3}), \overline{0})$. In this case, we get no intersection points, as it can be seen on Figure 6.10.

Therefore, these faces do not meet D_W.

We are left with the proof that $\langle D_W, -G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W_1\rangle = 0$. We will use the following lemma since this intersection is contained in the faces of D_W.

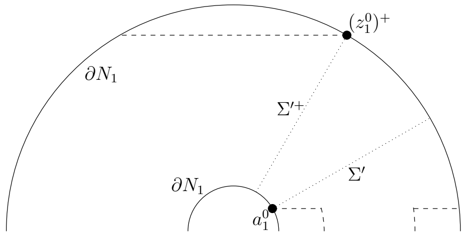


Figure 6.10 – Dotted line: The surfaces Σ' and Σ'^+ inside $N_3 \cap \Pi_x$ for any x such that $h_x < h_1$. Dashed line: The points $x \in N_2 \cap E_1$ such that $(x, (z_1^0)^+)$ or (a_1^0, x) lies in $\partial_1 B_{Y_i}$ or $\partial_2 B_{Y_i}$.

Lemma 6.4.18. *Let P be an oriented manifold with boundary, let Q be a submanifold of P, and let R be a submanifold of ∂P. Assume that*

- *the submanifold Q meets ∂P along its boundary: $Q \cap \partial P \subset \partial Q$, and this intersection is transverse,*
- *the submanifolds $Q \cap \partial P$ and R are transverse in ∂P.*

The submanifolds Q and R are transverse in P and $\langle Q, R\rangle_P = \langle \partial Q \cap \partial P, R\rangle_{\partial P}$.

Proof. The lemma follows from a direct computation. □

The only configurations of D_W where the two points collide with $u = \tau_x(e_1)$ are:

- Those coming from the faces $\varepsilon(x_i)U_{x_i}M \subset \partial D_3$. Their contribution is

$$\begin{aligned}\langle D_3, -G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W_1\rangle_{W_1} &= \left\langle \sum_{i=1}^m \varepsilon(x_i)U_{x_i}M, -G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W_1 \right\rangle_{\partial W_1} \\ &= -\sum_{i=1}^m \varepsilon(x_i) \\ &= \frac{1-\chi(\Sigma')}{2}\end{aligned}$$

- Those coming from $\partial_1 D_1$. Assume without loss of generality that e_1 is a regular value of the map $\varphi_n \colon x \in \Sigma' \mapsto \tau_x^{-1}(n_x) \in \mathbb{S}^{n+1}$. Their contribution is

$$\begin{aligned}\langle D_1, -G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W_1\rangle_{W_1} &= \langle \partial_1 D_1, -G_\tau^{-1}(\{e_1\}) \cap W_1\rangle_{\partial W_1} \\ &= +\deg_{e_1}(\varphi_n),\end{aligned}$$

  where $\deg_y(\varphi_n)$ is the differential degree of φ_n at y, and where the plus sign comes from the fact that the face $\partial_1 D_1$ of Lemma 6.4.12 is oriented as $-\Sigma'$.

The proof of Lemma 6.4.11 is now completed by the following lemma.

Lemma 6.4.19. *Let φ_n be the map $x \in \Sigma' \mapsto \tau_x^{-1}(n_x) \in \mathbb{S}^{n+1}$.*

The differential degree of φ_n may be extended to the constant map on $\mathbb{S}^{n+1}$ with value $\frac{\chi(\Sigma')-1}{2}$.

Proof. Note that for any $x \in \Sigma' \cap N_3$, $\varphi_n(x) = (\cos(\frac{2\pi}{3}), \sin(\frac{2\pi}{3}), \overline{0})$. All the boundary of Σ' is mapped by φ_n to one point in $\mathbb{S}^{n+1}$. This implies that the differential degree of φ_n does not depend on the chosen regular value in $\mathbb{S}^{n+1}$. Assume without loss that φ_n admits $-e_1$ and e_1 as regular values.

For any $x \in \Sigma'$, define the projection $X(x)$ of $\tau_x(e_1)$ on $T_x\Sigma'$ along the direction n_x (which is the only vector of $T_x\Sigma'$ that can be expressed as $\tau_x(e_1) - \lambda n_x$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$). This defines a tangent vector field X on Σ', whose zeros are the points such that $\varphi_n(x) = \pm e_1$. Around such a zero z, φ_n is a local diffeomorphism from a disk around z to a disk inside $\mathbb{S}^{n+1}$. In this setting, the index $i(X, z)$ of the zero is $+1$ if and only if this local diffeomorphism preserves the orientation. This implies that $\sum\limits_{z \text{ zero of X}} i(X, z) = \deg_{e_1}(\varphi_n) + \deg_{-e_1}(\varphi_n)$. Since $\deg(\varphi_n)$ does not depend on the regular value, $\deg(\varphi_n) = \frac{1}{2} \sum\limits_{z \text{ zero of X}} i(X, z)$.

Let $\mathbb{D} \subset \Sigma'$ be the set $\{(r\cos(\frac{\pi}{6}), r\sin(\frac{\pi}{6}), \overline{x}) \mid 1 \leq r \leq 2, \overline{x} \in \mathbb{R}^n\} \cap E_1$, as depicted in Figure 6.11. This is an $(n+1)$-disk on which X takes a constant value $X_0 \neq 0$. Change the vector field X on $\mathbb{D}$ so that it keeps the same value on $\partial\mathbb{D} \setminus \partial\Sigma'$ but is going outwards on all $\mathbb{D} \cap \partial\Sigma'$. The obtained vector field X' is going outwards on $\partial\Sigma'$ and $X'_{|\mathbb{D}}$ is going outwards on $\partial\mathbb{D}$ as in Figure 6.11. The zeros of X' are the union of those of X with same indices (which are in $\Sigma' \setminus \mathbb{D}$) and those of $X'_{|\mathbb{D}}$. In this setting, Poincaré-Hopf theorem (see for example [Mil65, Section 6, p 35]) yields $\sum\limits_{z \text{ zero of } X'} i(X', z) = \chi(\Sigma' \cup \mathbb{D}) = \chi(\Sigma')$, and $\sum\limits_{z \text{ zero of } X'_{|\mathbb{D}}} i(X', z) = \chi(\mathbb{D}) = 1$.

The difference of these two formulas gives $\sum\limits_{z \text{ zero of } X} i(X, z) = \chi(\Sigma') - 1$, and implies the lemma. □

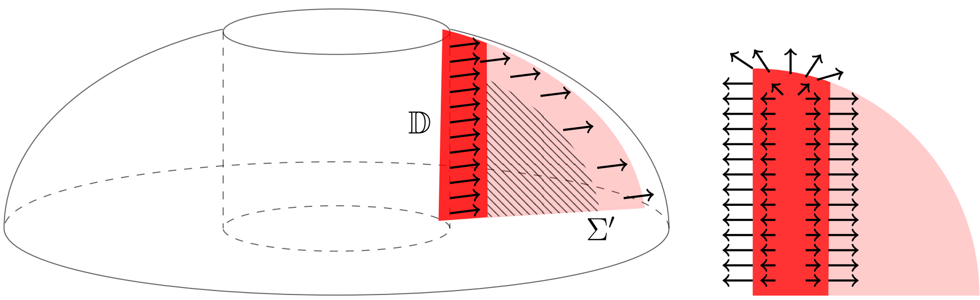


Figure 6.11 – Left: The surface Σ' with the darker disk $\mathbb{D}$, and the vector field X. The hashed area depicts $\Sigma' \cap E_2$, which is not necessarily a disk as in the picture. Right: The modified field X' on $\mathbb{D}$, which points outwards on the boundary.

6.5 On virtual rectifiability

6.5.1 Proof of Lemma 6.2.21

Lemma 6.5.1. *Let $(I_t)_{0\leq t\leq 1}$ be a homotopy of maps $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\mathbb{D}^n) \to (\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$ with $I_0(\mathbb{R}^n) = \{\iota_0\}$. Let $\mathcal{G}$ denote the space of smooth maps from $\mathbb{R}^n$ to $GL_{n+2}(\mathbb{R})$ that map $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ to I_{n+2}.*

There exists a continous map $t \in [0,1] \mapsto g_t \in \mathcal{G}$, such that for any $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}^n$, $I_t(x) = g_t(x)\circ I_0(x)$, and such that, for any $x\in\mathbb{R}^n$, $g_0(x) = I_{n+2}$.

Proof. Set $g_0(x) = I_{n+2}$ for any x. Endow $\mathbb{R}^{n+2}$ with its canonical Euclidean structure and let $P_{t,x}$ denote the orthogonal complement of $I_t(x)(\mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}^{n+2}$. Let $\pi_{t,x}$ denote the orthogonal projection on $P_{t,x}$. Set $f(t,t_0,x) = \min_{z\in P_{t_0,x}, ||z||=1} ||\pi_{t,x}(z)||$. Since f maps the complement of the compact $[0,1]^2\times\mathbb{B}^n$ to 1, it is uniformly continuous. Fix $\delta>0$ so that for any (t,t_0,x) and (t',t'_0,x') with $|t-t'|+|t_0-t'_0|+||x-x'||<\delta$, $|f(t',t'_0,x')-f(t,t_0,x)|<\frac{1}{2}$, and for any $j\in\mathbb{N}$, set $t_j=\min(j\frac{\delta}{2},1)$. We are going to define g_t on each $[t_j,t_{j+1}]$.

Note that $P_{0,x}\cap P_{t,x}^{\perp}=\{0\}$ if and only if $f(t,0,x)>0$. Since $f(0,0,x)=1$ for any x, we have $P_{0,x}\cap P_{t,x}^{\perp}=\{0\}$ for $0\leq t\leq t_1$. For $0\leq t\leq t_1$, define $g_t(x)$ by the following formula:

$$\forall z=(z_1,z_2,\overline{z})\in\mathbb{R}^{n+2}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, g_t(x)(z_1,z_2,\overline{z})=\pi_{t,x}(\pi_{0,x}(z))+I_t(x)(\overline{z})$$

Since $P_{0,x}\cap P_{t,x}^{\perp}=\{0\}$, $\pi_{t,x}$ defines an isomorphism from $P_{0,x}$ to $P_{t,x}$. Thus, $g_t(x)$ is an isomorphism. For $t_k\leq t\leq t_{k+1}$ and $x\in\mathbb{R}^n$ define $g_t(x)$ so that

$$\forall z=(z_1,z_2,\overline{z})\in\mathbb{R}^{n+2}, g_t(x)(z_1,z_2,\overline{z})=\pi_{t,x}(\pi_{t_k,x}(\cdots\pi_{t_0,x}(z)\cdots))+I_t(x)(\overline{z}).$$

Since $f(t,t_k,x)\geq f(t_k,t_k,x)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, the above method proves that $g_t(x)$ is an isomorphism. This defines a family $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ as required by the lemma. □

Proof of Lemma 6.2.21. Let τ be a parallelization such that the class $[\iota(\tau,\psi)]$ of Lemma 6.2.19 is zero, so that there exists $(I_t)_{0\leq t\leq 1}$ as in Lemma 6.5.1 with $I_1=\iota(\tau,\psi)$. Let $(\tilde{g}_t)_{0\leq t\leq 1}$ be a smooth approximation of the map $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ of Lemma 6.5.1, such that for any $x\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{g}_0(x)=I_{n+2}$ and $I_1(x)=\iota(\tau,\psi)(x)=\tilde{g}_1(x)\circ I_0(x)$. Assume without loss of generality that $(t\in[0,1]\mapsto\tilde{g}_t\in\mathcal{G})$ is constant on a neighborhood of $\{0,1\}$. Take a tubular neighborhood N of $\psi(\mathbb{R}^n)$ and identify N with $\psi(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{D}^2$ with coordinates $(\psi(x),r,\theta)$. For any $y=(\psi(x),r,\theta)\in N$, set $\tau_y=(\tau_e)_y\circ\tilde{g}_{1-r}(x)$. This defines a map $\tau\colon N\times\mathbb{R}^{n+2}\to TN$, which extends to a map $\tau'\colon M^\circ\times\mathbb{R}^{n+2}\to TM^\circ$, by setting $(\tau')_y=(\tau_e)_y$ when $y\notin N$. This construction ensures that $\iota(\tau',\psi)=\iota_0$, and τ' is a parallelization of M°. □

6.5.2 Case $n \equiv 5 \mod 8$

We use the following Bott periodicity theorem, which is proved in [Bot57].

Theorem 6.5.2. *[Bott] For any $k \geq 0$, and any $N \geq 1$,*

$$\pi_N(\mathrm{SO}(N+2+k), I_{N+2+k}) = \begin{cases} 0 & \text{if } N \equiv 2, 4, 5 \text{ or } 6 \mod 8, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } N \equiv 0 \text{ or } 1 \mod 8, \\ \mathbb{Z} & \text{if } N \equiv 3 \text{ or } 7 \mod 8. \end{cases}$$

This yields the following corollary, which is the first assertion of Lemma 6.2.23.

Corollary 6.5.3. *Suppose $n \equiv 5 \mod 8$, and let M° be an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$. If M° is parallelizable, then all long knots $\psi \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$ are rectifiable. Therefore, for any long knot ψ in a (possibly non-parallelizable) asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, $\psi\sharp\psi$ is rectifiable.*

Proof. As stated in Lemma 6.3.2, $\pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0) = \pi_n(SO(n+2), I_{n+2})$. Since $n \equiv 5 \mod 8$, $\pi_n(SO(n+2), I_{n+2}) = 0$. Then $\pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0) = 0$, and, if M° is parallelizable, the hypothesis of Lemma 6.2.21 is satisfied for any knot.

In the non-parallelizable case, $M^\circ\sharp M^\circ$ is parallelizable because of Proposition 6.2.12, and the previous argument applies to $\psi\sharp\psi$. □

6.5.3 Case $n \equiv 1 \mod 8$ and connected sum of long knots

The following lemma concludes the proof of Lemma 6.2.23.

Lemma 6.5.4. *When $n \equiv 1 \mod 8$, for any long knot ψ in a parallelizable asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, the connected sum $\psi\sharp\psi$ is rectifiable. Therefore, for any long knot ψ in a (possibly non-parallelizable) asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, the connected sum $\psi\sharp\psi\sharp\psi\sharp\psi$ is rectifiable.*

Proof. Let (M°, τ) be a parallelized asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$, let $(M^\circ\sharp M^\circ, \tau\sharp\tau)$ be the induced connected sum, and fix a long knot $\psi \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M^\circ$. Since $\psi\sharp\psi$ is defined by stacking two copies of the knot, $\iota(\tau\sharp\tau, \psi\sharp\psi)$ is the map defined by stacking two copies of $\iota(\tau, \psi)$. In terms of homotopy classes in $[(\mathbb{R}^n, B^\circ_{\infty,n}), (\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)] = \pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0)$, this implies $[\iota(\tau\sharp\tau, \psi\sharp\psi)] = 2.[\iota(\tau, \psi)]$. Lemma 6.3.2 and Theorem 6.5.2 yield $\pi_n(\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+2}), \iota_0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. This implies $[\iota(\tau\sharp\tau, \psi\sharp\psi)] = 0$. Lemma 6.2.21 implies that $\psi\sharp\psi$ is rectifiable.

In the non-parallelizable case, $M^\circ\sharp M^\circ$ is parallelizable because of Proposition 6.2.12, and the previous argument applies to $\psi\sharp\psi$. □

Note that since $\pi_n(SO(n+2), I_{n+2}) = \mathbb{Z}$ for $n \equiv 3 \mod 4$, the same method implies that $\psi\sharp\psi$ is virtually rectifiable if and only if $\psi\sharp\psi$ is rectifiable (otherwise the class $\iota(\psi\sharp\psi)$ of Definition 6.2.22 has infinite order). This argument together with Corollary 6.5.3 and Lemma 6.5.4 yields the following remark.

Remark 6.5.5. Let M° be an asymptotic homology $\mathbb{R}^{n+2}$ and let ψ be a long knot of M°. Then, ψ is virtually rectifiable if and only if $\psi\sharp\psi\sharp\psi\sharp\psi$ is rectifiable.

6.6 Proof of Theorem 6.2.29

6.6.1 A generating series for the $(\lambda_{k,\nu})_{k\geq 2, 1\leq\nu\leq k-1}$

In this section, we prove the following result for the coefficients $(\lambda_{k,\nu})_{k\geq 2,\nu\in\underline{k-1}}$ of Theorem 6.2.24.

Lemma 6.6.1. *For any $k\geq 2$, set $L_k(X)=\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\lambda_{k,\nu}X^\nu$, set $L_1(X)=\frac{X+1}{2}$, and define the formal power series $L(X,Y)=\sum\limits_{k\geq 1}L_k(X)Y^{k-1}\in\mathbb{Q}[[X,Y]]$. Then,*

$$L(X,Y)=\frac{1-X}{2}\frac{1+X\exp((1-X)Y)}{1-X\exp((1-X)Y)}.$$

In order to prove Lemma 6.6.1, we first obtain an induction formula for the coefficients $(\lambda_{k,\nu})_{k\geq 2,\nu\in\underline{k-1}}$ in Lemma 6.6.2. We next derive an induction formula for the polynomials $(L_k)_{k\geq 1}$ in Lemma 6.6.3, and a differential equation on $L(X,Y)$ in Lemma 6.6.4.

Lemma 6.6.2. *Extend the definition of the coefficients $(\lambda_{k,\nu})_{k\geq 2,\nu\in\underline{k-1}}$ to $(k,\nu)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ by setting $\lambda_{k,\nu}=0$ when $\nu\notin\{1,\ldots,k-1\}$ or $k\leq 1$. For any $k\geq 3$,*

$$(k-1)\lambda_{k,\nu}=\lambda_{k-1,\nu}+\lambda_{k-1,\nu-1}+\sum_{r=2}^{k-2}\sum_{p\geq 0}\lambda_{r,p}\lambda_{k-r,\nu-p}.$$

Proof. By definition, for any $k\geq 3$ and any $\nu\in\underline{k-1}$, $\lambda_{k,\nu}=\frac{1}{(k-1)!}\mathrm{Card}(\{\sigma\in\mathfrak{S}_{k-1}\mid N(\sigma)=\nu-1\})$, where $N(\sigma)=\mathrm{Card}\{i\in\underline{k-2}\mid\sigma(i)<\sigma(i+1)\}$.

Let $\sigma\in\mathfrak{S}_{k-1}$, and set $r_\sigma=\sigma^{-1}(k-1)$, $I_\sigma=\{1,\ldots,r_\sigma-1\}$, and $J_\sigma=\{r_\sigma+1,\ldots,k-1\}$. Let $i_\sigma\colon\sigma(I_\sigma)\to I_\sigma$ and $j_\sigma\colon\sigma(J_\sigma)\to J_\sigma$ denote the two only such maps that are strictly increasing bijections. The permutation σ induces two permutations $\sigma_1=i_\sigma\circ\sigma_{|I_\sigma}\in\mathfrak{S}_{I_\sigma}$ and $\sigma_2=j_\sigma\circ\sigma_{|J_\sigma}\in\mathfrak{S}_{J_\sigma}$.

- If $r_\sigma=k-1$, $N(\sigma_1)=N(\sigma)-1$ and $\sigma_2\in\mathfrak{S}_\emptyset$.
- If $r_\sigma=1$, $N(\sigma_2)=N(\sigma)$, and $\sigma_1\in\mathfrak{S}_\emptyset$.
- If $2\leq r_\sigma\leq k-2$, then $N(\sigma)=1+N(\sigma_1)+N(\sigma_2)$, since the elements $i\in\underline{k-2}$ such that $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ are taken into account in $N(\sigma_1)$ if $i<r_\sigma-1$, in $N(\sigma_2)$ if $i\geq r_\sigma+1$, and since $\sigma(r_\sigma-1)<\sigma(r_\sigma)$ and $\sigma(r_\sigma)>\sigma(r_\sigma+1)$.

Now, note that σ is equivalent to the data of $(r_\sigma, \sigma(I_\sigma), \sigma_1, \sigma_2)$, and that, for a given r_σ, there are $\binom{k-2}{r_\sigma-1}$ possible choices of $\sigma(I_\sigma)$. This yields the induction formula of the lemma. $\square$

Lemma 6.6.3. *The polynomial $L_2(X)$ is X, and for any $k \geq 3$,*

$$L_k(X) = \frac{1}{k-1}\sum_{r=1}^{k-1} L_r(X)L_{k-r}(X).$$

Proof. The first point of the lemma is immediate since $\lambda_{2,1} = 1$. For $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}
(k-1)L_k(X) &= \sum_{\nu\in\underline{k-1}} (k-1)\lambda_{k,\nu}X^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\underline{k-1}} \left(\lambda_{k-1,\nu} + \lambda_{k-1,\nu-1} + \sum_{r=2}^{k-2}\sum_{p\geq 0}\lambda_{r,p}\lambda_{k-r,\nu-p}\right) X^\nu \\
&= L_{k-1}(X) + XL_{k-1}(X) + \sum_{r=2}^{k-2}\sum_{\nu\in\underline{k-1}}\sum_{p\geq 0}\lambda_{r,p}X^p\lambda_{k-r,\nu-p}X^{\nu-p} \\
&= (X+1)L_{k-1}(X) + \sum_{r=2}^{k-2} L_r(X)L_{k-r}(X) \\
&= \sum_{r=1}^{k-1} L_r(X)L_{k-r}(X),
\end{aligned}$$

since $L_1(X)L_{k-1}(X) + L_{k-1}(X)L_1(X) = (X+1)L_{k-1}(X)$. $\square$

Lemma 6.6.4. *$L(X,Y)$ satisfies the differential equation*

$$\frac{\partial L}{\partial Y}(X,Y) = (L(X,Y))^2 - \left(\frac{1-X}{2}\right)^2.$$

Proof. Indeed,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial Y}(X,Y) &= \sum_{k\geq 2} L_k(X)(k-1)Y^{k-2} \\
&= L_2(X) + \sum_{k\geq 3}\sum_{r=1}^{k-1} L_r(X)Y^{r-1}L_{k-r}(X)Y^{k-r-1} \\
&= L_2(X) + \sum_{k\geq 1} t_k(X)Y^k,
\end{aligned}$$

where $(L(X,Y))^2 = \sum_{k\geq 0} t_k(X)Y^k$. Since $L(X,Y) = \frac{(X+1)}{2} + \sum_{k\geq 2} L_k(X)Y^{k-1}$, we have $t_0(X) = \frac{(X+1)^2}{4}$, and

$$\frac{\partial L}{\partial Y}(X,Y) = X + L(X,Y)^2 - \frac{(X+1)^2}{4} = L(X,Y)^2 - \left(\frac{1-X}{2}\right)^2. \quad \square$$

Proof of Lemma 6.6.1. Since $|L_k(x)| \leq 1$ for any $x \in [-1,1]$, $L(X,Y)$ defines a power series that converges at least on $]-1,1[^2$. Fix $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, and set $u_x(t) = L(x,t)$ for any $t \in]-1,1[$. The function u_x satisfies the equation $u_x' = (u_x)^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$. Set $a = \frac{1-x}{2}$, and note that

$$\int_0^t \frac{u_x'(t)}{(u_x(t))^2 - a^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{u_x(t)-a}{u_x(t)+a}\right) - \mathrm{Ln}\left(\frac{u_x(0)-a}{u_x(0)+a}\right)\right),$$

so that, for any t,

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{(u_x(t)-a)(u_x(0)+a)}{(u_x(t)+a)(u_x(0)-a)}\right) = 2at.$$

Since $u_x(0) = \frac{x+1}{2}$ and $a = \frac{1-x}{2}$, this yields the formula of Lemma 6.6.1. Both sides of the formula of Lemma 6.6.1 are power series with a convergence domain containing a disk around $(0,0)$, so that the formula also holds for the formal power series. □

6.6.2 The formula with the Reidemeister torsion

Lemma 6.6.5. *For any virtually rectifiable long knot ψ,*

$$\sum_{k \geq 2} Z_k(\psi) h^k = -\mathrm{Ln}(\mathcal{T}_\psi(e^h)).$$

Proof. Let Σ be a Seifert surface for ψ, let $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ be a pair of dual bases of $\overline{H}_*(\Sigma)$, and set $V_d^\pm = V_d^\pm(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$. Corollary 6.2.25 yields

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} Z_k(\psi) h^k &= \sum_{d \in \underline{n}} \sum_{k \geq 2} \sum_{\nu \in \underline{k-1}} (-1)^{d+1} \lambda_{k,\nu} \frac{h^k}{k} \mathrm{Tr}\left((V_d^+)^\nu (V_d^-)^{k-\nu}\right) \\ &= \sum_{d \in \underline{n}} (-1)^{d+1} \mathrm{Tr}\left(M(hV_d^+, hV_d^-)\right), \end{aligned}$$

where $M(X,Y) = \sum\limits_{k \geq 2} \sum\limits_{\nu \in \underline{k-1}} \frac{1}{k} \lambda_{k,\nu} X^\nu Y^{k-\nu}$. Note that

$$M(X,Y) = \int_0^Y \left(L(XY^{-1}, T) - L_1(XY^{-1})\right) \mathrm{d}T.$$

Lemma 6.6.1 and basic integral calculus yield

$$\begin{aligned}
M(X,Y) &= \int_0^Y \left(\frac{1-XY^{-1}}{2}\frac{1+XY^{-1}\exp((1-XY^{-1})T)}{1-XY^{-1}\exp((1-XY^{-1})T)} - \frac{XY^{-1}+1}{2}\right)\mathrm{d}T \\
&= \int_0^Y \left(\frac{1-XY^{-1}}{2}\left(1+\frac{2X\exp((1-XY^{-1})T)}{Y-X\exp((1-XY^{-1})T)}\right) - \frac{XY^{-1}+1}{2}\right)\mathrm{d}T \\
&= \int_0^Y \left(-XY^{-1}+\frac{X(1-XY^{-1})\exp((1-XY^{-1})T)}{Y-X\exp((1-XY^{-1})T)}\right)\mathrm{d}T \\
&= -X - \mathrm{Ln}\left(\frac{Y-X\exp((1-XY^{-1})Y)}{Y-X}\right) \\
&= -\mathrm{Ln}\left(\frac{Y\exp(X)-X\exp(Y)}{Y-X}\right) \\
&= \mathrm{Ln}(X-Y) - Y - \mathrm{Ln}(X-Y\exp(X-Y)).
\end{aligned}$$

For any commuting square matrices (A,B) and any h arbitrarily small, this yields

$$M(hA,hB) = \mathrm{Ln}(A-B) - hB - \mathrm{Ln}(A-B\exp(h(A-B))),$$

where $\mathrm{Ln}(C)$ is defined for $C-I$ sufficiently small as $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(C-I)^k$. Therefore,

$$\begin{aligned}
M(hV_d^+,hV_d^-) &= \mathrm{Ln}(V_d^+-V_d^-) - hV_d^- - \mathrm{Ln}(V_d^+-V_d^-\exp(hV_d^+-hV_d^-)) \\
&= -hV_d^- - \mathrm{Ln}(V_d^+-e^hV_d^-) \\
&= -\frac{h}{2}I_{b_d} - hV_d^- - \mathrm{Ln}(e^{-\frac{h}{2}}V_d^+ - e^{+\frac{h}{2}}V_d^-) \\
&= -\frac{h}{2}(V_d^+ + V_d^-) - \mathrm{Ln}(e^{-\frac{h}{2}}V_d^+ - e^{+\frac{h}{2}}V_d^-),
\end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 2} Z_k(\psi)h^k &= \sum_{d\in\underline{n}}(-1)^{d+1}\mathrm{Tr}\left(\frac{h}{2}(V_d^+ + V_d^-) - \mathrm{Ln}(e^{-\frac{h}{2}}V_d^+ - e^{+\frac{h}{2}}V_d^-)\right) \\
&= \sum_{d\in\underline{n}}(-1)^d\mathrm{Ln}(\Delta_{d,\Sigma}(e^h)) = -\mathrm{Ln}(\mathcal{T}_\psi(e^h)),
\end{aligned}$$

where the second equality uses Lemma 6.2.27 and the fact that $\mathrm{Tr}(\mathrm{Ln}(I+H)) = \mathrm{Ln}(\det(I+H))$ for $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sufficiently small. $\square$

Chapitre 7

Invariants BCR des $\mathbb{R}^3$ asymptotiques d'homologie entière

Dans ce chapitre[1], on fixe un $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière M°, qui est nécessairement parallélisable en vertu de la proposition 3.2.2. Les diagrammes utilisés sont ceux de la définition 2.2.1. On redonne ici les principales définitions dans le cas de la dimension 1, où le formalisme peut être allégé.

7.1 Propagateurs

En dimension 1, les propagateurs internes de la définition 3.7.2 sont des 0-formes fermées sur $C_2(\mathbb{R})$, qui a deux composantes connexes $C_2^+(\mathbb{R}) = \overline{p_b{}^{-1}(\{(x,y) \mid x < y\})}$ et $C_2^-(\mathbb{R}) = \overline{p_b{}^{-1}(\{(x,y) \mid x > y\})}$. Une telle 0-forme fermée est donc simplement la donnée de sa valeur sur chacune de ces deux composantes, et la condition au bord sur les formes propagatrices impose que α vaut $+\frac{1}{2}$ sur $C_2^+(\mathbb{R})$ et $-\frac{1}{2}$ sur $C_2^-(\mathbb{R})$.

Définition 7.1.1. Une *k-famille de formes propagatrices de* (M°, τ) est la donnée de $2k$ formes propagatrices externes $(\beta_i)_{i \in \underline{2k}}$ comme en définition 3.7.2.

De telles formes propagatrices existent en vertu du corollaire 5.3.4.

[1]Une prépublication en préparation intitulée « Bott-Cattaneo-Rossi invariants for long knots in asymptotic homology $\mathbb{R}^3$ » contient l'essentiel des résultats de ce chapitre, dans un cadre plus large, et des résultats supplémentaires. Les démonstrations y sont faites sans utiliser les résultats des deux articles reproduits ci-avant, et sont donc sans doute plus à recommander pour qui voudrait s'intéresser au cas de la dimension 1.

7.2 Espace de configurations

Soit Γ un diagramme BCR de degré k. On définit l'espace $C_\Gamma(\psi)$ comme en partie 3.6. Pour chaque arête interne $e = (v, w)$ d'un diagramme numéroté $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, la 0-forme $p_e^*(\alpha_{\sigma(e)})$ est une fonction valant $\frac{1}{2}$ sur les composantes connexes où $c_i(v) \leq c_i(w)$ et $-\frac{1}{2}$ ailleurs. Cette remarque additionnelle nous permet d'exprimer la forme différentielle à étudier sur $C_\Gamma(\psi)$ en fonction des seules formes propagatrices externes.

Définition 7.2.1. Soit (Γ, σ) un diagramme BCR numéroté de degré k, et soit $F = (\beta_i)_{i\in\underline{2k}}$ une k-famille de formes propagatrices de (M°, τ). Notons $N_i(\Gamma)$ le nombre d'arêtes internes de Γ. Pour tout $c \in C^0_\Gamma(\psi)$, notons $N_i^-(\Gamma, c)$ le nombre d'arêtes internes $e = (v, w)$ de Γ telles que $c_i(v) > c_i(w)$. La fonction $\left(c \mapsto N_i^-(\Gamma, c)\right)$ s'étend à tout $C_\Gamma(\psi)$ en une fonction localement constante. Pour toute arête externe, définissons $\omega_e^F(\Gamma, \sigma, \psi) = {p_e}^* \left(\beta_{\sigma(e)}\right)$, et posons

$$\omega^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \frac{(-1)^{N_i^-(\Gamma,\cdot)}}{2^{N_i(\Gamma)}} \bigwedge_{e\in E_e(\Gamma)} \omega_e^F(\Gamma, \sigma, \psi),$$

et posons $I^F(\Gamma, \sigma, \psi) = \displaystyle\int_{C_\Gamma(\psi)} \omega^F(\Gamma, \sigma, \psi)$.

7.3 Invariants BCR des nœuds longs dans les $\mathbb{R}^3$ asymptotiques d'homologie entière

Théorème 7.3.1. *Pour tout nœud long ψ d'un $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière, toute parallélisation τ de M°, et toute k-famille $F = (\beta_i)_{i\in\underline{2k}}$ de formes propagatrices de (M°, τ), posons*

$$Z_k^F(\psi) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} I^F(\Gamma, \sigma, \psi).$$

Alors :

1. *la valeur de $Z_k^F(\psi)$ ne dépend pas du choix de la k-famille $F = (\beta_i)_{i\in\underline{2k}}$ de formes propagatrices de (M°, τ),*
2. *la valeur de $Z_k(\psi) = Z_k^F(\psi)$ ne dépend pas du choix de la parallélisation de M°,*
3. *si φ est un difféomorphisme de M° dont la restriction à B°_∞ est l'identité, et si ψ est un nœud long, alors $Z_k(\varphi \circ \psi) = Z_k(\psi)$,*

4. *l'invariant Z_k ne prend que des valeurs rationnelles,*

5. *l'invariant Z_k est toujours nul si k est impair,*

6. *l'invariant Z_k est additif par rapport à la somme connexe.*

Notons que le troisième point implique que Z_k est un invariant d'isotopie des nœuds longs dans les $\mathbb{R}^3$ asymptotiques d'homologie entière.

Les propriétés 2 à 5 du théorème 7.3.1 se démontrent comme leurs analogues en dimension supérieure, une fois démontrée la propriété 1. En revanche, les propriétés 1 et 6 nécessitent des arguments supplémentaires. Il s'agit notamment de démontrer un analogue du lemme 5.3.2 dans le cas de la dimension 1.

7.3.1 Preuve de l'indépendance de la famille F

7.3.1.1 Remarques préliminaires

On se donne deux familles $F = (\beta_i)_{i\in\underline{2k}}$ et $F' = (\beta'_i)_{i\in\underline{2k}}$ avec $\beta'_i = \beta_i$ pour $i \geq 2$. On reprend les notations de la partie 5.3, mais comme les formes propagatrices internes sont fixées, on introduit uniquement une 1-forme ζ_1^1 telle que $\beta'_1 = \beta_1 + \mathrm{d}\zeta_1^1$, et l'on dit que $(\beta'_1 - \beta_1)$ a la propriété de factorisation par la sphère si $\zeta_1^1 = {G_{\tau_1}}^*(\eta_1^1)$ pour une certaine 1-forme antisymétrique η_1^1 sur $\mathbb{S}^2$. Pour tout $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, et toute arête externe $e \in E_e(\Gamma)$, on pose alors

$$\tilde{\omega}_{e,\sigma} = \begin{cases} \omega_e^F(\Gamma, \sigma, \psi) & \text{si } \sigma(e) \neq 1, \\ {p_e}^*(\zeta_1^1) & \text{si } \sigma(e) = 1, \end{cases}$$

et

$$\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi) = \begin{cases} \frac{(-1)^{N_i^-(\Gamma,\cdot)}}{2^{N_i(\Gamma)}} \bigwedge\limits_{e\in E_i(\Gamma)} \tilde{\omega}_{e,\sigma} & \text{si } \sigma^{-1}(1) \text{ est externe}, \\ 0 & \text{si } \sigma^{-1}(1) \text{ est interne}. \end{cases}$$

Notons $\mathcal{F}(\Gamma)$ l'ensemble des faces de codimension 1 de $C_\Gamma(\psi)$, et réintroduisons la classification des faces et les notations de la partie 5.3. Avec ces notations, le théorème de Stokes réduit la démonstration de la propriété 1 du théorème 7.3.1 à l'étude des intégrales $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = \int_{\partial_S C_\Gamma(\psi)} \tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)$.

7.3.1.2 Lemme principal

On a alors l'analogue suivant du lemme 5.3.2.

Lemma 7.3.2. *Si $S \subset V(\Gamma)$, on note Γ_S le sous-graphe de Γ dont les sommets sont les éléments de S et les arêtes les arêtes de Γ dont les deux extrémités sont dans S.*

- *Pour tout* $(\partial_S C_\Gamma(\psi), \sigma) \in \mathcal{F}(\Gamma) \times \mathrm{Num}(\Gamma)$, *tel que* $\sigma^{-1}(1)$ *est une arête interne,* $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.

- *Pour toute face à l'infini numérotée* $(\partial_S C_\Gamma(\psi), \sigma)$ *telle que* $\sigma^{-1}(1)$ *n'a aucune extrémité dans* S, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.

- *L'ensemble des faces cachées admet une partition* $\mathcal{H}_1(\Gamma) \sqcup \mathcal{H}_2(\Gamma)$ *telle que*

  - *pour toute face* $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ *de* $\mathcal{H}_1(\Gamma)$ *et toute numérotation* σ, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.
  - *pour toute face* $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ *de* $\mathcal{H}_2(\Gamma)$, *on dispose d'une involution* $\sigma \mapsto \sigma^*$ *des numérotations de* Γ *de telle sorte que* $\delta_S I(\Gamma, \sigma^*, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$.

- *Voyons les faces principales comme des couples* (Γ, e) *où* $\Gamma \in \mathcal{G}_k$ *et* $e \in E(\Gamma)$. *Pour toute numérotation* σ, *soit* $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *l'intégrale* $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *associée à l'ensemble* S *des extrémités de* e. *Soit* $\mathcal{N}_{\neq 1}(\Gamma, e)$ *l'ensemble des numérotations de* Γ *telles que* $\sigma(e) \neq 1$. *Alors :*

  - *Il existe une involution* $s\colon (\Gamma, e) \mapsto (\Gamma^*, e^*)$ *de l'ensemble des faces principales telle que pour tout* (Γ, e), *il existe une application canonique* $\left(s_{\Gamma,e}\colon \sigma \in \mathcal{N}_{\neq 1}(\Gamma, e) \mapsto \sigma^* \in \mathcal{N}_{\neq 1}(\Gamma^*, e^*)\right)$ *telle que* $\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = -\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *et que* $s_{\Gamma,e} \circ s_{\Gamma^*,e^*} = \mathrm{Id}$.
  - *Si* σ *est une numérotation de* Γ *telle que* $\sigma(e) = 1$, *et, si* e *est externe avec au moins une extrémité externe, alors* $\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.

De plus, si $(\beta_1' - \beta_1)$ *a la propriété de factorisation par la sphère,*

- *pour toute face à l'infini* $\partial_S C_\Gamma(\psi)$, $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$,

- *les faces anormales s'annulent : pour tout* $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, $\delta_{V(\Gamma)} I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$,

- *pour toute face principale* (Γ, e) *où* e *est une arête externe entre deux sommets internes, l'application* $s_{\Gamma,e}$ *ci-dessus s'étend en une application* $\left(s_{\Gamma,e}\colon \sigma \in \mathrm{Num}(\Gamma) \mapsto \sigma^* \in \mathrm{Num}(\Gamma^*)\right)$ *telle que* $\delta_{e^*} I(\Gamma^*, \sigma^*, \psi) = -\delta_e I(\Gamma, \sigma, \psi)$ *et* $s_{\Gamma,e} \circ s_{\Gamma^*,e^*} = \mathrm{Id}$.

7.3.1.3 Cas où $\sigma^{-1}(1)$ est interne

La première propriété du lemme 7.3.2 découle immédiatement de la définition des formes $\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi)$.

7.3.1.4 Faces à l'infini

Soit $S^* = S \sqcup \{*\}$ représentant une face à l'infini $\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi)$. Les arguments de la partie 5.7.1 démontrent que $\delta_{S^*} I(\Gamma, \sigma, \psi)$ s'annule, sauf éventuellement dans le cas où toutes les arêtes entre S et $V(\Gamma) \setminus S$ sont des arêtes internes. En particulier, cela entraîne que S contient au moins deux sommets. Soit donc une face $\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi)$ vérifiant cette dernière hypothèse. Écrivons $\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi) = C^0_{\Gamma_{|V(\Gamma)\setminus S}} \times C_{S,\infty}$ comme en partie 5.7.1. Définissons une relation d'équivalence sur $\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi)$, en disant que $(c, [u_S])$ est équivalent à $(c', [u'_S])$ si et seulement si $c = c'$ et s'il existe un choix de représentants u_S et u'_S tels que pour tout sommet $v \in S$,

$$u'_S(v) = \frac{\frac{u_S(v)}{||u_S(v)||^2} + (0,0,t)}{\left|\left|\frac{u_S(v)}{||u_S(v)||^2} + (0,0,t)\right|\right|^2}.$$

Pour toute arête externe e, l'application p_e se factorise par l'application quotient $\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi) \to Q$ de cette relation d'équivalence. Puisque $\mathrm{Card}(S) \geq 2$, $\dim(Q) < \dim(\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi)) = \deg(\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi))$. On en déduit que la forme $(\tilde{\omega}(\Gamma, \sigma, \psi))_{|\partial_{S^*} C_\Gamma(\psi)}$ est nulle, et donc que $\delta_{S^*} I(\Gamma, \sigma, \psi) = 0$.

7.3.1.5 Faces cachées, principales et anormales

Dans ce cas, tout est identique à la démonstration du lemme 5.3.2, à laquelle nous renvoyons, à l'exception du lemme 5.7.4 dont la démonstration n'est plus valide si S consiste en deux sommets internes entre lesquels il n'y pas d'arête. Montrons que pour une telle face, la contribution s'annule encore. Dans ce cas, la face $\partial_S C_\Gamma(\psi)$ est difféomorphe à $C^0_{\delta_S \Gamma} \times \mathbb{S}^0$. Avec cette identification, l'application $\big(\varphi\colon (c, u) \in \partial_S C_\Gamma(\psi) \mapsto (c, -u) \in \partial_S C_\Gamma(\psi)\big)$ renverse l'orientation et l'on a $p_e \circ \varphi = p_e$ pour toute arête e de Γ. Ceci entraîne alors que $\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi) = -\delta_S I(\Gamma, \sigma, \psi)$ et conclut.

7.3.2 Démonstration de l'additivité de Z_k

Nous reprenons les notations de la partie 5.9. La démonstration de l'additivité de Z_k (propriété 6 du théorème 7.3.1) est la même qu'en dimension élevée à ceci près que le lemme 5.9.1 n'est plus valide. En revanche, le corollaire 5.9.2 reste vrai, ce qui permet de conclure la preuve comme en dimension supérieure. Avant de démontrer ce fait, énonçons le lemme suivant qui remplace le lemme 5.9.1.

Lemma 7.3.3. *Pour tout* $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$ *et tout* $S_1 \sqcup S_2 \subsetneq V(\Gamma)$,

$$\dim\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right) \leq \sum_{e \in E(\Gamma_{S_1,S_2})} n(e).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si toute arête de Γ ayant une extrémité dans $S_1 \sqcup S_2$ et l'autre dans $V(\Gamma) \setminus (S_1 \sqcup S_2)$ ou une extrémité dans S_1 et une extrémité dans S_2 est interne.

Démonstration. L'inégalité se démontre rigoureusement comme celle du lemme 5.9.1. Le cas d'égalité tient en compte le fait que, désormais, $\tilde{d}(e_-) + \tilde{d}(e_+) = n(e) = 0$ pour toute arête interne e. $\square$

On démontre alors le corollaire suivant, qui remplace le corollaire 5.9.2 et la démonstration de l'additivité de Z_k se conclut ensuite comme en partie 5.9.

Corollaire 7.3.4. *Pour tout (Γ, S_1, S_2) tel que $S_1 \sqcup S_2 \subsetneq V(\Gamma)$, et toute numérotation σ de Γ, définissons les applications*

$$\begin{array}{rlcl} G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\colon & C_{\Gamma_{S_1,S_2}} & \to & \prod_{e\in E_e(\Gamma_{S_1,S_2})} \mathbb{S}^2 \\ & c & \mapsto & (G_e(c))_{e\in E_e(\Gamma_{S_1,S_2})}, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rlcl} \pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}\colon & (\mathbb{S}^2)^{2k} & \to & \prod_{e\in E_e(\Gamma_{S_1,S_2})} \mathbb{S}^2 \\ & (X_i)_{1\leq i\leq 2k} & \mapsto & (X_{\sigma(e)})_{e\in E_e(\Gamma_{S_1,S_2})}. \end{array}$$

Pour tout $\hat{\varepsilon}\colon \{1, \dots, 2k\} \to \{\pm 1\}$, posons

$$\begin{array}{rlcl} T_{\hat{\varepsilon}}\colon & (\mathbb{S}^2)^{2k} & \to & (\mathbb{S}^2)^{2k} \\ & (X_i)_{1\leq i\leq 2k} & \mapsto & (\hat{\varepsilon}(i)X_i)_{1\leq i\leq 2k}. \end{array}$$

Avec ces notations, pour tout $(\Gamma, \sigma, S_1, S_2, \hat{\varepsilon})$, l'ensemble

$$T_{\hat{\varepsilon}}^{-1}\left(\left(\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}\right)^{-1}\left(G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)\right)\right)$$

est un fermé d'intérieur vide de $(\mathbb{S}^2)^{2k}$. Par conséquent, l'ensemble

$$\mathcal{O}_k = \bigcap_{\Gamma,S_1,S_2,\sigma,\hat{\varepsilon}} \left((\mathbb{S}^2)^{2k} \setminus T_{\hat{\varepsilon}}^{-1}\left(\left(\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}\right)^{-1}\left(G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)\right)\right)\right)$$

est un ouvert dense de $(\mathbb{S}^2)^{2k}$.

Démonstration. L'ensemble $T_{\hat{\varepsilon}}^{-1}\left(\left(\pi_{\Gamma_{S_1,S_2},\sigma}\right)^{-1}\left(G_{\Gamma_{S_1,S_2}}\left(C_{\Gamma_{S_1,S_2}}\right)\right)\right)$ est immédiatement compact donc fermé. Montrons qu'il est d'intérieur vide.

S'il existe une arête externe de Γ ayant une extrémité dans $S_1 \sqcup S_2$ et l'autre dans $V(\Gamma) \setminus (S_1 \sqcup S_2)$ ou une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2, on conclut comme dans la démonstration du lemme 5.9.2, en utilisant le lemme de Sard, qui entraîne ici que l'image de $G_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ est d'intérieur vide puisque son espace d'arrivée est de dimension strictement plus grande que sa source.

Supposons donc que toute arête de Γ ayant une extrémité dans $S_1 \sqcup S_2$ et l'autre dans $V(\Gamma) \setminus (S_1 \sqcup S_2)$ ou une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2 est interne. Définissons une relation d'équivalence sur $C_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ telle que deux éléments c et c' sont en relation s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in V(\Gamma)$,

$$c'(v) = \begin{cases} c(v) & \text{si } v \in \overline{S_1} \sqcup \overline{S_2}, \\ (0,0,t) + c(v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $G_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ se factorise alors par l'application quotient $C_{\Gamma_{S_1,S_2}} \to Q$, et comme $\overline{S_1} \sqcup \overline{S_2} \neq V(\Gamma_{S_1,S_2})$, Q est de dimension strictement inférieure à $C_{\Gamma_{S_1,S_2}}$. Il s'ensuit par application du lemme de Sard que l'image de $G_{\Gamma_{S_1,S_2}}$ est d'intérieur vide, ce qui achève la démonstration. $\square$

7.4 Définition discrète des invariants BCR

On définit les chaînes propagatrices externes comme en définition 3.12.1, et on définit l'application $P_\Gamma = \prod_{e \in E_e(\Gamma)} p_e \colon C_\Gamma(\psi) \to (C_2(M^\circ))^{E_e(\Gamma)}$. On dit qu'une k-famille $F = (B_i)_{i \in \underline{2k}}$ de chaînes propagatrices externes de (M°, τ) est *en position générale pour un nœud long* ψ si, pour tout diagramme numéroté $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, et pour toute configuration $c \in \bigcap_{e \in E_e(\Gamma)} {p_e}^{-1}(B_{\sigma(e)})$,

- la configuration $p_e(c)$ est dans l'intérieur de $B_{\sigma(e)}$,
- il existe un signe $\varepsilon(c)$ tel que

$$\varepsilon(c) T_{P_\Gamma(c)} \left((C_2(M^\circ))^{E_e(\Gamma)} \right) = T_c P_\Gamma(T_c C_\Gamma(\psi)) + \left(\prod_{e \in E_e(\Gamma)} T_{p_e(c)} \mathrm{Int}(B_{\sigma(e)}) \right).$$

Pour une telle famille et un diagramme numéroté $(\Gamma, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{G}_k}$, on définit le nombre d'intersection algébrique associé à (Γ, σ, ψ) comme

$$I_F(\Gamma, \sigma, \psi) = \sum_{c \in \bigcap_{e \in E_e(\Gamma)} {p_e}^{-1}(B_{\sigma(e)})} \left(\varepsilon(c) \frac{(-1)^{N_i^-(\Gamma,c)}}{2^{N_i(\Gamma)}} \prod_{e \in E_e(\Gamma)} w_{B_{\sigma(e)}}(p_e(c)) \right).$$

Théorème 7.4.1. *Pour tout nœud long ψ d'un $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière, et toute k-famille $F = (B_i)_{i\in\underline{2k}}$ de chaînes propagatrices externes de (M°, τ) en position générale pour ψ,*

$$Z_k(\psi) = \frac{1}{(2k)!}\sum_{(\Gamma,\sigma)\in\widetilde{\mathcal{G}_k}} I_F(\Gamma,\sigma,\psi).$$

Ce théorème se démontre à partir du théorème 7.3.1 comme le théorème 5.2.13 dont il est l'analogue.

7.5 Le polynôme d'Alexander en fonction des invariants BCR

Le raisonnement du chapitre 6 n'utilise nulle part le fait que la dimension n du nœud soit supérieure à 3, sauf dans la démonstration du lemme 6.2.23, qui est remplacé par le lemme 4.3.3. On en déduit les théorèmes 7.5.1 et 7.5.2 ci-après.

Étant donné une surface de Seifert Σ d'un nœud long ψ, une paire $(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}})$ de bases duales de $H_1(\Sigma)$ est la donnée de deux bases $\mathcal{B} = (a_i)_{i\in\underline{b_1(\Sigma)}}$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (z_i)_{i\in\underline{b_1(\Sigma)}}$ telles que pour tout $(i,j)\in\underline{b_1(\Sigma)}^2$,

$$\langle a_i, z_j\rangle_\Sigma = \delta_{i,j}.$$

Étant donné deux telles bases, on définit les matrices de Seifert $V^+(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}) = (\mathrm{lk}(z_i, a_j^+))_{1\leq i,j\leq b_1(\Sigma)}$ et $V^-(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}) = (\mathrm{lk}(z_i^+, a_j))_{1\leq i,j\leq b_1(\Sigma)}$.

Théorème 7.5.1. *Pour tout nœud long ψ d'un $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière, toute surface de Seifert Σ de ψ, et toute paire $(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}})$ de bases duales de $H_1(\Sigma)$,*

$$Z_k(\psi) = \sum_{\nu=1}^{k-1}\lambda_{k,\nu}\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}),$$

où $\lambda_{k,\nu} = \frac{1}{(k-1)!}\mathrm{Card}\left(\{\sigma\in\mathfrak{S}_{k-1} \mid \mathrm{Card}\{i\in\underline{k-2} \mid \sigma(i)<\sigma(i+1)\} = \nu-1\}\right)$, *et où* $\mathcal{L}_{k,\nu}(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}) = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\left((V^+(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}))^\nu (V^-(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}))^{k-\nu}\right)$.

Pour toute surface de Seifert Σ d'un nœud long $\psi\colon \mathbb{R}\hookrightarrow M^\circ$, le polynôme d'Alexander $\Delta_{1,\Sigma}(t)$ vérifie $\Delta_{1,\Sigma}(t^{-1}) = \Delta_{1,\Sigma}(t)$ et $\Delta_{1,\Sigma}(1) = 1$. Il ne dépend donc pas du choix de la surface de Seifert, et il s'agit du polynôme d'Alexander habituel des nœuds de dimension 1.

Théorème 7.5.2. *Pour tout nœud long ψ d'un $\mathbb{R}^3$ asymptotique d'homologie entière, on a l'égalité suivante dans $\mathbb{Q}[[h]]$:*

$$\mathrm{Ln}(\Delta_\psi(e^h)) = -\sum_{k\geq 2} Z_k(\psi)h^k.$$

Chapitre 8

Quelques applications de la théorie de l'obstruction

Dans ce chapitre, on démontre que les chaînes propagatrices utilisées pour calculer les invariants BCR peuvent être vues comme des sous-variétés hors d'une boule arbitrairement petite des espaces de configurations de deux points. Une méthode similaire donne une démonstration plus détaillée du lemme 5.8.3, utilisé pour démontrer que deux parallélisations quelconques d'un $\mathbb{R}^{n+2}$ asymptotique d'homologie entière coïncident hors d'une boule arbitrairement petite, à homotopie près.

8.1 Existence de propagateurs presque lisses

8.1.1 Résultats

Dans cette partie, on s'intéresse à la régularité des chaînes propagatrices externes de la définition 3.12.1. On notera dans cette partie $m = n+2$ et on suppose seulement que n est un entier naturel impair. On se donne (M°, τ) un $\mathbb{R}^m$ asymptotique d'homologie entière parallélisé.

Definition 8.1.1. On appelle chaîne propagatrice externe presque lisse B' de (M°, τ), une chaîne propagatrice externe $B' = \frac{1}{2}B$ de (M°, τ) telle qu'il existe une boule ouverte $R_B \subset C_2^0(M^\circ)$, telle que $B \cap (C_2(M^\circ) \setminus R_B)$ soit une sous-variété de $C_2(M^\circ) \setminus R_B$ transverse au bord de l'espace de configurations et à celui de la sphère ∂R_B.

Théorème 8.1.2. *Il existe des chaînes propagatrices externes presque lisses de (M°, τ).*

On veut construire une chaîne B de $C_2(M^\circ)$, telle que $B \cap \partial C_2(M^\circ) = G_\tau^{-1}(\{x\}) + G_\tau^{-1}(\{-x\})$, pour un certain x, où l'application G_τ est celle définie en proposition

3.5.3. La variété $C_2(M^\circ)$ présente des faces de codimension 2. Afin de lisser la situation, on commence par prendre un voisinage régulier N_∂ de $\partial C_2(M^\circ)$, et l'on note $C'_2(M^\circ)$ l'adhérence de $C_2(M^\circ) \setminus N_\partial$. Le bord de N_∂ est la réunion disjointe de $\partial C_2(M^\circ)$ et de $-\partial C'_2(M^\circ)$. Étendons G_τ en une submersion $\overline{G_\tau}\colon N_\partial \to \mathbb{S}^{n+1}$. On dispose alors d'une sous-variété $\overline{G_\tau}^{-1}(\{-x,x\})$, dont le bord est la réunion de $G_\tau^{-1}(\{-x,x\})$ et d'une sous-variété $C_0(x)$ de $\partial C'_2(M^\circ)$. Le théorème suivant nous permet alors de conclure.

Théorème 8.1.3. *Soit C une sous-variété de codimension $m-1$ de $\partial C'_2(M^\circ)$. Alors, pour toute boule ouverte R de l'intérieur de $C'_2(M^\circ)$, il existe une sous-variété B de $C'_2(M^\circ) \setminus R$, telle que B soit transverse à $\partial C'_2(M^\circ) \cup \partial R$, que $\partial B \subset \partial C'_2(M^\circ) \cup \partial R$, et que $\partial B \cap \partial C'_2(M^\circ) = C$.*

Démonstration du théorème 8.1.2 à partir du théorème 8.1.3. On applique le théorème 8.1.3 à la sous-variété $C_0(x)$. On dispose alors d'une sous-variété B_0 telle que B_0 soit transverse à $\partial C'_2(M^\circ) \cup \partial R$, $\partial B_0 \subset \partial C'_2(M^\circ) \cup \partial R$, et $\partial B_0 \cap \partial C'_2(M^\circ) = C_0(x)$. On pose alors $B_1 = B_0 \cup \overline{G_\tau}^{-1}(\{-x,x\})$, et l'on modifie cette chaîne sur un collier de $\partial C'_2(M^\circ)$ pour que le recollement soit une sous-variété lisse. Comme $H_m(R) = 0$, il existe une chaîne de R (sans hypothèse de régularité) telle que $\partial B_2 = -(\partial B_1) \cap R$. La chaîne $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ est alors une chaîne propagatrice externe presque lisse. □

Démonstration du théorème 8.1.3. Soient deux voisinages tubulaires $\pi_N\colon N \to C$ et $\pi_{N'}\colon N' \to C$ de C dans $\partial C'_2(M^\circ)$, tels que $N \subset \mathrm{Int}(N')$, et que cette inclusion préserve les fibres. Thom construit dans [Tho54] une variété $M(SO(m-1))$ à partir d'un espace classifiant $p_{SO(m-1)}\colon A_{SO(m-1)} \to B_{SO(m-1)}$ à base compacte pour les fibrés en $(m-1)$-disques, et démontre que, si il ne s'agit que de classifier les fibrés d'une certaine dimension au plus, l'espace $A_{SO(m-1)}$ peut être construit comme suit : on prend un entier N suffisamment grand, et on note $B_{SO(m-1)}$ la grassmannienne des $m-1$ plans orientés de $\mathbb{R}^N$, et $A_{SO(m-1)} = \{(x,P) \mid P \in B_{SO(m-1)}, x \in P, ||x|| \leq 1\}$, l'application de fibré étant donnée par l'oubli du vecteur. On a alors dans notre cas un morphisme de fibrés vectoriels f_N rendant le carré suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dotted, "f_N"] \arrow[d, "\pi_N"] & A_{SO(m-1)} \arrow[d, "p_{SO(m-1)}"] \\ C \arrow[r, dotted, "(f_N)_{|C}"'] & B_{SO(m-1)} \end{tikzcd}$$

On définit $E_{SO(m-1)}$ comme étant le fibré en $(m-1)$-sphères obtenu en ne gardant que les bords des fibres de $A_{SO(m-1)}$, et on note $M(SO(m-1))$ l'espace de Thom, défini comme l'écrasement de $E_{SO(m-1)} \subset A_{SO(m-1)}$ en un unique point a (c'est la compactification d'Alexandroff de $A_{SO(m-1)} \setminus E_{SO(m-1)}$). Notons que $M(SO(m-1)) \setminus \{a\}$ est une variété différentielle lisse. L'application $f_{\mathring{N}} = (f_N)_{|\mathring{N}} \colon \mathring{N} \to A_{SO(m-1)} \setminus E_{SO(m-1)} \subset M(SO(m-1))$ se prolonge alors de manière continue en une application $f_\partial \colon \partial C_2'(M^\circ) \to M(SO(m-1))$, en envoyant le complémentaire de $\mathring{N}$ sur a.

On peut voir $B_{SO(m-1)}$ commme la section nulle de $A_{SO(m-1)}$, ce qui permet de considérer $B_{SO(m-1)}$ comme une partie de $M(SO(m-1))$, de sorte que $C = f_\partial^{-1}(B_{SO(m-1)})$, et que $M(SO(m-1)) \setminus B_{SO(m-1)}$ se rétracte par déformation sur a. Nous allons démontrer que f_∂ se prolonge à $C_2'(M^\circ) \setminus R$.

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 8.1.4. *L'application f_∂ se prolonge en une application continue $f \colon C_2'(M^\circ) \setminus R \to M(SO(m-1))$.*

Démonstration. Commençons tout d'abord par définir une triangulation adaptée de notre variété $C_2'(M^\circ)$ (de telles triangulations existent pour toute variété différentiable, comme montré dans [Whi05, chapitre IV]). Comme C est de codimension $m-1 \geq 2$, les théorèmes standard de transversalité entraînent le lemme suivant, dont nous donnons cependant une démonstration détaillée dans la partie 8.1.2.

Lemma 8.1.5. *Il existe une triangulation T de $\partial C_2'(M^\circ)$, telle que C ne rencontre ni le 0-squelette, ni le 1-squelette de T.*

On se donne alors une telle triangulation T, on réduit notre voisinage tubulaire N pour qu'il ne rencontre pas le 1-squelette de T, et on définit f_N et f_∂ comme précédemment. On étend T en une triangulation de $C_2'(M^\circ)$, que l'on notera encore T, et dont l'on supposera que le $(2m-1)$-squelette ne rencontre pas R. On choisit pour chaque simplexe e de dimension ≥ 1 un sommet privilégié $s(e)$.

Pour tout entier k, on notera $\Delta^k = \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{k+1} \mid x_0 + \dots + x_k = 1\}$, et on désignera, par un abus de notation courant, par e^k, et on appellera k-simplexe de cette triangulation, aussi bien l'application $e^k \colon \Delta^k \to C_2'(M^\circ)$, que son image. On notera également $s_i^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le point de $\mathbb{R}^{k+1}$ ayant une coordonnée i égale à 1, et les autres nulles, de sorte que Δ^k a pour sommets $(s_0^k, \dots, s_k^k)$.

L'application f_∂ est bien définie sur tous les simplexes de T correspondant au bord de $C_2'(M^\circ)$, et il s'agit de l'étendre en une application f définie sur toute la triangulation T (moins une boule). Montrons par récurrence que f_∂ s'étend jusqu'au $2m-1$ squelette.

On commence par étendre f_∂ à tout le 1-squelette par a, ce qui est compatible avec la valeur déjà fixée sur le bord, car N ne rencontre pas le 1-squelette.

On utilisera dans ce qui suit le lemme suivant.

Lemma 8.1.6. *Soit $g \colon \partial e^k \to X$ une application envoyant le bord d'un k-simplexe de dimension $k \geq 2$ dans un espace topologique X, et envoyant les sommets et les* *arêtes sur un même point* $x_0 \in X$. *L'application* g *définit une classe* $\kappa(g)$ *dans* $[(\partial e^k, s(e^k)), (X, x_0)]$, *qui s'identifie à* $\pi_{k-1}(X, x_0)$.

La classe $\kappa(g) \in \pi_{k-1}(X, x_0)$ *est triviale, si et seulement si* g *se prolonge à* e^k.

Démonstration. Si g définit une classe triviale, on a une homotopie $(g_t)_{0 \leq t \leq 1}$, telle que $g_0 = x_0$ et $g_1 = g$. On voit alors e^k comme un cône sur son bord, de sorte que $e^k = (\partial e^k \times [0,1])/(\partial e^k \times \{0\})$, et on définit l'application $\tilde{g}\colon (x,t) \in e^k \mapsto g_t(x) \in M(SO(m-1))$, qui est bien définie puisque g_0 est constante.

Réciproquement, supposons que g se prolonge en une application g_1 définie sur e^k. Notons Ω le centre de gravité de Δ^k. Si le prolongement g_1 envoie le segment $[\Omega, s_0^k]$ entier sur x_0, il suffit de reprendre la construction précédente utilisant la structure de cône pour récupérer une homotopie fixant le point base. On va se ramener à ce cas en modifiant un peu notre prolongement g_1.

Soit $\tilde{\Delta}^k \subset \Delta^k$ le k simplexe dont les sommets sont $(\Omega, s_1^k, \ldots, s_k^k)$, et soit $\varphi\colon \Delta^k \to \tilde{\Delta}^k$ l'unique application affine envoyant s_0^k sur Ω, et fixant les autres sommets (communs) des simplexes. On se donne alors $r\colon \Delta^k \to \tilde{\Delta}^k$ une application égale à l'identité sur $\tilde{\Delta}^k$, et telle que l'image du segment $[\Omega, s_0^k]$ soit $\{\Omega\}$. Alors, l'application $\tilde{f} = g_1 \circ \varphi^{-1} \circ r\colon \Delta^k \to X$ est un prolongement de g envoyant tout le segment $[\Omega, s_0^k]$ sur x_0. En utilisant la structure de cône introduite dans la démonstration du sens direct, on reconstruit alors une homotopie de g vers l'application constante $\tilde{g}(\Omega) = x_0$, envoyant toujours le point base sur x_0, ce qui conclut. □

On prolonge ainsi f_∂ au 2-squelette, ceci étant possible car pour tout 2-simplexe hors de $\partial C_2'(M^\circ)$, son bord est envoyé sur a, donc est homotopiquement trivial. (Ce raisonnement ne marche plus pour le 3-squelette, car f est déjà défini sur les 2-simplexes du bord, et peut prendre des valeurs dans tout $M(SO(m-1))$, dont l'homotopie n'est pas totalement connue.)

Démontrons par récurrence sur $k \in \{2, \ldots, 2m-1\}$ la propriété $*(k)$: « f_∂ admet un prolongement continu au k-squelette de T qui envoie le 1-squelette de T sur a.». La propriété $*(2)$ est déjà démontrée. Supposons la propriété $*(k)$ pour un certain $k \in \{2, \ldots, 2m-2\}$. Supposons donc f_∂ étendue en une application continue $f^{(k)}$ du k-squelette dans $M(SO(m-1))$ qui envoie le 1-squelette de T sur a, où $k \in \{2, \ldots, 2m-1\}$. Posons alors

$$\begin{array}{cccl} c(f^{(k)})\colon & C_{k+1}(T) & \to & \pi_k(M(SO(m-1)), a) \\ & e^{k+1} & \to & \kappa(f^{(k)}_{|\partial e^{k+1}}). \end{array}$$

Alors,

- les $(k+1)$-chaînes de $\partial C_2'(M^\circ)$ sont dans le noyau de $c(f^{(k)})$,
- la cochaîne $c(f^{(k)})$ est un cocyle.

Le premier point vient du lemme 8.1.6, le second s'obtient en remarquant que si e^{k+2} est un $(k+2)$-simplexe, alors $c(f^{(k)})(\partial e^{k+2})$ prend en compte chaque face de codimension 2 de e^{k+2} deux fois avec des orientations opposées. La classe de cohomologie de $c(f^{(k)})$ définit donc un élément du groupe de cohomologie $H^{k+1}(C_2'(M^\circ), \partial C_2'(M^\circ); \pi_k(M(SO(m-1)), a))$.

Lemma 8.1.7. *Pour $k \in \{2, \ldots, 2m-2\}$,*

$$H^{k+1}\left(C_2'(M^\circ), \partial C_2'(M^\circ); \pi_k(M(SO(m-1)), a)\right) = 0,$$

et $H^{2m}\left(C_2'(M^\circ), \partial C_2'(M^\circ); \pi_{2m-1}(M(SO(m-1)), a)\right) = \pi_{2m-1}(M(SO(2m-1)), a)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $C_2(M^\circ)$ et $C_2'(M^\circ)$ sont homéomorphes et ont donc le même type d'homotopie. Le lemme 5.3.3 implique que

$$H^i(C_2(M^\circ), \partial C_2(M^\circ)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 2m \text{ ou } m+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, on a donc $H^{k+1}(C_2'(M^\circ), \partial C_2'(M^\circ); \pi_k(M(SO(m-1)), a)) = 0$, pour les entiers k voulus, à l'exception de $k = m$. Le théorème II.16 de [Tho54] de Thom affirme que le groupe $\pi_m(M(SO(m-1)), a)$ est nul, ce qui entraîne que $H^{m+1}(C_2'(M^\circ), \partial C_2'(M^\circ); \pi_m(M(SO(m-1)), a)) = 0$. $\square$

On peut donc affirmer d'après le lemme précédent que $c(f^{(k)})$ est un cobord. Ceci va nous permettre de corriger le prolongement $f^{(k)}$, pour se placer dans les conditions du lemme 8.1.6.

Écrivons pour cela notre cobord sous la forme $c(f^{(k)}) = \sum_{i=1}^{r} [\alpha_i] \mathrm{d}(e_i^k)^*$, où $(e_i^k)^* \in C^k(C_2'(M^\circ); \mathbb{Z})$ est la forme linéaire coordonnée sur le k-simplexe e_i^k, et les $[\alpha_i]$ sont des éléments de $\pi_k(M(SO(m-1)), a)$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons $\overline{\alpha}_i$ un représentant de l'inverse de $[\alpha_i]$. Notons $\tilde{f}^{(k)}$ l'application sur le k-squelette construite comme suit.

- si e^k est un k-simplexe, qui n'est pas un des e_i^k, $\tilde{f}^{(k)}_{|e^k} = f^{(k)}_{|e^k}$,
- si $e^k = e_i^k$, on commence par modifier $f^{(k)}$ sur l'intérieur de e^k de manière à ce que le centre du simplexe soit envoyé sur a (ce qui est autorisé puisque notre simplexe n'est pas dans la triangulation du bord, et possible parce que $M(SO(m-1))$ est connexe), et on note $f_1^{(k)}$ l'application obtenue. On écrit ensuite e_i^k comme un cône au-dessus de son bord, et on définit $\tilde{f}^{(k)}$ comme étant
$$\tilde{f}^{(k)}(t,x) = \begin{cases} f_1^{(k)}(2t-1, x) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ \overline{\alpha}_i(2t, x) & \text{sinon} \end{cases},$$
ce qui a un sens, après avoir identifié $\{(t,x) \mid 0 \le t \le \frac{1}{2}, x \in \partial e_i^k\}/(\{\frac{1}{2}\} \times \partial e_i^k)$ à $(\mathbb{S}^k, *)$, où le point distingué est identifié au bord écrasé du simplexe.

On a alors, pour ce nouveau prolongement, $c(\tilde{f}^{(k)}) = 0$. Par le lemme 8.1.6, ceci nous permet de prolonger $\tilde{f}^{(k)}$, en une application $f^{(k+1)}$ définie sur le $(k+1)$-squelette et achève la récurrence.

Soit donc $f^{(2m-1)}$ un prolongement continu de f_∂ au $(2m-1)$-squelette de T. On choisit un voisinage régulier U du $(2m-1)$-squelette de T, auquel $f^{(2m-1)}$ s'étend donc continûment en une application continue f_1. Il existe un voisinage régulier $V \subset \mathrm{Int}(C_2'(M^\circ))$ d'un arbre dont les sommets sont un point de l'intérieur de chaque $2m$-simplexe de T tel que $U \cup V = C_2'(M^\circ)$, et l'on peut supposer $R \subset V$. L'application f_1 est donc définie sur ∂V. Comme V est une boule, et R une boule ouverte de l'intérieur de V, on peut alors étendre $(f_1)_{|\partial V}$ en une application $f_2 \colon V \setminus R \to M(SO(m-1))$. On conclut la démonstration du lemme 8.1.4 en posant pour tout $x \in C_2'(M^\circ) \setminus R$,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in U \setminus V, \\ f_2(x) & \text{si } x \in V \setminus R. \end{cases} \qquad \square$$

On notera dans ce qui suit f le prolongement donné par le lemme 8.1.4, et on notera $X = C_2'(M^\circ) \setminus R$. Il s'agit désormais de montrer que l'on peut choisir ce prolongement de manière lisse, au voisinage de la préimage de la section nulle. Notons, pour $r \in [0,1]$, $N_r \subset M(SO(m-1))$ le fibré en disques ouverts de rayon r déduit du fibré en disques ouverts de rayon 1 $N_1 = M_{SO(m-1)} \setminus \{a\}$. On se donne également des trivialisations locales $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ du fibré en disques ouverts $\pi \colon M(SO(m-1)) \setminus \{a\} \to B_{SO(m-1)}$, le recouvrant totalement, et on note, pour chaque indice i, l'application induite sur la fibre $p_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{D}^{m-1}$.

Lemma 8.1.8. *Il existe une application continue $\tilde{f} \colon X \to M(SO(m-1))$, telle que $(\tilde{f})_{|\partial C_2'(M^\circ)} = f_\partial$, et telle que, pour tout indice $i \in \{1, \dots, r\}$, l'application $p_i \circ \tilde{f}$ est lisse sur $\tilde{f}^{-1}\left(N_{\frac{1}{4}} \cap \pi^{-1}(U_i)\right)$ et admet 0 comme valeur régulière.*

Commençons par conclure la démonstration du théorème 8.1.3 à partir du lemme 8.1.8 Soit $\tilde{f}$ une application satisfaisant les hypothèses du lemme 8.1.8 ci-dessus. Le lemme 8.1.8 implique que $\tilde{f}^{-1}(B_{SO(m-1)})$ est une sous-variété de X, dont le bord est inclus dans celui de X, et rencontre $\partial C_2'(M^\circ)$ exactement en $f_\partial^{-1}(B_{SO(m-1)}) = C$, de manière transverse. En prenant un collier de ∂R, on peut également faire en sorte d'avoir la transversalité au niveau de ∂R, ce qui conclut la démonstration du théorème 8.1.3. $\square$

Démonstration du lemme 8.1.8. Commençons par prendre deux colliers U_∂ et V_∂ du bord de $C_2'(M^\circ)$, tels que $\overline{V_\partial} \subset U_\partial$, et notons π_∂ la projection de U_∂ sur $\partial C_2'(M^\circ)$, qui est lisse. Comme $C_2'(M^\circ) \setminus U_\partial$ est difféomorphe à $C_2'(M^\circ)$, on peut définir une nouvelle application continue $f_1 \colon X \to M(SO(m-1))$, s'écrivant $f_\partial \circ \pi_\partial$ sur U_∂, et s'identifiant à f sur son complémentaire, via ce difféomorphisme. En particulier, f_1 est lisse sur U_∂, et coïncide avec f_∂ sur le bord. On va donc dans ce qui suit lisser f_1 sur l'intérieur de la variété, en utilisant des arguments inspirés de la démonstration du théorème 2.5 de [Hir76, p. 48].

Posons $U = f_1^{-1}(M(SO(m-1)) \setminus \{a\})$, $K = f_1^{-1}(N_{\frac{1}{2}})$, $\Omega = f_1^{-1}(N_{\frac{3}{4}}) \cap U_\partial$ et $W = f_1^{-1}(N_{\frac{3}{4}}) \setminus V_\partial$. Notons que $K \subset \Omega \cup W$, donc $K \setminus \Omega \subset W$.

X étant compact, il est normal, et on peut prendre un ouvert W_0 tel que $K \setminus \Omega \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset W$. Il existe (voir par exemple [Hir76, théorème 2.1, p. 43]) une fonction lisse $\lambda\colon U \to [0,1]$ valant 0 sur $U \setminus W$ et 1 sur $\overline{W_0}$.

Notons alors

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{C}^0(U, M(SO(m-1)) \setminus \{a\}) \mid p_{SO(m-1)} \circ g = p_{SO(m-1)} \circ f_1\}.$$

On définit une distance sur $\mathcal{C}$ en notant $d_\infty(f,g)$ le supremum des distances euclidiennes entre f et g dans chaque fibre. Notons alors

$$\mathcal{C}^\infty = \{g \in \mathcal{C} \mid \text{pour tout } i \in \underline{r}, p_i \circ g \text{ est lisse et admet 0 comme valeur régulière}\}.$$

On montre facilement (en utilisant une partition de l'unité) que $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans $\mathcal{C}$. Les fibres de $M(SO(m-1)) \setminus \{a\}$ ayant une structure affine, on peut également définir une combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{C}$. On définit alors, pour $g \in \mathcal{C}$, l'application

$$T(g)\colon x \in U \mapsto \lambda(x).g(x) + (1-\lambda(x)).f_1(x) \in M(SO(m-1)) \setminus \{a\}.$$

Ceci définit une application continue $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. En notant $U(f_1) = \{h \in \mathcal{C} \mid d_\infty(h, f_1) < \frac{1}{4}\}$, on définit un voisinage de f_1, et il existe donc $g \in \mathcal{C}^\infty$, telle que $T(g) \in U(f_1)$. On vérifie que $T(g)$ coïncide avec f_1 hors de W (et donc en particulier sur V_∂), et avec g sur $\overline{W_0}$. On peut donc l'étendre en une fonction $\tilde{f}\colon X \to M(SO(m-1))$ par la formule

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} T(g)(x) & \text{si } x \in W, \\ f_1(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout indice $i \in \underline{r}$, $p_i \circ \tilde{f}$ est lisse sur $(U_\partial \cup \overline{W_0}) \cap \tilde{f}^{-1}(\pi^{-1}(U_i) \cap N_{\frac{1}{4}})$ (comme combinaison convexe à coefficients lisses de fonctions lisses). Après perturbation de f_1, la préimage de la section nulle a pu se déplacer. On prend donc comme voisinage. Par définition de $U(f_1)$, $d_\infty(\tilde{f}, f_1) < \frac{1}{4}$, de sorte que $\tilde{f}^{-1}(N_{\frac{1}{4}}) \subset f^{-1}(N_{\frac{1}{2}}) = K \subset U_\partial \cup \overline{W_0}$, ce qui conclut la démonstration. □

8.1.2 Démonstration du lemme 8.1.5

Fixons une triangulation T_0 de $\partial C_2'(M^\circ)$, et notons $T_0^{(1)}$ son 1-squelette.

Traitons d'abord, à titre d'exemple, le cas où le fibré N' serait trivial, et où l'on aurait donc une application globale de fibre $p\colon N' \to \mathbb{D}^{m-1}$. Dans ce cas, il s'agit simplement, pour chaque 1-simplexe e^1, de s'assurer qu'il ne rencontre pas la section nulle, et donc que l'application $p \circ e^1$ admette 0 comme valeur régulière (en effet, comme $m-1>1$, la différentielle de $p \circ e^1$ n'est jamais surjective, donc les valeurs atteintes sont toutes critiques). Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des difféomorphismes de N' agissant fibre par fibre et fixant un voisinage du bord, muni de la distance $d_\infty(\varphi,\varphi') = \sup_{x\in N'} ||p(\varphi(x)) - p(\varphi'(x))||$, où $||.||$ désigne la norme euclidienne sur le disque.

Lemma 8.1.9 (Application du lemme de Morse-Sard)**.** *Soient M et N deux variétés, $f\colon M \to N$ une application lisse, et K un compact de M. On note $C(f)$ l'ensemble des points critiques de f, et on note $R(f,K) = N \setminus f(C(f)\cap K)$ l'ensemble des points réguliers de f restreinte à K.*

Alors, $R(f,K)$ est un ouvert de mesure pleine, donc dense, de N.

Démonstration. Comme $R(f,K)$ contient $R(f,M)$ qui est de mesure pleine d'après le lemme de Sard, il est également de mesure pleine.

Enfin, $C(f)$ est un fermé, donc $C(f)\cap K$ est compact, et $f(C(f)\cap K)$ est donc compact. Son complémentaire $R(f,K)$ est alors ouvert. □

Pour conclure avec ce lemme, montrons comme annoncé que $\mathcal{H}(e^1) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid p\circ\varphi\circ e^1 \text{ admet 0 comme valeur régulière}\}$ est un ouvert dense.

- $\mathcal{H}(e^1)$ est ouvert : soit $\varphi \in \mathcal{H}(e^1)$. On a $d(\varphi(e^1), C) = \delta > 0$. Donc, pour $d_\infty(\varphi,\varphi') < \delta$, $\varphi'(e^1)$ ne rencontre pas C, et $\varphi' \in \mathcal{H}(e^1)$, ce qui conclut.

- $\mathcal{H}(e^1)$ est dense : soit $\varphi \in \mathcal{H}$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 8.1.9, il existe w valeur régulière (c'est à dire non atteinte) de $p\circ\varphi\circ e^1$ de norme inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si on se donne un difféomorphisme du disque φ_w fixant le bord, envoyant 0 sur w, et tel que $d_\infty(\varphi_w, \mathrm{Id}) < \varepsilon$, on a $\varphi_w^{-1}\circ\varphi \in \mathcal{H}(e^1)$, et $d_\infty(\varphi_w^{-1}\circ\varphi, \varphi) < \varepsilon$.

On conclut alors en remarquant que l'intersection sur tous les 1-simplexes des $\mathcal{H}(e^1)$ est non vide, car dense, et qu'il existe donc $\varphi \in \mathcal{H}$, tel que $\varphi(T_0^1)$ ne rencontre pas C.

Adaptons donc ce raisonnement au cas général (c'est-à-dire sans supposer que N' est un fibré trivial sur C).

Soient $(U_i)_i$ et $(V_i)_i$ deux recouvrements de C par des ouverts de trivialisation de $N' \to C$, avec $\overline{U_i} \subset V_i$, et notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des difféomorphismes $\varphi\colon N' \to N'$, agissant fibre par fibre, en fixant un voisinage du bord de N', et $\mathcal{H}(\overline{U_i})$ l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{H}$ tels que $\varphi(T_0^{(1)}) \cap \pi_{N'}^{-1}(\overline{U_i})$ ne rencontre pas C. On munit $\mathcal{H}$ de la topologie $\mathcal{C}^1$ définie dans [Hir76], et les $\mathcal{H}(\overline{U_i})$ des topologies induites.

Notons dans ce qui suit $p_i\colon \pi_{N'}^{-1}(V_i) \to \mathbb{D}^{m-1}$ l'application de projection sur la fibre donnée par notre trivialisation.

Soit $\varphi \in \mathcal{H}$. Pour vérifier que φ appartient à $\mathcal{H}(\overline{U_i})$, il suffit de considérer les 1-simplexes de T_0 qui rencontrent $\pi_{N'}^{-1}(\overline{U_i})$, et de déterminer si leurs images rencontrent ou non $C \cap \overline{U_i}$. Soit e^1 un tel simplexe. Comme précédemment, le fait que e^k ne rencontre pas $C \cap \overline{U_i}$ est équivalent à ce que l'application $p_i \circ \varphi \circ e^k\colon \Delta^k \to \mathbb{D}^{m-1}$, restreinte à $(e^k)^{-1}\left(\pi_{N'}^{-1}(\overline{U_i})\right)$ admette 0 comme valeur régulière. Notons $\mathcal{H}(\overline{U_i}, e^k)$ les éléments de $\mathcal{H}$ vérifiant cette condition. Nous allons montrer que c'est un ouvert dense de $\mathcal{H}$.

- $\mathcal{H}(\overline{U_i}, e^k)$ est ouvert : la démonstration est la même que dans l'exemple traité précédemment.

- $\mathcal{H}(U_i, e^k)$ est dense. Soit $\varphi \in \mathcal{H}$.

  On se donne une fonction continue $\chi_i\colon C \to [0,1]$ valant 1 sur U_i, et 0 hors de V_i, et une fonction lisse $\chi\colon \mathbb{D}^{m-1} \to [0,1]$, valant 1 sur $\mathbb{D}^{m-1}_{\frac{1}{4}}$, et 0 sur un voisinage du bord. On définit alors une fonction $\varphi_w\colon \pi_{N'}^{-1}(V_i) \to \pi_{N'}^{-1}(V_i)$ par la formule $(x,v) \in V_i \times \mathbb{D}^{m-1} \mapsto (x, v + \chi_i(x)\chi(v)w) \in V_i \times \mathbb{D}^{m-1}$ (en utilisant une trivialisation du fibré N' sur V_i). φ_w se prolonge à tout $\partial C_2'(M^\circ)$ par l'identité, et pour w assez petit, définit un difféomorphisme. Alors, pour tout tel w, $\varphi_w^{-1} \circ \varphi \in \mathcal{H}$ si et seulement si w est valeur régulière de $(p_i \circ \varphi \circ e^k)_{|(e^k)^{-1}(\pi_{N'}^{-1}(\overline{U_i}))}$. Le lemme 8.1.9 nous assure que ceci peut se produire pour w arbitrairement petit, c'est-à-dire pour φ_w arbitrairement proche de l'identité, et pour $\varphi_w^{-1} \circ \varphi$ arbitrairement proche de φ, ce qui établit la densité.

On remarque donc alors que, l'intersection (finie) de ces ouverts denses est un ouvert dense, et elle contient exactement les $\varphi \in \mathcal{H}$ tels que $T = \varphi(T_0)$ ne rencontre C sur aucun de ses 1-simplexes.

8.2 Une démonstration détaillée du lemme 5.8.3

Commençons par rappeler l'énoncé que nous allons démontrer.

Lemme 8.2.1. *Soit (Y, y_0) un espace topologique pointé connexe par arcs, de groupe fondamental abélien, soit $B(M)$ une $(n+2)$-boule d'homologie lisse (c'est-à-dire une variété lisse compacte ayant l'homologie d'un point, et la $(n+1)$-sphère standard comme bord), et soit $\mathbb{B}$ une $(n+2)$-boule fermée de $B(M)$. Soit $f\colon (B(M), \partial B(M)) \to (Y, y_0)$ une application continue. Alors, f est homotope à une application g qui envoie le complémentaire de $\mathbb{B}$ sur y_0, parmi les applications envoyant $\partial B(M)$ sur y_0.*

Démonstration. Dans cette démonstration, « homotope » signifiera toujours « homotope parmi les applications qui envoient $\partial B(M)$ sur y_0 ». On utilisera des notations additives pour les groupes d'homotopies $\pi_k(Y, y_0)$ (qui sont tous abéliens).

Soit T une triangulation de $(B(M), \partial B(M))$, et notons $T^{(k)}$ son k-squelette. Nous allons démontrer par récurrence finie la propriété suivante pour $k \in \{0, \ldots, n+1\}$.

$*(k)$: Toute application $f\colon (B(M), \partial B(M)) \to (Y, y_0)$ est homotope à une application qui envoie le k-squelette de T sur y_0.

La propriété $*(0)$ découle directement de la connexité par arcs de Y. Supposons démontrée la propriété $*(k-1)$ pour un certain $k \in \{0, \ldots, n+1\}$, et démontrons la propriété $*(k)$.

Soit $f\colon (B(M), \partial B(M)) \to (Y, y_0)$. Par hypothèse, on peut supposer que f envoie déjà le $(k-1)$-squelette de T sur y_0. La triangulation T induit un complexe cellulaire T_I sur $B(M) \times I$ (où $I = [0, 1]$), tel que $T_I^{(k)} = (T^{(k-1)} \times I) \cup (T^{(k)} \times \{0, 1\})$. Orientons arbitrairement les cellules de ce complexe. Nous allons d'abord mettre en évidence une application $h_2\colon T^{(k)} \times I \to Y$ telle que pour tout $x \in T^{(k)}$, $h_2(x, 0) = y_0$ et $h_2(x, 1) = f(x)$, et telle que $h_2((T^{(k)} \cap \partial B(M)) \times I) = \{y_0\}$. Définissons une application h_0 sur le k-squelette de T_I comme suit :

- pour tout $x \in T^{(k)}$, $h_0(x, 0) = y_0$ and $h_0(x, 1) = f(x)$,
- pour tout $x \in T^{(k-1)}$ et tout $t \in I$, $h_0(x, t) = y_0$.

La restriction de h_0 à toute k-cellule e^k de T_I définit un élément $c(h_0, e^k)$ de $[(e^k, \partial e^k), (Y, y_0)] = \pi_k(Y, y_0)$. Le bord de toute $(k+1)$-cellule e^{k+1} de T_I s'écrit $\partial e^{k+1} = \sum_j a_j(e^{k+1}) e_j^k$ où les e_j^k sont des k-cellules de T_I. Posons

$$\kappa(h_0)(e^{k+1}) = \sum_j a_j(e^{k+1}) c(h_0, e_j^k).$$

Cette application s'étend linéairement en une application $\kappa(h_0)\colon C_{k+1}(T_I, \mathbb{Z}) \to \pi_k(Y, y_0)$. Par construction, $\kappa(h^0)$ est le cobord $\mathrm{d}(c(h^0, \cdot))$. Ainsi, $\kappa(h^0)$ est un cocycle.

De plus, comme le lemme 8.1.6 le montre, ce cocycle $\kappa(h^0)$ est tel que h_0 admet une extension continue à e^{k+1} si et seulement si $\kappa(h^0)(e^{k+1}) = 0$. En particulier, $\kappa(h_0)$ s'annule sur les cellules de $T_I^{(k+1)} \cap \partial(B(M) \times I)$ auxquelles h_0 peut toujours être continûment étendu, soit par f, soit par y_0. Ainsi, $\kappa(h_0)$ représente un élément de $H^{k+1}(T_I, T_I \cap \partial(B(M) \times I); \pi_k(Y, y_0)) = H^{k+1}(B(M) \times I, \partial(B(M) \times I); \pi_k(Y, y_0))$.

Comme $k \leq n+1$, $H^{k+1}(B(M) \times I, \partial(B(M) \times I); \mathbb{Z}) = H_{n+2-k}(B(M); \mathbb{Z}) = 0$, et le groupe de cohomologie $H^{k+1}(T_I, T_I \cap \partial(B(M) \times I); \pi_k(Y, y_0))$ à coefficients dans $\pi_k(Y, y_0)$ est également trivial. Ainsi, $\kappa(h_0)$ est le cobord d'un élément de $C^k(T_I, T_I \cap \partial(B(M) \times I); \pi_k(Y, y_0))$. Pour tout $(k-1)$-simplexe e^{k-1} de T qui n'est pas contenu dans $\partial B(M)$, notons $(e^{k-1} \times I)^* \colon C_k(T_I) \to \mathbb{Z}$ l'application qui envoie une chaîne de $C_k(T_I, T_I \cap \partial(B(M) \times I))$ sur son coefficient sur $e^{k-1} \times I$. Les cochaînes $(e^{k-1} \times I)^*$ forment une base canonique de $C^k(T_I, T_I \cap \partial(B(M) \times I))$. Le cobord $\kappa(h_0)$ s'écrit donc $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{d}\left((e_i^{k-1} \times I)^*\right)$, où les α_i sont des éléments de $\pi_k(Y, y_0)$, et où les $(e_i^{k-1})_{1 \leq i \leq r}$ sont les $(k-1)$-simplexes de T non contenus dans $\partial B(M)$.

Changeons la valeur de h_0 sur chaque $e_i^{k-1} \times I$ en remplaçant l'application constante $(h_0)_{|e_i^{k-1} \times I}$ par une application $g_i \colon (e_i^{k-1} \times I, \partial(e_i^{k-1} \times I)) \to (Y, y_0)$. Les g_i induisent des classes $\gamma_i \in [(e_i^{k-1} \times I, \partial(e_i^{k-1} \times I)), (Y, y_0)] \cong [(\mathbb{D}^k, \partial \mathbb{D}^k), (Y, y_0)] \cong \pi_k(Y, y_0)$. Choisissons les applications g_i telles que $\gamma_i = -\alpha_i$. Soit alors h_1 l'application obtenue, de telle sorte que

$$\kappa(h_1) = \kappa(h_0) + \sum_{i=1}^{r} (-\alpha_i) \mathrm{d}\left((e_i^{k-1} \times I)^*\right) = 0.$$

Comme $\kappa(h_1) = 0$, h_1 s'étend en une application h_2 définie sur $T_I^{(k+1)}$ et donc a fortiori sur $T^{(k)} \times I$. La construction précédente garantit que h_2 envoie $(T^{(k)} \cap \partial B(M)) \times I$ sur y_0. Étendons h_2 sur $B(M) \times \{1\}$ par f. Le lemme suivant conclut la récurrence et démontre la propriété $*(n+1)$.

Lemma 8.2.2. *Soit T une triangulation d'une variété X. Soit $F \colon (T^{(k)} \times I) \cup (X \times \{1\}) \to Y$ une application telle que $F((T^{(k)} \cap \partial X) \times I) = \{y_0\}$. Alors F s'étend continûment en une application $\overline{F} \colon X \times I \to Y$ telle que $F(\partial X \times I) = \{y_0\}$.*

Démonstration. Démontons par récurrence que F s'étend continûment à $(T^{(\ell)} \times I) \cup (X \cup \{1\})$ pour tout $\ell \in \{k, \ldots, n+2\}$.

LA propriété pour $\ell = k$ est immédiate. Pour un certain $\ell \in \{k, \ldots, n+1\}$, supposons que F s'étend continûment en une application $F^{(\ell)}$ définie sur $(T^{(\ell)} \times I) \cup (X \times \{1\})$.

Choisissons un $(\ell+1)$-simplexe $e_i^{\ell+1}$ de T. Le couple topologique[1] $(e_i^{\ell+1} \times I, ((\partial e_i^{\ell+1}) \times I) \cup (e_i^{\ell+1} \times \{1\}))$ est homéomorphe à $(\mathbb{D}_+^{\ell+2}, \mathbb{S}_+^{\ell+1})$ où $\mathbb{D}_+^{\ell+2}$ (resp. $\mathbb{S}_+^{\ell+1}$) désigne l'intersection de la boule (resp. de la sphère) de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^{\ell+2}$ et du demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^{\ell+2} | x_1 \geq 0\}$. On démontre facilement que toute application continue définie sur la demi-sphère s'étend continûment à la demi-boule. Ainsi, toute application définie sur $((\partial e_i^{\ell+1}) \times I) \cup (e_i^{\ell+1} \times \{1\})$ s'étend continûment à $e_i^{\ell+1} \times I$.

Ceci permet d'étendre F en une application continue définie sur le simplexe $e_i^{\ell+1} \times I$. Si la cellule $e_i^{\ell+1}$ est contenue dans ∂X, cette extension peut être choisie

[1] Un couple topologique est un couple (X, A) où X est un espace topologique et $A \subset X$. Deux tels couples (X, A) et (Y, B) sont homéomorphes s'il existe un homémomorphisme de X à Y envoyant A sur B.

constante sur $e_i^{\ell+1} \times I$, de valeur y_0. Effectuer le même travail sur tous les simplexes $e^{\ell+1} \times I$ fournit une application continue $F^{(\ell+1)}$ définie sur $(T^{(\ell+1)} \times I) \cup (X \times \{1\})$, qui étend F. Ceci conclut la récurrence.

Pour $\ell = n+2$, on obtient bien le lemme 8.2.2. $\square$

Fin de la démonstration du lemme 8.2.1. La propriété $*(n+1)$ est donc démontrée, et f est donc homotope à une application f_1 envoyant le $(n+1)$-squelette de T sur y_0. Il reste à démontrer que f_1 est homotope à une application qui envoie le complémentaire de $\mathbb{B}$ sur y_0.

Soit U un voisinage régulier de $T^{(n+1)}$. À homotopie près, on suppose que f_1 envoie U sur y_0. Il existe une boule V telle que $U \cup V = B(M)$ et telle que V contienne $\mathbb{B}$. En effet, on peut supposer dès le début que $\mathbb{B}$ est contenue dans l'intérieur d'un $(n+2)$-simplexe de T, et prendre pour V un voisinage régulier d'un arbre ayant pour sommets un point à l'intérieur de chaque $(n+2)$-simplexe de T. L'application f_1 envoie le complémentaire de V sur y_0. Comme V est une boule, et $\mathbb{B}$ une boule à l'intérieur de V, $(f_1)_{|V}$ est homotope à une application qui envoie $V \setminus \mathbb{B}$ sur y_0, parmi les applications qui envoient ∂V sur y_0. Ceci conclut la démonstration du lemme 8.2.1. $\square$

Annexe A

Existence de nœuds longs de matrices de Seifert données

Dans ce chapitre, on démontre la proposition suivante, certainement connue des spécialistes, et qui donne des exemples de nœuds longs de matrices de Seifert données, avec les notations de la définition 4.1.8.[1]

Proposition A.0.1. *Soient* $(V_d^+)_{d\in\underline{n}\setminus\{\frac{n+1}{2}\}}$ *et* $(V_d^-)_{d\in\underline{n}\setminus\{\frac{n+1}{2}\}}$ *deux familles de matrices carrées à coefficients entiers telles que*

- *pour tout* $d \in \underline{n} \setminus \{\frac{n+1}{2}\}$, $V_d^+ - V_d^- = I$,
- *pour tout* $d \in \underline{n} \setminus \{\frac{n+1}{2}\}$, ${}^TV_d^+ = -V_{n+1-d}^-$,

Alors, il existe un nœud long $\psi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ *et une surface de Seifert* Σ *de* ψ*, dont les matrices de Seifert dans un certain couple de bases duales* $(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}})$ *de* $\overline{H}_*(\Sigma)$ *vérifient* $V_d^\pm(\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}) = V_d^\pm$ *pour tout* $d \in \underline{n}$.

Démonstration. Soit Σ_0 la surface de Seifert $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^n$ du nœud trivial dans $\mathbb{R}^{n+2}$. On va procéder par modifications successives de Σ_0. Pour tout $d \in \underline{n}$, notons b_d le nombre de lignes de la matrice carrée V_d^+. Notons

$$n_d = \begin{cases} b_d & \text{si } d < \frac{n+1}{2}, \\ \frac{1}{2} b_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } d = \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Pour chaque entier $d \in \{1,\ldots,\frac{n+1}{2}\}$, choisissons n_d sphères $(\mathbb{S}_i^d)_{i\in\underline{n_d}}$ plongées dans $Y_0 = \mathbb{R}^{n+2} \setminus \Sigma_0$, et munies de voisinages tubulaires $(N_{i,d})_{i\in\underline{n_d}}$, dont le bord

[1] Le même résultat, en autorisant $d = \frac{n+1}{2}$ comme initialement annoncé, poserait problème dans la dernière partie de la preuve si l'on voulait modifier un nombre d'enlacement de la forme $\mathrm{lk}(x, x^+)$, comme remarqué par J-B. Meilhan.

$\partial N_{i,d}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{n+1-d}$. Supposons les voisinages tubulaires $(N_{i,d})_{i,d}$ deux-à-deux disjoints. Écrivons la sphère $\mathbb{S}^d$ comme la réunion de deux hémisphères H^d_- et H^d_+. Notons $P_{i,d}$ le complémentaire du $(n+1)$-disque $\mathrm{Int}\left(H^d_+ \times H^{n+1-d}_+\right)$ dans $\partial N_{i,d}$. La sous-variété $P_{i,d}$ est alors la réunion de $H^d_- \times \mathbb{S}^{n+1-d}$ et $\mathbb{S}^d \times H^{n+1-d}_-$ le long de $H^d_- \times H^{n+1-d}_-$. En fixant $m_{i,d} \in \mathrm{Int}(H^d_-)$ et $m'_{i,d} \in \mathrm{Int}(H^{n+1-d}_-)$, les cycles $\mathbb{S}^d \times \{m'_{i,d}\}$ et $\{m_{i,d}\} \times \mathbb{S}^{n+1-d}$ sont contenus dans $P_{i,d}$, et $P_{i,d}$ se rétracte par déformation sur $(\mathbb{S}^d \times \{m'_{i,d}\}) \cup (\{m_{i,d}\} \times \mathbb{S}^{n+1-d})$, qui est un bouquet $\mathbb{S}^d \vee \mathbb{S}^{n+1-d}$. Les deux cycles engendrent donc l'homologie réduite de $P_{i,d}$ et se rencontrent en un seul point. Choisissons alors pour tout $d \in \{1, \dots, \frac{n+1}{2}\}$ et tout $i \in \underline{n_d}$ un point $x_{i,d}$ de $\partial\Sigma_0$, et un chemin $\gamma_{i,d}$ allant de $x_{i,d}$ à un point $y_{i,d}$ de $\partial P_{i,d}$ dans $Y_1 = Y \setminus \bigcup_{i',d'} P_{i',d'}$, de telle sorte que les chemins $\gamma_{i,d}$ soient deux-à-deux disjoints (ce qui est possible car Y_1 est connexe et de dimension au moins 3). Pour tout (i,d), on recolle alors à $\Sigma_0 \cup \bigcup_{i',d'} P_{i',d'}$ un cylindre $[0,1] \times \mathbb{D}^n$ de telle sorte que $[0,1] \times \{(0,\dots,0)\}$ s'identifie à $\gamma_{i,d}$, $\{0\} \times \mathbb{D}^n$ à un voisinage de $x_{i,d}$ dans $\partial\Sigma_0$, et $\{1\} \times \mathbb{D}^n$ à un voisinage de $y_{i,d}$ dans ∂P^d_i. On obtient alors[2] une sous-variété Σ_1, dont le bord est la somme connexe de $\mathbb{R}^n$ et d'un certain nombre de n-sphères, et est donc toujours difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. L'orientation de Σ_0 fixe une orientation de Σ_1, ce qui fixe le choix des orientations des $P_{i,d}$. Orientons alors les cycles $a^d_i = \mathbb{S}^d \times \{m'_{i,d}\}$ et $z^{n+1-d}_i = \{m_{i,d}\} \times \mathbb{S}^{n+1-d}$ de telle sorte que $\langle a^d_i, z^{n+1-d}_i \rangle_{\Sigma_1} = 1$. Une application directe de la suite de Mayer-Vietoris entraîne que l'homologie réduite de Σ_1 est engendrée par les classes $([a^d_i])_{i,d}$ et $([z^{n+1-d}_i])_{i,d}$. Par construction, on a $\langle a^d_i, z^{n+1-d}_j \rangle_{\Sigma_1} = \delta_{i,j}$. On définit alors deux bases duales $\mathcal{B} = (\overline{a}^d_i)_{d\in\underline{n}, i\in\underline{b_d}}$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\overline{z}^d_i)_{d\in\underline{n}, i\in\underline{b_d}}$ de l'homologie réduite de Σ_1 par les formules

$$\overline{a}^d_i = \begin{cases} a^d_i & \text{si } d < \frac{n+1}{2}, \\ z^d_i & \text{si } d > \frac{n+1}{2}, \\ a^d_i & \text{si } d = \frac{n+1}{2} \text{ et } 1 \leq i \leq n_d, \\ z^d_{i-n_d} & \text{si } d = \frac{n+1}{2} \text{ et } n_d < i \leq b_d, \end{cases}$$

et

$$\overline{z}^d_i = \begin{cases} (-1)^d a^d_i & \text{si } d < \frac{n+1}{2}, \\ z^d_i & \text{si } d > \frac{n+1}{2}, \\ z^d_i & \text{si } d = \frac{n+1}{2} \text{ et } 1 \leq i \leq n_d, \\ (-1)^d a^d_{i-n_d} & \text{si } d = \frac{n+1}{2} \text{ et } n_d < i \leq b_d, \end{cases}$$

Avec de telles bases, on a $V^{\pm}_d(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = -{}^T V^{\mp}_{n+1-d}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ pour tout d différent de $\frac{n+1}{2}$, et $V^+_d(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) - V^-_d(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = I_{b_d}$ pour tout $d \in \underline{n}$. Il suffit donc pour avoir la propriété de la proposition de s'assurer que $V^+_d(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = V^+_d$ pour $d \in \{1, \dots, \frac{n+1}{2}\}$.

[2]Il faudrait lisser le recollement et le bord des $P_{i,d}$, mais cela ne présente aucune difficulté autre que purement technique.

Fixons $d \in \{1, \dots, \frac{n+1}{2}\}$, et i et j dans $\underline{b_d}$, et montrons comment modifier le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(\overline{z}_i^d, (\overline{a}_j^{n+1-d})^+)$. Notons P (respectivement P') l'unique $P_{i',d'}$ contenant $\overline{z}_i^d$ (respectivement $\overline{a}_j^{n+1-d}$). Choisissons un chemin γ de $\overline{z}_i^d$ à $\overline{a}_j^{n+1-d}$ dans $Y_2 = \mathbb{R}^{n+2}$, ne rencontrant Σ_1 qu'en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, et la rencontrant transversalement en ces deux points. Pour $r \in]0,1]$ et $k \in \underline{n}$, notons $\mathbb{D}_r^k \subset \mathbb{D}_1^k = \mathbb{D}^k$ le k-disque de rayon r. Identifions un voisinage U de γ à $[-1,3] \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^{n+1-d}$ de telle sorte que

- le chemin γ s'identifie au segment $[0,1] \times \{0\}^d \times \{0\}^{n+1-d}$,
- le morceau de cycle $\overline{z}_i^d \cap U$ s'identifie (avec même orientation) à $\{0\} \times \mathbb{D}^d \times \{0\}^{n+1-d}$, et $P \cap U$ à $\{0\} \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^{n+1-d}_{\frac{1}{4}}$,
- pour un certain $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, le morceau de cycle $\varepsilon \overline{a}_j^{n+1-d} \cap U$ s'identifie (avec même orientation) à $\varepsilon\{1\} \times \{0\}^d \times \mathbb{D}^{n+1-d}$, et l'ensemble $P' \cap U$ à $\{1\} \times \mathbb{D}^d_{\frac{1}{4}} \times \mathbb{D}^{n+1-d}$.

Prenons une fonction lisse $\chi \colon \mathbb{D}^d \to [0,1]$ valant 1 sur $\mathbb{D}^d_{\frac{1}{4}}$ et 0 en-dehors de $\mathbb{D}^d_{\frac{1}{2}}$. Notons N le sous-ensemble $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^{n+1-d}$ de U, qui contient $P \cap U$. Pour $x = (t, x, y) \in N$, posons

$$\Phi(x) = (t + 2\chi(x), x, y) \in U.$$

On définit ainsi une application lisse Φ d'un voisinage de N dans U, dont la restriction à $P \cap U$ est un plongement fixant $P \cap \partial U$. Les hypothèses sur χ garantissent que $\Phi(P \cap U)$ ne rencontre pas P'. En remplaçant $P \cap U$ par $\Phi(P \cap U)$ dans Σ_1, on obtient donc une nouvelle surface de Seifert, qui a la même homologie, et où le générateur $\overline{z}_i^d$ est remplacé par le cycle $\tilde{z}_i^d$ obtenu à partir de $\overline{z}_i^d$ en remplaçant $\overline{z}_i^d \cap U$ par $\Phi(\overline{z}_i^d \cap U)$. Notons alors $W_z^{d+1} = \{(t, x, 0) \in U \mid 0 \leq t \leq 2\chi(x)\}$, que nous orientons par les coordonnées (t, x), de telle sorte que $\partial W_z^{d+1} = \tilde{z}_i^d - \overline{z}_i^d$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{lk}\left(\tilde{z}_i^d, (\overline{a}_j^{n+1-d})^+\right) &= \mathrm{lk}\left(\overline{z}_i^d, (\overline{a}_j^{n+1-d})^+\right) + (-1)^{d+1}\left\langle W_z^{d+1}, (\overline{a}_j^{n+1-d})^+)\right\rangle_W \\ &= \mathrm{lk}\left(\overline{z}_i^d, (\overline{a}_j^{n+1-d})^+\right) + (-1)^{d+1}\left\langle W_z^{d+1}, \overline{a}_j^{n+1-d}\right\rangle_W \\ &= \mathrm{lk}\left(\overline{z}_i^d, (\overline{a}_j^{n+1-d})^+\right) + (-1)^{d+1}\varepsilon, \end{aligned}$$

car W_z^{d+1} et $\overline{a}_j^{n+1-d}$ ont un unique point d'intersection $(1,0,0)$, de signe ε. En répétant ce procédé un certain nombre de fois, on peut donc obtenir une surface de Seifert Σ_2 et deux bases duales $(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ de son homologie réduite telles que $V_d^+(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = V_d^+$ pour $d \in \{1, \dots, \frac{n+1}{2}\}$. □

Remarque A.0.2. Pour les matrices de degré $q = \frac{n+1}{2}$, on peut modifier les nombres d'enlacements librement tant que les deux cycles impliqués ne sont pas homologues. Dans ce dernier cas, on peut les modifier à l'aide d'un élément de $\pi_q(SO(q+1)$ en appliquant une rotation le long des fibres d'un voisinage tubulaire d'un cycle. Ces deux arguments permettraient d'énoncer des conditions suffisantes pour que des matrices $V^{\pm}_{\frac{n+1}{2}}$ soient les matrices de Seifert d'ordre $\frac{n+1}{2}$ d'un nœud long $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Pour des raisons de stabilité de ce manuscrit, nous ne détaillons pas plus avant.

Bibliographie

[AF97] Daniel Altschuler and Laurent Freidel. Vassiliev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders. *Communications in Mathematical Physics*, 187(2) :261–287, Aug 1997.

[BN95a] Dror Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, 34(2) :423 – 472, 1995.

[BN95b] Dror Bar-Natan. Perturbative Chern-Simons theory. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 04(04) :503–547, 1995.

[Bot57] Raoul Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43(10) :933–935, 1957.

[Bot96] Raoul Bott. Configuration spaces and imbedding invariants. *Turkish J. Math.*, 20(1) :1–17, 1996.

[BT17] Raoul Bott and Clifford Taubes. *[106] On the Self-Linking of Knots*, pages 259–301. Springer International Publishing, Cham, 2017.

[CR05] Alberto S. Cattaneo and Carlo A. Rossi. Wilson surfaces and higher dimensional knot invariants. *Communications in Mathematical Physics*, 256(3) :513–537, Jun 2005.

[Far80] Michael Farber. Isotopy types of knots of codimension two. *Transactions of the American Mathematical Society*, 261 :185–209, 09 1980.

[GGP01] Stavros Garoufalidis, Mikhail Goussarov, and Michael Polyak. Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds. *Geom. Topol.*, 5 :75–108, 2001.

[GMM90] E. Guadagnini, M. Martellini, and M. Mintchev. Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants. *Nuclear Physics B*, 330(2-3) :575–607, jan 1990.

[Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.

[HKS99] Kazuo Habiro, Taizo Kanenobu, and Akiko Shima. Finite type invariants of ribbon 2-knots. In *Low-dimensional topology (Funchal, 1998)*, volume Contemporary Mathematics 233, pages 187–196. American Mathematical Society, 1999.

[HS01] Kazuo Habiro and Akiko Shima. Finite type invariants of ribbon 2-knots, ii. *Topology and its Applications*, 111(3) :265 – 287, 2001.

[Ker60] M. Kervaire. Some non stable homotopy groups of lie groups. *Illinois Journal of Mathematics*, pages 161–169, 1960.

[Kon94] Maxim Kontsevich. *Feynman Diagrams and Low-Dimensional Topology*, pages 97–121. Birkhäuser Basel, Basel, 1994.

[KT99] Greg Kuperberg and Dylan P. Thurston. Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology, 1999.

[Les00] Christine Lescop. About the uniqueness and the denominators of the Kontsevich integral, 2000.

[Les04a] Christine Lescop. On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres, 2004.

[Les04b] Christine Lescop. Splitting formulae for the Kontsevich-Kuperberg-Thurston invariant of rational homology 3-spheres, 2004.

[Les15a] Christine Lescop. A formula for the θ–invariant from Heegaard diagrams. *Geometry & Topology*, 19(3) :1205–1248, May 2015.

[Les15b] Christine Lescop. An introduction to finite type invariants of knots and 3-manifolds defined by counting graph configurations. Number 3(17), pages 67–117, 2015.

[Les20] Christine Lescop. Invariants of links and 3–manifolds from graph configurations. arXiv:2001.09929, 2020.

[Let19] David Leturcq. Generalized Bott-Cattaneo-Rossi invariants of high-dimensional knots. arXiv:1312.2566, 2019.

[Let20] David Leturcq. The Reidemeister torsion of high-dimensional long knots from configuration space integrals. arXiv:2003.01007, 2020.

[Lev66] Jerome Levine. Polynomial invariants of knots of codimension two. *Annals of Mathematics*, 84(3) :537–554, Nov. 1966.

[Lev69] J. Levine. Knot cobordism groups in codimension two. *Commentarii mathematici Helvetici*, 44 :229–244, 1969.

[Lev70] J. Levine. An algebraic classification of some knots of codimension two. *Commentarii Mathematici Helvetici - COMMENT MATH HELV*, 45 :185–198, 12 1970.

[LMO98] Thang T Q Le, Jun Murakami, and Tomotada Ohtsuki. On a universal perturbative invariant of 3-manifolds. *Topology*, 37(3) :539–574, 5 1998.

[Mas13] Gwenael Massuyeau. Splitting formulas for the LMO invariant of rational homology three-spheres. *Algebraic & Geometric Topology*, 14, 09 2013.

[Mil65] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* The university press of Virginia Charlottesville, 1965.

[Mil68] John W. Milnor. Infinite cyclic coverings. In *Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967)*, pages 115–133. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., 1968.

[Mou12a] Delphine Moussard. Finite type invariants of rational homology 3-spheres. *Algebraic & Geometric Topology*, 12, 03 2012.

[Mou12b] Delphine Moussard. Finite type invariants of rational homology 3–spheres. *Algebraic & Geometric Topology*, 12(4) :2389–2428, Dec 2012.

[Oht96] Tomotada Ohtsuki. Finite type invariants of integral homology 3-spheres. *J. Knot Theory Ramifications*, 5(1) :101–115, 1996.

[Poi02] Sylvain Poirier. The configuration space integral for links in $\mathbb{R}^3$. *Algebraic & Geometric Topology*, 2(2) :1001–1050, Nov 2002.

[Ros02] Carlo Rossi. *Invariants of Higher-Dimensional Knots and Topological Quantum Field Theories.* PhD thesis, Zurich University, 2002.

[Sin04] Dev P. Sinha. Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces. *Selecta Math. (N.S.)*, 10(3) :391–428, 2004.

[Ste99] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press, 1999.

[Tho54] René Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28 :17–86, 1954.

[Thu99] Dylan P. Thurston. Integral expressions for the Vassiliev knot invariants, 1999. arXiv:math/9901110.

[Wat07] Tadayuki Watanabe. Configuration space integral for long n–knots and the Alexander polynomial. *Algebraic and Geometric Topology*, 7 :47–92, 2007.

[Whi05] Hassler Whitney. *Geometric Integration Theory*. Dover Publications, 2005.