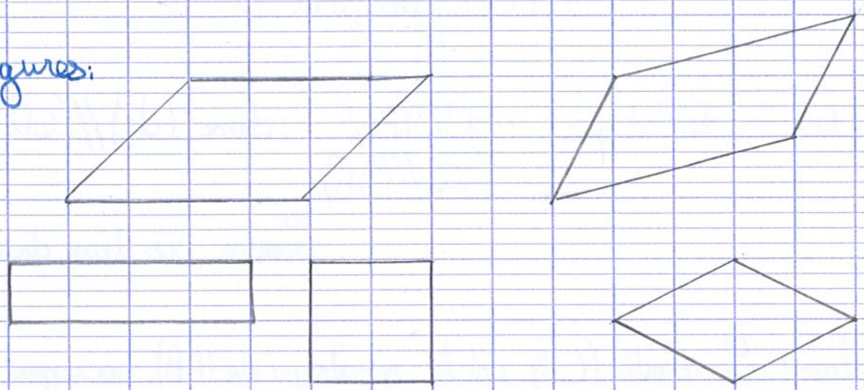
Chapitre Parallélogrammes

I) Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

figures:



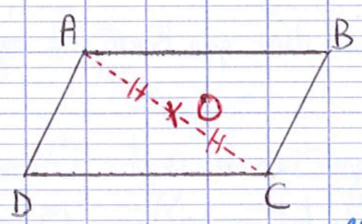
remarque : les losanges, les rectangles et les carrés sont des cas particuliers de parallélogrammes.

II) Propriétés du parallélogramme.

1) Centre

Théorème : Le point d'intersection des diagonales est un centre de symétrie du parallélogramme.

démonstration :



Idée : on note O le milieu de la diagonale [AC] et on va montrer que O est un centre de symétrie.

1°) Comme O est le milieu de [AC], le symétrique de A par rapport à O est C.
2°) De même, le symétrique de C par rapport à O est A.
3°) Montrons que le symétrique de B est D.
On détermine pour cela les symétriques de (AB) et (BC).

Le symétrique de (AB) par rapport à O est :
- une droite (d_1)
- parallèle à (AB) (cf cours)
- passe par le symétrique de A (c'est-à-dire C).

Or, on sait que : · (CD) est parallèle à (AB) (car ABCD est un parallélogramme)
· (CD) passe par C.

On en déduit que : · $(d_1)//(AB)$ donc $(d_1)//(CD)$
· $(CD)//(AB)$

Comme ces deux droites parallèles passent par C, elles sont identiques.

Bilan : La droite (CD) est le symétrique de (AB) par rapport à O.

De la même manière, en remplaçant A par C ci-dessus, on montre que la droite (AD) est le symétrique de (BC) par rapport à O.

La symétrie de centre O envoie donc (AB) et (BC) sur (CD) et (AD), elle envoie donc le point d'intersection de (AB) et (BC) sur celui de (CD) et (AD).

On a bien montré que D est le symétrique de B par rapport à O.

4°) On peut donc aussi dire que B est le symétrique de D par rapport à O.

Conclusion : La symétrie de centre O envoie donc ABCD sur DCBA, qui est le même quadrilatère. Donc O est un centre de symétrie de ABCD.

Corollaire. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieux, les côtés opposés ont la même longueur, et les angles opposés ont la même mesure.

$AB = CD$, $AD = BC$, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

et [AC] et [BD] ont le même milieu

démonstration : - [AB] est envoyé sur [CD] par la symétrie de centre O, donc ces deux segments ont la même longueur.
- De même, [AD] et [BC] sont symétriques par rapport à O, donc AD = BC.
- La symétrie de centre O envoie les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DCB}$ l'un sur l'autre donc ils ont la même mesure. De même pour $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$.
- Enfin, comme A et C sont symétriques, O est le milieu de [AC], et comme B et D sont symétriques par rapport à O, O est le milieu de [BD].

Donc [AC] et [BD] se croisent en O, qui est leur milieu

III) Caractérisations du parallélogramme

En II, on a donné des propriétés que l'on pouvait affirmer lorsqu'une figure était un parallélogramme. En III, on donne différentes manières de vérifier qu'une figure donnée est bien un parallélogramme.

1) à partir de sa définition.

Rappel : - par définition, si (AB)//(CD) et (BC)//(AD), alors ABCD est un parallélogramme.

2) à partir des diagonales

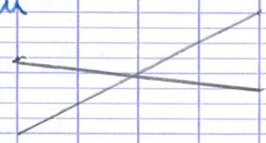
Théorème : Si les diagonales d'un quadrilatère se croisent en leurs milieux, ce quadrilatère est un parallélogramme.

démonstration : si les diagonales se croisent en leur milieu, on peut montrer (exercice) que celui-ci est un centre de symétrie de la figure.
Donc les côtés opposés sont symétriques par rapport au centre.
On a vu au chapitre sur les symétries que cela entraînait qu'ils étaient parallèles.

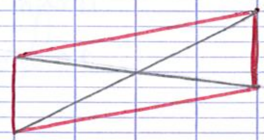
Donc la figure est un parallélogramme.

Remarque : cela donne aussi une méthode de tracé simple pour construire des parallélogrammes :

① on trace deux segments de même milieu



② on relie leurs extrémités.



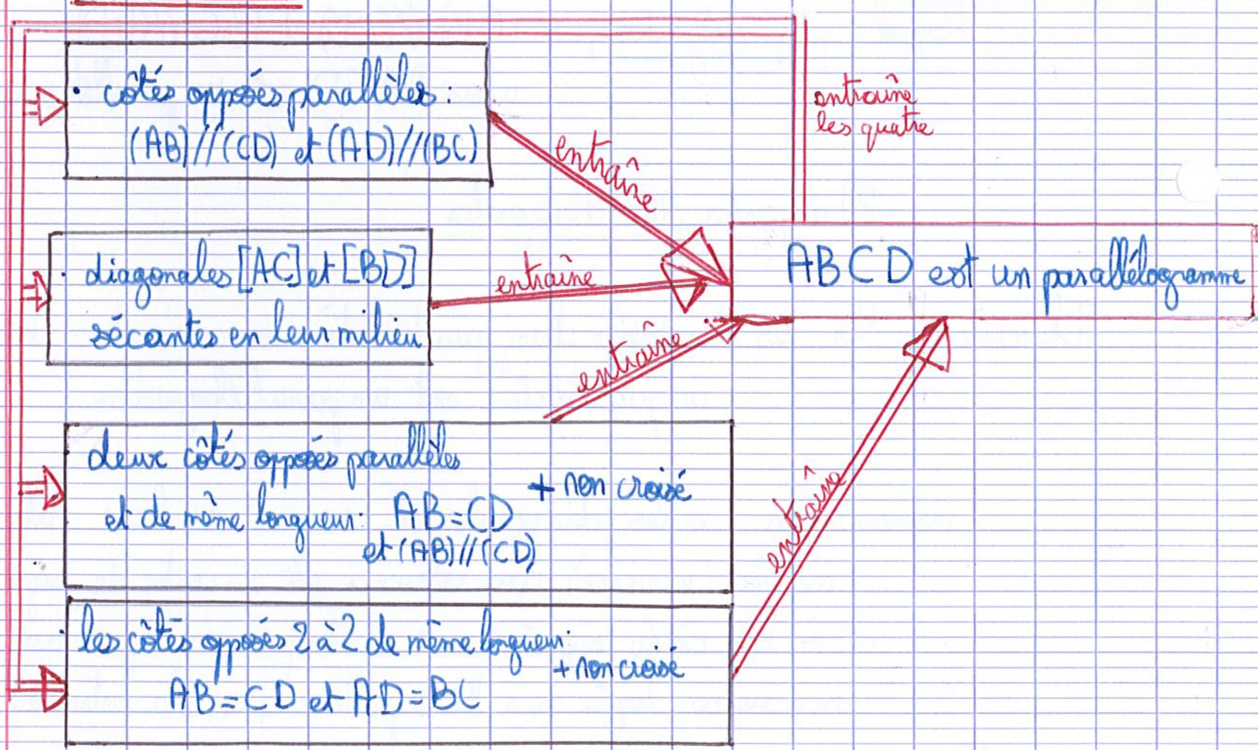
3) à partir des longueurs des côtés

Théorème

1) Si un quadrilatère non croisé (dont les côtés ne se croisent pas) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

2) Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

IV) Bilan



Chacune des quatre propriétés ci-dessus suffit à démontrer qu'une figure est un parallélogramme (ce qui entraîne alors que toutes ces propriétés sont vraies).

↳ elles sont donc équivalentes.