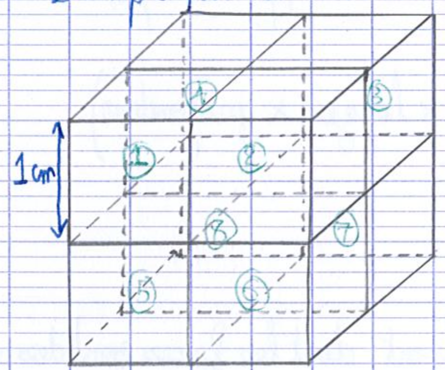
Chapitre Volume des solides

I) Introduction

Les années précédentes, vous avez vu les notions de longueur et de surface.

Exprimer une longueur, par exemple en cm, c'est regarder combien de segments de 1 cm y tiennent bout à bout.
De même, exprimer une aire en cm^2, c'est regarder combien de carrés de 1 cm de côté y tiennent collés côte à côte.
On mesurera donc les volumes en cm^3, pour exprimer combien de cubes de 1 cm de côté y tiendraient.

Par exemple, un cube de côté 2 cm contient huit cubes de côté 1 cm :



$\mathcal{V} = 8\ cm^3$

En pratique, ce découpage n'est que rarement possible et on pourra le remplacer par du calcul.
Sur le même exemple, on pourra dire que $\mathcal{V} = (2\ cm) \times (2\ cm) \times (2\ cm)$
d'où $\mathcal{V} = 8\ cm^3$.

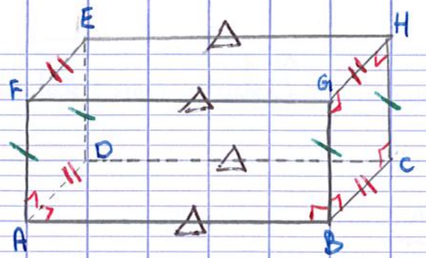
II) Solides classiques

1) Le pavé droit (ou parallépipède rectangle).

Définition

Un pavé droit (ou parallépipède rectangle) est un solide à six faces (donc un hexaèdre) dont toutes les faces sont des rectangles.

Figure :



→ six faces rectangulaires
→ huit sommets
→ douze arêtes (les segments), quatre à quatre parallèles et de même longueur.

Remarques : • on nomme un volume par une liste de ses sommets, mais de telle sorte que deux lettres successives soient deux sommets voisins. Ici, on peut donc choisir ABCDEFGH, ou AFEDCHGB, mais pas ABCDFGHE car [DF] n'est pas une arête.

• comme les faces sont des rectangles, $\begin{cases} AB = CD = EH = GF \\ AD = BC = GH = EF \\ AF = DE = BG = CH \end{cases}$

Volume : le volume du pavé droit est le produit des longueurs de trois arêtes du même coin.

$\boxed{\mathcal{V} = AD \times AB \times AF}$ (par exemple)

$\boxed{\mathcal{V} \text{ (= longueur} \times \text{largeur} \times \text{profondeur)}}$

2) Le cube

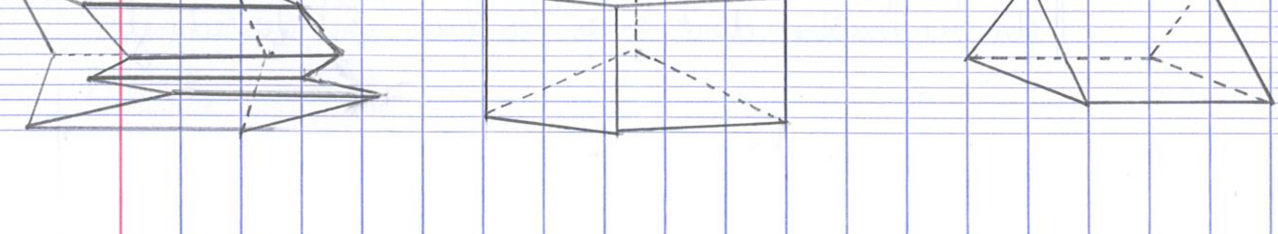
Un cube est un pavé droit dont les faces sont des carrés.
Toutes ses arêtes ont alors la même longueur, que l'on appelle le côté du cube.

Volume : $\boxed{\mathcal{V} = \text{côté} \times \text{côté} \times \text{côté}}$

3) Les prismes droits et cylindres

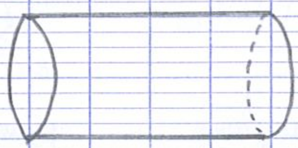
Définition : On appelle prisme droit le solide obtenu en déplaçant un polygone perpendiculairement à son plan.

exemples :

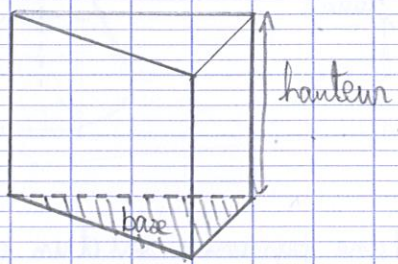


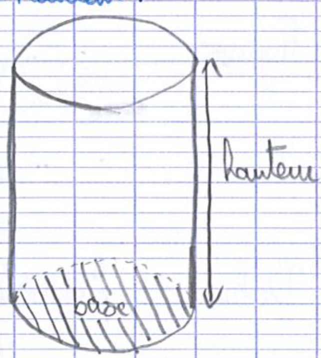
Définition || On appelle <u>cylindre</u> le solide obtenu en déplaçant un disque perpendiculairement à son plan.

<u>Figure</u> :



<u>Volumes</u> : Pour les cylindres et les prismes droits, le volume est obtenu en multipliant l'aire de la figure de base par la hauteur.





$$\boxed{\mathcal{V} = \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{aire de la base}} \times \underbrace{h}_{\text{hauteur}}}$$

<u>Remarques</u> :

- Les pavés droits sont les prismes droits à base rectangulaire, les cubes sont les prismes droits à base carrée. Les formules des 1 et 2 sont des cas particuliers de celle ci-dessus.

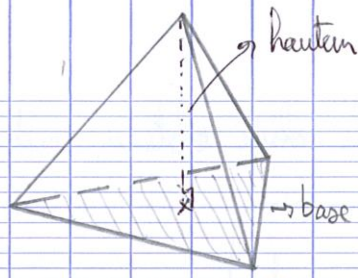
- Pour le cylindre, la base est un disque donc on peut donner une formule en fonction du rayon (car $\mathcal{B} = \pi \times R \times R$) :

$$\boxed{\mathcal{V} = \pi \times R \times R \times h}$$

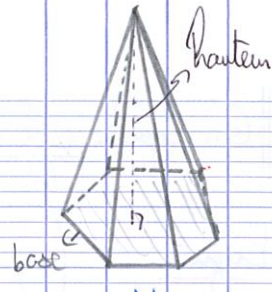
4) Les cônes et pyramides

Définition || Une <u>pyramide</u> est obtenue à partir d'un polygone (<u>sa base</u>) et d'un point (<u>son sommet</u>) en reliant tous les sommets de la base au sommet de la pyramide.

Figures :



pyramide à base triangulaire (ou tétraèdre)

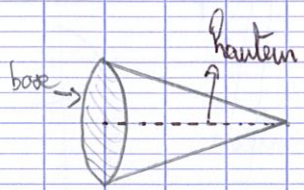


pyramide à base hexagonale

pyramide à base carrée

Définition || Le <u>cône</u> est la pyramide dont la base est un disque.

Figures :



Volumes : Le volume d'une pyramide ou d'un cône est le tiers du produit de l'aire de sa base et de la hauteur de son sommet.

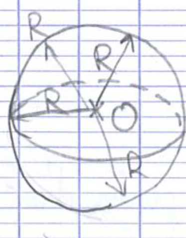
$$\boxed{V = \frac{B \times h}{3}}$$

En particulier, pour un cône : $\boxed{V = \frac{\pi \times R \times R \times h}{3}}$

5) Les boules.

Définition || La <u>sphère</u> de centre O et de rayon R est constituée des points situés à une distance de O égale à R.
La <u>boule</u> de centre O et de rayon R est l'intérieur de cette sphère.

Figure :



Volume : $\boxed{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R \times R \times R}$

III) Unités de volume

Pour les unités de longueur, on a vu que les multiples du mètre étaient donnés par :
$1\,km = 1000\,m$
$1\,hm = 100\,m$
$1\,dam = 10\,m$
$1\,dm = 0{,}1\,m$
$1\,cm = 0{,}01\,m$
$1\,mm = 0{,}001\,m$.

En 6e, on a vu aussi que $1\,dm^2$, aire d'un carré de 1 dm de côté correspond donc à $1\,dm \times 1\,dm = 10\,m \times 10\,m = 100\,m^2$.

Les unités de surface multiples du m^2 se convertissent donc de 100 en 100 :
par exemple, $1\,m^2 = 100\,dm^2$
$1\,m^2 = 1000\,mm \times 1000\,mm = 1\,000\,000\,mm^2$, etc.

De même, les multiples du m^3 se convertissent de mille en mille :
$1\,m^3 = 1\,000\,dm^3$
$1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$
etc.

En particulier, $1\,m^3 = 1\,000\,000\,000\,mm^3$.

De manière indépendante, on peut mesurer les volumes avec le litre (L) et ses multiples, qui suivent les règles de conversion normales.
$1\,daL = 10\,L$
$1\,L = 10\,dL$
$1\,dL = 10\,cL$
etc.

(Définition) Théorème Les deux familles d'unités sont liées par la relation $\boxed{1\,L = 1\,dm^3}$

→ (Le litre est par définition le volume contenu dans un cube de 1 dm de côté !

Synthèse : tableau de conversion.

longueurs :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		2	4	1		

→ 241 dm = 2,41 dam

aires :

		ha (hectare)		a (are)								
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
		1	0	0	0	0						
						0	0	1				

→ $1\ hm^2 = 10000\ m^2$

→ $1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$

volumes :

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
									kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
									0	0	0	0	3	3				
											1	2	2	5				
												0	7	5	0			

$33\ cL = 0{,}000\,33\ m^3$

$12{,}25\ dm^3 = 12{,}25\ L = 1225\ cL$

$750\ mL = 0{,}75\ dm^3$

$(= 750\ cm^3)$