

Étude d'un cas particulier

Tarzan est un labrador bien malin, pesant 30 kg. Rebecca, sa maîtresse, s'inquiète un peu : Tarzan prend de l'âge !

1. Déterminer, d'après le tableau, quatre périodes durant lesquelles l'accroissement de l'âge canin de Tarzan est proportionnel à celui de l'âge de sa maîtresse.
2. Déterminer les fonctions affines représentant l'âge canin de ce chien durant ces périodes.
3. Représenter graphiquement ces quatre fonctions dans le repère précédent.

On pourra préciser aux élèves que la fonction qui représente l'âge canin de Tarzan en fonction de son âge humain est une fonction affine par morceaux.

ACTIVITÉ 7 : CRYPTOGRAPHIE

Objectifs : illustrer les notions de fonctions affines et de fonctions linéaires.

Prérequis : notion de fonction, nombres premiers entre eux, fonctions affine et linéaire.

Première partie : le code de César

Lors de ses batailles, l'empereur romain Jules César cryptait les messages qu'il envoyait à ses généraux. Sa méthode de codage consistait à décaler les lettres de trois rangs vers la droite dans l'alphabet.

Par exemple, Jules César était codé par MXOHV FHVDU.

Cette méthode de cryptage est appelée code de César ou chiffrement de César. Le nombre de rangs de décalage des lettres est appelé la clé. Ainsi Jules César utilisait la clé 3.

1. Jules César envoie le message ERQ GHEXW qui a été crypté avec la clé 3. Décoder ce message.
2. Maintenant, on utilise la clé 17. Pour faciliter le cryptage et le décryptage, on utilise un tableau de chiffrement.
 - On numérote les lettres de l'alphabet de 1 à 26 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

– Il suffit d'ajouter la clé au numéro de la lettre à crypter et de chercher à quelle lettre correspond le nombre obtenu. Exemples :

Si on veut crypter la lettre C :

- le nombre correspondant à C est 3.
- $3 + \text{clé} = 17 = 20$.
- la lettre correspondant à 20 est T.
- C est codé par la lettre T.

Si on veut crypter la lettre M :

- le nombre correspondant à M est 13.
- $13 + \text{clé} = 30 = 26 + 4$.
- le problème est que 30 est supérieur à 26 et ne correspond à aucune lettre mais $30 = 26 + 4$ donc le nombre qui code M est 4.
- la lettre correspondant à 4 est D.
- M est codé par la lettre D.

a. Coder le message TOP SECRET.

b. Décoder le message C VJGZFE RIIZMV.

c. Compléter le tableau de chiffrement avec la clé 17.

Lettre à coder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
			20										4													
Lettre codée			T										D													

Interdit de 13? (particulière)

d. Décoder le message : MIRZVEK WRTZCV R UVTIPGKVI.

e. Si x désigne l'entier associé à une lettre de l'alphabet, comment peut-on décrire le code de César à l'aide d'une fonction ? Quelle est la nature de cette fonction ?

Deuxième partie : chiffrement linéaire

Une autre méthode consiste à multiplier le nombre correspondant à la lettre à coder par un même nombre, que l'on appellera également la clé de codage.

1. Compléter le tableau de chiffrement avec la clé 3.

Exemple : lorsqu'on multiplie 19 par 3, on obtient 57. Comme $57 - 2 \times 26 = 5$, le nombre associé à 19 est 5. La lettre S est donc codée par la lettre E.

Lettre à coder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	3	6																								
Lettre codée	C	F																								

2. Coder le mot : PYTHAGORE.

3. Décoder le message : IC EO ISMVJAYKO.

4. Si x désigne l'entier associé à une lettre de l'alphabet, comment peut-on décrire ce procédé à l'aide d'une fonction ? Quelle est la nature de cette fonction ?

5. Maintenant la clé de codage vaut 4. Compléter le tableau de chiffrement avec la clé 4.

Lettre à coder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	4																									
Lettre codée	D																									

6. Décoder le message : LTHHVTZT.

7. Quel est le problème ? Comment expliquer que la clé 4 « ne fonctionne pas » ?

8. Écrire le tableau de chiffrement pour la clé 6. Est-ce que la clé 6 fonctionne ?

9. Écrire le tableau de chiffrement pour la clé 7. Est-ce que la clé 7 fonctionne ?

10. Écrire le tableau de chiffrement pour la clé 13. La clé 13 fonctionne-t-elle ?

11. Déterminer les clés qui ne fonctionnent pas et celles qui fonctionnent. Expliquer.

Avec les élèves les plus autonomes, on pourra éviter les essais un peu fastidieux des clés 6, 7 et 13 et laisser les élèves prendre des initiatives.

Troisième partie : cryptage affine

En combinant les méthodes présentées dans les deux premières parties, on obtient un nouveau procédé de cryptage. Ainsi avec deux nombres entiers a et b (a étant positif), on peut définir une fonction affine $x \mapsto ax + b$.

1. Coder le message suivant à l'aide de la fonction affine $x \mapsto 3x + 2$: « le trésor est caché. »

2. Grégory et Wilson sont des jumeaux qui ont l'habitude de communiquer par messages codés. Ils utilisent toujours la fonction suivante $f : x \mapsto 3x + 7$.

Par exemple, la lettre codée de L est Q car $3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 - 26 = 17$.

a. Compléter la table de codage ci-dessous.

Lettre à coder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	10											17	
Lettre codée	J											Q	

Lettre à coder	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$f(x)$											1		
Lettre codée											A		

b. Grégory a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVRLHVOV.

Décoder ce message.

c. Wilson désire lui répondre « merci ». Que doit-il écrire ?

ACTIVITÉ 8 : LES MATHÉMATIQUES EN ÉBULLITION !

Objectifs : mettre en évidence la proportionnalité des accroissements dans le cas des fonctions affines, proposer un premier exemple de modélisation d'un phénomène physique à l'aide d'une fonction pour résoudre un problème concret.
Prérequis : fonctions affines (représentation graphique et écriture algébrique).

Pour préparer un thé, on verse 300 mL d'eau dans une bouilloire électrique. On met la bouilloire sous tension et, avec un thermomètre, on mesure la température de l'eau à différents moments. Le tableau ci-dessous donne les mesures obtenues à intervalles réguliers.

Températures en fonction du temps :

Temps en secondes	Température en °C
0	18
16	22
32	26
48	30
64	34
80	38

Déterminer à quel moment l'eau va bouillir.

On peut guider les élèves les moins autonomes en leur demandant :

- de représenter les données du tableau dans le repère fourni page suivante ;
- puis de déterminer une fonction qui modélise le phénomène [d'abord à l'aide du graphique, puis par le calcul] ;
- enfin, toujours à l'aide de cette fonction, de déterminer à quel moment l'eau va atteindre 100 °C.