Chapitre Opérations sur les nombres relatifs

I) Addition

Définition : La somme de deux nombres relatifs $\pm a$ et $\pm b$ est définie comme suit $(a, b \geq 0)$:

- $(+a)+(+b) = a+b$
- $(-a)+(-b) = -(a+b)$
- $(+a)+(-b) = \begin{cases} a-b & \text{si } a>b \\ 0 & \text{si } a=b \\ -(b-a) & \text{si } a<b \end{cases}$
- $(-a)+(+b) = (+b)+(-a)$ (cf point précédent ensuite).

exemples :
- $3+(-4)+5 = -(4-3)+5 = -1+5 = 5-1 = 4$
- $5+(-4)+3 = (5-4)+3 = 1+3 = 4$
- $3-4+5-6 = (3-4)+(5-6) = -(4-3)+(-(6-5))$
  $= -1+(-1) = -(1+1) = -2$

Remarques : les propriétés habituelles de l'addition restent vraies : on peut calculer des sommes successives dans l'ordre que l'on souhaite (cf les deux premiers exemples) et échanger les termes.

II) Soustraction

Définition : Le **opposé** d'un nombre relatif est le nombre obtenu en changeant son signe. Pour 0, l'opposé est lui-même.

Remarque :
- L'opposé de l'opposé d'un nombre est lui-même : $-(-a) = a$.
- Si deux nombres sont dans un certain ordre, leurs opposés sont dans l'ordre contraire : si $a<b$, $-b<-a$.

exemples :
- $-2<3$ et $-3<2$
- $3<4$ et $-4<-3$

Définition La différence entre deux nombres relatifs est la somme du premier et de l'opposé du second.

$$a - b = a + (-b)$$

exemples :
- $3 - 4 = 3 + (-4) = -(4-3) = -1$
- $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$
- $-1 - (-3) = -1 + 3 = 3 - 1 = 2$
- $4 - 4 = 4 + (-4) = 0$

Propriété Un signe − devant une parenthèse contenant des sommes et des différences peut être transformé en + en changeant tous les signes de la parenthèse.

exemples :
- $a - (b - c) = a - b + c$
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $2 - (-3 - 4) = 2 + 3 + 4$

etc.

Remarque : c'est un cas particulier de distributivité (pour la multiplication par 1)

Propriété La différence entre un nombre est lui-même est nulle : $a - a = 0$.

exemple : $\cancel{3} + 7 - \cancel{3} = 7$.

III) Multiplication

La multiplication des entiers relatifs est définie de manière à ce que les règles de distributivité soient toujours vérifiées.

Par exemple : $1 \times (-1) = 1 \times (0 - 1) = 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$

et surtout $(-1) \times (-1) = (-1) \times (0 - 1) = (-1) \times 0 - (-1) \times 1$
$= -(-1) = +1$.

car on a toujours $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.

On a donc le résultat suivant :

$$1 \times 1 = 1$$
$$1 \times (-1) = -1$$
$$(-1) \times 1 = -1$$
$$(-1) \times (-1) = 1$$

On le note souvent via le tableau de signes suivant :

Tableau (règle des signes)

×	+	−
+	+	−
−	−	+

On peut alors calculer n'importe quel produit :

$$2 \times (-3) = 2 \times 1 \times 3 \times (-1)$$
$$= 2 \times 3 \times 1 \times (-1)$$
$$= 6 \times -1 = -6$$

et surtout

$$(-3) \times (4) = (-1) \times 3 \times (-1) \times 4$$
$$= (-1) \times (-1) \times 3 \times 4$$
$$= 1 \times 12$$
$$= 12$$

On en déduit plus généralement la règle suivante :

Théorème — Le produit de deux nombres relatifs est obtenu en calculant le produit sans les signes, puis en y accolant le signe donné par le tableau précédent (règle des signes).

exemples :

$$2 \times (-4) = -8$$
$$(-3) \times 5 = -15$$
$$(-1) \times (-7) = +7$$

IV) Division

Définition : Le quotient d'un nombre relatif a par un nombre relatif non nul b est le nombre relatif $a \div b$ tel que : $\boxed{b \times (a \div b) = a.}$

Théorème : Pour calculer un quotient, on le calcule d'abord sans les signes, puis on détermine son signe comme pour le produit (cf. tableau en III).

exemples :
- $(-3) \div 4 = -0{,}75$
- $(-4) \div (-2) = +2$
- $8 \div (-2) = -4$

démonstration : on écrit $a = \pm A$ et $b = \pm B$ avec A et B positifs, ce qui laisse quatre cas suivant les signes.

1) $[+,+]$. On a $b \times (A \div B) = B \times (A \div B) = A = a$, donc $a \div b = A \div B$.

2) $[+,-]$. On a
$$\begin{aligned} b \times (-(A \div B)) &= -b \times (A \div B) && \text{(propriétés du produit)} \\ &= B \times (A \div B) && \text{(car } b = -B\text{)} \\ &= A = a && \text{(définition du quotient)} \end{aligned}$$
Donc $a \div b = -A \div B$
$\hookrightarrow (-A) \div B$

3) $[-,+]$ On a
$$\begin{aligned} b \times (-(A \div B)) &= -b \times (A \div B) \\ &= -B \times (A \div B) \\ &= -A \\ &= a \end{aligned}$$
Donc $(-A) \div B = a \div b = -(A \div B)$

$[-,-]$ 4) Enfin, $b \times (A \div B) = -B \times (A \div B) = -A = a$.

Donc $(-A) \div (-B) = a \div b = A \div B$