Chapitre Triangles égaux

I) Définition

Deux triangles sont égaux si on peut les décalquer et les superposer parfaitement.

L'objectif de ce chapitre sera de donner des critères plus précis pour dire quand deux triangles sont égaux. On commence par donner des propriétés qui sont nécessairement vérifiées quand deux triangles sont égaux, puis on cherchera surtout ce qu'il suffit de constater pour affirmer que deux triangles sont égaux.

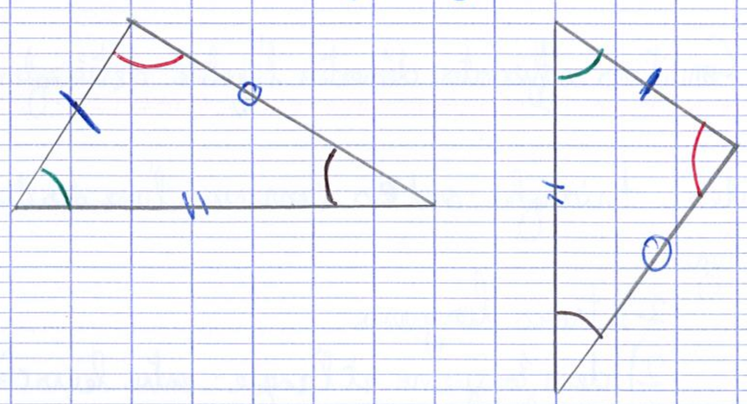
II) Conditions nécessaires

Théorème

> Si deux triangles sont égaux, alors leurs côtés sont deux-à-deux de même longueur, leurs angles sont deux à deux de même longueur et ils ont le même périmètre et la même aire.

Remarque: La propriété est évidente, puisque les deux triangles doivent se superposer.

Figure: Voici deux triangles égaux, codés pour illustrer les égalités.



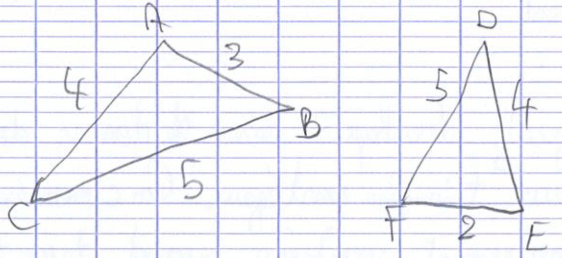
⚠ Dire que ABC et A'B'C' sont égaux ne dit a priori pas quels sommets se correspondent. On ne peut donc pas affirmer que AB = A'B', mais seulement que AB est une des trois longueurs A'B', B'C' ou A'C'.

Utilisations : ce résultat a deux utilités :

1) si on sait que deux triangles sont égaux, on peut connaître les longueurs et les angles de l'un à partir de ceux de l'autre.

2) si on connaît les longueurs ou les angles de deux triangles et qu'elles ne correspondent pas, on peut monter qu'ils ne sont pas égaux.

exercice type :



Les triangles sont-ils égaux ?

réponse : Les triangles ABC et DEF ne sont pas égaux, car s'ils l'étaient, leurs longueurs se correspondraient 2 à 2 et que le côté AB n'a la même longueur qu'aucun des côtés de DEF.

Remarques : 1) On peut raisonner de même sur les angles.

2) Ce type de raisonnement où l'on démontre que la conclusion d'un théorème est fausse pour affirmer que ses hypothèses sont fausses s'appelle une contraposition.

exemple plus simple :

On sait que si un nombre est multiple de 14, il est pair.

Donc : si un nombre est impair, il n'est pas multiple de 14.

III) Conditions suffisantes : démontrer l'égalité de triangles

Théorème

Si deux triangles ont en commun l'une des données suivantes, ils sont égaux :

1) trois longueurs
2) deux longueurs et l'angle entre leurs côtés
3) une longueur et deux angles

Utiliation : si on arrive à vérifier que deux triangles partagent 1), 2) ou 3), on conclura qu'ils sont égaux.

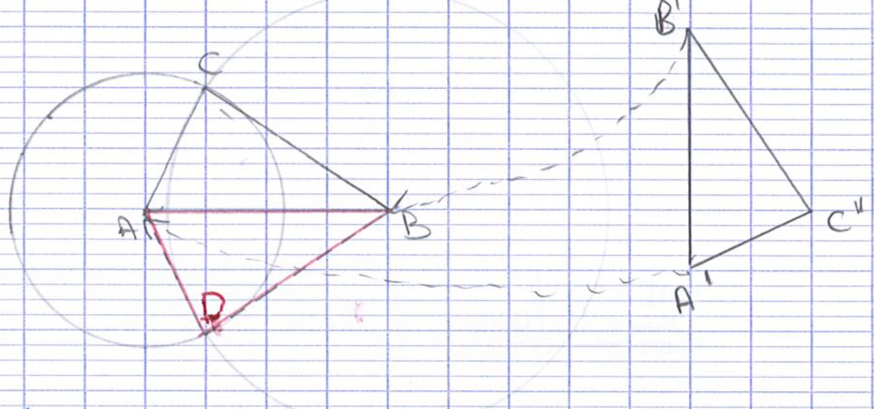
démonstration.

1) Supposons que les triangles $A'B'C'$ et ABC vérifient $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$.

Déplaçons $A'B'C'$ de telle sorte que A' soit sur A et B' sur B, ce qui est possible car $A'B' = AB$.

Traçons le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon BC et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre A et de rayon AC.

Par hypothèse C et C' sont alors sur ces deux cercles.



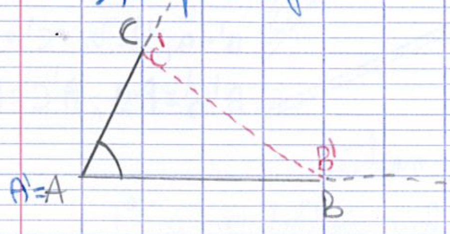
Ces deux cercles se croisent en deux points : C et son symétrique D par rapport à (AB).

Si C' est arrivé sur C, les deux triangles sont superposés. S'il est arrivé sur D, on effectue la symétrie d'axe (AB), qui superpose nos deux triangles.

Donc ABC et $A'B'C'$ sont égaux.

2) Supposons cette fois $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \end{cases}$.

On déplace le triangle $A'B'C'$ pour avoir A' sur A, et $[A'B')$ sur $[AB)$ et $[A'C')$ sur $[AC)$, ce qui est possible car $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.



Comme $B' \in [AB)$ et $AB' = AB$, on a $B' = B$.

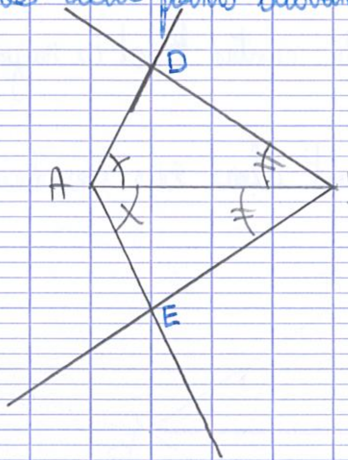
De même C' et C sont sur la même demi-droite et à la même distance de l'origine donc $C' = C$.

Les triangles sont donc bien superposés, ils sont alors égaux.

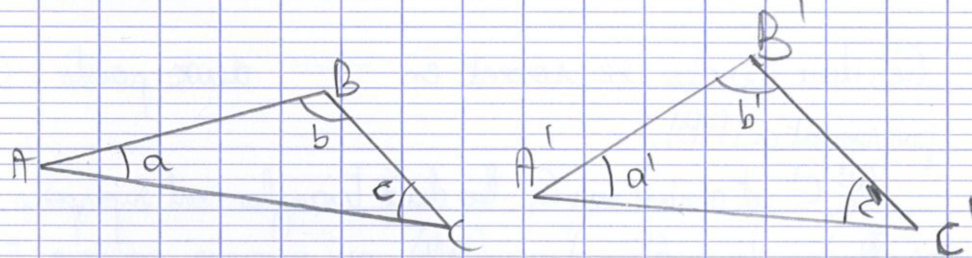
3) Remarquons que, puisque la somme des angles d'un triangle est 180°, si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, on a aussi égalité des angles restants : $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

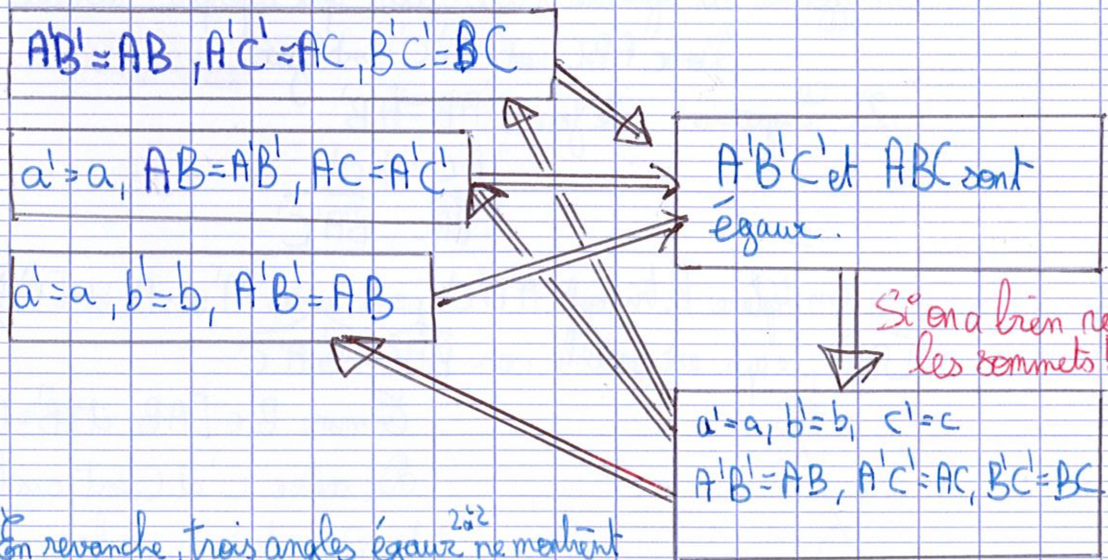
Supposons donc que $A'B' = AB$, et collons A' sur A et B' sur B.

Pour placer C et C' connaissant les valeurs des angles en A et B, on doit être en un des deux points (D et E) suivants, mais les triangles ADB et AEB sont égaux car symétriques par rapport à (AB), donc on aboutit de toute façon à deux triangles égaux.



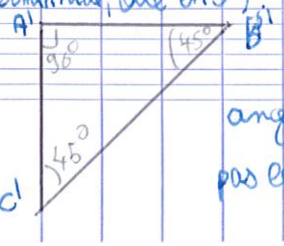
III) Bilan





⚠ En revanche, trois angles égaux 2 à 2 ne montrent pas l'égalité des triangles (c'est alors leur similitude, vue en 3^e).

Par exemple :



ont les mêmes angles 2 à 2 mais ne sont pas égaux (car les longueurs ne concordent pas).