Exercices d'arithmétique

Division euclidienne

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes de :

1. 45 par 4 ;
2. 59 par 7 ;
3. 59 par 9 ;
4. 63 par 9.

Exercice 2

Effectuer les divisions euclidiennes de :

1. 63 par 3 ;
2. 107 par 7 ;
3. 1792 par 8 ;
4. 624 par 6.

Exercice 3

Effectuer les divisions euclidiennes de :

1. 747 par 12 ;
2. 3949 par 21 ;
3. 10240 par 16 ;
4. 6399 par 9.

Exercice 4

On veut répartir une classe de 29 élèves en groupes de 4.

1. Combien de groupes complets peut-on former ?
2. Combien d'élèves resterait-il alors ?
3. Donner une répartition possible si l'on autorise à former un groupe de plus de quatre personnes.
4. Donner une répartition possible en autorisant seulement des groupes de 3 ou 4 personnes.

Exercice 5

On veut trouver tous les nombres N tels que les divisions euclidiennes de 43 par N et de 55 par N aient le même reste.

1. On note R ce reste, Q le quotient de la division euclidienne de 43 par N. Écrire une expression littérale reliant Q, N et R.
2. On note Q' le quotient de le division euclidienne de 55 par N. Écrire une expression littérale reliant Q', N et R.
3. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que N divise à la fois $55 - R$ et $43 - R$.
4. En déduire que N divise 12.
5. Écrire la liste des diviseurs de 12.
6. Vérifier que les nombres obtenus à la question précédente vérifient tous la propriété voulue au début de l'exercice.

Exercice 6

Reprendre l'exercice précédent pour vérifier qu'il existe exactement quatre nombres N pour lesquels les divisions euclidiennes de 10753 et 10768 par N ont le même reste.

Exercice 7

Calculer les restes des divisions euclidiennes de

1. $1000000\ldots000$ par 3 ;
2. $9999999999\ldots999$ par 4 ;
3. 1110987654321 par 5.
4. 98765432109876543210987654321 par 1000.

Indication : il n'y a évidemment pas à calculer toute la division. Pour les deux premiers exemples, on peut essayer de regarder ce qui se passe pour les premières valeurs (10, 100, 100,..., et 9, 99, 999, ...) pour deviner ce qui se passera ensuite.

Diviseurs et multiples

Exercice 1

Déterminer si :

1. 72 est multiple de 8 ;

2. 84 divise 4 ;
3. 57 admet 3 comme diviseur ;
4. 91 est divisible par 13.

Exercice 2

1. Trouver un nombre multiple de 7, de 9 et de 21.
2. Quel est le plus petit tel nombre ?

Exercice 3

Peut-on répartir 720 élèves en classes de 30 ? de 29 ?

Exercice 4

On veut répartir 420 livres équitablement sur des étagères.

1. Le peut-on avec 18 étagères ?
2. Et avec 21 étagères ?

Exercice 5

Un cafetier doit composer des corbeilles identiques avec 36 croissants et 24 pains au chocolat (sans laisser de reste).

1. Que peut-on dire du nombre N de corbeilles, par rapport à 36 et 24 ? (Si ce n'est pas immédiat, noter c le nombre de croissants par corbeille, et p celui de pains au chocolat, et écrire une expression littérale entre c et N et une autre entre p et N.)
2. Faire une liste des nombres à vérifier la propriété trouver à la question précédente.
3. Vérifier que tous ces nombres donnent une solution, et donner la composition des corbeilles dans chacun des cas. (Indication : il y a six solutions).

Nombres premiers

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

$$9; 13; 15; 21; 33; 37.$$

Exercice 2

Examiner si le nombre $2 \times 3 \times 5 + 7 \times 11$ est premier. (Indication : le calculer.)

Exercice 3

Sans le calculer, dire pourquoi le nombre $2 \times 3 \times 7 + 3 \times 5 \times 11$ n'est pas premier.

Exercice 4

1. Trouver le plus petit nombre premier supérieur à 100.
2. Même question avec 200.
3. Même question avec 300.

Exercice 5

Trouver le plus grand nombre premier inférieur à 750.

Exercice 6

Faire la liste des nombres premiers inférieurs à 200.

Exercice 7

Vérifier qu'il n'y a aucun nombre premier entre 1328 et 1360.

Exercice 8

1. Que dire du chiffre des unités d'un nombre premier supérieur à 10 ?
2. Justifier la réponse.
3. Est-ce une condition suffisante ?

Décomposition en facteurs premiers

Exercice 1

Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants :

$$14; 18; 23; 24; 26; 30; 45; 77; 735; 1001.$$

Exercice 2

Même exercice avec les nombres suivants :

$$14 \times 23; 1800; 26 \times 30 \times 77; 14014.$$

Exercice 3

1. Calculer le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$.
2. En déduire la décomposition de 5040 en facteurs premiers.
3. En déduire la décomposition de 40320 en facteurs premiers. (Indication : par quoi faut-il multiplier 5040 pour trouver 40320 ?)

Exercice 4

Décomposer en facteurs premiers, sans les calculer, les produits suivants :

1. $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13$;
2. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14$;
3. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \times 14 \times 15$;
4. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 26 \times 28 \times 30$.

Exercice 5

1. Décomposer en produit de nombres premiers les nombres 1326, 1001 et 31416.
2. Décomposer en facteur premier le produit $1326 \times 1001 \times 31416$.
3. En déduire que $1326 \times 1001 \times 31416$ est le carré d'un nombre entier, dont on donnera la décomposition en facteurs premier.
4. Calculer $\sqrt{1326 \times 1001 \times 31416}$.

Exercice 6

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres 88, 693, et 1617.
2. En déduire que $88 \times 693 \times 1617$ est le cube d'un entier dont on donnera la décomposition en facteurs premiers.
3. Calculer cet entier.

Liste de diviseurs

Exercice 1

Établir la liste des diviseurs des nombres suivants :

$$64; 100; 360; 504; 1001; 2048.$$

Exercice 2

Même exercice avec les nombres suivants :

$$131; 197; 397.$$

Exercice 3

On veut partager une longueur de 168 mm en longueurs égales, faisant un nombre entiers de millimètres. Combien de morceaux peut-on faire ?

Exercice 4

Établir la liste des diviseurs des nombres suivants :

$$2^2 \times 3 \times 5^3; 2 \times 3^3 \times 7; 3^4 \times 11.$$

Exercice 5

On considère un nombre dont la décomposition en facteurs premiers s'écrit $7^a \times 11^b$, où a et b sont des entiers.

1. Quelle est la forme de la décomposition en facteur premier d'un diviseur de ce nombre ?
2. En déduire le nombre de tels diviseurs en fonction de a et de b.

Exercice 6

Utiliser l'exercice précédent pour obtenir le nombre de diviseurs de $2^2 \times 3^3 \times 5$.

Exercice 7

Généralisant les exercices 5 et 6, déterminer le nombre de diviseurs de :

1. 2^a (en fonction de a) ;

2. $2^a \times 3^b$ (en fonction de a et de b) ;
3. 10^a (en fonction de a) ;
4. $2^a \times 3^a \times 5^b$ (en fonction de a et de b) ;
5. d'un nombre dont la décomposition en facteurs premiers est $p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \cdots \times p_n^{a_n}$.

Exercice 8 - pavages réguliers

On veut paver le plan en utilisant uniquement des polygones réguliers à N côtés de même taille.

1. Rappeler la valeur de la somme des angles d'un triangle.
2. En coupant un quadrilatère suivant une diagonale, en déduire la formule de la somme des angles d'un quadrilatère.
3. En reliant tous les sommets d'un polygone régulier à N côtés à son centre, combien de triangles forme-t-on ?
4. En déduire soigneusement que la somme des angles d'un tel polygone est $(N-2) \times 180^o$.
5. En déduire que chaque angle d'un polygone régulier à N côtés mesure $\frac{N-2}{N} \times 180^o$.
6. On suppose qu'on a pu paver notre plan en utilisant des polygones à N côtés. On suppose qu'autour de chaque sommet, il y a M polygones. Montrer que $M \times \frac{N-2}{N} \times 180^o = 360^o$.
7. En déduire que $\frac{2\times N}{N-2}$ est un entier.
8. Démontrer que $\frac{2\times N}{N-2} = 2 + \frac{4}{N-2}$.
9. En déduire que $N-2$ doit diviser 4.
10. Quelles sont les valeurs possibles de N ? (Indication : il y en a 3.)
11. Tracer les trois pavages possibles.

Plus grand diviseur commun

Exercice 1

Calculer le plus grand diviseur commun de 720 et 216.

Exercice 2

Calculer le plus grand diviseur commun de 1092 et 228.

Exercice 3

Dans un collège, toutes les classes ont la même taille. D'autre part, il y a 174 élèves en 6^e et 145 élèves en 5^e. En déduire le nombre d'élèves par classe.

Exercice 4

Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$$\frac{8}{24}; \frac{720}{216}; \frac{228}{1092}; \frac{100}{256}; \frac{1326}{31416}.$$

Plus petit multiple commun

Exercice 1

1. Calculer le plus petit multiple commun de 720 et 216.
2. Même question avec 228 et 1092.
3. En utilisant les exercices 1 et 2 de la partie précédente, comparer dans les deux exemples le produit du plus grand diviseur commun et du plus petit multiple commun avec le produit des deux nombres. Constater.

Exercice 2

Donner la liste des multiples communs à 10 et 12 jusque 400.

Exercice 3

1. Calculer le plus petit nombre à être multiple de tous les entiers de 1 à 10 inclus.
2. Donner tous les nombres à au plus quatre chiffres à être multiples de tous les entiers de 1 à 10.

Exercice 4

Réduire au même dénominateur les fractions suivantes, puis les ranger dans l'ordre croissant et les additionner. Réduire ensuite le résultat en une fraction irréductible.

1. $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{15}$;
2. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$;

3. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{11}$ et $\frac{5}{44}$.
4. $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$, et $\frac{4}{62}$.