Chapitre Proportionnalité, fonctions

I) Relations entre grandeurs

On veut dans ce chapitre regarder les relations qui peuvent exister entre deux grandeurs numériques : citons par exemple la taille et le poids d'un individu, la hauteur dont on lache un objet et la durée de sa chute, etc.

Définition On dit qu'une grandeur A est fonction d'une grandeur x si la valeur de x détermine totalement la valeur de A. On dit que A est fonction des grandeurs x et y si les valeurs de x et de y déterminent celle de A, etc.

exemples :

- La masse M d'une quantité d'eau est fonction de son volume V, et on a la formule $M(\text{en kg}) = 1000 \times V(\text{en L})$.
- Le prix d'achat en vrac P est fonction du prix du kg p et de la masse achetée M : $P(\text{en €}) = p \times M(\text{en kg})$.
- L'aire d'un rectangle $\mathcal{A}$ est fonction de sa longueur L et de sa largeur l : $\mathcal{A} = l \times L$

contre-exemples :

- La population d'un lieu n'est pas fonction de sa superficie (des lieux de même surface peuvent avoir des populations différentes)
- La longueur de la diagonale d'un rectangle n'est pas fonction de la longueur du rectangle (mais elle est fonction de sa longueur et de sa largeur).

Remarque : En langage mathématique, "être fonction de" est beaucoup plus fort que "dépendre de" dans la langue courante. Quand on étudie des grandeurs réelles, il y a beaucoup de facteurs à prendre en compte et les formules que l'on donne pour illustrer les relations, par exemple entre poids et taille, sont des approximations.

II) Tableaux de valeurs

Définition

Supposons que l'on veuille étudier une grandeur A en lien avec une autre x. On peut construire comme suit un tableau de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7
A	7	3	1,4	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{2}{3}$	11

On lit dans ce tableau :
- quand $x = 1$, $A = 7$
- quand $x = 3$, $A = 1,4$
- etc.

Remarque (3^e) : en 3^e, on pourra noter $A = f(x)$ et on dira que 1,4 est l'image de 3 ou que 4 est ~~un~~ un antécédent de $\frac{2}{3}$ (6 en est un autre).

Remarque : si A est fonction de x, on ne met qu'une seule colonne par valeur de x car A ne peut pas changer x étant fixé.

Voici par exemple un cas où A n'est pas fonction de x :

x	1	2	2	3	3	4	5
A	7	3	1	4	4	10	12

Quand $x = 3$, A peut valoir 3 ou 1, donc A n'est pas une fonction de x.

III) Formules

Dans l'exemple de la définition en II, les valeurs ne semblent suivre aucune logique. En pratique, quand deux grandeurs sont fonction l'une de l'autre en sciences, on peut exprimer leur relation par une expression littérale appelée formule. Là où le tableau de valeurs ne donne qu'un nombre fini de valeurs, la formule permet de calculer toute valeur de A en connaissant celle de x.

Définition

Si A est fonction de x, une **formule** de A est une expression littérale permettant de calculer A à partir de la valeur de x.

exemples : · L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté **c** est $\mathcal{A} = c \times c$

· Si on verse un volume V d'eau dans un verre de base $8\,cm^2$, la hauteur h d'eau est $h = \dfrac{V}{8}$ (h et V en cm).

· Si un véhicule avance à $30\,km.h^{-1}$ **pendant** une durée t (en h), il parcourt $d = 30 \times t$ (en km)

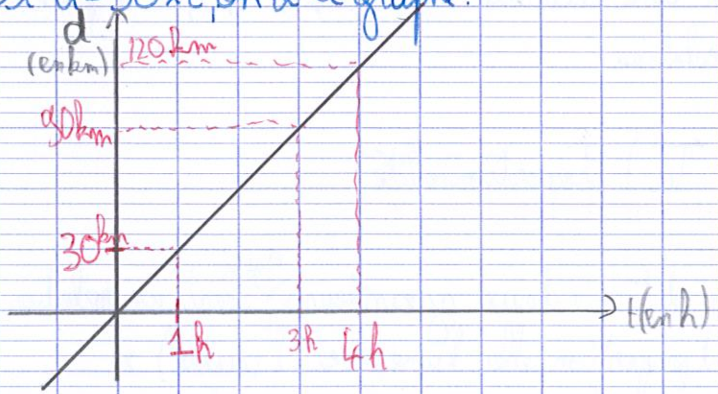
IV) Graphes

Étant donné une grandeur fonction d'une autre, on peut représenter graphiquement la relation entre les deux de la manière suivante.

Définition : Le graphe donnant A en fonction de x est la courbe (i.e. un trait de crayon) **du plan** (avec un repère orthogonal) dont les points sont ceux dont les coordonnées vérifient :

l'ordonnée du point est la valeur de A correspondant à son abscisse x.

exemple : si $d = 30 \times t$, on a le graphe :

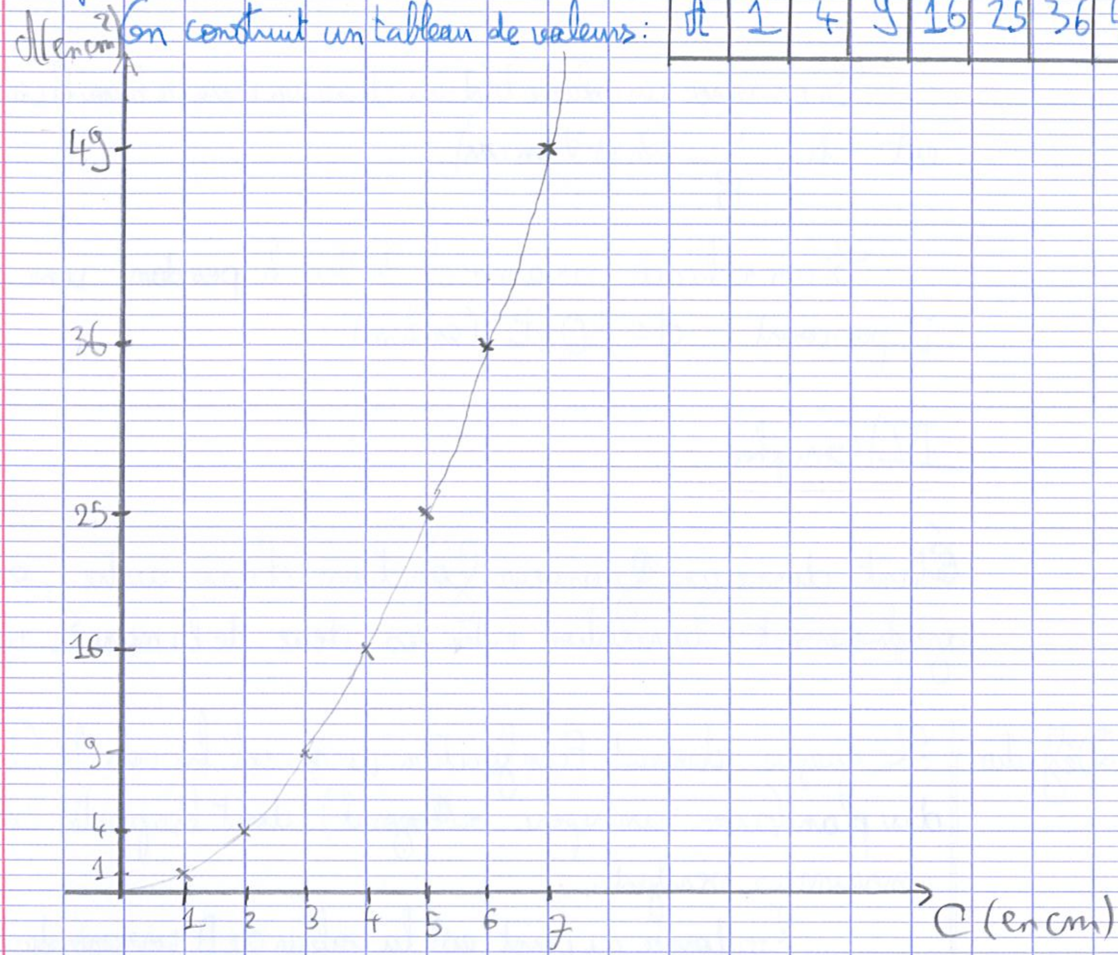


Remarques : · si la relation est plus compliquée, on ne peut pas tracer le graphe parfaitement à la main et on se contente d'en placer de nombreux points et de les relier harmonieusement (voir page suivante).

· on peut obtenir sur le graphe ci-dessus d ou t en fonction de l'autre valeur en suivant les pointillés.

exemple du carré : on avait $A = c \times c$.
On construit un tableau de valeurs :

c	1	2	3	4	5	6	7
A	1	4	9	16	25	36	49



Si on voulait être plus précis on calculerait le tableau pour les valeurs de c à une décimale (0,1, 0,2, 0,3, etc.) puis à 2, etc. C'est ce que fait votre calculatrice.

V) Proportionnalité

On dit que deux grandeurs A et x sont en relation de proportionnalité (qu'elles sont proportionnelles l'une avec l'autre) si :

(1) • A est fonction de x et si x est la somme de deux valeurs, A est la somme des valeurs leur correspondant

(2) • A s'obtient en multipliant x par un nombre fixé, le coefficient/rapport de proportionnalité

(3) • Le graphe de A en fonction de x est une droite contenant l'origine.

(4) • Si x_1 et x_2 correspondent à des valeurs A_1 et A_2 de A, on a

$$\frac{A_1}{x_1} = \frac{A_2}{x_2}$$

Théorème | Il suffit de vérifier une des quatre propriétés pour que toutes soient vraies.

application 1 : reconnaître une situation de proportionnalité.

Pour savoir si deux grandeurs sont proportionnelles, on commence par voir ce que l'on sait :

a) si on a une formule qui est du type $V = 3 \times B$, V et B sont proportionnels car on passe de l'un à l'autre en multipliant ou divisant par 3.

b) si on a un graphique, il suffit de regarder si c'est une droite passant par l'origine du repère.

c) à partir d'un tableau de valeurs, on peut procéder de deux manières.

A	1	2	3	7	9	11
B	3	6	9	21	27	33
$\frac{B}{A}$	3	3	3	3	3	3

- ou bien on calcule $\frac{B}{A}$ (ou $\frac{A}{B}$) pour chaque valeur pour vérifier qu'on a le même résultat,

- ou bien (pour éviter les divisions), on compare les produits en croix de chaque colonne avec la première, comme à gauche ci-contre.

$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix}$ $\nearrow 6$ $\searrow 6$

$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{matrix}$ $\nearrow 9$ $\searrow 9$

$\begin{matrix} 1 & 7 \\ 3 & 21 \end{matrix}$ $\nearrow 21$ $\searrow 21$

$\begin{matrix} 1 & 9 \\ 3 & 27 \end{matrix}$ $\nearrow 27$ $\searrow 27$

$\begin{matrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{matrix}$ $\nearrow 33$ $\searrow 33$

application 2 : trouver une valeur manquante dans une situation de proportionnalité.

Si on sait que A et B sont proportionnels entre eux et qu'on connaît au moins trois valeurs, on remplit ainsi :

A	7	9
B	84	?

On sait que $\frac{?}{9} = \frac{84}{7}$ donc $? = \frac{84}{7} \times 9$.

Après calcul, on trouve $\frac{84}{7} = 12$ et $12 \times 9 = 108$.

Donc la case manquante est 108.