Applications de la similitude

Exercice 1- Puissance d'un point par rapport à un cercle

On se donne dans tout l'exercice un cercle de centre O et de rayon R et un point M qui n'est pas situé sur le cercle. On trace deux droites sécantes en M croisant le cercle en A et B pour la première, en C et D pour la seconde.

1. Faire une figure dans le cas où M est situé à l'intérieur du disque. Tracer également les segments $[AC]$ et $[BD]$. On se place désormais dans ce cas.
2. Justifier l'égalité $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$.
3. On admet que $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. Montrer que les triangles MDB et MAC sont semblables.
4. En déduire que $MA.MB = MC.MD$.

On a montré l'énoncé suivant : « Étant donné une droite passant par M et coupant le cercle en deux points A et B, le produit des distances MA et MB ne dépend pas de la droite choisie. » Ce produit s'appelle la *puissance de M par rapport au cercle.*

Exercice 2 - Expression de la puissance d'un point par rapport à un cercle en fonction de sa distance au centre

D'après l'exercice précédent, on peut donc choisir n'importe quel droite passant par M pour calculer sa puissance par rapport au cercle. Dans cet exercice, on prend donc la droite (OM).

1. Faire une figure avec A et B les points d'intersection de (OM) avec le cercle.
2. On note R le rayon du cercle et d la distance IM. Exprimer MA et MB en fonction de R et d.
3. En déduire une expression du produit $MA \times MB$, la développer et la réduire.

On a montré l'énoncé suivant : la puissance d'un point intérieur d'un disque M au cercle est la différence entre le carré du rayon et le carré de la distance de M au centre de ce cercle.

Exercice 3 - Une dernière formule géométrique

Traçons enfin en partant du point M la droite (d) perpendiculaire à (OM). Elle coupe le cercle en deux points P et Q.

1. Montrer que la puissance de M par rapport au cercle est le carré de la distance MP.
2. On note a l'angle $\widehat{MOP}$. Montrer que la puissance de M par rapport au cercle s'écrit $R^2(\sin(a))^2$.

Exercice 4 - Définition des fonctions trigonométriques

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles en B et B'.

1. On suppose que $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.
   (a) Montrer que les triangles sont semblables.
   (b) En déduire que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.
   (c) De même, en déduire que $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$.
   (d) De même, en déduire que $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$.
2. On ne suppose plus $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

(a) Supposons $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Montrer que les triangles sont semblables. On montrerait de même qu'ils le sont lorsqu'un des deux autres rapports des questions 1.b et 1.c est le même.

(b) En déduire qu'alors, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

On a montré le résultat suivant : Étant donné un angle x, dans tout triangle rectangle en B avec un angle au sommet A de mesure x, les rapports $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{BC}{AB}$ sont déterminés, et chacun de ces rapports déterminent totalement l'angle x. On les appelle respectivement *cosinus*, *sinus*, et *tangente* de l'angle x. On les note plus brièvement $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

3. À partir du théorème de Pythagore, calculer $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.
4. Montrer la relation $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
5. Déduire des deux questions précédentes la relation $1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$.

Exercice 5 - Relations dans un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle ABC en B, on trace la hauteur issue de B. Elle croise l'hypoténuse $[AC]$ en un point H.

1. Montrer que les triangles AHB, BHC et ABC sont semblables.
2. En déduire les relations $AH = \frac{AB^2}{AC}$, $CH = \frac{CB^2}{AC}$ et $BH = \frac{AB.BC}{AC}$.