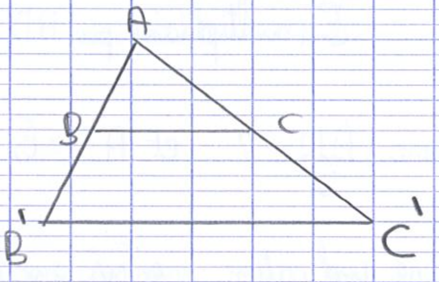
Chapitre : Théorème de Thalès

L'objectif de ce chapitre est de faire le lien, dans une figure comme celle-ci entre le parallélisme des côtés horizontaux et l'égalité de certains rapports de longueurs.



Le I donne l'égalité des rapports $\frac{AB}{AB'}$, $\frac{AC}{AC'}$ et $\frac{BC}{B'C'}$ quand on sait que $(BC)//(B'C')$.

Le II donne le résultat réciproque et montre que $(BC)//(B'C')$ quand les rapports sont égaux.

I) Énoncé direct

Théorème de Thalès

Si A, B, C, B' et C' sont tels que :
- A, B, et C sont alignés
- A, B' et C' sont alignés
- $(BC)//(B'C')$

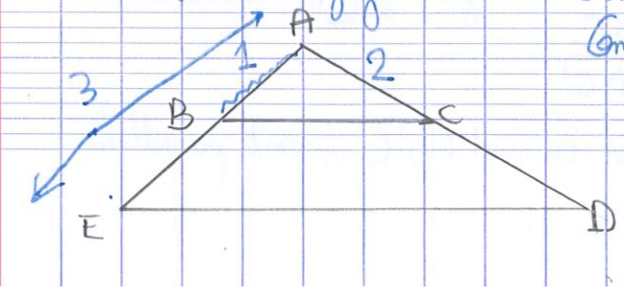
Alors $\boxed{\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}}$

Autrement dit, les longueurs de ABC sont proportionnelles à celles de AB'C' suivant le tableau

AB	AC	BC
AB'	AC'	B'C'

exemple d'utilisation :

Considérons la figure suivante où $(BC)//(DE)$: déterminer AD.



On sait que : A, B et E sont alignés,
- A, C et D sont alignés,
- $(BC)//(DE)$.

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$.

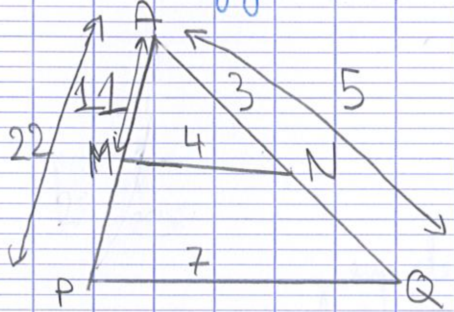
Donc $\frac{2}{AD} = \frac{1}{3}$.

En multipliant par AD les deux termes : $\frac{2}{\cancel{AD}} \times \cancel{AD} = \frac{1}{3} \times AD$.

Donc $\frac{AD}{3} = 2$ et $AD = 6$.

deuxième application : montrer que les droites ne sont pas parallèles.

On considère la figure suivante. Montrer que (MN) et (PQ) ne sont pas parallèles.



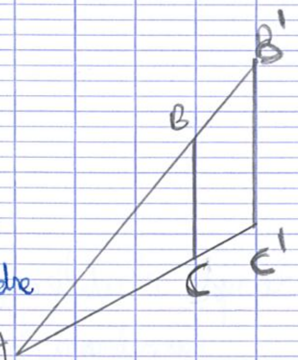
réponse : Les points A, M, P sont alignés, et les points A, N et Q sont alignés.

Cependant $\frac{AM}{AP} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AN}{AQ} = \frac{3}{5}$ ne sont pas égaux, donc les droites (MN) et (PQ) ne sont pas parallèles.

Remarques : • $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$ car $1 \times 5 \neq 2 \times 3$.

• On a raisonné par contraposition : si les droites étaient parallèles, on aurait $\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}$. Or, les rapports sont différents. Donc les droites ne sont pas parallèles.

II) Réciproque



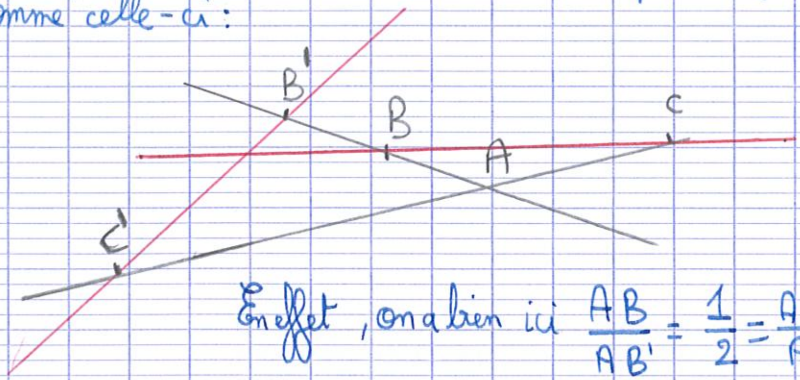
Théorème : Réciproque du théorème de Thalès.

Considérons la figure ci-contre où :

- A, B et B' sont alignés dans cet ordre
- A, C et C' sont alignés dans cet ordre
- $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$

Alors les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.

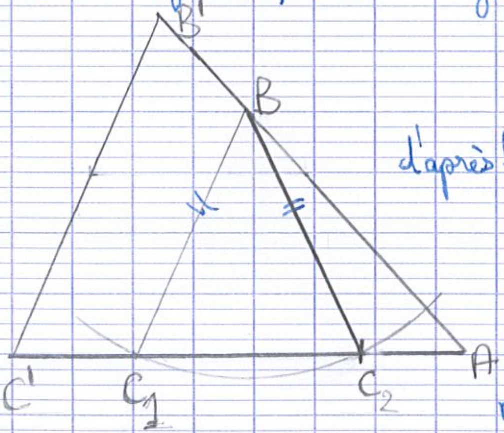
Remarques : L'ordre d'alignement est ici important, pour éviter une figure comme celle-ci :



En effet, on a bien ici $\frac{AB}{AB'} = \frac{1}{2} = \frac{AC}{AC'}$ mais les deux droites (BC) et (B'C') (en rouge) ne sont pas parallèles.

• On ne considère pas ici le rapport $\frac{BC}{B'C'}$ dans les hypothèses. Les deux autres suffisent à démontrer le parallélisme, ce qui entraîne ensuite que $\frac{BC}{B'C'}$ leur est aussi égal.

En revanche, si on supposait seulement $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$, on ne pourrait pas conclure que les droites sont parallèles, à cause de figures comme la suivante.

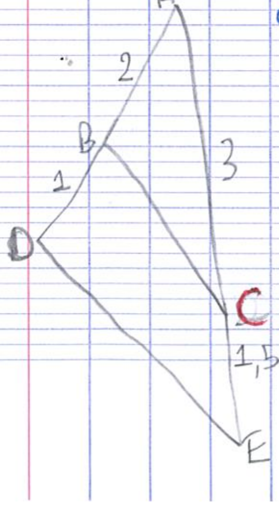


En effet, comme $(BC_1) // (B'C')$, on a d'après le théorème $\frac{BC_1}{B'C'} = \frac{AB}{AB'}$

Comme $BC_1 = BC_2$, on a donc aussi $\frac{BC_2}{B'C'} = \frac{AB}{AB'}$

mais (BC_2) n'est pas parallèle à $(B'C')$!

exercice type : À partir de la figure à main levée suivante montrer que (BC) et (DE) sont parallèles.



corrigé : Les points A, B et D sont alignés dans cet ordre, les points A, C et E sont alignés dans cet ordre, et on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{AC}{AE} = \frac{3}{3+1,5} = \frac{3}{4,5} = \frac{2\times1,5}{3\times1,5} = \frac{2}{3}$$

d'où $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès on a donc $(BC) // (DE)$.