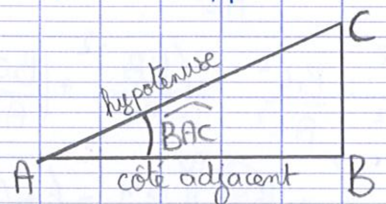
Chapitre : Trigonométrie : cosinus

I) Définition

Théorème Dans un triangle ABC rectangle en B, le rapport de longueurs $\frac{AB}{AC}$ ne dépend que de l'angle $\widehat{BAC}$.

Définition Ce rapport est appelé <u>cosinus</u> de l'angle $\widehat{BAC}$, et noté $\cos(\widehat{BAC})$.

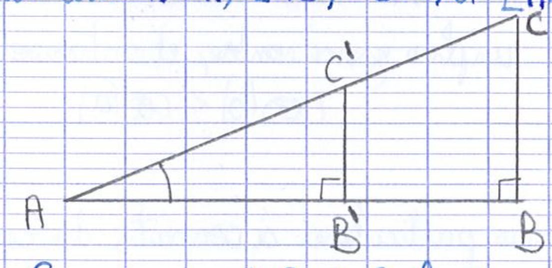


$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

<u>démonstration du théorème.</u>

On veut montrer que si ABC et A'B'C' sont deux triangles rectangles (en B ou B') avec $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, alors $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Quitte à déplacer les triangles on peut superposer ceux-ci sur leur angle en A pour avoir A' = A, [AB) = [A'B') et [AC) = [A'C') comme suit :



Comme (B'C') et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB), elles sont parallèles entre elles.

On a donc :
- A, B et C alignés ;
- A, B' et C' alignés ;
- (B'C')//(BC).

D'après le théorème de Thalès, on a donc $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

On tire de la première égalité, en multipliant par les dénominateurs :
$AB' \times AC = AB \times AC'$.

Puis en divisant par $AC \times AC'$: $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$. (Comme A' = A, c'est le résultat voulu.)

II) Propriétés

Théorème

1) Le cosinus est plus petit que 1.
2) Si on reprend les notations du I, $\left(\cos(\widehat{BAC})\right)^2+\left(\cos(\widehat{BCA})\right)^2=1$.
3) Plus l'angle est grand, plus son cosinus est petit.

démonstration : 1) et 2) On a d'après le théorème de Pythagore $AB^2+BC^2=AC^2$.

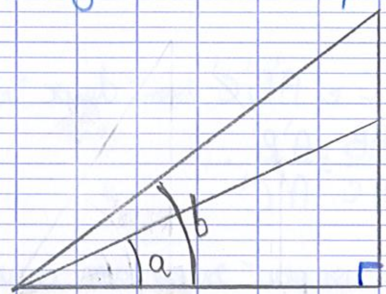
En divisant par AC^2, il vient : $\dfrac{AB^2+BC^2}{AC^2}=1$.

Donc $1=\dfrac{AB^2}{AC^2}+\dfrac{BC^2}{AC^2}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2+\left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2$, ce qui est la propriété 2.

Cette égalité entraîne que $\left(\cos(\widehat{BAC})\right)^2=1-\left(\cos(\widehat{BCA})\right)^2<1$.

Donc $\cos(\widehat{BAC})<1$.

3)



Sur la figure ci-contre, les angles a et b ont le même côté adjacent, mais l'hypoténuse du grand triangle est plus longue (*).
Quand on calcule le cosinus de b, on divise donc par un plus grand nombre, et on trouve un nombre plus petit :
$\cos(b)<\cos(a)$.

(*) on peut le justifier par le théorème de Pythagore.

Valeurs particulières

Il y a cinq valeurs particulières à connaître du cosinus :

angle (en °)	0	30	45	60	90
cosinus	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0

La première et la dernière valeur disent simplement que quand l'angle est presque fermé, le côté adjacent devient l'hypoténuse. On va surtout justifier les trois autres.