Chapitre : Théorème de Pythagore

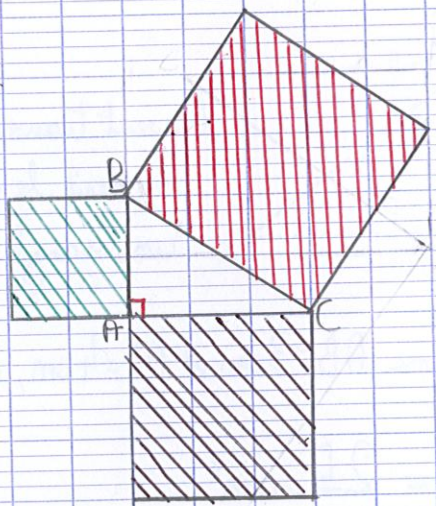
I) Énoncé direct et démonstration

L'énoncé connu habituellement sous le nom de théorème de Pythagore est le suivant :

Théorème

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
Autrement dit, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.

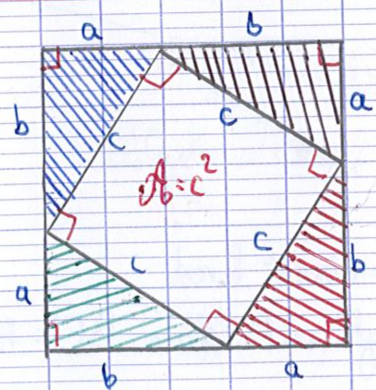
Figure :

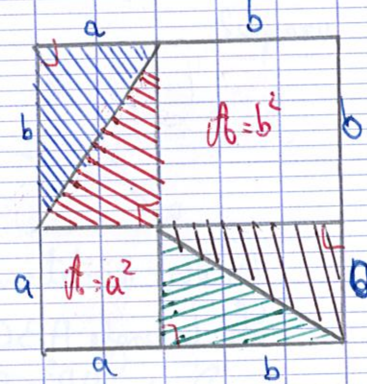


Le théorème revient donc à dire que l'aire rouge est la somme des aires vertes et noires.

démonstration : on utilise les deux figures suivantes avec $a = AB$, $b = AC$ et $c = BC$.

NB : à gauche, le trou est bien un carré car ses angles mesurent $180° - \hat{B} - \hat{C} = \hat{A} = 90°$.





Dans les deux cas, l'aire non coloriée est égale à celle du grand carré de côté a+b moins quatre fois celle du triangle rectangle.

En particulier, les deux surfaces non hachurées sont égales.

D'où : $c^2 = a^2 + b^2$, ce qui est le résultat voulu.

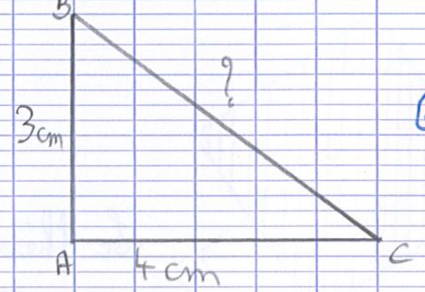
Remarques : • L'attribution du résultat à Pythagore est douteuse, il est vraisemblablement plus ancien, et on le retrouve un peu partout : Mesopotamie (≈ -1800), Inde (-600), Chine (quelque part entre -1000 et -250). Pythagore vit lui au VI^e siècle av. J.C...

• Ce résultat permet d'exprimer facilement la longueur manquante d'un triangle rectangle dont on connait deux longueurs :

1)- soit on cherche l'hypoténuse c et on calcule a^2+b^2 puis on cherche quel nombre donne ce résultat quand on le met au carré

2)- soit on cherche un des petits côtés et on calcule donc par exemple $a^2=c^2-b^2$ pour trouver a.

exemple 1 :



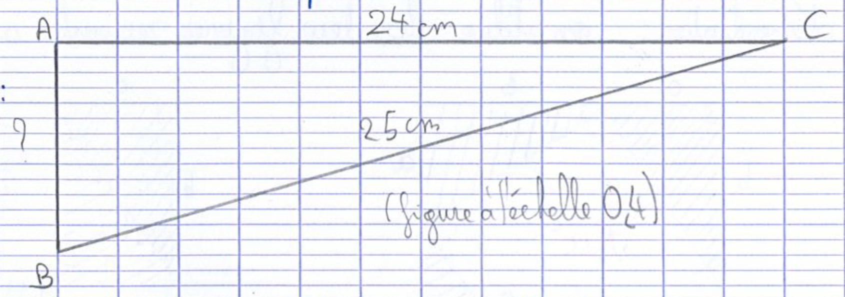
On veut trouver BC.
On écrit le théorème de Pythagore pour un triangle rectangle en A :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$. Comme AB = 3 cm et AC = 4 cm, on a donc $BC^2 = 3^2+4^2 \, cm^2$.

D'où $BC^2 = 9 + 16 = 25 \, cm^2$.

Or, on sait que $25 = 5\times5$, donc BC = 5 cm.

exemple 2 :



(figure à l'échelle 0,4)

On veut ici déterminer AB connaissant le reste.
Le triangle ABC est rectangle en A donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
D'où $AB^2 = BC^2 - AC^2$.
En remplaçant par les valeurs de l'énoncé : $AB^2 = (25)^2 - (24)^2 = 625 - 576 = 49 \, cm^2$
On sait que $49 = 7\times7 = 7^2$, donc AB = 7 cm.

II) Réciproque

Remarque : un théorème affirme que si certaines hypothèses sont vérifiées (ici : ABC est rectangle en A), une conclusion est vraie (ici : $AB^2+AC^2=BC^2$). La réciproque d'un théorème est obtenue en inversant les hypothèses et la conclusion.

⚠ Un théorème peut être vrai sans que sa réciproque le soit ! Par exemple, si un quadrilatère est un carré, il a quatre angles droits, mais on ne peut pas dire que si un quadrilatère a quatre angles droits, il est nécessairement un carré.

Ici, cependant, la réciproque du théorème de Pythagore est vraie :

Théorème :

> Si dans un triangle ABC, les longueurs des côtés vérifient $BC^2=AB^2+AC^2$, alors ABC est rectangle en A.

démonstration : considérons le triangle $A'B'C'$ rectangle en A' avec $A'B'=AB$ et $A'C'=AC$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $(B'C')^2=(A'B')^2+(A'C')^2$.

Comme $A'B'=AB$ et $A'C'=AC$, cela devient $(B'C')^2=AB^2+AC^2$.

Par hypothèse, $AB^2+AC^2=BC^2$, donc on a montré que $(B'C')^2=BC^2$.

Donc $B'C'=BC$.

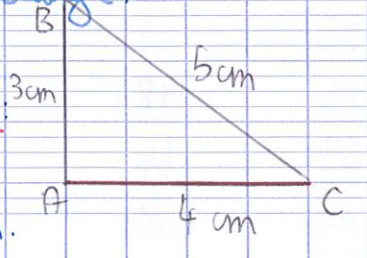
Les triangles ABC et $A'B'C'$ vérifient $\begin{cases} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ BC=B'C' \end{cases}$, donc ils sont égaux.

Leurs angles sont donc également égaux 2 à 2, donc en particulier : $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$.

Comme $A'B'C'$ est rectangle en A', on sait que $\widehat{B'A'C'}=90°$. Donc $\widehat{BAC}=90°$.

Donc ABC est rectangle en A.

Remarque : Le théorème de Pythagore permet de trouver une longueur manquante dans un triangle **que l'on** sait déjà être rectangle ; sa réciproque permet quant à elle de démontrer qu'un triangle dont on connait toutes les longueurs est un triangle rectangle.



exercice type : Montrer que ABC est rectangle en A.

corrigé : On calcule : $AB^2+AC^2=3^2+4^2=9+16=25\,cm^2$

d'autre part $BC^2=5^2=25\,cm^2$.

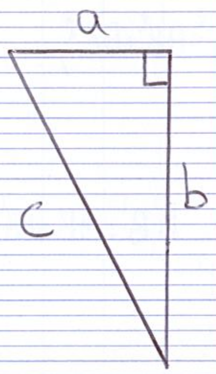
On a donc $BC^2=AB^2+AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

III) Questions voisines

On a vu qu'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 4 a une hypoténuse de longueur 5.

Pouvoir trouver un résultat entier exact est rare. On dit alors que (3,4,5) est un triplet pythagoricien.

En voici la liste des solutions avec toutes les longueurs inférieures à 100 :



a	b	c	a	b	c
3	4	5	15	20	25
5	12	13	15	36	39
6	8	10	16	63	65
7	24	25	8	15	17
9	40	41	16	30	34
10	24	26	18	80	82
11	60	61	20	21	29
12	16	20	20	48	52
12	35	37	21	72	75
13	84	85	21	28	35
14	48	50	24	45	51
25	60	65	24	32	40
27	36	45	24	70	74
9	12	15	28	96	100
30	40	50	28	45	53
30	72	78	32	60	68
33	56	65	35	84	91
36	77	85	40	42	58
36	48	60	42	56	70
45	60	75	48	55	73
51	68	85	48	64	80
39	80	89	54	72	90
57	76	85	60	80	100
65	72	97	60	63	87
33	44	55	18	24	30

39, 52, 65
40, 75, 85

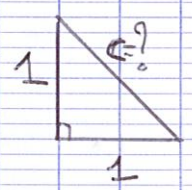
Il y a donc 52 solutions au total avec $a \leqslant b$, donc 104 en comptant les symétriques (avec $a \geqslant b$).

Si on choisit les longueurs a et b au hasard, entre 1 et 100, on a $100 \times 100 = 10\,000$ possibilités.

Il y a donc une probabilité de $\frac{104}{10\,000} = 1{,}04\%$ d'avoir une hypoténuse de longueur entière.

Bilan : si on choisit les longueurs d'un triangle rectangle au hasard, on a à peine une chance sur cent pour que l'hypoténuse tombe juste !

exemple le plus simple :



Si on applique le théorème de Pythagore à ce triangle rectangle isocèle, on trouve $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$.

Mais $c^2 = 2$ n'a pas de solution c entière....

Si on veut exprimer c, on calcule ainsi :

- Comme $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$, $1^2 < c^2 = 2 < 2^2$ et $1 < c < 2$.
- On calcule $(1{,}1)^2$, $(1{,}2)^2$, $(1{,}3)^2$, etc. jusque $(1{,}9)^2$, et on remarque que

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < c^2 = 2 < (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

donc $1{,}4 < c < 1{,}5$

- On calcule $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ et $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$,

donc $(1{,}41)^2 < c^2 = 2 < (1{,}42)^2$

donc $1{,}41 < c < 1{,}42$

- on peut continuer indéfiniment à encadrer c de plus en plus précisément.

C'est ce que fait la calculatrice quand on lui demande $\sqrt{2}$:

$$c = \sqrt{2} \simeq 1{,}4142135623730 95...$$

$\sqrt{2}$ est <u>par définition</u> le nombre tel que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Comme on le voit, il n'est pas entier, et on pourrait montrer qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction d'entiers.