

Chapitre 6 - Angles

1 Rappel sur les angles et les symétries

1.1 Définition des angles

Définition. On appelle *angle* la zone du plan délimitée par deux demi-droites de même origine. Cette origine est appelé *sommet* de l'angle. On donne un nom à un tel angle en utilisant celui des demi-droites qui le délimitent :

- L'angle entre les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ est noté \widehat{xOy} .
- L'angle entre les demi-droites $[Ox)$ et $[OB)$ est noté \widehat{xOB} .
- L'angle entre les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ est noté \widehat{AOB} .

Définition. La *mesure* d'un angle de sommet O est définie ainsi : on trace le cercle de centre O et de rayon 1. On rappelle que ce cercle a pour périmètre $2 \times \pi \approx 6,28\dots$. L'angle délimite un certain arc de ce cercle, dont on note la longueur ℓ . Alors la mesure de l'angle est définie comme le nombre $\frac{\ell}{2 \times \pi} \times 360^\circ$.

Remarque. La définition ci-dessus correspond exactement à ce que l'on obtient en mesurant les angles avec le rapporteur. Elle revient en fait à considérer comme vraies les quelques propriétés intuitives suivantes.

- Propriété.**
1. La mesure d'un angle faisant un tour complet est de 360° .
 2. La mesure d'un angle plat est de 180° .
 3. La mesure d'un angle droit est de 90° .
 4. La longueur ℓ d'un arc de cercle d'angle au centre a et de rayon R est proportionnelle à l'angle a . Autrement dit, on a

$$\ell = 2 \times \pi \times R \times \frac{a}{360^\circ}.$$

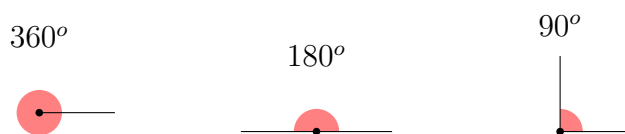


FIGURE 1 – Un angle plein, un angle plat, et un angle droit.

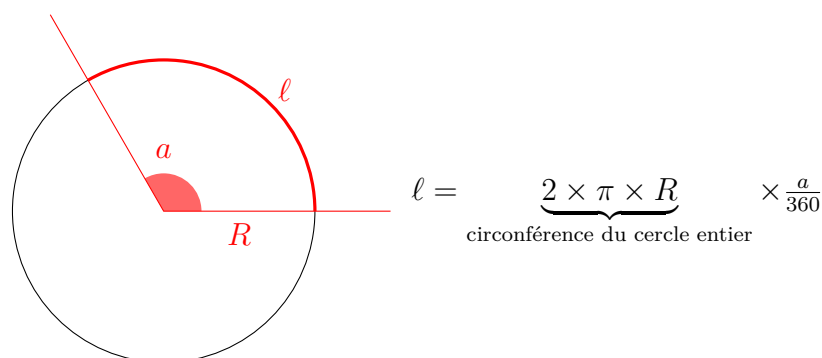


FIGURE 2 – Longueur d'un arc de cercle

Remarque. On admet aussi que la surface d'un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle, comme résumé sur la figure ci-dessous.

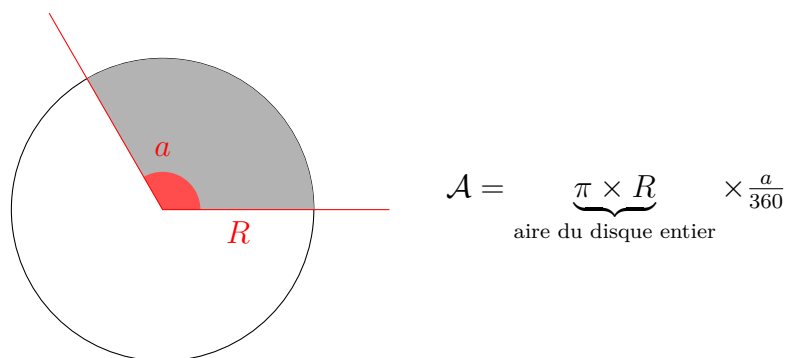


FIGURE 3 – Aire d'un secteur circulaire (en gris sur la figure)

1.2 Vocabulaire

Définition. On dit que deux angles sont *complémentaires* si la somme de leurs mesures est de 90° .

On dit que deux angles sont *supplémentaires* si la somme de leurs mesures est de 180° .

On dit que deux angles sont *adjacents* s'ils ont le même sommet, et sont de part et d'autre d'un côté commun. L'angle obtenu en mettant deux angles adjacents côte à côte et en oubliant leur côté commun s'appelle leur réunion.



FIGURE 4 – À gauche : deux angles complémentaires ; à droite : deux angles supplémentaires. Dans les deux exemples, les angles bleu et rouge sont adjacents.

Étant donné deux angles adjacents, on a la propriété immédiate suivante.

Propriété. *La mesure de la réunion de deux angles adjacents est la somme de leurs mesures respectives.*

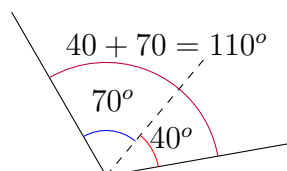


FIGURE 5 – Deux angles adjacents de 40° et 70° et leur réunion, qui mesure 110° .

1.3 Rappel sur les symétries

La propriété fondamentale des angles est celle énoncée au chapitre 2 sur les symétries, et que l'on rappelle ici sommairement.

Théorème 1 (Axiome de conservation des angles). *Les symétries axiales et centrales conservent les mesures des angles.*

De manière plus détaillée, celle-ci s'utilise ainsi :

Propriété. *Si A' , B' , et C' sont les symétriques respectifs des points A , B , et C par rapport à une même droite/à un même point, alors les angles \widehat{ABC} et $\widehat{A'B'C'}$ ont la même mesure.*

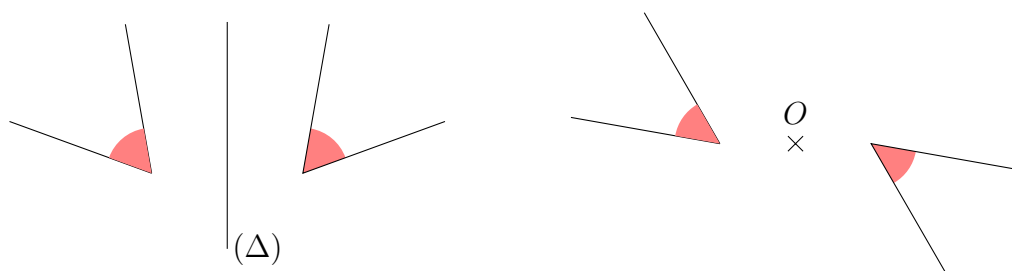


FIGURE 6 – Deux angles symétriques par rapport à une droite (à gauche) ou à un point (à droite) sont donc de même mesure.

2 Angles alternes-internes

Dans cette partie, on étudie une première application des propriétés de la symétrie centrale pour identifier des angles égaux ou caractériser des droites parallèles.

2.1 Définition

On se donne trois droites (d) , (d') et (Δ) , et on suppose que (Δ) rencontre (d) en un point A , et (d') en un point B , comme sur la figure suivante :

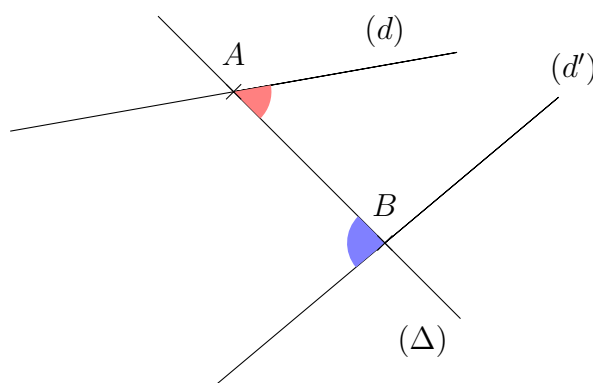


FIGURE 7 – Figure pour cette partie. Un exemple de paire d'angles alternes-internes est indiquée en rouge et bleu.

Définition. Sur une telle figure, il y a quatre angles de sommet A , et quatre angles de sommet B . On dit qu'un angle de sommet A et un angle de sommet B de cette figure sont *alternes-internes* s'ils vérifient les deux propriétés suivantes :

- Les deux angles sont de part et d'autre de (Δ) .
- Les deux angles sont tous les deux à l'intérieur de la zone située entre (d) et (d') .

Remarque. On aurait pu aussi s'intéresser aux angles *alternes-externes* qui sont définis comme ci-dessus mais en remplaçant la seconde propriété par « Les deux angles sont tous les deux à l'extérieur de la zone située entre (d) et (d') . ».

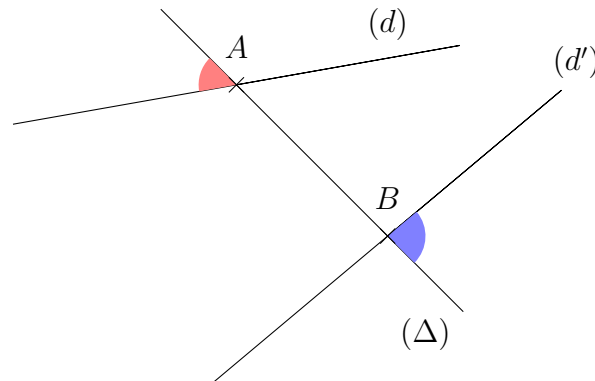


FIGURE 8 – Un exemple de paire d'angles alternes-externes est indiquée en rouge et bleu.

2.2 Propriété des angles alternes-internes

Dans la sous-partie précédente, nous avons défini les angles alternes-internes, ceux-ci sont reliés fortement à la notion de parallélisme. On a le théorème suivant.

Théorème 2. *On reprend les notations de la sous-partie précédente. Alors :*

1. *Si les deux droites (d) et (d') sont parallèles, alors deux angles alternes-internes ont la même mesure.*
2. *Si deux angles alternes-internes ont la même mesure, alors les droites (d) et (d') sont parallèles.*

Remarque. La propriété ci-dessus est également vraie avec les angles alternes-externes à la place des angles alternes-internes.

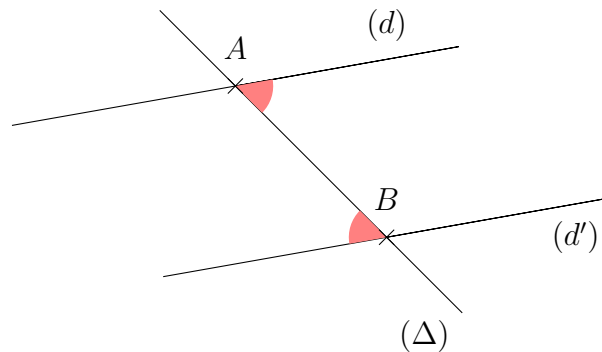


FIGURE 9 – Quand les droites (d) et (d') sont parallèles, les deux angles alternes-internes indiqués en rouge ont la même mesure. Réciproquement, si les deux angles rouges ont la même mesure, les droites sont parallèles.

2.3 Démonstration

Dans cette sous-partie, on démontre le résultat précédent à partir de propriétés déjà connues du cours (c'est le cœur de la géométrie). On va utiliser les propriétés suivantes :

1. Si I est le milieu de $[AB]$, A et B sont symétriques par rapport à I .
2. Le symétrique d'une droite (d) par rapport à un point est une droite parallèle à (d) .
3. Par un point, il ne passe qu'une seule parallèle à une droite donnée.

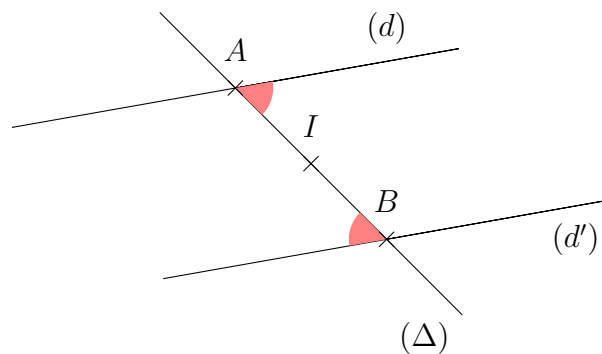


FIGURE 10 – Figure pour la démonstration. I est le milieu de $[AB]$, on montre que c'est un centre de symétrie de la figure.

Commençons par démontrer le premier point du théorème. On suppose donc les droites (d) et (d') parallèles. On note I le milieu de $[AB]$, ce qui, d'après les rappels

ci-dessus, entraîne que B est le symétrique de A par rapport à I . En utilisant maintenant le second rappel, on sait que le symétrique de (d) par rapport à I est une droite parallèle à (d) . Comme (d) passe par A , son symétrique passe par B (qui est le symétrique de A). Le symétrique de (d) par rapport à A est donc une droite parallèle à (d) qui passe par B . D'après le troisième rappel, il n'y a qu'une seule droite vérifiant cela, c'est la droite (d') . De plus, I appartient à (Δ) , donc (Δ) est son propre symétrique par rapport à I . À ce stade, on a démontré :

Le point I est un centre de symétrie de la figure formée par (d) , (d') et (Δ) .

On peut alors conclure que les deux angles alternes-internes en rouge sur la figure sont symétriques l'un de l'autre par rapport à I . Ils ont donc la même mesure. C'est le premier point du théorème.

Plus difficile à comprendre : Une fois le premier point du théorème établi, le second point en est une conséquence directe car la valeur de l'angle rouge en B détermine une unique droite (d') (et d'après le premier point du théorème, cette droite est la parallèle à (d) passant par B .)

3 Angles d'un triangle

3.1 Somme des angles d'un triangle

Dans cette partie, on énonce une propriété majeure des triangles, que l'on avait déjà constatée en 6e avec la plupart des triangles particuliers.

Théorème 3. *La somme des trois angles d'un triangle est égale à un angle plat (c'est-à-dire à 180°).*

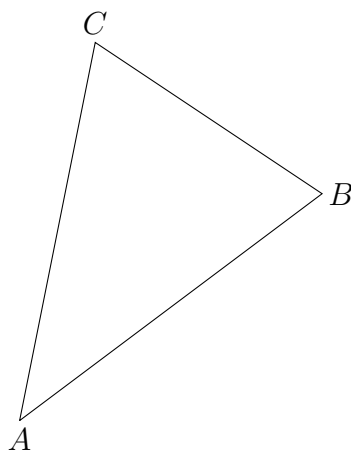


FIGURE 11 – On a $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$.

Énonçons un corollaire (conséquence immédiate) de ce résultat.

Corollaire. *Un triangle ne peut pas avoir plus d'un angle droit ou obtus.*¹

Démonstration. La somme de deux angles droits ou obtus dépasse déjà $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Donc la somme des trois angles du triangle serait alors plus grande que 180° , ce qui contredirait le résultat précédent. \square

3.2 Démonstration

On obtient la propriété de la somme des angles du triangle à partir de celle des angles alternes-internes.

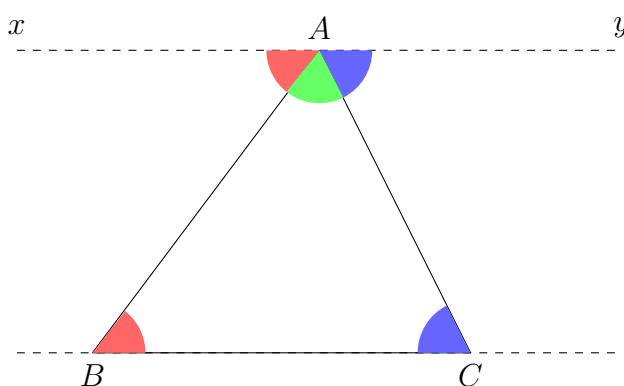


FIGURE 12 – Figure pour la démonstration : on montre d'abord l'égalité des deux angles rouges, puis celle des deux angles bleus. Les trois angles bleu, rouge, et vert font alors un angle plat.

On trace la droite (d) parallèle à (BC) passant par A , comme sur la figure. Les angles \widehat{xAB} et \widehat{ABC} sont alternes-internes et les droites (d) et (BC) sont parallèles, donc, d'après la propriété des angles alternes-internes, \widehat{xAB} et \widehat{ABC} ont la même mesure.

1. O cara piota mia che sì t'insusi
che, come veggion le terrene menti
non capere in triàngol due ottusi,
così vedi (...)

« Chère souche de mon lignage, qui vas si haut
que, de même que voient les esprits terrestres
que deux obtus ne tiennent pas dans un triangle,
de même tu vois (...) »

Dante, La Commedia, LXXXIV, v.13-15

De la même manière, les angles \widehat{yAC} et \widehat{ACB} sont alternes-internes (entre les droites parallèles (d) et (BC)) donc ont la même mesure.

Enfin, l'angle \widehat{xAB} , l'angle \widehat{BAC} et l'angle \widehat{yAC} forment un angle plat, donc on a

$$180^\circ = \widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{yAC},$$

et, comme $\widehat{xAB} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{yAC} = \widehat{ACB}$, on a bien

$$180^\circ = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB}.$$

3.3 Triangles particuliers

3.3.1 Triangle isocèle

Propriété. On considère un triangle ABC isocèle en B . Alors, les angles de la base ont la même mesure :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCA}.$$

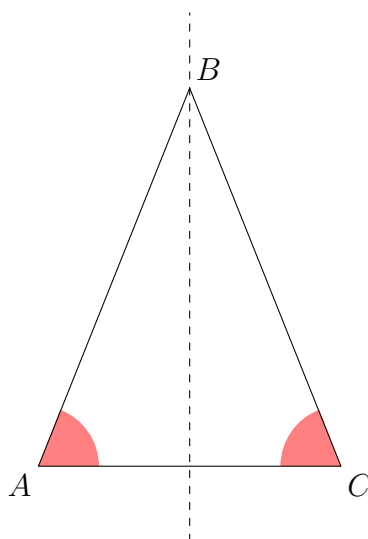


FIGURE 13 – Les deux angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.

Démonstration. On considère la droite (d) médiatrice du segment $[AC]$. Comme le point B est à la même distance de A et de C , il appartient à la médiatrice, donc (d) passe par le point B . Les points A et C sont symétriques l'un de l'autre par rapport à (d) , et le point B appartient à (d) donc est son propre symétrique. Le triangle ABC admet donc (d) comme axe de symétrie. Les deux angles de la base sont alors symétriques par rapport à (d) , donc ont la même mesure. \square

3.3.2 Triangle équilatéral

Propriété. *Les trois angles d'un triangle équilatéral mesurent 60° .*

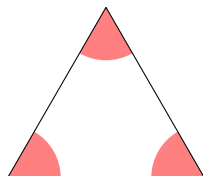


FIGURE 14 – Les trois angles de 60° d'un triangle équilatéral

Démonstration. Comme un triangle équilatéral est isocèle en chacun de ses sommets, on peut utiliser la propriété précédente, et les trois angles sont donc égaux. Comme la somme des trois angles d'un triangle est de 180° , et que ces trois angles sont égaux, chaque angle mesure $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. \square

3.3.3 Triangle rectangle

Propriété. *Dans un triangle ABC rectangle en B , les deux angles non-droits sont complémentaires (leur somme fait un angle droit).*

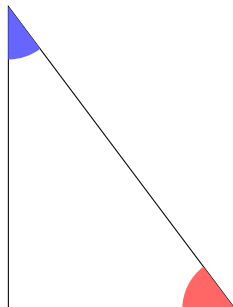
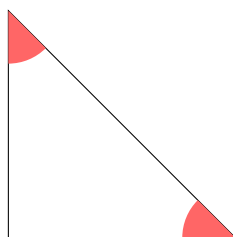


FIGURE 15 – Les angles bleu et rouge sont complémentaires.

Démonstration. La somme des trois angles d'un triangle fait 180° , et il y a un angle de 90° . Les deux angles restants ont donc pour somme $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. \square

3.3.4 Triangle rectangle isocèle

Propriété. *Dans un triangle ABC rectangle en B , les deux angles non-droits mesurent 45° .*

FIGURE 16 – Les deux angles rouges mesurent 45° .

Démonstration. Comme le triangle est rectangle, ces deux angles sont complémentaires, donc la somme de leurs mesures est 90° . Comme le triangle est isocèle, ces deux angles ont la même mesure. Ils mesurent donc chacun $90^\circ \div 2 = 45^\circ$. \square

4 Angles opposés par le sommet

On considère deux droites sécantes en un point O comme sur la figure suivante. On appelle angle opposés par le sommet, deux angles (parmi les quatre formés par les deux droites), qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point O .

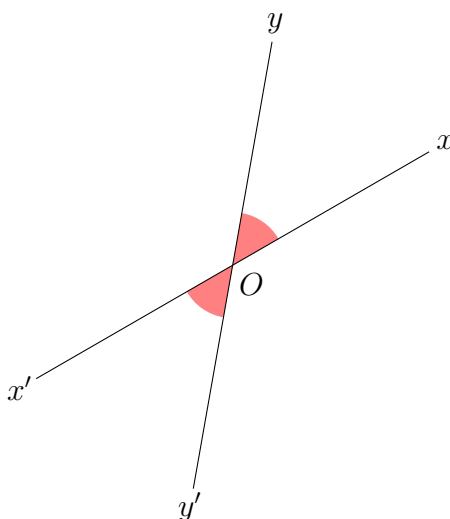


FIGURE 17 – Deux angles opposés par le sommet, donc de même mesure

Comme deux angles opposés par le sommet sont symétriques l'un de l'autre par rapport au sommet, on a la propriété suivante.

Propriété. *Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.*

5 Angle au centre d'un cercle

5.1 Énoncé

On donne ici une application intéressante de la somme des angles d'un triangle.

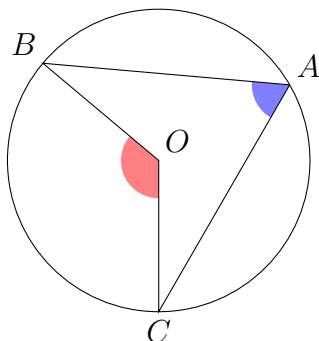


FIGURE 18 – L'angle rouge est égal au double de l'angle bleu

Théorème 4. Soient A, B et C trois points d'un même cercle de centre O . Alors l'angle au centre² \widehat{BOC} est deux fois plus grand que l'angle \widehat{BAC} :

$$\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}.$$

5.2 Démonstration

On reprend les notations de la figure précédente. Comme A, B et C sont sur le même cercle de centre O , ils sont à la même distance de O , donc les triangles AOB et AOC sont isocèles en O .

2. Attention : il faut choisir de mesurer l'angle \widehat{BOC} de telle sorte qu'il intercepte le même arc de cercle de B à C que l'angle \widehat{BAC} .

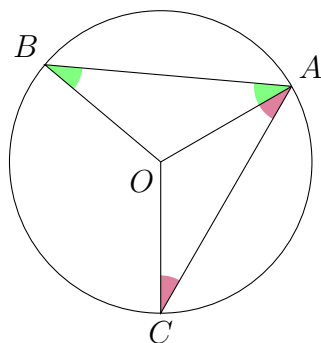


FIGURE 19 – Les deux triangles isocèles considérés dans la démonstration. Les angles de mesure b sont en vert, ceux de mesure c sont en violet.

Notons b la mesure de l'angle \widehat{OBA} et c la mesure de l'angle \widehat{OCA} .

- Comme AOB est isocèle en O , les deux angles à sa base sont égaux, donc $\widehat{OAB} = b$. Comme la somme des angles du triangle AOB est égale à 180° , on a $b + b + \widehat{AOB} = 180^\circ$, donc

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 2 \times b.$$

- De même, comme AOC est isocèle en O , les deux angles à sa base sont égaux, donc $\widehat{OAC} = c$. Comme la somme des angles du triangle AOC est égale à 180° , on a $c + c + \widehat{AOC} = 180^\circ$, donc

$$\widehat{AOC} = 180^\circ - 2 \times c.$$

- L'angle \widehat{BAC} est la somme des angles \widehat{BAO} et \widehat{OAC} , donc, d'après les deux points précédents, $\widehat{BAC} = b + c$.
- Enfin, la somme des angles \widehat{AOB} , \widehat{AOC} et \widehat{BOC} correspond à un tour complet, donc à 360° . On a donc

$$360^\circ = \underbrace{(180^\circ - 2 \times b)}_{\widehat{AOB}} + \underbrace{(180^\circ - 2 \times c)}_{\widehat{AOC}} + \widehat{BOC},$$

c'est-à-dire

$$360^\circ = 360^\circ + \widehat{BOC} - 2 \times b - 2 \times c.$$

On en déduit enfin

$$\widehat{BOC} = 2 \times b + 2 \times c = 2 \times \underbrace{(b + c)}_{\widehat{BAC}}.$$

5.3 Corollaires importants : lien entre cercles et triangles rectangles

On énonce deux corollaires (conséquences directes) du théorème précédent.³

Corollaire. *Étant donné un cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, n'importe quel point A du cercle forme avec B et C un triangle rectangle en A .*

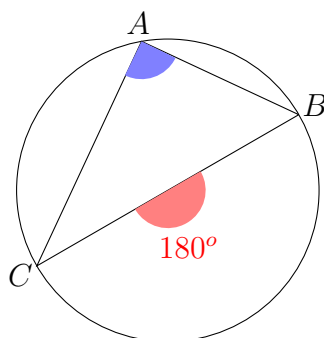


FIGURE 20 – L'angle rouge est plat, donc le bleu mesure la moitié d'un angle plat, donc est droit.

Démonstration. En effet, on est dans les mêmes conditions que dans le théorème précédent, mais avec B , O et C alignés, donc $\widehat{BOC} = 180^\circ$. On a alors $\widehat{BAC} = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$, ce qui montre bien que le triangle ABC est rectangle en A . \square

On peut même dire un tout petit peu plus.

Corollaire. *Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a son centre au milieu de l'hypoténuse.*

Par conséquent, le segment qui relie le milieu de l'hypoténuse à l'angle droit sépare un triangle rectangle en deux triangles isocèles.

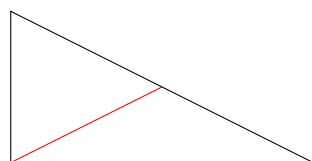


FIGURE 21 – Un triangle rectangle, et le segment qui le sépare en deux triangles isocèles.

3. « (ni) si du demi-cercle on peut faire un triangle qui n'a pas d'angle droit »/
 "o se del mezzo cerchio far si puote
 triàngol sì ch'un retto non avesse."
 (Dante, Commedia, LXXX, v101-102)

Démonstration. Notons O le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle ABC en A . Toujours d'après le théorème sur l'angle au centre, l'angle \widehat{BOC} est plat, donc O appartient à $[BC]$. De plus, comme B et C sont sur un cercle de centre O , $OB = OC$, donc O est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. \square

5.4 Un dernier résultat annexe : droite d'Euler et points particuliers du triangle rectangle

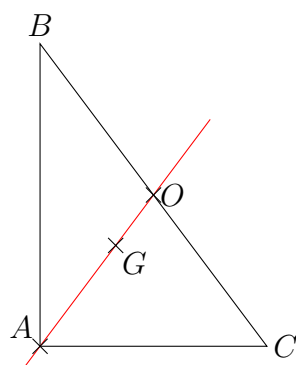


FIGURE 22 – L'orthocentre du triangle rectangle est en A , et le centre de son cercle circonscrit en O , milieu de l'hypoténuse. Le centre de gravité est donc bien sur la droite (AO) , médiane issue de A .

Étant donné un triangle ABC rectangle en A , le centre du cercle circonscrit est donc le milieu O de $[BC]$.

Les hauteurs issues de B et de C sont respectivement les droites (BA) et (CA) , donc l'orthocentre est en fait le sommet de l'angle droit A .

La droite (AO) passe donc par l'orthocentre du triangle et par le centre de son cercle circonscrit, et c'est une médiane du triangle (elle joint le sommet A au milieu de son côté opposé). Le centre de gravité est situé sur cette droite (il est à l'intersection des trois médianes). On retrouve ici le résultat évoqué (mais non démontré) en chapitre 3 : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont sur la même droite. Plus précisément, on a démontré le résultat suivant :

Propriété. *La droite d'Euler d'un triangle rectangle est la médiane issue de son angle droit.*