exercices de mathématiques

oraux x-ens

analyse 1

Serge Francinou
Hervé Gianella
Serge Nicolas

CASSINI

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
ORAUX X-ENS

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*
10. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 1*
11. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 1*
12. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*
13. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 2*
14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 3*
15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *L'essentiel en théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
19. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2002 et 2003 (MP)*
20. D. Perrin, *Mathématiques d'école*
21. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2004 (MP)*
22. P. Bourgade, *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*
23. V. Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome I

Deuxième édition, revue et augmentée

CASSINI

Serge Francinou, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Marcelin Berthelot.

Hervé Gianella, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Saint-Louis.

Serge Nicolas, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

ISBN 978-2-84225-135-2
(1^{ere} édition, 2003, ISBN 2-84225-032-X)

Table des matières

Introduction

Cet ouvrage est le premier tome d'analyse d'un recueil d'exercices de mathématiques destiné à la préparation des oraux des concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique. Il comportera six tomes, trois d'algèbre et trois d'analyse.

La vocation première des Écoles normales est de former des chercheurs ou des enseignants-chercheurs. Le concours d'entrée vise donc à détecter les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à la recherche. À l'oral, on jugera avant tout la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche. On ne sera pas surpris que les exercices posés aient un contenu mathématique riche, qu'ils soient très éloignés du simple exercice technique, d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif. Ils pourraient apparaître excessivement difficiles, si on perdait de vue le déroulement concret de l'épreuve. L'oral des ENS est un long dialogue (l'épreuve dure environ cinquante minutes, comme d'ailleurs à l'École polytechnique) entre le candidat et l'examinateur, qui tout au long de l'épreuve fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion du candidat et tester ses réactions. Il est d'ailleurs impossible de rendre pleinement compte dans un recueil d'exercices du caractère oral de l'épreuve.

L'École polytechnique, quant à elle, est plus généraliste. Les exercices posés au concours sont de facture plus classique et, en règle générale, l'examinateur intervient moins. C'est au candidat de montrer sa maîtrise du programme dans la résolution d'un exercice dont la difficulté est cependant très variable. Certains sont proches des exercices d'ENS. Les énoncés circulent d'ailleurs d'un concours à l'autre, ou peuvent même être repris d'exercices d'Olympiades.

Les énoncés qui figurent dans ce recueil ont été donnés entre 1995 et 2007. Ils sont extraits pour l'essentiel des listes publiées chaque année par la RMS (*Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* aux éditions Vuibert jusqu'en 2003 et désormais *Revue de la filière Mathématiques* aux éditions e.net) dont nous remercions les auteurs pour l'aide précieuse qu'ils apportent ainsi aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires. Il s'agit de versions communiquées par les étudiants, reflétant la compréhension que ceux-ci ont eue de l'exercice et le déroulement conjoncturel de leur oral, comme le montrent les variations d'une année à l'autre pour un même exercice. Nous n'avons pas hésité à les modifier, pour rectifier des erreurs, compléter un énoncé quand manifestement l'exercice s'est arrêté avant que le résultat que l'examinateur avait en vue ne soit atteint, ou ajouter des indications.

Nous avons choisi de laisser quelques énoncés « bruts », ceux pour lesquels nous estimons qu'une démarche naturelle (qui peut être longue et ardue) permet de conduire à la solution. Pour d'autres exercices, nous avons pris la liberté de rajouter des questions intermédiaires, qui auraient pu être celles posées par l'examinateur. Quitte à perdre en concision, nous avons tenu à rédiger les solutions les plus pédagogiques possible, essayant d'exposer clairement les idées et démarches des raisonnements sans pour autant escamoter les détails ou calculs qui peuvent paraître évidents. On évite autant que possible l'introduction d'une astuce ou d'un objet *ad hoc* permettant d'atteindre rapidement la solution. S'il n'y a pas moyen d'expliquer l'origine de cette astuce, c'est que l'exercice est peu intéressant et que l'étudiant en tirera peu de profit.

À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices ont été regroupés thématiquement, et à l'intérieur de chaque thème, souvent par ordre de difficulté croissante. Ainsi regroupés, ils apparaîtront plus accessibles, car plongés dans leur contexte mathématique, éclairés par d'autres exercices voisins. Les introductions historiques qui ouvrent chaque chapitre, outre leur intérêt propre, visent au même but. Enfin, nous avons agrémenté les énoncés de quelques remarques préliminaires. Sans faire de rappels de cours systématiques, nous avons énoncé, voire redémontré certains résultats : lemmes classiques, intervenant dans la résolution d'un grand nombre d'exercices, ou résultats au contraire à la lisière du programme, mais utiles, pour lesquels des éclaircissements étaient nécessaires. On trouvera aussi des remarques de synthèse ou des généralisations qui, nous l'espérons, pourront amener le candidat curieux à approfondir ses connaissances. Les quelques indications bibliographiques ont le même objectif.

Le lecteur ne tirera profit de ce livre d'exercices que s'il cherche des solutions personnelles avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est indispensable. En effet, les théorèmes du programme fournissent bon nombre de schémas de démonstration. Rappelons aussi quelques démarches générales qui peuvent faciliter l'appréhension des exercices difficiles :

▷ ne pas hésiter à faire des dessins pour visualiser les phénomènes : par exemple dans le domaine de la convexité, ou encore en représentant graphiquement l'évolution d'un système dynamique discret $u_{n+1} = f(u_n)\dots$;

▷ établir le résultat pour un sous-ensemble et l'étendre par un argument de densité (par exemple pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, de l'ensemble des fonctions polynomiales aux fonctions continues...) ;

▷ ne pas hésiter dans la phase exploratoire à faire des approximations qui peuvent sembler grossières, en vue de déterminer une limite ou un équivalent, à faire des interversions de sommations en vue de réaliser un calcul formel. Dans un second temps, il s'agira bien sûr de justifier les conjectures.

Au-delà des étudiants en classe préparatoire, ces ouvrages intéresseront aussi les candidats au CAPES et à l'Agrégation, qui y trouveront matière à réviser les principales notions du programme, ainsi que des exemples pour nourrir un développement pour leur oral.

Voyons maintenant plus précisément le contenu de ce tome 1 d'analyse. Les thèmes développés sont les nombres réels et complexes, les suites, les séries et enfin les fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité, convexité...). Hormis le troisième chapitre (qui porte sur les séries numériques), ces exercices s'adressent aussi aux élèves de première année. La matière des différents chapitres est assez classique, sauf peut-être pour le premier qui fait appel à des techniques délicates et des idées originales. Le second tome d'analyse portera sur les suites et séries de fonctions, notamment les séries entières et les séries de Fourier. Quant au troisième, il abordera la topologie, les équations différentielles et les fonctions de plusieurs variables.

Nous remercions André Bellaïche, René Cori, Rached Mneimné, Bernard Randé et Gilles Godefroy, ainsi que nos élèves, pour leur relecture approfondie de l'ouvrage et leurs nombreuses suggestions, tant sur le fond que sur la forme.

Outre les notations habituelles, indiquons que $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.

Enfin, si vous souhaitez nous contacter pour nous faire part de vos remarques, vous pouvez envoyer un courriel à l'adresse *fgn.cassini@free.fr*.

Chapitre 1

Nombres réels et complexes
Topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Si la définition rigoureuse du corps des réels est récente, la manipulation de nombres réels remonte à la plus haute Antiquité. Elle est présente dans toute mesure de grandeur et apparaît dès la mise en place d'un système de numération capable de noter les valeurs approchées des nombres réels (mathématiques babyloniennes). La mathématique grecque s'est intéressée essentiellement aux nombres entiers ; une fraction est moins considérée comme un nombre que comme un rapport, une relation entre deux entiers. On lui doit cependant quelques résultats essentiels pour les réels. La découverte de nombres irrationnels date de la fin du V^e^ *siècle avant notre ère. On attribue à l'école pythagoricienne la démonstration de l'irrationalité de* $\sqrt{2}$. *Dans le livre V des* Éléments *d'Euclide, on trouve l'exposé d'une théorie axiomatique des rapports de grandeurs, attribuée à Eudoxe. Y figurent, par exemple, des propositions qui équivalent à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à l'associativité de la multiplication. Notons aussi l'énoncé suivant qui correspond essentiellement à ce qu'on appelle l'axiome d'Archimède : deux grandeurs ont entre elles un rapport si on peut trouver un multiple de l'une supérieur à l'autre. Avec le déclin de la mathématique grecque, on retourne à une conception naïve des nombres réels. Chez Diophante, par exemple, un nombre est l'inconnue d'un problème algébrique. Dans les siècles suivants, les progrès apparaîtront surtout au niveau du calcul. À la fin du* XVI^e^ *siècle, Stevin contribue à la généralisation de l'usage des fractions décimales. Napier propose, en 1617, d'utiliser le point ou la virgule pour séparer la partie entière de la partie décimale. Il choisit finalement le point, qui devient d'usage commun en Angleterre. La réflexion sur les réels va évoluer avec le développement de l'analyse au* XIX^e^ *: difficultés liées aux problèmes de limites ; progrès dans la connaissance des irrationnels et des nombres transcendants... Entre 1860 et 1880, Weierstrass, Dedekind, Méray et Cantor proposent des constructions de* $\mathbb{R}$. *Celle de Dedekind par les «coupures» de* $\mathbb{Q}$ *met au premier plan l'axiome de la borne supérieure, alors que celle de Méray et de Cantor qui fait intervenir des classes d'équivalence de suites de Cauchy fournit directement le caractère complet de* $\mathbb{R}$. *C'est à partir de ses recherches sur les réels que Cantor s'intéresse aux problèmes d'équipotence. Dans ce cadre, il énonce presque incidemment les principaux résultats* *élémentaires sur la topologie de la droite, la structure des ensembles ouverts et fermés... Borel et Baire prolongent l'étude des sous-ensembles de $\mathbb{R}$: le premier définit les ensembles de mesure nulle et les ensembles appelés de nos jours* boréliens, *et montre qu'on peut définir sur ces derniers une mesure qui prolonge la longueur des intervalles ; le second définit les ensembles de première catégorie (on dit aussi* maigres*), c'est-à-dire les ensembles qu'on peut recouvrir par une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide et montre qu'un tel ensemble est d'intérieur vide (c'est le théorème de Baire que le lecteur trouvera en exercice dans le troisième tome d'analyse). Un espace topologique où cette propriété est vraie est aujourd'hui appelé un espace de Baire.*

Nous terminerons cette introduction par quelques mots sur l'histoire des nombres complexes. Au XVI^e *siècle, Cardan et Tartaglia donnent une solution de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ sous la forme*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Bombelli (1526-1573) a alors l'idée d'utiliser cette formule dans le cas où $4p^3 + 27q^2 < 0$. Il étudie notamment l'exemple de $x^3 - 15x - 4 = 0$ et obtient

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-21}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-21}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

après quelques manipulations algébriques sur des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$ que le lecteur pourra prendre plaisir à retrouver. Or, il est aisé de vérifier que 4 est bien solution de l'équation. Ainsi, la formule de Cardan permet de trouver des racines réelles par l'intermédiaire d'opérations effectuées sur des nombres impossibles, ou «imaginaires» (terme introduit par Descartes en 1637). Ces constatations empiriques ont conduit à un usage de plus en plus fréquent des nombres imaginaires et ce dès le début du XVII^e *siècle. Le symbole i utilisé de nos jours est introduit par Euler (1707-1783) en 1777. Il introduit également l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques usuelles. C'est Moivre (1667-1754) qui met en évidence le lien entre les racines n-ièmes d'un nombre complexe et le partage d'un arc de cercle en n parties égales. Cependant il faut encore attendre quelques années avant que ne se développe véritablement l'usage de la représentation géométrique des nombres complexes. Gauss (1777-1855) avait sans doute cette vision géométrique de $\mathbb{C}$ mais il ne publia rien sur ce point avant 1831. Ce sont deux mathématiciens amateurs qui les premiers publièrent des mémoires sur ce sujet. Le premier est dû au danois Caspar Wessel (1797), mais il tomba rapidement dans l'oubli et ne fut redécouvert qu'un siècle plus* *tard. Le second date de 1806 et est dû au mathématicien suisse Argand. Ses travaux faillirent aussi passer inaperçus (l'article ne fut diffusé qu'en 1813) et furent accueillis très froidement par les grands de l'époque. Ce n'est qu'à partir de 1831, avec Gauss, et surtout en 1847 avec Cauchy, que ses idées furent adoptées, ouvrant la porte à de multiples développements.*

Les trois premiers exercices sont issus d'un même oral et concernent le développement décimal d'un nombre réel. Dans le cursus scolaire, c'est très vite qu'on apprend à se représenter un réel par son développement décimal, par exemple $\pi = 3{,}14159265...$ *Cet objet n'est toutefois pas aussi simple qu'il y paraît, puisque la notation* $0{,}a_1a_2a_3...$ *représente en réalité une somme de série. De plus, on dit rarement dans le secondaire que ce développement n'est pas nécessairement unique : un nombre décimal (non nul) en a deux. Par exemple :* $9/25 = 0{,}36 = 0{,}3599999...$ *Le premier sera qualifié de propre et le second d'impropre. L'énoncé suivant, qui démontre l'existence et l'unicité du développement propre, est une question de cours.*

1.1. Développement décimal propre d'un réel

Démontrer que tout réel x de $[0,1[$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $[\![0,9]\!]$ non stationnaire à 9 (c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, il existe $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $a_n \neq 9$).

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Le résultat, énoncé ici en base 10, est en fait valable pour toute base $b \geqslant 2$. Nous traiterons donc le cas général. Nous noterons $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $[\![0, b-1]\!]$ non stationnaires à $b-1$. Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ (on se limite à ces réels, car tout réel est somme d'un entier, sa partie entière, et d'un réel de $[0,1[$).

- *Analyse.* Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathcal{T}$ répondant au problème,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} + \cdots$$

On sait bien, en base 10, comment récupérer le premier chiffre après la virgule a_1 : il suffit de multiplier par 10, ce qui a pour effet de décaler la virgule d'un cran vers la droite, puis de prendre la partie entière. Effectivement, en multipliant l'égalité ci-dessus par b il vient,

$$bx = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{b^{n-1}} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n}.$$

La somme qui apparaît est un réel de $[0,1[$, puisque

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{b-1}{b} \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = 1,$$

la seconde inégalité étant stricte puisque il existe au moins un entier $n > 1$ tel que $a_n < b-1$. On a donc nécessairement $a_1 = \mathrm{E}(bx)$. On a alors $bx - a_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n}$, de sorte que par le même raisonnement, $a_2 = \mathrm{E}(bx - a_1)$. Plus généralement, si les a_k sont connus jusqu'au rang $p-1$ avec $p \geqslant 2$, on a

$$b^p x = a_1 b^{p-1} + a_2 b^{p-2} + \cdots + a_{p-1} b + a_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^{n-p}},$$

soit

$$a_p = b^p x - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+p}}{b^n}}_{\in [0,1[}.$$

Par conséquent $\boxed{a_p = \mathrm{E}\left(xb^p - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b\right)}$. Si elle existe, la suite (a_n) est donc déterminée de manière unique.

• *Synthèse.* Le point précédent nous a fourni l'algorithme qui permet de définir les entiers a_p par récurrence. Il n'y a plus qu'à vérifier que cette suite convient. On considère donc la suite $(a_p)_{p \geqslant 1}$ définie par $a_1 = \mathrm{E}(xb)$ et $a_p = \mathrm{E}\left(xb^p - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b\right)$ pour tout $p \geqslant 2$.
Nous allons démontrer successivement que :

- (i) $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$;
- (ii) pour tout $p \geqslant 1$, $0 \leqslant a_p \leqslant b-1$;
- (iii) la suite (a_p) n'est pas stationnaire à $b-1$.

(i) Pour $p \geqslant 2$, on a par définition de la partie entière,

$$a_p \leqslant xb^p - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b < a_p + 1$$

ce qui donne en divisant par b^p,

$$\frac{a_p}{b^p} \leqslant x - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{b^n} < \frac{a_p+1}{b^p}, \quad \text{ou encore } \; 0 \leqslant x - \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{b^n} < \frac{1}{b^p} \;\; (*).$$

Comme $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{b^p} = 0$, on en déduit que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}\cdot$

(*ii*) Comme $x \in [0,1[$, $xb \in [0,b[$ et $0 \leqslant a_1 \leqslant b-1$. Soit $p \geqslant 2$. D'après (∗) écrite pour $p-1$ au lieu de p, on a

$$0 \leqslant x - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{b^n} < \frac{1}{b^{p-1}} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant xb^p - \sum_{n=1}^{p-1} a_n b^{p-n} < b,$$

après multiplication par b^p. Comme l'entier a_p est la partie entière de $xb^p - \sum_{n=1}^{p-1} a_n b^{p-n}$, on a bien $0 \leqslant a_p \leqslant b-1$.

(*iii*) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\mathrm{N} \geqslant 3$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $a_n = b-1$. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{b-1}{b^n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^{\mathrm{N}}} \frac{b-1}{1-1/b} \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^{\mathrm{N}-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi $x - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} = \frac{1}{b^{\mathrm{N}-1}}$, ce qui contredit l'inégalité (∗) pour $p = \mathrm{N}-1$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0,1[$, il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{T}$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} \cdot \quad \triangleleft$$

On écrit alors $x = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ et on parle du développement propre de x en base b. Pour $b = 10$ on parle du développement décimal, pour $b = 2$ du développement dyadique et pour $b = 3$ du développement triadique. Pour un réel positif quelconque, on rajoute sa partie entière décomposée en base b à gauche de la virgule. Enfin pour un réel négatif, on met un signe moins devant le développement de sa valeur absolue.

Il est naturel de se demander ce qui se passe si on autorise les suites stationnaires à 9, ou à $b-1$ dans le cas général. Un calcul aisé montre que $0,a_1a_2\ldots a_p9999\ldots$ avec $a_p < 9$ est en fait égal à $0,a_1\ldots a_{p-1}a'_p$ avec $a'_p = a_p + 1$ (pour $0,9999\ldots$ on obtient 1). C'est un nombre décimal, i.e. *un rationnel de la forme $\frac{a}{10^k}$, $a \in \mathbb{Z}$. Un nombre décimal (non nul) admet donc exactement deux développements : son développement propre, qui est fini, et un unique développement stationnaire à 9, qualifié d'impropre. Dans le cas d'une base b quelconque les rationnels de la forme $\frac{a}{b^k}$, qui admettent deux développements, sont parfois appelés rationnels b-adiques.*

L'exercice suivant est extrait du même oral que le précédent. Un nombre rationnel x est déterminé par un nombre fini d'informations, puisque si on l'écrit sous la forme a/b, les entiers a et b sont par exemple déterminés par leurs chiffres en base 10 qui sont en nombre fini. Le développement décimal de x va également être déterminé par un nombre fini de données : il est périodique.

1.2. Caractérisation des rationnels

> Soit $x \in [0,1[$. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

Nous allons encore démontrer le résultat en base $b \geqslant 2$ quelconque. Nous noterons $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $[\![0, b-1]\!]$ non stationnaires à $b-1$. Nous savons qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{T}$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} = 0{,}a_1a_2a_3...$

• Supposons tout d'abord le développement périodique à partir d'un certain rang : il existe $\mathrm{N} \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$ tels que pour tout $n > \mathrm{N}$, $a_{n+d} = a_n$. On peut écrire

$$x = 0{,}a_1a_2\dots a_{\mathrm{N}}\underbrace{a_{\mathrm{N}+1}\dots a_{\mathrm{N}+d}}_{\text{période}}\underbrace{a_{\mathrm{N}+1}\dots a_{\mathrm{N}+d}}\cdots$$

On va simplement calculer la somme de la série définissant x en regroupant les termes par paquets. On convient ici que $\overline{a_{\mathrm{N}+1}a_{\mathrm{N}+2}\cdots a_{\mathrm{N}+d}}$ désigne l'entier $a_{\mathrm{N}+d} + a_{\mathrm{N}+d-1}b + \cdots + a_{\mathrm{N}+1}b^{d-1}$ (c'est simplement l'écriture en base b de cet entier). On a alors

$$x = \frac{\overline{a_1\dots a_{\mathrm{N}}}}{b^{\mathrm{N}}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{a_{\mathrm{N}+1}a_{\mathrm{N}+2}\cdots a_{\mathrm{N}+d}}}{b^{\mathrm{N}+kd}}.$$

La somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{kd}}$ vaut $\frac{1}{b^d - 1}$ et on obtient donc

$$x = \frac{\overline{a_1\dots a_{\mathrm{N}}}}{b^{\mathrm{N}}} + \frac{\overline{a_{\mathrm{N}+1}a_{\mathrm{N}+2}\cdots a_{\mathrm{N}+d}}}{b^{\mathrm{N}}(b^d - 1)},$$

qui est bien rationnel. Par exemple, en base $b = 10$, le rationnel dont le développement est 0,456123123123... est $\frac{456}{10^3} + \frac{123}{10^3 \cdot 999}$.

• Inversement, supposons que x est rationnel et non nul (pour $x = 0$ le résultat est clair). Écrivons $x = \frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux. On va simplement appliquer l'algorithme donné dans l'exercice précédent, qui n'est rien d'autre que l'algorithme de division que l'on apprend dans les petites classes : tout le monde sait trouver le développement décimal de $\frac{9}{14}$. On multiplie 9 par 10 et on prend la partie entière qui vaut 6. C'est la première décimale après la virgule. On a alors $\frac{90}{14} - 6 = \frac{6}{14}$. On remultiplie par 10 et on obtient la deuxième décimale. C'est un 4. On continue ainsi et forcément, les numérateurs des fractions obtenues étant compris entre 1 et 13 on finit par tomber sur une fraction déjà obtenue. La suite devient périodique à partir de ce moment. Pour l'exemple de $\frac{9}{14}$ on obtient

$$\frac{9}{14} = 0{,}6\underbrace{428571}_{\text{période}}428571\ldots$$

Dans le cas général, c'est pareil. La première décimale a_1 est la partie entière de $\frac{bp}{q}$, c'est-à-dire le quotient dans la division euclidienne de bp par q. Pour la seconde décimale on recommence alors avec $\frac{r}{q}$ où r est le reste de la division euclidienne de bp par q. Les restes modulo q étant compris entre 0 et $q-1$ la suite devient périodique à partir d'un certain rang. $\triangleleft$

Le résultat de cet exercice fut établi par Wallis en 1693. Un problème intéressant est de déterminer la période. Nous invitons le lecteur à préciser les faits suivants. Dans le cas d'un rationnel b-adique (d'un décimal en base 10*) le développement va être fini : dans l'algorithme ci-dessus on va obtenir un reste nul et à partir de ce moment toutes les décimales seront nulles. En fait dans ce cas, le développement est immédiatement donné par l'écriture en base b du numérateur. Par exemple, pour pour* $x = \frac{17}{25}$ *et* $b = 10$*, on écrit* $x = \frac{17 \cdot 4}{10^2} = \frac{68}{10^2} = 0,68$. *Supposons maintenant que le dénominateur* q *de* x *est premier avec la base* b*. On va chercher le plus petit multiple de* q *de la forme* $b^d - 1$*, c'est-à-dire le plus petit exposant* d *telle que* $b^d \equiv 1\ [q]$*. Une telle puissance existe car la classe de* b *est inversible dans l'anneau* $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$*. L'entier* d *recherché est l'ordre de cette classe dans le groupe des inversibles de* $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$*. Par exemple si* $b = 10$ *et* $q = 7$*, on voit que* $\bar{3}$ *est d'ordre* 6 *dans* $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ *(c'est un générateur). La période des fractions* $\frac{p}{7}$, $1 \leqslant p \leqslant 6$ *est égale à* 6*. Par exemple,*

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{7 \cdot 142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{142857}{10^6 - 1} = 0{,}142857142857142857\ldots$$

Dans ce cas le développement du rationnel $\frac{p}{q}$ *est périodique dès le début. Supposons maintenant que le pgcd de* q *et* b *n'est pas égal à* 1. *On peut écrire* x *sous la forme* $\frac{p'}{b^{\mathrm{N}}q'}$ *avec* $\operatorname{pgcd}(b, q') = 1$ *et* b *ne divisant par* p'. *On fait la division euclidienne de* p' *par* q' *pour se ramener à* $x = \frac{a}{b^{\mathrm{N}}} + \frac{r}{b^{\mathrm{N}}q'}$ *et on est ramené au cas précédent. Par exemple, si* $x = \frac{39}{280}$ *avec toujours* $b = 10$, *on écrit*

$$\frac{39}{280} = \frac{39}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{39 \cdot 25}{10^3 \cdot 7} = \frac{975}{10^3 \cdot 7} = \frac{139}{10^3} + \frac{2}{10^3 \cdot 7}.$$

Le décimal $\frac{139}{10^3}$ *donne les trois premiers chiffres après la virgule et le développement devient périodique à partir du rang* 4 :

$$x = \frac{139}{10^3} + \frac{285714}{10^3 \cdot (10^6 - 1)} = 0{,}139285714285714...$$

L'énoncé suivant propose une première application des développements décimaux. On y utilise le procédé diagonal de Cantor pour démontrer que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

1.3. Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{N}^* \to [0, 1[$. Pour chaque $k \geqslant 1$, on appelle u_k la k-ième décimale dans le développement décimal propre de $f(k)$ et on pose $v_k = 0$ si $u_k = 1$ et $v_k = 1$ sinon. Montrer que $y = 0{,}v_1v_2...v_n...$ n'a pas d'antécédent par f. Conclusion ?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Écrivons l'un sous l'autre les développements des réels $f(n)$, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{array}{l} f(1) = 0,\ u_1 \cdots \\ f(2) = 0,\ \bullet\ \ u_2 \cdots \\ f(3) = 0,\ \bullet\ \ \bullet\ \ u_3 \cdots \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \ddots \\ f(k) = 0,\ \bullet\ \cdots\cdots\ \bullet\ \ u_k \cdots \end{array}$$

Le réel $y = 0{,}v_1v_2...v_n...$ est bien défini par son développement décimal propre car pour tout k, $v_k \neq 9$ (voir l'exercice 1.1). Par unicité du développement décimal propre on a $y \neq f(k)$ pour tout entier k

puisque la k-ième décimale de y est v_k et que $v_k \neq u_k$. Donc y n'a pas d'antécédent par f. Ainsi il n'existe aucune surjection de $\mathbb{N}$ sur $[0, 1[$ et, *a fortiori*, sur $\mathbb{R}$. On conclut que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. $\triangleleft$

Un théorème général de Cantor assure qu'un ensemble E *quelconque n'est jamais équipotent à* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. *En effet, supposons qu'il existe une surjection* $f : \mathrm{E} \to \mathcal{P}(\mathrm{E})$ *et considérons la partie* $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E}, x \notin f(x)\}$. *Soit* a *l'antécédent de* A *par* f. *Pour tout* x *de* E, *on a* $x \in \mathrm{A}$ *si et seulement si* $x \notin f(x)$, *autrement dit* $x \in f(a)$ *si et seulement si* $x \notin f(x)$. *Or cela donne une contradiction si on prend* $x = a$. *C'est sur le même type de raisonnement qu'est basé le paradoxe de Russell : dans le cadre axiomatique de la théorie des ensembles, supposer l'existence de l'ensemble de tous les ensembles conduit à une contradiction. En particulier, l'ensemble* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *n'est pas dénombrable (on peut démontrer qu'il est en fait équipotent à* $\mathbb{R}$*). L'exercice suivant demande de construire une injection particulière de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. *Il peut être résolu à l'aide des développements décimaux.*

1.4. Injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

> Construire une injection $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout x, $\psi(x)$ est infini, et pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, $\psi(x) \cap \psi(y)$ est fini.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Observons pour commencer qu'une application $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\psi(x)$ est infini pour tout x et $\psi(x) \cap \psi(y)$ fini pour $x \neq y$ est nécessairement injective.

Pour définir ψ on va utiliser les développements décimaux, l'idée étant d'associer à un réel x, la suite des entiers qu'on lit après la virgule. Par exemple, à $\pi = 3{,}1415926...$ on a envie d'associer l'ensemble $\{1, 14, 141, 1415, 14159, ...\}$. Évidemment, deux réels qui ont la même partie fractionnaire donneront le même ensemble. On va donc se limiter à l'intervalle $]0, 1[$, ce qui ne pose pas de problème puisqu'il est équipotent à $\mathbb{R}$ (il est facile de donner une bijection explicite entre $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$).

À tout réel x de l'intervalle $]0, 1[$ on associe donc le sous-ensemble $\psi(x) = \{\mathrm{E}(10^n x),\ n \geqslant 1\}$. Comme la suite $(\mathrm{E}(10^n x))_{n \geqslant 1}$ tend vers l'infini, $\psi(x)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il y a toutefois un problème car la seconde condition n'est pas vérifiée. En effet, si $x = 0{,}0a_1a_2... \in]0, 1[$ le réel $\dfrac{x}{10} = 0{,}00a_1a_2...$a la même image par ψ que x. Une manière simple d'éviter ce problème est de se limiter à l'intervalle $[1/10, 1[$ (qui est toujours équipotent à $\mathbb{R}$), car tous les réels de cet intervalle ont leur premier chiffre après la virgule non nul. La restriction de l'application ψ à cet intervalle va alors vérifier la seconde condition par unicité du développement décimal propre (cf. exercice 1.1). En effet, si $x \in [1/10, 1[$, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{E}(10^n x)$ est l'unique entier de $\psi(x)$ qui s'écrit avec n chiffres (en base 10). Soit x et y deux réels de $[1/10, 1[$ tels que $\psi(x) \cap \psi(y)$ soit infini. On peut donc trouver $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\mathrm{E}(10^{\varphi(n)}x) = \mathrm{E}(10^{\varphi(n)}y)$ pour tout n. On en déduit que

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{E}(10^{\varphi(n)}x)}{10^{\varphi(n)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{E}(10^{\varphi(n)}y)}{10^{\varphi(n)}} = y.$$

L'application ψ ainsi construite répond donc au problème posé. ◁

On peut observer que si $\psi(x) \cap \psi(y)$ est infini, on a nécessairement $\psi(x) = \psi(y)$. En effet, si $\mathrm{E}(10^n x) = \mathrm{E}(10^n y)$ pour une valeur de n on a aussi $\mathrm{E}(10^p x) = \mathrm{E}(10^p y)$ pour tout $p \leqslant n$ puisque $\mathrm{E}(10^p x)$ est obtenu en gardant les p chiffres les plus à gauche de $\mathrm{E}(10^n x)$.

Dans l'exercice suivant nous proposons plusieurs solutions dont l'une utilise les développements dyadiques.

1.5. Calcul d'une somme

Soit $x > 0$ un réel. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right)$, où E désigne la partie entière.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

• *Première solution.* Notons que la somme est en réalité finie, puisque la quantité dont on prend la partie entière tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers l'infini. Toutes ces puissances de 2 invitent assez naturellement à considérer le développement dyadique (propre) de x,

$$x = a_p 2^p + a_{p-1} 2^{p-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_{-i}}{2^i},$$

où les a_i sont dans $\{0, 1\}$. Le réel x est alors dans l'intervalle $]0, 2^{p+1}[$. Ainsi pour $k \geqslant p+1$, on a $0 < \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} < 1$ et donc $\mathrm{E}\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right) = 0$. Prenons $k \in [\![0, p]\!]$. On a

$$\frac{x}{2^{k+1}} = \underbrace{a_p 2^{p-k-1} + \cdots + a_{k+1}}_{\in \mathbb{N}} + \frac{a_k}{2} + \underbrace{\frac{a_{k-1}}{2^2} + \cdots + \frac{a_0}{2^{k+1}} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_{-i}}{2^{i+k+1}}}_{<1/2}$$

(la première partie n'apparaît pas lorsque $k = p$). La partie entière de $\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}$ vaut donc $a_p 2^{p-k-1} + \cdots + a_{k+1}$ si $a_k = 0$ et elle est égale à $a_p 2^{p-k-1} + \cdots + a_{k+1} + 1$ si $a_k = 1$. Dans les deux cas elle vaut

$$a_p 2^{p-k-1} + \cdots + a_{k+1} + a_k$$

(pour $k = p$, cela se réduit à a_p). Il en résulte que la somme recherchée vaut

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}(a_p 2^{p-k-1} + \cdots + a_{k+1}) + \sum_{k=0}^{p} a_k &= \sum_{k=1}^{p} a_k \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^l\right) + \sum_{k=0}^{p} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k 2^k = \mathrm{E}(x).\end{aligned}$$

On a donc pour tout $x > 0$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{E}(x)}$.

• *Seconde solution.* Elle est plus rapide et n'utilise pas les développements dyadiques, mais elle suppose la connaissance du résultat. Si on note $f(x)$ la somme à calculer, on observe que $f(2x) = f(x) + \mathrm{E}\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Le lecteur vérifiera aisément que pour tout réel x, on a $\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{E}(2x)$. Il en résulte que si $f(x) = \mathrm{E}(x)$ pour un $x > 0$, alors $f(2x) = \mathrm{E}(2x)$. Par suite, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$ pour $x \in]0, 1[$, ce qui est immédiat.

• *Troisième solution.* Elle nous a été transmise par un lecteur et est de nature combinatoire. Montrons que $\mathrm{E}\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right)$ correspond au nombre d'entiers m compris entre 1 et x de la forme $m = 2^k(2m' - 1)$ (c'est-à-dire dont la valuation en 2 est égale à k). En effet, on a

$$\begin{aligned}1 \leqslant 2^k(2m' - 1) \leqslant x &\iff 1 + 2^k \leqslant 2^{k+1} m' \leqslant x + 2^k \\ &\iff \frac{1 + 2^k}{2^{k+1}} \leqslant m' \leqslant \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \frac{1 + 2^k}{2^{k+1}} \leqslant 1$, on en déduit que

$$1 \leqslant 2^k(2m' - 1) \leqslant x \iff 1 \leqslant m' \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right).$$

Comme $m' \longmapsto 2^k(2m'-1)$ est injective, on a le résultat annoncé.

Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant m \leqslant x$, il existe un unique couple (k, m') tel que $m = 2^k(2m'-1)$. En faisant une partition de l'ensemble des entiers m compris entre 1 et x selon la valeur de k, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{E}(x),$$

puisque $\mathrm{E}(x)$ est le nombre d'entiers entre 1 et x. $\triangleleft$

Voici maintenant une autre manière, due à Engel, de représenter les réels par une suite d'entiers. La caractérisation des rationnels dans cette représentation est particulièrement simple.

1.6. Développement en série de Engel

Soit $x \in \,]0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite croissante d'entiers $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 \geqslant 2$ et $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n}$. Il s'agit du développement en *série de Engel* du réel x.

2. Montrer que x est rationnel si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire.

(**École normale supérieure, École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Notons S l'ensemble des suites croissantes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathrm{S}$. On a $\dfrac{1}{u_0 u_1 \ldots u_k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}\cdot$ La série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^n}$ étant convergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs garantit l'existence de

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_k}.$$

La somme est évidemment strictement positive et majorée par $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} = 1$. L'exercice demande de prouver que $\psi : \mathrm{S} \to \,]0, 1]$ est une application bijective. On se donne $x \in \,]0, 1]$ et on va prouver que x admet un unique antécédent par ψ.

Supposons que $u \in \mathrm{S}$ vérifie $\psi(u) = x$. En multipliant cette égalité par u_0, on obtient

$$xu_0 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{u_1 \ldots u_k} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_k}$$

l'inégalité provenant de ce que la suite (u_n) est croissante. Il en résulte que $0 < xu_0 - 1 \leqslant x$ et donc que $u_0 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) + 1$. Si on pose

$$x_1 = xu_0 - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{u_1 \ldots u_k}$$

on a $x_1 = \psi((u_{n+1})_{n \geqslant 0})$. Le même raisonnement appliqué à x_1 donne $u_1 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_1}\right) + 1$. Une récurrence immédiate, montre que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est nécessairement déterminée par $x_0 = x$ et pour tout n,

$$u_n = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_n}\right) + 1, \quad \text{et} \quad x_{n+1} = u_n x_n - 1.$$

Cela montre que x admet au plus un antécédent par ψ.

Inversement, montrons que les relations de récurrence ci-dessus définissent bien deux suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(u_n)_{n \geqslant 0}$. Prouvons pour cela que x_n ne s'annule pas en vérifiant par récurrence sur n, que $x_n \in]0, 1]$ pour tout n. C'est vrai au rang 0 par hypothèse. Si $x_n > 0$, on a, par définition de la partie entière, $\frac{1}{x_n} < u_n \leqslant \frac{1}{x_n} + 1$, et donc $0 < x_{n+1} = u_n x_n - 1 \leqslant x_n \leqslant 1$. D'où le résultat. On voit de plus que la suite (x_n) est décroissante et comme $u_n = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_n}\right) + 1$, la suite (u_n) est croissante. De plus $u_0 \geqslant 2$ donc $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien un élément de S. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\psi(u) = x$. On a $x_1 = u_0 x_0 - 1$, soit encore $x = x_0 = \frac{1}{u_0} + \frac{x_1}{u_0}$. La relation $x_2 = u_1 x_1 - 1$ permet de remplacer x_1 par $\frac{1}{u_1} + \frac{x_2}{u_1}$. On obtient $x = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \frac{x_2}{u_0 u_1}$. On continue en remplaçant x_2. Une récurrence facile montre que pour tout $n \geqslant 0$,

$$x = x_0 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n} + \frac{x_{n+1}}{u_0 u_1 \ldots u_n}.$$

La suite (u_n) étant croissante, on peut minorer ses termes par 2 et majorer x_{n+1} par 1. Il en résulte que le reste $\frac{x_{n+1}}{u_0 u_1 \ldots u_n}$ est dominé par $\frac{1}{2^{n+1}}$ et tend donc vers 0. Ainsi,

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_k} = x.$$

L'application ψ est donc une bijection de S sur $]0, 1]$.

2. Supposons pour commencer le développement en série de Engel de x stationnaire à partir du rang N. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{N-1}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_N^k} \right) \\ &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{N-1}} \frac{u_N}{u_N - 1} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que x est rationnel. On pose $x = \frac{p}{q}$, avec $p \leqslant q$, deux entiers naturels premiers entre eux. On a $\frac{1}{x} = \frac{q}{p}$. Effectuons la division euclidienne de q par p : $q = \alpha p + r$ avec $0 \leqslant r < p$. On a alors $u_0 = \alpha + 1$. Il en résulte que $x_1 = (\alpha + 1)\frac{p}{q} - 1 = \frac{p - r}{q}$. Répétant cette opération, on en déduit que pour tout n, x_n s'écrit sous la forme $x_n = \frac{k_n}{q}$ où (k_n) est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls. Cette suite est forcément stationnaire et la suite (u_n) aussi. $\lhd$

Comme $e - 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}$, *le développement en série de Engel de* $e - 2$ *est donné par la suite* $u_n = n + 2$. *On retrouve le fait que* $e \notin \mathbb{Q}$ *(voir l'exercice 1.8 pour une autre preuve de ce fait). L'algorithme permettant d'obtenir la suite* $\psi^{-1}(x)$ *est connu sous le nom d'algorithme de Briggs (1561-1630).*

1.7. Représentation des réels > 0 comme sommes de séries

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite strictement décroissante de réels strictement positifs. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$; S est donc un élément de $]0, +\infty]$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \geqslant 0}$ pour que tout réel de $]0, S[$ puisse s'écrire d'au moins une manière sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$, φ étant une extraction, c'est-à-dire une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \geqslant 0}$ pour qu'il y ait, quel que soit le réel de $]0, S[$, existence et unicité de l'écriture précédente.

(**École normale supérieure**)

Solution.

1. Cherchons des conditions nécessaires. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît et est minorée par 0 ; elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$. Si ℓ n'est pas nul, aucune suite extraite de (u_n) ne converge vers 0 et pour toute extraction φ, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$. Aucun élément de $]0, S[$ n'a l'écriture voulue. On doit donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à $]0, S[$. S'il s'écrit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)}$, alors $\varphi(\mathbb{N}) \subset [\![n+1, +\infty[\![$, car pour tout $k \leqslant n$, on a $u_k > u_n$. On en déduit que $u_n \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

On obtient donc les deux conditions suivantes :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$,

(ii) pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrons que ces deux conditions sont suffisantes. Soit α dans $]0, S[$. On va construire une extraction φ telle que pour tout entier naturel n, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} < \alpha$ en choisissant à chaque fois le plus grand terme possible.

- On prend pour $\varphi(0)$ le plus petit des entiers j tels que $u_j < \alpha$. Un tel entier existe car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Si $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ sont déterminés et vérifient $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} < \alpha$, on définit $\varphi(n+1)$ comme le plus petit des entiers j tels que $j > \varphi(n)$ et $u_j < \alpha - \sum\limits_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$. On a alors $\sum\limits_{k=0}^{n+1} u_{\varphi(k)} < \alpha$.

La série de terme général $u_{\varphi(k)}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} \leqslant \alpha$. Montrons que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = \alpha$. Remarquons que, par définition, si $\varphi(n+1) > \varphi(n)+1$, alors

$$u_{\varphi(n+1)-1} \geqslant \alpha - \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} > \alpha - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} \geqslant 0.$$

Cette inégalité fournit un contrôle de l'écart entre α et $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$. On va discuter selon qu'elle est réalisée pour une infinité d'indices n ou non. Posons pour cela $I = \{n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n) + 1\}$.

- Si I est infini, il existe une extraction ψ telle que pour tout entier n,

$\psi(n) \in \mathrm{I}$. On a alors, pour tout entier n, $0 \leqslant \alpha - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} \leqslant u_{\varphi(\psi(n)+1)-1}$. La suite $(u_{\varphi(\psi(n)+1)-1})_{n\geqslant 0}$, sous-suite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge comme elle vers 0. On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = \alpha$.

• Si I est fini, notons n_0 son plus grand élément (si $\mathrm{I} = \emptyset$, on pose $n_0 = -1$). Puisque $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1$ si $n \geqslant n_0 + 1$, on a

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = \sum_{k=\varphi(n_0+1)}^{+\infty} u_k.$$

Or d'après la condition (ii), $\sum_{k=\varphi(n_0+1)}^{+\infty} u_k \geqslant u_{\varphi(n_0+1)-1}$ (si $\mathrm{I} = \emptyset$ on a $\varphi(0) > 0$, car sinon $\alpha = \mathrm{S}$). Puisque n_0 appartient à I on a, d'autre part, $u_{\varphi(n_0+1)-1} \geqslant \alpha - \sum_{k=0}^{n_0} u_{\varphi(k)}$. On déduit de ces deux inégalités que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} \geqslant \alpha$ et donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = \alpha$.

2. Montrons qu'il y a, pour tout $\alpha \in \left]0, \mathrm{S}\right[$, existence et unicité de l'écriture si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (ce qui impose en particulier que S est fini et que u_n tend vers 0).

• Montrons que c'est nécessaire. D'après la première question les conditions (i) et (ii) doivent être vérifiées pour avoir l'existence. Supposons qu'il existe un entier n_0 pour lequel $u_{n_0} < \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k$ et considérons $\alpha \in \left]u_{n_0}, \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k\right[$. Notons que la suite $(u_k)_{k\geqslant n_0+1}$ est strictement décroissante et vérifie aussi les conditions (i) et (ii). Il existe donc une extraction φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) \subset [\![n_0+1, +\infty [\![$ et $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)}$ (puisque $\alpha \in \left]0, \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k\right[$). Mais on a également $\alpha - u_{n_0} \in \left]0, \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k\right[$ et il existe une extraction ψ telle que $\psi(\mathbb{N}) \subset [\![n_0+1, +\infty [\![$ et $\alpha - u_{n_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\psi(k)}$. L'égalité $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)} = u_{n_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\psi(k)}$ montre que l'écriture de α n'est pas unique.

• Montrons que cette condition est suffisante. Si cette condition est réalisée, alors la série de terme général u_n converge et pour tout entier n, $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k = 2u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Pour tout entier n, $u_n = \frac{u_0}{2^n}$ et $S = 2u_0$. L'unicité demandée se ramène à l'unicité de la représentation d'un réel de $]0,1[$ sous la forme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$, avec pour tout k de $\mathbb{N}^*$ $a_k = 0$ ou 1 et $\{k, a_k = 1\}$ infini. Il s'agit de l'unicité de la décomposition de tout réel de $]0,1[$ en base 2, en prenant, si α est de la forme $\frac{n}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*, 0 < n < 2^k)$, le développement impropre. $\triangleleft$

Les exercices suivant concernent des questions de rationalité. Le lecteur trouvera dans l'exercice 5.48 du tome 1 d'algèbre une preuve de la transcendance de e c'est-à-dire du fait que la suite $(e^n)_{n\geqslant 0}$ est $\mathbb{Q}$-libre. Ici, on montre élémentairement que la suite $(1, e, e^2)$ est $\mathbb{Q}$-libre, i.e. *que e n'est racine d'aucune équation du second degré à coefficients entiers.*

1.8. Sur le nombre e

> **1.** Montrer que e est irrationnel.
> **2.** Montrer que la famille $(1, e, e^2)$ est $\mathbb{Q}$-libre.
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Rappelons que e est défini par $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. On procède par l'absurde en supposant que $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \geqslant 1$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$. On a alors

$$q!p = qq!e = \sum_{k=0}^{q} \frac{qq!}{k!} + \underbrace{q \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}}_{\varepsilon_q}.$$

La première somme est un entier naturel de même que $q!p$. On va voir que ε_q est un réel de $]0,1[$ ce qui fournira la contradiction souhaitée. On a $\varepsilon_q > 0$ et

$$\varepsilon_q < q \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{(q+1)^h} = \frac{q}{q+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = 1.$$

2. Montrons que la famille $(1, e, e^2)$ est libre. Supposons qu'il y ait une relation de liaison $\alpha e + \beta e^2 + \gamma = 0$ avec α, β et γ rationnels non tous nuls. En divisant par e et en multipliant cette relation par un entier convenable, on peut donc trouver trois entiers relatifs a, b, c non tous nuls, tels que $ae + be^{-1} = c$. On peut même supposer que a et b sont non nuls puisque e est irrationnel et, quitte à multiplier par -1, que $a \in \mathbb{N}^*$. On va approcher e et e^{-1} par les sommes partielles des séries qui les définissent. Cela se fait directement en utilisant la formule de Taylor-Lagrange en 0 pour la fonction $f(x) = ae^x + be^{-x}$. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que

$$c = ae + be^{-1} = f(1) = a\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + b\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{ae^{\alpha_n} + (-1)^{n+1}be^{-\alpha_n}}{(n+1)!}.$$

En multipliant cette égalité par $n!$, on voit que le nombre

$$\mathrm{A}_n = \frac{ae^{\alpha_n} + (-1)^{n+1}be^{-\alpha_n}}{n+1}$$

est un entier. Si b est positif (comme a) la suite extraite (A_{2n+1}) est formée d'entiers naturels non nuls et tend vers 0 ; c'est impossible. Si b est négatif on prend la suite (A_{2n}) et on obtient la même contradiction. $\triangleleft$

Dans la plupart des démonstrations d'irrationalité ou de transcendance, on raisonne par l'absurde et l'argument fondamental consiste souvent à construire une suite d'entiers > 0 qui tend vers 0 (voir aussi l'exercice suivant). Expliquons pourquoi il a été indispensable de travailler avec e^{-1} au lieu de e^2. Si on utilise la fonction $f(x) = ae^x + be^{2x}$ et qu'on lui applique la formule de Taylor comme ci-dessus, le reste contient au numérateur un terme de la forme $ae^{\alpha_n}+b2^{n+1}e^{2\alpha_n}$. Et le 2^{n+1} rend ce reste divergent. La remarque qu'on vient de faire laisse penser que la méthode employée ici ne peut se généraliser pour établir la transcendance de e.

Le nombre π est également transcendant : c'est un théorème de Lindemann (1882). L'exercice qui suit établit son irrationalité, prouvée pour la première fois en 1761 par Lambert à l'aide du développement en fraction continue de la fonction tangente.

1.9. Irrationalité de π

À tout polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$, on associe $\mathrm{F} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k f^{(2k)}$.

1. Calculer $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ en fonction de $\mathrm{F}(0)$ et $\mathrm{F}(\pi)$.

2. On suppose que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec a, b entiers > 0 et on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Tracer le graphe de f_n sur $[0,\pi]$.

> 3. Prouver que $\int_0^\pi f_n(t)\sin t dt$ est entier et en déduire que π est irrationnel.
>
> **(École normale supérieure)**

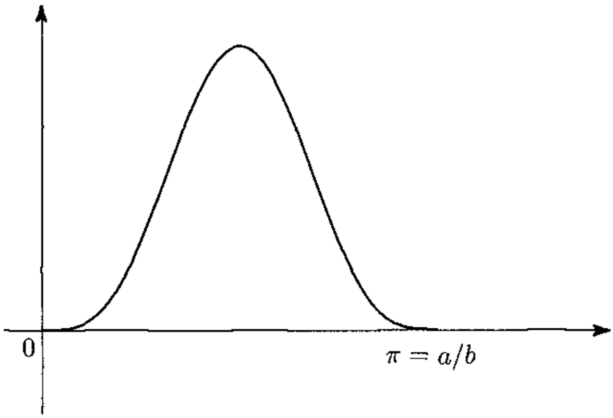
Solution.

1. Notons que la somme qui définit F est finie. Si on effectue une double intégration par parties dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^\pi f(t)\sin t dt = [f(\pi)+f(0)] - \int_0^\pi f''(t)\sin t dt.$$

En itérant le calcul on a donc $\int_0^\pi f(t)\sin t dt = \mathrm{F}(\pi)+\mathrm{F}(0)$.

2. La fonction f_n est nulle en 0 et π et strictement positive sur l'intervalle $]0,\pi[$. Ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ s'annulent en 0 et en a/b.



3. Pour montrer que $\mathrm{I}_n = \int_0^\pi f_n(t)\sin t dt$ est entier, il suffit, d'après la question 1, de montrer que f_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et π. Traitons le cas de 0. Comme 0 est une racine de f_n de multiplicité n, toutes les dérivées d'ordre $p<n$ sont nulles en 0. Soit $p \geqslant n$. On a par la formule de Leibniz,

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (x^n)^{(k)}[(a-bx)^n]^{(p-k)}.$$

Quand on évalue en 0, il ne reste qu'un seul terme dans la somme, correspondant à $k=n$,

$$f_n^{(p)}(0) = \frac{1}{n!}\mathrm{C}_p^n n![(a-bx)^n]^{(p-n)}(0) = \mathrm{C}_p^n[(a-bx)^n]^{(p-n)}(0) \in \mathbb{Z}$$

car $(a-bx)^n$ est un polynôme à coefficients entiers. On montre de même que les dérivées de f_n en $\pi = \dfrac{a}{b}$ sont toutes entières.

Comme $f_n(t)\sin t$ est strictement positif pour $t \in]0,\pi[$, on peut affirmer que pour tout n, I_n est un entier naturel non nul. Or, comme $x(a-bx) \leqslant \dfrac{a^2}{4b} = \mathrm{M}$ pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$1 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{M}^n}{n!}\mathrm{d}t = \frac{\pi \mathrm{M}^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est impossible. Donc $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\triangleleft$

L'exercice suivant est extrait d'une épreuve écrite du concours d'entrée à l'ENS de Saint-Cloud (1985), consacrée au troisième problème de Hilbert. Il s'agissait de savoir si lorsqu'on a deux polyèdres de même volume, par exemple un cube et un tétraèdre régulier, on peut découper le premier en un nombre fini de tétraèdres qui, réassemblés autrement, donnent le second (on dit alors que les deux polyèdres sont équidécomposables). La réponse est négative en général et notamment dans le cas du cube et du tétraèdre régulier. Pour le montrer, le mathématicien Max Dehn (élève de Hilbert) a associé à chaque polyèdre des quantités invariantes par les transformations décrites ci-dessus (appelées depuis invariants de Dehn). L'irrationalité du nombre $(\arccos 1/3)/\pi$ *permet de construire un tel invariant qui ne prend pas la même valeur pour le tétraèdre régulier et pour le cube. Ils ne sont donc pas équidécomposables*[1].

1.10. Irrationalité de $(\arccos 1/3)/\pi$

On se propose de montrer que $\alpha = \dfrac{\arccos 1/3}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

1. Calculer $e^{i\alpha\pi}$.

2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

3. Montrer que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des entiers vérifiant $a_n - b_n \not\equiv 0 \pmod 3$. Conclure.

(**École normale supérieure**)

1. Le lecteur intéressé pourra résoudre le problème mentionné ci-dessus ou consulter le chapitre 7 de AIGNER (M.) & ZIEGLER (G.M.), *Proofs from the Book*, Springer, 1998. Trad. fr. : *Raisonnements divins*, Springer, 2002.

Solution.

1. Par définition de α, on a $\cos\alpha\pi = \frac{1}{3}$. Comme $\alpha\pi$ appartient à l'intervalle $]0, \pi[$ son sinus est positif et vaut donc $\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Il en résulte que $e^{i\alpha\pi} = \frac{1 + 2i\sqrt{2}}{3}$.

2. Le nombre complexe $e^{i\alpha\pi}$ est une racine de l'unité si et seulement si α est rationnel. Ainsi, α est rationnel si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que $e^{in\alpha\pi} = 1$, c'est-à-dire $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

3. L'ensemble des complexes de la forme $a+ib\sqrt{2}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ est clairement un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Pour tout n, il existe donc des entiers a_n et b_n, qui sont d'ailleurs uniques, tels que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$. Comme

$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{n+1} &= (1+2i\sqrt{2})^n(1+2i\sqrt{2}) = (a_n + ib_n\sqrt{2})(1+2i\sqrt{2}) \\ &= (a_n - 4b_n) + i\sqrt{2}(b_n + 2a_n)\end{aligned}$$

on a les relations de récurrence suivantes : $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = b_n + 2a_n$. On en déduit que $a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n \equiv -(a_n - b_n) \pmod 3$. Comme $a_1 - b_1 \equiv -1 \pmod 3$, il en résulte que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n - b_n \not\equiv 0 \pmod 3$. Il est donc impossible de trouver un entier $n \geqslant 1$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$, ce qui prouve que α est irrationnel. $\lhd$

On peut montrer que le nombre $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$ *est irrationnel sauf pour* $n \in \{1, 2, 4\}$.

Liouville est le premier à produire des nombres transcendants, en 1844. La transcendance de e ne sera prouvée qu'en 1873 par Hermite et celle de π en 1882 par Lindemann.

1.11. Nombres de Liouville

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, de degré $m \geqslant 1$, et x une racine réelle de P. Montrer qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que, pour tout rationnel $\frac{a}{b}$ de $[x-1, x+1]$ vérifiant $\mathrm{P}(\frac{a}{b}) \neq 0$, on ait $\left|x - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{\mathrm{K}}{|b|^m}$.

2. Soit $(u_n) \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive à partir d'un certain rang. On pose $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^{n!}}$ (x est un *nombre de Liouville*) et $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^{k!}}$. Montrer que $|x - s_n| \leqslant \frac{1}{10^{nn!}}$ pour tout n. En déduire que x est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On va utiliser l'inégalité des accroissements finis. La fonction P′ est bornée sur $[x-1,x+1]$. Soit $\mathrm{M}>0$ un majorant de $|\mathrm{P}'|$ sur l'intervalle $[x-1,x+1]$. On a

$$\left|\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\mathrm{P}(x)-\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leqslant \mathrm{M}\left|x-\frac{a}{b}\right|.$$

La quantité $\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)$ n'est pas nulle par hypothèse. On va la minorer. Si le polynôme P s'écrit $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{X}^k$, on voit que $b^m \mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)=\sum_{k=0}^{m} a_k a^k b^{m-k}$ est un entier. Comme $\frac{a}{b}$ n'est pas racine de P il est non nul, donc plus grand que 1 en valeur absolue. On a donc $\left|b^m\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \geqslant 1$, ce qui, avec l'inégalité précédente, conduit au résultat demandé en prenant $\mathrm{K}=\frac{1}{\mathrm{M}}$.

2. La série définissant x est clairement convergente et elle donne le développement décimal propre de x. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|x-s_n| = x-s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k}{10^{k!}} \leqslant 9 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Pour $k\geqslant n+1$, on a $k!\geqslant kn!$ et donc $\frac{1}{10^{k!}} \leqslant \frac{1}{10^{kn!}} = \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k$. On en déduit que

$$\begin{aligned}|x-s_n| &\leqslant 9\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k = 9\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{10^{n!}}}\\ &\leqslant 9\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n}\frac{1}{10^{n!}-1} \leqslant \frac{1}{10^{nn!}},\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

Montrons que x est transcendant. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\mathrm{P}\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, non nul, tel que $\mathrm{P}(x)=0$. On choisit $\mathrm{K}>0$ comme dans la question 1. La suite (s_n) est évidemment à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et converge vers x. Le polynôme P n'étant pas nul, il existe un voisinage de x sur lequel P ne s'annule qu'en x. On en déduit qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$, s_n soit dans $[x-1,x+1]$ et $\mathrm{P}(s_n)\neq 0$. La fraction s_n étant de dénominateur $10^{n!}$, on déduit de la première question que, pour $n\geqslant n_0$, on a $|x-s_n|\geqslant \frac{\mathrm{K}}{(10^{n!})^m}$. On a donc, en combinant cela avec l'inégalité précédente, $\frac{\mathrm{K}}{(10^{n!})^m} \leqslant \frac{1}{10^{nn!}}$ ou encore $(10^{n!})^{n-m} \leqslant \frac{1}{\mathrm{K}}$, pour $n\geqslant n_0$. C'est impossible car le premier membre tend vers $+\infty$.

Conclusion. Tous les nombres de Liouville sont transcendants. ◁

La première question de l'exercice a montré qu'un irrationnel algébrique, c'est-à-dire qui est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers, s'approche assez mal par des nombres rationnels. C'est un théorème dû à Liouville que le lecteur trouvera aussi dans l'exercice 5.47 du tome 1 d'algèbre. Les nombres de Liouville sont construits pour être très bien approchés par des rationnels et c'est ce qui les rend transcendants.

1.12. Nombres de Pisot

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une application $n_0 : \mathrm{A} \to \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $(u,v) \in \mathrm{A}^2$,

$$(\forall k \leqslant \max(n_0(u), n_0(v)), \quad u_k = v_k) \iff u = v$$

Montrer que A est au plus dénombrable.

2. Considérons $\mathrm{S} = \{t > 1,\ \exists \alpha > 0,\ \lim_{n \to +\infty} d(\alpha t^n, \mathbb{Z}) = 0\}$. Soit $t \in \mathrm{S}$ et a une suite d'entiers telle que $|\alpha t^n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_{n+2} - \dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}$ tend vers 0. Montrer que S est au plus dénombrable.

3. Soit $t > 1$ un réel, racine d'un polynôme unitaire $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tel que toutes les autres racines complexes de P soient de module strictement inférieur à 1 (un tel réel t est appelé un *nombre de Pisot*). Montrer que $t \in \mathrm{S}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_p formé des suites u de A telles que $n_0(u) \leqslant p$ est au plus dénombrable, car l'application qui à une suite $u \in \mathrm{A}_p$ associe le $(p+1)$-uplet $(u_0, u_1, \ldots, u_p)$ est injective (et on sait que $\mathbb{N}^{p+1}$ est dénombrable). Comme $\mathrm{A} = \bigcup_{p \geqslant 0} \mathrm{A}_p$ est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, A est au plus dénombrable.

2. Notons que comme $d(\alpha t^n, \mathbb{Z})$ tend vers 0, à partir d'un certain rang l'entier a_n est déterminé de manière unique. Par hypothèse, on a $a_n = \alpha t^n + o(1)$. Ainsi,

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 t^{2n+2} + o(t^n)}{\alpha t^n + o(1)} = \frac{\alpha t^{n+2} + o(1)}{1 + o(t^{-n})} = \alpha t^{n+2} + o(1)$$

Il en résulte donc que $a_{n+2} - \dfrac{a_{n+1}^2}{a_n} = o(1)$.

Soit ψ une application qui à chaque $t \in S$ associe une suite (a_n) comme-ci-dessus. On a $t = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ de sorte que ψ est injective. Montrons alors que l'ensemble des suites obtenues est au plus dénombrable. Pour cela, on va montrer que $\psi(S)$ vérifie les hypothèses de la question 1. Soit $t \in S$ et $(a_n) = \psi(t)$. Il existe un rang $n_0(a)$ tel que pour $n \geqslant n_0(a)$, $\left|a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$. Considérons $(b_n) = \psi(t')$ une seconde suite et supposons que $a_k = b_k$ pour $k \leqslant \max(n_0(a), n_0(b)) = N$. Alors, par l'inégalité triangulaire, puisque $\frac{a_N^2}{a_{N-1}} = \frac{b_N^2}{b_{N-1}}$, on obtient

$$|a_{N+1} - b_{N+1}| \leqslant \left|a_{N+1} - \frac{a_N^2}{a_{N-1}}\right| + \left|b_{N+1} - \frac{b_N^2}{b_{N-1}}\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Comme, a_{N+1} et b_{N+1} sont entiers on a $a_{N+1} = b_{N+1}$. Une récurrence facile montre alors que $a = b$. D'après la question 1, $\psi(S)$ est au plus dénombrable, donc S aussi.

3. Notons $z_1, \dots z_p$ les racines de P autres que t. Montrons que pour tout n, la somme de Newton $S_n = t^n + z_1^n + \cdots + z_p^n$ est dans $\mathbb{Z}$. En effet, toutes les fonctions symétriques élémentaires des racines de P sont dans $\mathbb{Z}$ car P est unitaire et à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Comme S_n est un polynôme symétrique en les racines de P à coefficients entiers, il peut s'écrire comme un polynôme à coefficients entiers en les fonctions symétriques élémentaires de ces racines. Il en résulte que $S_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n. Notons que cela résulte aussi des formules de Newton (cf. exercice 5.26 du tome 1 d'algèbre) et d'une récurrence sur n. Comme $|z_k| < 1$ pour tout k, les suites $(z_k^n)_{n \geqslant 0}$ tendent vers 0 et $d(t^n, \mathbb{Z})$ tend donc vers 0. Par suite, $t \in S$. $\lhd$

Le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est par exemple un nombre de Pisot. Il résulte de l'exercice que l'ensemble des nombres de Pisot est dénombrable. En 1944, Raphaël Salem a démontré qu'il est fermé. Le lecteur intéressé par les nombres de Pisot se reportera au problème de six heures posé au concours de la rue d'Ulm en 1989. On y démontre notamment le théorème de Pisot qui affirme qu'un réel $t > 1$ est un nombre de Pisot si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que la série $\sum d(\lambda t^n, \mathbb{Z})^2$ converge.

Le prochain exercice, très classique, rappelle la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

1.13. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Montrer que G est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

2. Soit α et β deux réels non nuls. Discuter la nature du sous-groupe additif qu'ils engendrent.

3. Soit $\beta \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que $\{e^{in\theta},\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité S^1 de $\mathbb{C}$. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n \geqslant 0}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Si G est monogène égal à $a\mathbb{Z}$ (avec $a > 0$), a est le plus petit élément strictement positif de G. Si G est dense dans $\mathbb{R}$, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'a pas de plus petit élément mais une borne inférieure nulle. Il est donc naturel d'introduire $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $a = \inf G_+$. Le réel $a \geqslant 0$ est bien défini car G_+ est non vide et minoré. En effet, il existe $x \in G$ non nul et donc x ou $-x$ est dans G_+, qui est minoré par 0. Les remarques précédentes invitent alors à distinguer deux cas.

• Supposons $a > 0$. On va montrer que $a \in G$ puis que $G = a\mathbb{Z}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que a ne soit pas dans G.

Comme $a > 0$, on a $2a > a$ et il existe $x \in G_+$, tel que $x < 2a$. On a donc $a < x < 2a$, puisque $a \notin G$. Il existe alors $y \in G_+$ tel que $y < x$. On a $a < y < x < 2a$ et $x - y$ en tant que différence d'éléments de G est dans G, et même dans G_+. Or $x - y < a$, ce qui contredit la définition de a. Donc $a \in G$.

Par conséquent $a\mathbb{Z}$, le groupe engendré par a, est inclus dans G. Réciproquement, soit $x \in G$ et $k = \mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right) \in \mathbb{Z}$. Comme G est un groupe le réel $x - ka$ est dans G, et comme $k \leqslant \frac{x}{a} < k+1$, il vérifie $0 \leqslant x - ka < a = \min G_+$. Nécessairement, $x - ka = 0$ et $x = ka \in a\mathbb{Z}$. Il en résulte que $G = a\mathbb{Z}$.

• Supposons $a = 0$. On va montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que G rencontre tout intervalle ouvert. Soit $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[$ un tel intervalle. Comme $a = 0$, il existe un élément $g \in G$ tel que $0 < g < \beta - \alpha$. Le sous-groupe $g\mathbb{Z}$ engendré par g est inclus dans G et rencontre nécessairement I (sinon il existerait un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{I} \subset]kg, (k+1)g[$ ce qui contredirait l'inégalité $g < \beta - \alpha$). Cela prouve la densité de G dans $\mathbb{R}$.

Conclusion. Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit monogène (et donc discret), soit dense dans $\mathbb{R}$.

2. Il s'agit d'étudier le sous-groupe $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} \neq \{0\}$.

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Comme α et β sont dans G, on peut trouver $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha = ka$ et $\beta = la$, et en faisant le rapport $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{k}{l} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, supposons $\dfrac{\alpha}{\beta}$ rationnel. Écrivons $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{k}{l}$, avec k et l premiers entre eux. On a

$$\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \beta\Big(\frac{k}{l}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\Big) = \frac{\beta}{l}(k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}) = \frac{\beta}{l}\mathbb{Z},$$

car k et l sont premiers entre eux.

Conclusion. Si $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, G est monogène et sinon G est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Le sous-groupe additif $\mathrm{G} = \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est dense d'après la question précédente. On va montrer que l'ensemble $\mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$ reste encore dense. Soit $a < b$ deux réels. On peut trouver un élément $x = v\beta + u \in \mathrm{G}$ tel que $0 < x < b - a$.

• Supposons d'abord que v est un entier naturel, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$. On choisit un entier $n_0 < a$. Les éléments de la suite $(kx + n_0)_{k \geqslant 0}$ sont tous dans $\mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$ et il est clair que l'un d'eux au moins appartient à l'intervalle $]a, b[$ (c'est le même argument que dans la question 1).

• Supposons que $v < 0$. Alors $-x \in \mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$ et $-(b-a) < -x < 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{Z}$ avec $n_0 > b$ et il existe au moins un des éléments de la suite $(n_0 - kx)_{k \geqslant 0}$ qui appartient à $]a, b[$.

4. Posons $\mathrm{X} = \{e^{in\theta},\ n \in \mathbb{N}\}$. Il s'agit de l'image par l'application $f : x \longmapsto e^{2i\pi x}$ de l'ensemble $\mathbb{Z} + \dfrac{\theta}{2\pi}\mathbb{N}$. Comme f est continue et que cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, son image est dense dans $f(\mathbb{R}) = \mathrm{S}^1$.

Dans le cas $\theta = 1$, on a bien $\dfrac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ et l'ensemble $\{e^{in},\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans S^1. Comme l'application qui à un nombre complexe associe sa partie imaginaire est continue, l'ensemble $\{\sin n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le segment $[-1, 1]$. Pour tout $a \in [-1, 1]$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on est alors assuré de trouver un entier $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $|\sin n - a| \leqslant \varepsilon$. Cela signifie que tout réel de $[-1, 1]$ est une valeur d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n \geqslant 0}$. L'autre inclusion étant évidente, on conclut que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est le segment $[-1, 1]$. $\triangleleft$

On peut déduire de la question 1 le fait qu'un sous-groupe G *de* S^1 *est soit fini (égal dans ce cas au groupe des racines* n*-ièmes de l'unité, où* $n = |\mathrm{G}|$*), soit dense dans* S^1.

Les exercices qui suivent sont consacrés à quelques inégalités. Le lecteur pourra aussi se reporter au chapitre 4 où il trouvera des exercices portant sur des inégalités de convexité.

1.14. Une inégalité

Montrer que parmi treize réels distincts on peut toujours en choisir deux, disons x et y, tels que $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_{13}$ les réels en question. L'expression $\dfrac{x-y}{1+xy}$ rappelle le développement de $\tan(\theta-\theta')$. Considérons les treize réels $\theta_i = \arctan x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 13$. Ils sont dans $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et rangés dans l'ordre croissant. Comme la longueur de I est égale à π, il existe $k \in [\![1, 12]\!]$ tel que $\theta_{k+1}-\theta_k < \frac{\pi}{12}$. Comme la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \tan(\theta_{k+1}-\theta_k) < \tan\frac{\pi}{12}$. Or, nous savons que

$$\tan(\theta_{k+1}-\theta_k) = \frac{\tan\theta_{k+1}-\tan\theta_k}{1+\tan\theta_k\tan\theta_{k+1}} = \frac{x_{k+1}-x_k}{1+x_kx_{k+1}}.$$

Le réel $\alpha = \tan\frac{\pi}{12}$ vérifie l'équation

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En résolvant l'équation du second degré qui en découle, on a $\alpha = -\sqrt{3}\pm 2$. Comme $\alpha > 0$, on trouve $\alpha = 2-\sqrt{3}$. Finalement, on obtient

$$0 < \frac{x_{k+1}-x_k}{1+x_kx_{k+1}} < 2-\sqrt{3}.$$

D'où le résultat. ◁

1.15. Inégalité du réordonnement

Soit $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$ des réels. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ une permutation de $(y_1, \ldots, y_n)$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On commence par développer les carrés. Dans l'inégalité que l'on souhaite prouver, on peut alors simplifier de part et d'autre $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, de sorte qu'il est équivalent de montrer l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Supposons dans un premier temps que les inégalités entre les x_i sont toutes strictes : $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Si les z_i ne sont pas rangés en ordre décroissant, c'est-à-dire si on peut trouver $i < j$ tel que $z_i < z_j$, on augmente (strictement) la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$ en échangeant z_i et z_j. En effet,

$$x_i z_i + x_j z_j < x_i z_j + x_j z_i,$$

car cette inégalité se réécrit $x_i(z_i - z_j) + x_j(z_j - z_i) < 0$ ce qui équivaut encore à $(x_i - x_j)(z_i - z_j) < 0$. Parmi les $n!$ sommes obtenues en permutant $y_1, \ldots, y_n$, la valeur maximale est donc obtenue pour une permutation $(z_1, \ldots, z_n)$ telle que $z_1 \geqslant z_2 \geqslant \cdots \geqslant z_n$. Auquel cas, on a $z_1 = y_1, z_2 = y_2, \ldots, z_n = y_n$. Cela démontre le résultat dans ce cas.

Pour le cas général nous proposons deux rédactions.

• On peut se ramener au cas où les inégalités entre les x_i sont strictes en les perturbant un petit peu. On pose, pour $\varepsilon > 0$, $x'_n = x_n$, $x'_{n-1} = x_{n-1} + \varepsilon$, $x'_{n-2} = x_{n-2} + 2\varepsilon, \ldots, x'_1 = x_1 + (n-1)\varepsilon$. On a alors $x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1$ et d'après ce qui précède,

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i z_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i$$

pour tout n-uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ obtenu en permutant $(y_1, \ldots, y_n)$. Cela étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de faire tendre ε vers 0^+ pour obtenir le résultat souhaité.

• On peut aussi raisonner directement en regroupant les indices $1, \ldots, n$ en paquets $(1, \ldots, i_1)$, $(i_1 + 1, \ldots, i_2)$, $\ldots$, $(i_{p-1} + 1, \ldots, i_p)$ (avec $i_p = n$) de façon à avoir

$$x_1 = \cdots = x_{i_1} < x_{i_1+1} = \cdots = x_{i_2} < \cdots < x_{i_{p-1}+1} = \cdots = x_{i_p}.$$

Sans changer la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$, on peut réarranger les z_i à l'intérieur de chaque paquet d'indices, en les classant par ordre décroissant de façon à avoir $z_{i_{k-1}+1} \geqslant \cdots \geqslant z_{i_k}$. Si après ce réarrangement les z_i ne sont pas globalement rangés par ordre décroissant, alors si i et j sont tels que $i < j$ et $z_i < z_j$, les indices i et j n'appartiennent pas au même paquet et on a aussi $x_i > x_j$. On peut alors conclure comme dans le premier cas. ◁

1.16. Inégalité de Tchebychev

1. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux suites monotones de réels. Comparer

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \quad \text{à} \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right).$$

2. Soient f et g deux fonctions monotones et continues par morceaux sur $[a,b]$. Comparer $\int_a^b f \times \int_a^b g$ avec $(b-a)\int_a^b fg$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il est naturel de faire la différence des deux quantités proposées. En multipliant par n^2 on doit chercher le signe de

$$\mathrm{D} = n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j.$$

En sommant d'abord selon les x_i il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \Big((y_i - y_1) + (y_i - y_2) + \cdots + (y_i - y_n) \Big) \\ &= \sum_{j<i} (y_i - y_j)(x_i - x_j). \end{aligned}$$

Par hypothèses les différences $x_i - x_j$ (resp. $y_i - y_j$) pour $i < j$ ont toutes le même signe. On en déduit que si les deux suites ont la même monotonie alors $\mathrm{D} \geqslant 0$ et

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right).$$

L'inégalité est inversée si les deux suites ont des monotonies opposées.

2. La première question suggère d'utiliser des sommes de Riemann. Notons $(x_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ les points de la subdivision régulière du segment $[a,b]$ en n intervalles. Supposons par exemple que f et g ont la même monotonie. On a alors pour tout n,

$$\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\right)\times\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_{k,n})\right) \leqslant \frac{(b-a)^2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})g(x_{k,n})$$

d'après la première question. En passant à la limite on obtient donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

et l'inégalité est inversée lorsque f et g ont des monotonies opposées. $\triangleleft$

Notons qu'il est très facile de déduire l'inégalité de Tchebychev à partir de l'inégalité du réordonnement de l'exercice précédent. Supposons par exemple les suites de même monotonie. On a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n & \leqslant & x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \\ x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 & \leqslant & x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \\ & \vdots & \\ x_1y_n + x_2y_1 + \cdots + x_ny_{n-1} & \leqslant & x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \end{array}$$

En sommant il vient $(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n) \leqslant n(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)$ *ce qui est le résultat voulu.*

Les trois exercices qui suivent sont consacrés à des inégalités assez fines sur des nombres complexes.

1.17. Inégalité dans $\mathbb{C}$ (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une partie $\mathrm{I} \subset [\![1, n]\!]$ telle que

$$\left|\sum_{k\in\mathrm{I}} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

On introduira, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

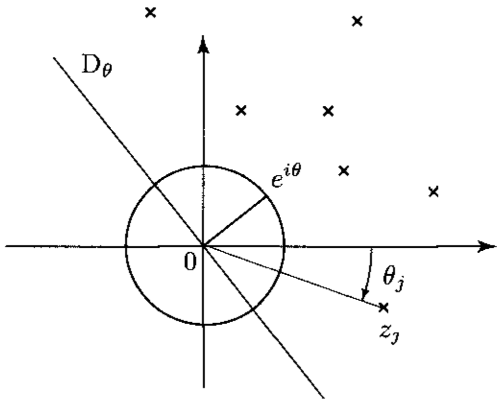
$$\mathrm{S}_\theta = \left\{j \in [\![1, n]\!],\ \theta - \frac{\pi}{2} \leqslant \arg z_j \leqslant \theta + \frac{\pi}{2}\right\},$$

ainsi que la fonction $f(\theta) = \left|\sum_{k\in\mathrm{S}_\theta} z_k\right|$. On cherchera une minoration de f, que l'on intégrera sur $[0, 2\pi]$.

(École polytechnique)

Solution.

On peut évidemment supposer que les z_i sont tous non nuls. Notons D_θ la droite du plan complexe passant par 0 et de vecteur normal $e^{i\theta}$. L'ensemble S_θ est alors l'ensemble des indices $j \in [\![1, n]\!]$ tels que z_j soit dans le demi-plan fermé délimité par D_θ et contenant $e^{i\theta}$. Posons $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ avec $r_k = |z_k| > 0$ et $\theta_k \in [0, 2\pi[$.



On a alors

$$\Big|\sum_{j\in S_\theta} z_j\Big| = \Big|\sum_{j\in S_\theta} z_j e^{-i\theta}\Big| \geqslant \operatorname{Re}\Big(\sum_{j\in S_\theta} z_j e^{-i\theta}\Big) = \sum_{j\in S_\theta} r_j \cos(\theta_j - \theta).$$

La fonction f est une fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$ et la fonction $\theta \longmapsto \sum_{j\in S_\theta} r_j \cos(\theta_j - \theta)$ est continue par morceaux. Il vient

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant \int_0^{2\pi} \sum_{j\in S_\theta} r_j \cos(\theta_j - \theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{j=1}^{n} r_j \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta_j)\chi_j(\theta)\mathrm{d}\theta$$

où la fonction χ_j est définie par $\chi_j(\theta) = 1$ si $j \in S_\theta$ et $\chi_j(\theta) = 0$ sinon. Or, si j est fixé, j est dans S_θ si et seulement si θ appartient à $\left[\theta_j - \frac{\pi}{2}, \theta_j + \frac{\pi}{2}\right]$ (modulo 2π). Plus précisément, $\chi_j^{-1}(1) = \left[\theta_j - \frac{\pi}{2}, \theta_j + \frac{\pi}{2}\right]$ si $\theta_j \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\chi_j^{-1}(1) = \left[0, \theta_j + \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\theta_j + \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ si $\theta_j \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\chi_j^{-1}(1) = \left[\theta_j - \frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \cup \left[0, \theta_j - \frac{3\pi}{2}\right]$ si $\theta_j \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Par 2π-périodicité de la fonction cosinus, on a dans chacun des trois cas,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta_j)\chi_j(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_j - \frac{\pi}{2}}^{\theta_j + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \theta_j)\mathrm{d}\theta = 2.$$

Il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant 2\sum_{j=1}^{n} r_j = 2\sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Il existe donc nécessairement $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $2\pi f(\theta_0) \geqslant 2 \sum_{j=1}^{n} |z_j|$. La partie $\mathrm{I} = \mathrm{S}_{\theta_0}$ répond alors à la question posée. ◁

1.18. Inégalité dans $\mathbb{C}$ (2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls, dont on notera, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, ρ_k le module et θ_k un argument. On désigne par I_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans $\{-1, 1\}$.

1. Montrer que

$$\max_{\varepsilon \in \mathrm{I}_n} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k \right| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)|.$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \frac{\pi}{2} \max_{\varepsilon \in \mathrm{I}_n} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k \right|.$$

3. Prouver que $\frac{\pi}{2}$ est la plus petite constante strictement positive telle que l'inégalité ci-dessus ait lieu pour tout n et tout n-uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ de nombres complexes non nuls.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons D_θ la droite du plan complexe passant par 0 et de vecteur normal $e^{i\theta}$. On choisit les signes $\varepsilon(k)$ de sorte que $\varepsilon(k) z_k$ appartienne au demi-plan fermé délimité par D_θ et contenant $e^{i\theta}$. Dans ce cas, $\varepsilon(k)$ est exactement le signe de $\cos(\theta - \theta_k)$ (lorsque cette quantité est non nulle *i.e.* si $z_k \notin \mathrm{D}_\theta$). Il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)| = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) \rho_k \cos(\theta_k - \theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k e^{-i\theta} \right)$$
$$\leqslant \left| e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k \right|.$$

Ce qui précède étant valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)| \leqslant \max_{\varepsilon \in \mathrm{I}_n} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k \right|.$$

Inversement, soit $\varepsilon \in \mathrm{I}_n$. On écrit $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k = r e^{i\theta}$ où $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k\right| = r = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k e^{-i\theta} = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k e^{-i\theta}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k)\rho_k \cos(\theta_k - \theta) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)|,$$

ce qui prouve que

$$\max_{\varepsilon\in \mathrm{I}_n}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k\right| \leqslant \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)|$$

et l'égalité demandée en résulte.

2. On a, d'après la question 1,

$$\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(\theta_k - \theta)| \mathrm{d}\theta \leqslant \pi \max_{\varepsilon\in \mathrm{I}_n}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k\right|.$$

On va calculer l'intégrale de gauche. Comme $u \longmapsto |\cos u|$ est une fonction π-périodique, on a pour tout k,

$$\int_0^{\pi} |\cos(\theta - \theta_k)| \mathrm{d}\theta = \int_{-\theta_k}^{\pi-\theta_k} |\cos u| \mathrm{d}u = \int_0^{\pi} |\cos u| \mathrm{d}u = 2.$$

On obtient donc

$$2\sum_{k=1}^{n} |z_k| = 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k \leqslant \pi \max_{\varepsilon\in \mathrm{I}_n}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k\right|,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

3. On va prendre pour $z_1, \dots, z_n$ les racines $2n$-ièmes de l'unité qui se trouvent dans le demi-plan défini par $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ (hormis -1), c'est-à-dire les complexes $z_k = e^{\frac{i(k-1)\pi}{2n}}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. On a dans ce cas $\sum_{k=1}^{n} |z_k| = n$. Pour estimer le second membre de l'inégalité obtenue en 2, on va utiliser la question 1. Notons f la fonction définie par

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\cos\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

On voit facilement que f est $\dfrac{\pi}{n}$-périodique ce qui permet de se placer sur $[0, \pi/n]$ pour calculer son maximum. Pour simplifier les calculs, on va supposer en plus que $n = 2p$ est pair. On a alors

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right) - \sum_{k=p}^{n-1} \cos\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)$$

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\Big(\theta - \frac{k\pi}{n}\Big) = \mathrm{Re}\Big(e^{i\theta}\frac{1+i}{1-e^{-i\pi/n}}\Big) = \frac{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4p})}{2\sin\frac{\pi}{4p}}.$$

Il en résulte que

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{4p}}\Big(\cos\Big(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4p}\Big) + \cos\Big(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4p}\Big)\Big) = \frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{4p})}{\sin\frac{\pi}{4p}}.$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ le maximum de f est donc $\mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{4p} = \mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{2n}$. Si C est une constante qui convient pour l'inégalité de la question 2, on doit donc avoir pour tout n pair,

$$n \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{2n}$$

soit $n\tan\frac{\pi}{2n} \leqslant \mathrm{C}$. En passant à la limite, on obtient $\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{C}$. $\lhd$

Dans l'exercice 3.48 le lecteur trouvera un théorème de Riemann qui affirme que si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente, on peut trouver pour tout réel λ une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda$. On peut se poser la même question dans $\mathbb{C}$. Un théorème de Steinitz affirme que si une série complexe $\sum z_n$ converge, l'ensemble des sommes des séries convergentes de la forme $\sum z_{\sigma(n)}$ (où σ est une permutation de $\mathbb{N}$) est un sous-espace affine réel de $\mathbb{C}$. On le démontre à partir du lemme de confinement suivant : si $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes de module $\leqslant 1$ et de somme nulle, il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\left|\sum\limits_{i=1}^{p} z_{\sigma(i)}\right| \leqslant \sqrt{5}$ pour tout p (le lecteur pourra trouver ces différents résultats dans GONNORD (S.) & TOSEL (N.), Thèmes d'analyse pour l'Agrégation, *Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, 1996, p. 18-22). Dans l'exercice suivant est établi un lemme de confinement analogue. On ne s'autorise plus à permuter les z_i mais on peut leur attribuer un signe. Pour un bon choix de ces signes, les sommes partielles auront toutes un module $\leqslant \sqrt{3}$. La deuxième question en donne une application spectaculaire aux séries : toute série complexe $\sum z_n$ dont le terme général tend vers 0 peut être rendue convergente en «signant» convenablement les z_n.*

1.19. Un lemme de confinement

1. Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tel que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $|\varepsilon_1 z_1 + \cdots + \varepsilon_p z_p| \leqslant \sqrt{3}$.

2. Soit $(z_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers 0. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\{\pm 1\}$ telle que la série $\sum \varepsilon_n z_n$ converge.

(**École normale supérieure**)

Solution.

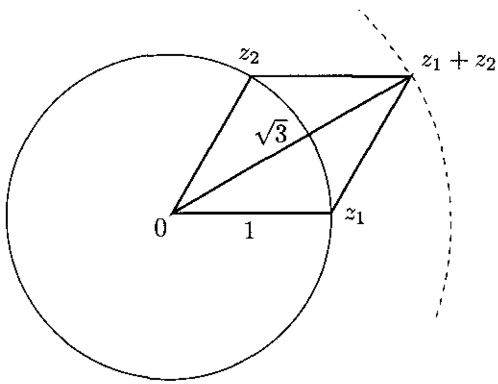
1. Notons $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. On va montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ la validité de la proposition (H_n) suivante

$$(\mathrm{H}_n) \quad \begin{cases} \text{Pour tout } (z_1, \dots, z_n) \in \mathrm{D}^n, \quad \text{il existe } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n \\ \qquad \text{tel que pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i z_i \right| \leqslant \sqrt{3}. \end{cases}$$

• (H_1) étant triviale, montrons (H_2). Soit $(z_1, z_2) \in \mathrm{D}^2$. Si $|z_1 - z_2| \leqslant 1$ alors le choix $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$ convient. Supposons $|z_1 - z_2| > 1$. On a alors $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) > 1$ de sorte que,

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) \leqslant 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - 1 \leqslant 4 - 1 = 3$$

Le choix $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ convient.



La figure ci-dessus montre le cas d'égalité : on a alors $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$.

Pour prouver (H_2) *on aurait aussi pu utiliser l'égalité du parallélogramme :* $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \leqslant 4$ *donc* $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{2}$ *ou* $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{2}$.

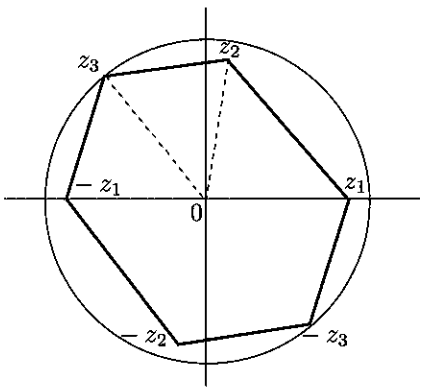
• On suppose (H_{n-1}) vérifiée avec $n \geqslant 3$ et on se donne $(z_1, \ldots, z_n)$ dans D^n. L'idée est de regrouper ensembles deux des z_i pour se ramener à l'hypothèse de récurrence. Distinguons deux cas.

⋆ Cas 1 : il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $z_1 + \varepsilon z_2 \in \mathrm{D}$. On applique l'hypothèse de récurrence (H_{n-1}) à $(z_1 + \varepsilon z_2, z_3, \ldots, z_n) \in \mathrm{D}^{n-1}$. Notons $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ une suite de signes donnée par l'hypothèse de récurrence pour ce $(n-1)$-uplet. La suite $(\varepsilon_2, \varepsilon\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ convient pour $(z_1, \ldots, z_n)$. En effet, $|\varepsilon_2 z_1| \leqslant 1 \leqslant \sqrt{3}$, $|\varepsilon_2 z_1 + \varepsilon_2 \varepsilon z_2| \leqslant 1 < \sqrt{3}$ et pour $k \geqslant 3$,

$$\left|\varepsilon_2(z_1 + \varepsilon z_2) + \sum_{i=3}^{k} \varepsilon_i z_i\right| \leqslant \sqrt{3}.$$

⋆ Cas 2 : les nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$ ne sont pas dans D. D'après la preuve du cas $n = 2$, on a $|z_1 + z_2| \leqslant \sqrt{3}$ et $|z_1 - z_2| \leqslant \sqrt{3}$. Ainsi, tous les choix possibles pour ε_1 et ε_2 conviendront. Pour se ramener à l'hypothèse de récurrence on va utiliser z_3.

Commençons par prouver que l'un des nombres complexes $z_1 - z_3$, $z_1 + z_3$, $z_2 - z_3$ ou $z_2 + z_3$ est dans D. On raisonne par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, tous les nombres $z_1 \pm z_2$, $z_1 \pm z_3$, $z_2 \pm z_3$ sont de module > 1. Les nombres $\pm z_1$, $\pm z_2$, $\pm z_3$ sont alors non nuls, et d'arguments différents. Quitte à permuter les indices ou à remplacer z_i par $-z_i$, on peut supposer que $z_1, z_2, z_3, -z_1, -z_2, -z_3$ est un hexagone non croisé :



Les côtés de cet hexagone sont exactement les six nombres $|z_1 \pm z_2|$, $|z_1 \pm z_3|$, $|z_2 \pm z_3|$. Nécessairement, l'un des angles au centre de cet hexagone est $\leqslant \dfrac{\pi}{3}$. Le côté correspondant a une longueur $\leqslant 1$ (écrire l'identité d'Al Kachi pour s'en convaincre).

Revenons maintenant à la preuve de (H_n) en traitant par exemple le cas où $z_1 + \varepsilon z_3 \in \mathrm{D}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, le cas où $z_2 + \varepsilon z_3 \in \mathrm{D}$ se faisant de même. On applique l'hypothèse de récurrence (H_{n-1}) au $(n-1)$-uplet $(z_1 + \varepsilon z_3, z_2, z_4, \ldots, z_n)$. Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_n)$ un $(n-1)$-uplet de signes ainsi obtenu. Alors on prend $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon\varepsilon_1, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_n)$ pour $(z_1, \ldots, z_n)$. Vérifions que ce choix convient : $|\varepsilon_1 z_1| = 1 < \sqrt{3}$, $|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$ (d'après la remarque faite plus haut), $|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon\varepsilon_1 z_3| = |\varepsilon_1(z_1 + \varepsilon z_3) + \varepsilon_2 z_2| \leqslant \sqrt{3}$, etc.

2. Il résulte de ce qui précède, que si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes bornés par $M > 0$, alors il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i \right| \leqslant M\sqrt{3}.$$

La suite (z_n) étant bornée, on peut se donner $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant M$. On considère alors une suite strictement croissante d'entiers N_k, telle que $N_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait : $\forall n \geqslant N_k$, $|z_n| \leqslant \dfrac{M}{2^k}$. Cela est clairement possible puisque (z_n) tend vers 0.

On définit maintenant la suite (ε_n) sur chaque tranche $[\![N_k, N_{k+1}-1]\!]$ de manière à avoir pour tout $p \in [\![N_k, N_{k+1}-1]\!]$,

$$\left| \sum_{j=N_k}^{p} \varepsilon_j z_j \right| \leqslant \frac{\sqrt{3}M}{2^k}.$$

Notons U_k la somme de la tranche de Cauchy de la série $\sum \varepsilon_n z_n$ d'indices entre N_k et $N_{k+1}-1$:

$$U_k = \sum_{j=N_k}^{N_{k+1}-1} \varepsilon_j z_j.$$

Comme $|U_k| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}M}{2^k}$, la série $\sum U_k$ est absolument convergente. Si pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi(n)$ l'unique indice k tel que $N_k \leqslant n < N_{k+1}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i = \sum_{k=0}^{\varphi(n)-1} U_k + \underbrace{\sum_{j=N_k}^{n} \varepsilon_i z_i}_{\leqslant \frac{\sqrt{3}M}{2^{\varphi(n)}}}.$$

Cela prouve que la série $\sum \varepsilon_i z_i$ converge. $\triangleleft$

L'exercice suivant propose une équation fonctionnelle dans $\mathbb{R}[X]$.

1.20. Équation fonctionnelle de Shapiro

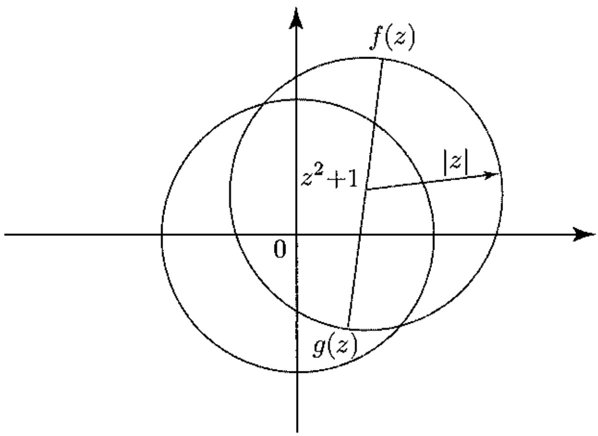
1. Déterminer les parties finies non vides A de $\mathbb{C}$ stables par $f : z \longmapsto z^2 + z + 1$ et $g : z \longmapsto z^2 - z + 1$.

2. En déduire $\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \ \mathrm{P}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{P}(\mathrm{X} + 1)\}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Les points $f(z)$ et $g(z)$ sont sur le cercle de centre $z^2 + 1$ et de rayon $|z|$ et comme $|f(z) - g(z)| = 2|z|$, ils y sont même diamétralement opposés.



Si $z^2 + 1 \neq 0$, on est certain que l'un des deux nombres complexes $f(z)$ ou $g(z)$ est de module strictement supérieur à $|z|$.

Il en résulte que si on choisit $z \in \mathrm{A}$ de module maximal, on a nécessairement $z^2+1 = 0$ *i.e.* $z \in \{-i, i\}$. Comme $g(i) = -i$ et $g(-i) = i$, on a donc $\{-i, i\} \subset \mathrm{A}$ et de plus tout point de $\mathrm{A} \setminus \{-i, i\}$ est de module strictement inférieur à 1. On va montrer par l'absurde que A est égal à l'ensemble $\{-i, i\}$. Supposons donc qu'il existe $z \in \mathrm{A} \setminus \{-i, i\}$. On le choisit de module maximal. Alors $f(z)$ ou $g(z)$ est de module strictement plus grand donc égal à i ou à $-i$. Or les antécédents de i par f sont i et $-1-i$, ceux de $-i$ sont $-i$ et $-1+i$. Pour g on trouve les opposés. Ils sont tous de module $\geqslant 1$, ce qui fournit la contradiction. Donc $\mathrm{A} = \{-i, i\}$.

2. Les polynômes constants solutions sont 0 et 1. Soit P une solution avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. Alors P est unitaire et l'ensemble des racines de P est stable par f et par g (car $(z - 1)^2 + (z - 1) + 1 = z^2 - z + 1$). Il s'agit donc de $\{-i, i\}$. Comme P est réel, les multiplicités des racines i et $-i$ sont égales et P est de la forme $(\mathrm{X}^2 + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie alors très facilement que tous ces polynômes conviennent. ◁

1.21. Homographies laissant invariant le disque unité

Déterminer le groupe des homographies f de $\mathbb{C}$ laissant invariant D_0 (*i.e.* telles que $f(\mathrm{D}_0) = \mathrm{D}_0$), où D_0 est le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

(École polytechnique)

Solution.

Une homographie est une application de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $ad - bc \neq 0$ (si $ad - bc = 0$, l'homographie dégénère en une application constante). Une telle application réalise une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ si $c = 0$ et de $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ sinon.

Si une telle homographie f envoie D_0 sur D_0, elle envoie aussi le complémentaire de D_0 dans le complémentaire de D_0. Notons C_0 le cercle de centre 0 et de rayon 1. Tout point z de C_0 est limite d'une suite (z_n) de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}_0$. Par continuité, $f(z)$ est limite de la suite $(f(z_n))$ de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}_0$. Ainsi $f(z)$ appartient à l'adhérence de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}_0$. Par ailleurs, $f(z)$ appartient à D_0, donc z appartient à C_0. On a donc $f(\mathrm{C}_0) \subset \mathrm{C}_0$. Nous allons commencer par chercher les homographies qui envoient C_0 dans C_0.

On doit avoir, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(e^{it})| = 1$, soit $|ae^{it} + b| = |ce^{it} + d|$. On obtient

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a\overline{b}e^{it}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(c\overline{d}e^{it})$$

et il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 2\,\mathrm{Re}((c\overline{d} - a\overline{b})e^{it}) = 2|c\overline{d} - a\overline{b}|e^{i(t_0+t)}.$$

On a nécessairement

$$c\overline{d} - a\overline{b} = 0 \quad \text{et} \quad |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2,$$

sinon le membre de gauche de l'égalité dépend de t.

Si $a = 0$, alors $d = 0$ (car $ad - bc \neq 0$) et $|b| = |c|$. On obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$|f(z)| = \left| \frac{b}{cz} \right| = \frac{1}{|z|}.$$

L'application f envoie D_0 dans son complémentaire et ne convient pas.

Si $a \neq 0$, on écrit $\overline{b} = \dfrac{c\overline{d}}{a}$ et on a

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = |a|^2 + \frac{|c|^2|d|^2}{|a|^2} - |c|^2 - |d|^2 = \frac{(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2)}{|a|^2}.$$

Cette quantité étant nulle on a donc $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$.

Si $|a| = |c|$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $c = ae^{i\alpha}$. On obtient ensuite $\overline{b} = \overline{d}e^{i\alpha}$ et donc $d = be^{i\alpha}$, ce qui donne $ad - bc = 0$. Il faut donc $|a| = |d| \neq 0$. On obtient alors

$$f(z) = \frac{a}{d}\left(\frac{z + \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{c}{d}z}\right).$$

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{a}{d} = e^{i\alpha}$. On pose $\dfrac{b}{a} = -z_0$. On a alors

$$\frac{c}{d} = \frac{a\overline{b}}{d\overline{d}} = \frac{a\overline{b}}{a\overline{a}} = \frac{\overline{b}}{\overline{a}} = -\overline{z_0}$$

et

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}.$$

Notons de plus que $z_0 = f^{-1}(0)$ donc z_0 appartient à $\mathrm{D}_0 \setminus \mathrm{C}_0$ et $|z_0| < 1$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que réciproquement si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, avec $|z_0| < 1$, l'homographie $f : z \longmapsto e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$ envoie D_0 sur D_0. La fonction f est définie sur D_0 et, pour $z \in \mathrm{D}_0$,

$$|f(z)|^2 = \frac{|z - z_0|^2}{|1 - \overline{z_0}z|^2} = \frac{|z|^2 + |z_0|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z_0})}{1 + |z\overline{z_0}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z_0})} \leqslant 1,$$

car $|z|^2 + |z_0|^2 - 1 - |z|^2|z_0|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |z_0|^2) \leqslant 0$. On a donc $f(\mathrm{D}_0) \subset \mathrm{D}_0$. On montre aisément que f^{-1} est définie par

$$f^{-1}(z) = e^{-i\alpha}\frac{z + e^{i\alpha}z_0}{1 + \overline{z_0}e^{-i\alpha}}.$$

L'homographie f^{-1} a la même forme que f, α et z_0 étant remplacé par $-\alpha$ et $-e^{i\alpha}z_0$. On a donc également $f^{-1}(\mathrm{D}_0) \subset \mathrm{D}_0$, soit $\mathrm{D}_0 \subset f(\mathrm{D}_0)$ et finalement $f(\mathrm{D}_0) = \mathrm{D}_0$.

Conclusion. Une homographie laisse D_0 invariant s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, avec $|z_0| < 1$ tels que f soit la fonction $z \longmapsto e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$. $\lhd$

Si on cherche les homographies qui laissent invariant le disque ouvert de centre 0 *et de rayon* 1, *on trouve le même résultat.*

L'exercice suivant fait appel à de nombreuses notions. On y utilise les nombres complexes pour donner une interprétation géométrique du problème posé mais ensuite on constate qu'il s'agit essentiellement d'étudier une suite récurrente linéaire, donc de calculer les puissances d'une matrice.

1.22. Suites de polygones

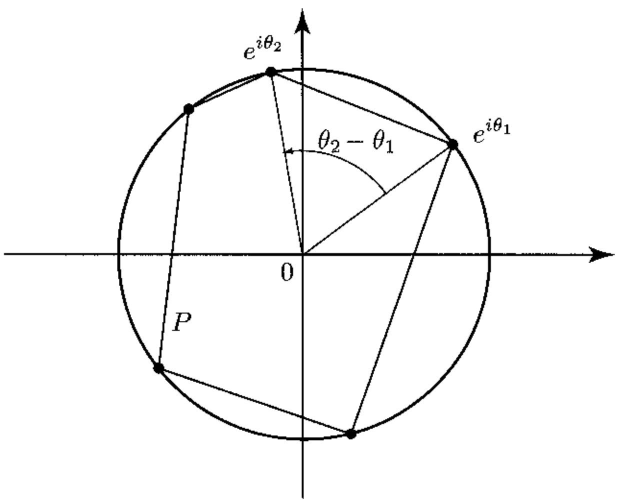
Soit $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n < 2\pi$ et a, b des réels positifs ou nuls de somme 1. On définit $\theta_j^{(0)} = \theta_j$, puis $\theta_j^{(k+1)} = a\theta_j^{(k)} + b\theta_{j+1}^{(k)} \pmod{2\pi}$ si $1 \leqslant j < n$ et $\theta_n^{(k+1)} = a\theta_n^{(k)} + b\theta_1^{(k)} \pmod{2\pi}$.

Étudier la limite, lorsque k tend vers $+\infty$, de $\theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)}$.

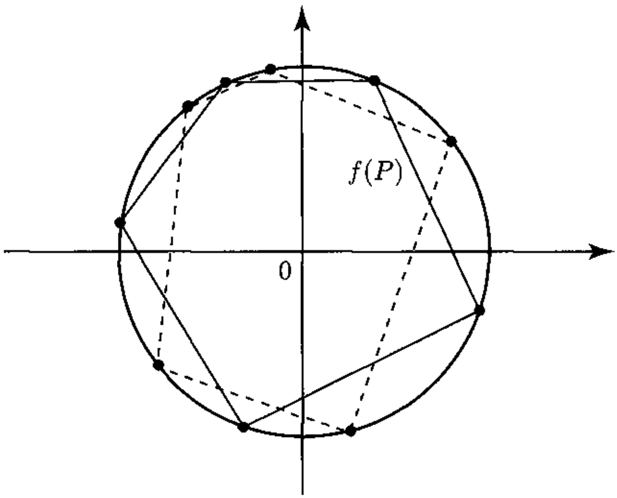
(**École normale supérieure**)

Solution.

Il importe de visualiser ce problème géométriquement. Aux n réels θ_j on associe le polygone convexe P inscrit dans le cercle unité de $\mathbb{C}$ dont les sommets sont les $e^{i\theta_j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Les quantités $\alpha_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ s'interprètent alors comme les angles au centre de ce polygone. On posera $\alpha_n = \theta_1 - \theta_n + 2\pi$ de manière à ce que la somme des α_j soit toujours égale à 2π.



La transformation étudiée s'interprète alors de la manière suivante. Au polygone $\mathrm{P}_k = (\theta_j^{(k)})_{1\leqslant j\leqslant n}$, on associe le polygone $f(\mathrm{P}_k) = (\theta_j^{(k+1)})_{1\leqslant j\leqslant n}$ où $\theta_j^{(k+1)}$ est le barycentre de $\theta_j^{(k)}$ et $\theta_{j+1}^{(k)}$, affectés des coefficients positifs a et b. Par exemple, pour $a = b = 1/2$, les sommets de $f(\mathrm{P}_k)$ sont obtenus en prenant l'intersection avec le cercle unité des médiatrices des côtés de P_k. Voici par exemple l'image par f du polygone précédent dans le cas $a = b = 1/2$:



L'exercice demande d'étudier le comportement, lorsqu'on fait tendre k vers l'infini, des angles $\alpha_j^{(k)} = \theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)}$.

Bien entendu, si $a = 1$ la fonction f est constante et les suites $\alpha_j^{(k)}$ sont nulles. Dans le cas $a = 0$ et $b = 1$, le polygone $f(\mathrm{P})$ est le même que P, mais la numérotation des sommets y a subi un décalage d'une unité. Dans ce cas, les suites $\alpha_j^{(k)}$ sont périodiques de période n. Dans la suite on va donc se préoccuper du cas $0 < a < 1$. L'observation de quelques exemples va nous permettre d'avoir une intuition du résultat.

• Si on prend $n = 2$ et $a = b = 1/2$, on obtient deux points alignés après une itération de la transformation f. Et les suites $\alpha_j^{(k)} = \theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)}$ pour $j = 1, 2$ sont alors stationnaires à π.

• Plus généralement, si les n points forment un polygone régulier P, alors $f(\mathrm{P})$ est un autre polygone régulier obtenu par rotation à partir de P. Dans ce cas les suites $\alpha_j^{(k)}$ sont constantes égales à $\dfrac{2\pi}{n}$.

On va en fait montrer que lorsque $0 < a < 1$, toutes les suites $\alpha_j^{(k)}$ convergent vers $\dfrac{2\pi}{n}$. Dans ce qui suit, l'indice j sera lu modulo n. On a, pour tout j et tout k,

$$\alpha_j^{(k+1)} = \theta_{j+1}^{(k+1)} - \theta_j^{(k+1)} = a(\theta_{j+1}^{(k)} - \theta_j^{(k)}) + b(\theta_{j+2}^{(k)} - \theta_{j+1}^{(k)}) = a\alpha_j^{(k)} + b\alpha_{j+1}^{(k)}$$

Si, pour simplifier, on note X_k le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$, on a donc tout simplement $\mathrm{X}_{k+1} = \mathrm{AX}_k$, où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{M}.$$

On est ramené à un problème d'algèbre linéaire, à savoir le calcul des puissances de A. Or, la matrice M est une matrice de permutation, de polynôme caractéristique $X^n - 1$. Elle est diagonalisable, ses valeurs propres étant les racines n-ièmes de l'unité. Il en résulte que les valeurs propres de A sont les $\lambda_\omega = a + b\omega$ où $\omega^n = 1$. Elles sont deux à deux distinctes et de module inférieur à 1 (λ_ω est sur le segment joignant 1 à ω), la seule qui est de module 1 étant $\lambda_1 = a + b = 1$. Ainsi, si on note p_ω la projection sur la droite propre pour λ_ω parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres de A, on a $A = \sum\limits_{\omega^n=1} \lambda_\omega p_\omega$ et pour tout k, $A^k = \sum\limits_{\omega^n=1} \lambda_\omega^k p_\omega$. Par suite, A^k tend vers la projection p_1 sur la droite propre pour la valeur propre 1, à savoir la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres.

Ainsi, $A^k X_0$ tend vers un vecteur dont toutes les composantes sont égales. Comme on a $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} = 2\pi$ pour tout k, ces composantes valent $\dfrac{2\pi}{n}$. Le polygone $f^k(\mathrm{P})$ «converge» donc vers un polygone régulier. ◁

Les deux exercices qui suivent sont liés à la notion de mesure mais ne font intervenir que la longueur pour un intervalle. Le premier définit la mesure extérieure de Lebesgue d'une partie de $\mathbb{R}$. On y utilise le théorème de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement d'un compact de $\mathbb{R}$ par une famille d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

1.23. Mesure extérieure de Lebesgue

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Pour toute famille au plus dénombrable $F = (]a_i, b_i[)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts recouvrant E, on considère $l(F) = \sum\limits_{i\in I}(b_i - a_i) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On définit alors la *mesure extérieure de Lebesgue* de E par la formule $\mu(E) = \inf\limits_{F} l(F)$, où la borne inférieure est prise sur toutes les familles au plus dénombrables d'intervalles ouverts recouvrant E.

1. Quelle est la mesure extérieure d'un intervalle ?

2. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties de mesure extérieure nulle est encore de mesure extérieure nulle.

3. Quelle est la mesure extérieure de $\mathbb{Q}$?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Nous allons démontrer que la mesure extérieure d'un intervalle est sa longueur, ce qui n'est pas évident sur la définition.

Supposons d'abord que E soit un intervalle compact $[a, b]$. Si F est un recouvrement de E, on peut, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, en extraire un sous-recouvrement fini $\mathrm{F}' = (]a_{i_k}, b_{i_k}[)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. De l'inclusion $[a, b] \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n}]a_{i_k}, b_{i_k}[$, on déduit que $\chi_{[a,b]} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \chi_{]a_{i_k}, b_{i_k}[}$ (où χ_{I} désigne la fonction caractéristique de I)[2] et donc

$$b - a = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]a_{i_k}, b_{i_k}[}(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (b_{i_k} - a_{i_k}) = l(\mathrm{F}').$$

Par définition de la somme de la famille $(b_i - a_i)_{i \in \mathrm{I}}$, on a, *a fortiori*, $b - a \leqslant l(\mathrm{F})$. Ceci étant vrai pour tout famille F d'intervalles ouverts recouvrant $[a, b]$, on en déduit que $b - a \leqslant \mu([a, b])$.

Afin de montrer une inégalité de sens inverse, on remarque que, pour tout $\varepsilon > 0$, la famille à un élément $\mathrm{F} = (]a - \varepsilon, b + \varepsilon[)$ recouvre $[a, b]$. Il s'ensuit que $\mu([a, b]) \leqslant l(\mathrm{F}) = b - a + 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\mu([a, b]) \leqslant b - a$ et donc que $\mu([a, b]) = b - a$.

Pour traiter le cas général, remarquons que la fonction μ est croissante pour l'inclusion. En effet, si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$ et si F est une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts recouvrant E′, alors F recouvre E. On en déduit que $\mu(\mathrm{E}) \leqslant l(\mathrm{F})$, puis, par définition de $l(\mathrm{E}')$, que $\mu(\mathrm{E}) \leqslant \mu(\mathrm{E}')$. Si donc E est un intervalle borné d'extrémités a et b, on a, pour $\varepsilon \in]0, \frac{b-a}{2}[$,

$$b - a - 2\varepsilon = \mu([a + \varepsilon, b - \varepsilon]) \leqslant \mu(]a, b[) \leqslant \mu(\mathrm{E}) \leqslant \mu([a, b]) = b - a$$

et donc $\mu(\mathrm{E}) = b - a$.

Si enfin E est un intervalle non borné, on peut, pour tout $\mathrm{A} > 0$, trouver un intervalle borné I, inclus dans E, de longueur supérieure à A. On en déduit que $\mu(\mathrm{E}) \geqslant \mu(\mathrm{I}) \geqslant \mathrm{A}$ et donc que $\mu(\mathrm{E}) = +\infty$.

2. L'utilisation des fonctions caractéristiques et des intégrales est très commode mais pas indispensable. On peut aussi raisonner, comme nous le faisons dans l'exercice suivant, en extrayant de F′ un sous-recouvrement F″ de cardinal minimal.

2. Soit $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties telles que $\mu(\mathrm{E}_n) = 0$ pour tout n et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille au plus dénombrable $\mathrm{F}_n = (]a_{n,i}, b_{n,i}[)_{i\in \mathrm{I}_n}$ d'intervalles ouverts recouvrant E_n telle que $l(\mathrm{F}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. L'ensemble $\mathrm{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} \times \mathrm{I}_n$ est au plus dénombrable, car réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. La famille $\mathrm{F} = (]a_{n,i}, b_{n,i}[)_{(n,i)\in\mathrm{I}}$ recouvre E et on a, d'après les propriétés des familles sommables,

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{E}) &\leqslant \sum_{(n,i)\in\mathrm{I}} (b_{n,i} - a_{n,i}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}_n} (b_{n,i} - a_{n,i})\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l(\mathrm{F}_n) \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Par définition de μ, on a donc $\mu(\mathrm{E}) = 0$.

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc réunion d'une famille dénombrable de singletons, c'est-à-dire de segments de longueur nulle. Il résulte alors des questions 1 et 2 que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. $\triangleleft$

En réalité, toutes les parties envisagées dans cet exercice sont des parties mesurables au sens de Lebesgue. Pour de telles parties, la mesure extérieure coïncide avec la mesure de Lebesgue. Notons que les deux premières questions fournissent une autre preuve de la non-dénombrabilité d'un intervalle non trivial (voir l'exercice 1.3) puisque les singletons ont une mesure extérieure nulle.

1.24. Recouvrements

On suppose donné pour tout réel x un intervalle ouvert $\mathrm{I}(x)$ centré en x et dont la longueur, notée $\mu(\mathrm{I}(x))$, est majorée par $c > 0$ fixé. Soit $a < b$ deux réels. Montrer qu'il existe un nombre fini de réels $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$(i)\ [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{I}(x_i) \text{ et } (ii)\ \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathrm{I}(x_i)) \leqslant 2(b-a) + c.$$

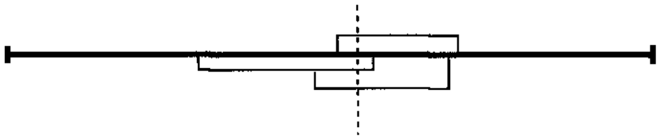
(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Le fait que l'on puisse extraire de la famille $(\mathrm{I}(x))_{x\in[a,b]}$ un recouvrement fini du segment $[a,b]$ résulte du théorème de Borel-Lebesgue, le segment $[a,b]$ étant compact. Cela permet de réaliser la condition (i). Pour satisfaire la condition (ii), il faut toutefois ne pas prendre trop d'intervalles. Il semble donc raisonnable de choisir parmi tous les sous-recouvrements finis de cette famille, un sous-recouvrement de cardinal minimal n. On note $\mathrm{I}(x_1), \ldots, \mathrm{I}(x_n)$ les intervalles de ce recouvrement et, pour tout i, $\mathrm{I}(x_i) =]a_i, b_i[$.

Examinons les propriétés de ce recouvrement. Elles nous feront comprendre d'où vient le majorant $2(b-a)+c$.

(a) Tout point de $]a, b[$ appartient au plus à *deux* des intervalles de ce recouvrement. En effet, si α appartient à trois intervalles, l'un de ces trois intervalles est inclus dans la réunion des deux autres et peut donc être éliminé, ce qui contredit la minimalité de n.

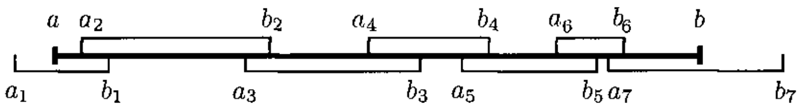


(b) Les points a et b appartiennent chacun à au plus *un* des intervalles du recouvrement. En effet, si le point a appartient à deux intervalles $]a_{n_1}, b_{n_1}[$ et $]a_{n_2}, b_{n_2}[$ et que par exemple $b_{n_1} \leq b_{n_2}$, on peut retrancher l'intervalle $\mathrm{I}(x_{n_1})$ du sous-recouvrement sans qu'il cesse d'être un recouvrement, ce qui contredit à nouveau la minimalité de n. Il en est de même en b.

(c) Aucun des intervalles du recouvrement n'est contenu dans un autre intervalle du recouvrement.

On peut alors supposer que les $\mathrm{I}(x_i)$ sont rangés dans «l'ordre croissant», c'est-à-dire que

$$a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < b_3 < \cdots < a_n < b_{n-1} < b_n.$$



D'après la propriété (b) on a $a_1 < a < a_2$ et $b_{n-1} < b < b_n$.

Comme, par construction, le centre x_1 de l'intervalle $]a_1, b_1[$ est dans le segment $[a, b]$, on a $a - a_1 \leqslant \dfrac{c}{2}$ (il peut y avoir égalité si $x_1 = a$). On a, pour les mêmes raisons, $b_n - b \leqslant \dfrac{c}{2}$.

Puisque l'un au plus des intervalles du recouvrement fini dépasse à gauche de a (celui qui contient a), et qu'il dépasse d'au plus $\dfrac{c}{2}$ (son centre est à droite de a), qu'un intervalle au plus dépasse à droite de b, et d'au plus $\dfrac{c}{2}$, et que le reste de $]a, b[$ est recouvert au plus deux fois, il semble clair que (voir dessin)

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\mathrm{I}(x_i)) \leq 2(b-a) + \frac{c}{2} + \frac{c}{2}.$$

Montrons-le précisément. On se ramène à des intervalles disjoints en écrivant :

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_n - a_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(b_i - a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)$$
$$= b_n - a_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(b_i - a_{i+1}).$$

Or on a $b_n - a_1 = (b_n - b) + (b - a) + (a - a_1) \leqslant (b - a) + c$, d'après ce qui précède, et comme les intervalles $]a_{i+1}, b_i[$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ sont deux à deux disjoints et inclus dans $[a, b]$, on a aussi $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(b_i - a_{i+1}) \leqslant b - a$. On obtient donc $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant 2(b - a) + c$, ce qui est l'inégalité (*ii*) souhaitée. ◁

Nous terminons ce chapitre avec quelques exercices de nature topologique. Le premier permet de rappeler que les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1.25. Irrationnels denses dans une partie

> Soit M une partie majorée de $\mathbb{R}_+^*$ contenant au moins deux éléments et telle que pour tout $(a, b) \in \mathrm{M}^2$, $\sqrt{ab} \in \mathrm{M}$. Montrer que $\mathrm{M} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $[\inf \mathrm{M}, \sup \mathrm{M}]$.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Par hypothèse on a $\inf \mathrm{M} < \sup \mathrm{M}$. Montrons tout d'abord que M est dense dans le segment $\mathrm{I} = [\inf \mathrm{M}, \sup \mathrm{M}]$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\inf \mathrm{M} \leqslant a < b \leqslant \sup \mathrm{M}$ tel que $]a, b[\cap \mathrm{M}$ soit vide. On va agrandir notre intervalle $]a, b[$ au maximum en conservant cette propriété : posons

$$\alpha = \inf\{x \geqslant \inf \mathrm{M},\ ]x, b[\cap \mathrm{M} = \emptyset\} \text{ et } \beta = \sup\{x \leqslant \sup \mathrm{M},\ ]a, x[\cap \mathrm{M} = \emptyset\}.$$

L'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ a toujours une intersection vide avec M mais, par construction, il existe des éléments de M aussi près qu'on veut de α (à gauche) et de β (à droite). En fait cet intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ n'est autre que la composante connexe de l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathrm{M}}$ qui contient $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ (voir cette notion dans la première question de l'exercice 1.27). On peut donc se donner une suite (a_n) de M qui converge vers α et une suite (b_n)

de M qui converge vers β. Les réels $\sqrt{a_n b_n}$ sont dans M par hypothèse et tendent vers $\sqrt{\alpha\beta} \in]\alpha, \beta[$. Pour n assez grand ils sont donc dans l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ ce qui amène notre contradiction.

Montons maintenant que $\mathrm{M} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $[\inf \mathrm{M}, \sup \mathrm{M}]$. Raisonnons encore par l'absurde en supposant qu'il existe un intervalle ouvert $]a, b[\subset \mathrm{I}$ tel que tous les éléments de $\mathrm{M} \cap]a, b[$ soient rationnels.

En utilisant la décomposition des entiers en facteur premiers, il est facile de voir que tout nombre rationnel $x > 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(x)}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et où $(\nu_p(x))$ est une suite d'entiers relatifs presque nulle (c'est-à-dire dont seul un nombre fini de termes sont non nuls). Par exemple $\dfrac{12}{25} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{-2}$. On aura besoin de la constatation suivante : si x est un nombre rationnel, alors $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ si et seulement si les entiers $\nu_p(x)$ sont tous pairs. La condition est clairement suffisante et elle est nécessaire car si $y = \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ alors $x = y^2$ et $\nu_p(x) = 2\nu_p(y)$ pour tout nombre premier p.

Revenons alors à l'exercice. Par densité de M notre intervalle $]a, b[$ contient deux éléments $x < y$ de M (qui sont donc rationnels). Par hypothèse $\sqrt{xy}$ est encore dans M et comme $\sqrt{xy} \in]x, y[\subset]a, b[$ il est aussi rationnel. Recommençons en remplaçant y par $y_1 = \sqrt{xy}$ et ainsi de suite. Tous les réels de la suite définie par $y_0 = y$ et $y_{n+1} = \sqrt{xy_n}$ sont dans $\mathrm{M} \cap \mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier. La suite $\nu_p(y_n)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et vérifie la relation de récurrence $\nu_p(y_{n+1}) = \dfrac{\nu_p(x) + \nu_p(y_n)}{2}$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique qui converge vers $\nu_p(x)$. Par conséquent elle est stationnaire et par suite constante (car le seul antécédent de $\nu_p(x)$ par la fonction $t \mapsto 1/2(\nu_p(x) + t)$ est $\nu_p(x)$). On a donc $\nu_p(y) = \nu_p(x)$. Comme cela vaut pour tout p on a $y = x$ et c'est une contradiction.

Conclusion. L'ensemble $\mathrm{M} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans I. $\triangleleft$

1.26. Application ouverte

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. Montrer que l'image par P d'une partie fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{C}$ est fermée (resp. ouverte).

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Il suffit de prouver le résultat pour les parties fermées. En effet, si U est un ouvert de complémentaire le fermé F alors $\mathrm{P}(\mathrm{U}) = \mathbb{C}^2 \setminus \mathrm{P}(\mathrm{F})$ car P est surjectif (le théorème de d'Alembert-Gauss assure l'existence d'une racine de $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - w$ pour tout $w \in \mathbb{C}$). Donc $\mathrm{P}(\mathrm{U})$ est ouvert si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{F})$ est fermé.

Montrons que P(F) est fermé. On suppose F non vide. Soit w_n une suite de points de P(F) qui converge vers $w \in \mathbb{C}$. On veut prouver que $w \in$ P(F). Pour tout n on choisit $z_n \in$ F tel que $\mathrm{P}(z_n) = w_n$. La suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée sinon on pourrait en extraire une sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ telle que $|z_{\varphi(n)}| \to +\infty$ et comme $|\mathrm{P}(z)| \to +\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$ on aurait $|w_{\varphi(n)}| \to +\infty$ ce qui est absurde. On peut donc extraire une sous-suite $(z_{\psi(n)})$ qui converge vers un point $a \in$ F. Par continuité de P la suite $(w_{\psi(n)})$ converge vers P(a). Mais elle converge aussi vers w. Par unicité de la limite $w = \mathrm{P}(a) \in \mathrm{P(F)}$. $\triangleleft$

Plus généralement, si f est une fonction continue propre (c'est-à-dire telle que l'image réciproque de tout compact est compact : voir l'exercice 4.1) alors l'image directe d'un fermé par f est fermée.

La seconde question de ce dernier exercice est tirée du cours de topologie de Gustave Choquet (éditions Masson).

1.27. Partition dénombrable de $[0, 1]$

1. Montrer qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme réunion d'une famille d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints et que cette famille est au plus dénombrable.

2. Montrer que le segment $[0,1]$ n'est pas réunion dénombrable de fermés non vides deux à deux disjoints.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On cherche à partitionner U en intervalles ouverts. On considère pour cela la relation binaire R définie sur U de la manière suivante : pour $(x, y) \in \mathrm{U}^2$, $x \,\mathrm{R}\, y$ si et seulement si le segment d'extrémités x et y est inclus dans U. Il s'agit visiblement d'une relation d'équivalence sur U. Montrons que les classes d'équivalence sont des intervalles ouverts. Par définition une classe d'équivalence I est convexe : c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $x \in$ I, comme U est ouvert, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset$ U. Mais alors tout point de $]x - \eta, x + \eta[$ est en relation avec x, donc $]x - \eta, x + \eta[\subset$ I. Cela montre que I est ouvert. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver dans chaque classe d'équivalence un nombre rationnel, et définir ainsi une injection de U/R dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en déduit que U/R est au plus dénombrable. Enfin, comme par définition on a $\mathrm{U} = \bigcup_{\mathrm{I} \in \mathrm{U/R}} \mathrm{I}$, on a bien montré que U est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Il reste à prouver qu'il s'agit de la seule manière d'écrire U comme une réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Supposons que $\mathrm{U} = \bigcup_{j \in \mathrm{J}}]a_j, b_j[$, où les $]a_j, b_j[$ sont deux à deux disjoints. Soit $j \in \mathrm{J}$. Tous les éléments de $]a_j, b_j[$ étant visiblement en relation pour R, $]a_j, b_j[$ est inclus dans une classe $\mathrm{I} =]a, b[$ pour la relation R. En fait il y a égalité. En effet, supposons par exemple $a < a_j$. Alors $a_j \in \mathrm{U}$ et il existe $k \in \mathrm{J}$ tel que $a_j \in]a_k, b_k[$, ce qui est impossible car dans ce cas $]a_j, b_j[\cap]a_k, b_k[\neq \emptyset$. De la même manière on montre que $b_j = b$. Les intervalles $]a_j, b_j[$ sont donc des classes d'équivalence pour R et on les obtient toutes sans quoi la réunion des $]a_j, b_j[$ ne serait pas égale à U. D'où le résultat.

Les intervalles ouverts de U/R *sont appelés les composantes connexes de* U. *Ce qui précède montre qu'il s'agit des intervalles ouverts inclus dans* U *qui sont maximaux au sens de l'inclusion.*

2. Supposons par l'absurde qu'une telle partition soit possible et posons $[0, 1] = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{F}_n$ où les F_n sont des fermés non vides.

L'idée de la démonstration consiste à construire une suite (I_n) d'intervalles ouverts telle que

(*i*) $\mathrm{I}_n \subset \overline{\mathrm{I}}_n \subset \mathrm{I}_{n-1}$;

(*ii*) I_n ne rencontre pas F_n.

La première condition assure que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{I}_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\mathrm{I}}_n$. Comme l'intersection d'une suite décroissante de segments est non vide, il existe au moins un point α qui appartient à tous les I_n, et qui donc n'appartient à aucun F_n, ce qui apporte la contradiction désirée. La construction de la suite (I_n) n'est toutefois pas si simple. Il faut s'assurer à chaque étape que l'intervalle I_n ne se retrouve pas entièrement contenu dans un fermé F_p, car cela bloquerait la récurrence.

Quitte à regrouper deux des fermés et à effectuer une renumérotation on peut très bien supposer que 0 et 1 sont dans F_0 (cela permet simplement d'éviter des considérations de topologie induite).

L'ensemble $[0, 1] \setminus \mathrm{F}_0 =]0, 1[\setminus \mathrm{F}_0$ est donc ouvert et non vide. On prend pour I_0 l'une des composantes connexes de cet ouvert.

Pour définir I_1, on considère le premier indice k tel que F_k rencontre I_0, soit k_1. L'ensemble $\mathrm{I}_0 \setminus \mathrm{F}_{k_1}$ est ouvert, et il est non vide : sinon, on aurait $\mathrm{I}_0 \subset \mathrm{F}_{k_1}$, d'où $\overline{\mathrm{I}}_0 \subset \mathrm{F}_{k_1}$ puisque F_{k_1} est fermé ; or les extrémités de I_0 appartiennent à F_0, et F_0 et F_{k_1} sont disjoints.

Soit J l'une des composantes connexes de $\mathrm{I}_0 \setminus \mathrm{F}_{k_1}$. De deux choses l'une. Ou bien les deux extrémités de J sont dans F_{k_1} ; ce sont en particulier des points de I_0, et on a $\overline{\mathrm{J}} \subset \mathrm{I}_0$; on pose alors $\mathrm{I}_1 = \mathrm{J}$. Ou bien l'une des extrémités de J est une extrémité de I_0 et l'autre appartient à

F_{k_1} ; dans ce cas, on remplace J par un intervalle plus petit, disons J', en conservant l'extrémité qui appartient à F_{k_1}, et en rapprochant l'autre extrémité, de façon que $\overline{J'} \subset I_0$; on pose alors $I_1 = J'$.

On continue en construisant par récurrence une suite d'intervalles $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et une suite d'entiers $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ tels que

(i') $I_n \subset \bar{I}_n \subset I_{n-1}$ (avec $I_{-1} = [0,1]$) ;

(ii') I_n ne rencontre pas $F_0, F_1, \ldots, F_{k_n}$;

(iii') $\bar{I}_n$ rencontre F_{k_n}.

La suite $(\bar{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de segments, donc son intersection est non vide. Si $\alpha \in [0,1]$ est dans cette intersection, il n'est dans aucun des fermés $F_0, F_1, \ldots, F_{k_n}$. Comme cela vaut pour tout n, α n'est dans aucun F_n ce qui apporte la contradiction souhaitée. $\triangleleft$

Le lecteur qui connaît le théorème de Baire pourra rédiger une preuve légèrement plus courte de ce résultat, preuve qui aura le mérite de se généraliser. En effet, on peut montrer qu'un espace métrique complet connexe et localement connexe ne peut se partitionner en une réunion dénombrable de fermés non vides[3].

3. Voir par exemple GONNORD (S.) & TOSEL (N.), *Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, 1996, p. 41.

Chapitre 2

Suites réelles et complexes

Bien avant qu'elle ne soit conceptualisée, on a utilisé des itérations où est sous-jacente la notion de suite. Par exemple, Archimède quand il cherche une valeur approchée de π considère les suites (p_n) et (P_n) des périmètres des polygones inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 et aboutit à des formules qui équivalent à $p_{2n} = \sqrt{p_n \mathrm{P}_n}$ et $\mathrm{P}_{2n} = \dfrac{2\mathrm{P}_n p_{2n}}{p_{2n} + \mathrm{P}_n}$.

La théorie des suites au sens moderne est établie au début du XIX^e^ siècle quand s'affirme la volonté de donner à l'analyse des bases rigoureuses qui la débarrassent des notions métaphysiques d'infiniment petits ou de quantités évanouissantes. Dans ses Notions fondamentales de la théorie des suites, *rédigées vers 1800 et restées inédites, Gauss donne la définition moderne d'une suite (application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). Il définit les notions de majorant et de borne supérieure d'une suite. Plus intéressant encore, il donne les définitions de la limite supérieure et de la limite inférieure d'une suite ($\limsup a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{p\geqslant n} a_p$ et $\limsup a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{p\geqslant n} a_p$, dans le langage d'aujourd'hui) et, quand ces deux quantités sont égales, appelle leur valeur commune la limite de la suite.*

C'est le Cours d'analyse *de Cauchy (1821) qui ouvre la voie à l'analyse moderne. Dans le chapitre des* Préliminaires, *il donne les définitions d'une suite et de la limite d'une suite, les premières définitions précises de $+\infty$ et $-\infty$, introduit la notion de valeur d'adhérence. Le «critère de Cauchy» de convergence, déjà connu de Bolzano est explicité pour les séries.*

Pendant une grande partie du XIX^e^ siècle, la convergence d'une suite de Cauchy ou d'une suite croissante majorée sont présentés comme des axiomes qui constituent le fondement de toutes les questions où intervient la notion de limite. Ce point de vue va être remis en cause par Méray (1868) puis par Cantor (1872) qui, voulant en donner des justifications précises, construisent $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$.

La théorie des suites réelles dont tous les concepts sont parfaitement définis depuis la fin du XIX^e^ a connu récemment des développements importants avec l'étude des systèmes dynamiques, qui apportent un regard nouveau sur les suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la fonction f est continue et si la suite converge, sa limite l est nécessairement un point fixe de f. Ce fait, *démontré par Cauchy, est à la base de toutes les méthodes numériques itératives. L'intérêt pour de telles suites est ancien. Dans le traité* De la méthode des fluxions et des suites infinies *(1740), pour obtenir une valeur approchée d'une solution de l'équation $g(x) = 0$, Newton expose ce qu'on appelle depuis «méthode de Newton» : prenant a_0 proche de la solution de l'équation, on considère une suite vérifiant*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)}.$$

C'est lors de l'étude de certains systèmes dynamiques discrets[1] *qu'est apparue la notion de chaos, qui a connu ces dernières décennies un grand succès. Pour des fonctions f très simples (par exemple une fonction trinôme), le système dynamique peut avoir un comportement qui semble aléatoire. L'exemple le plus connu est la* suite logistique *vérifiant une relation de la forme*

$$u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n - \alpha u_n^2.$$

Cette suite été utilisée par Verhulst en 1845 pour décrire un modèle de croissance de la population. Pour $0 < \alpha \leqslant 2$ et une population u_0 pas trop importante, la suite (u_n) converge vers la population stable 1. Mais comme l'a démontré en 1963 le météorologiste E.N. Lorenz, pour des valeurs plus grandes de α, cette loi décrit certains aspects des flux turbulents.

Dans les années 1980, de grands progrès ont été accomplis dans l'étude de ces systèmes dynamiques grâce à la puissance des ordinateurs. Par exemple, pour la suite logistique, on observe que, pour $2 < \alpha < 2{,}5$, le comportement de la suite tend vers une oscillation régulière entre deux valeurs (cycle d'ordre 2) ; puis pour $2{,}5 \leqslant \alpha < 2{,}55$, vers un cycle d'ordre 4 ; ensuite quand α augmente, vers des cycles d'ordre 8, 16... Au-delà de 2,57 environ, le système devient chaotique. Feigenbaum a montré en 1981 que, pour une classe assez large d'applications f de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ et $f_\lambda = \lambda f$, $0 < \lambda < 1$, le système dynamique défini par $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ a un comportement comparable : il existe une suite croissante de valeurs λ_j du paramètre λ pour lesquelles la dynamique change (le nombre de points d'un cycle double quand λ, supposé passage de λ_j) jusqu'à une valeur critique λ_∞, de telle manière que $\dfrac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}}$ tende vers $\delta = 4{,}669...$, constante universelle indépendante de f. Au-delà de λ_∞, on retrouve des cycles stables de période $3 \cdot 2^j$ et des points de bifurcation.

On s'est aussi intéressé à l'itération de fonctions complexes, en particulier les fonctions $f : x \mapsto x^2 + c$, où $c \in \mathbb{C}$. On étudie l'ensemble

1. Qui revient à l'étude du comportement des applications itérées $f^n : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$.

des nombres complexes z pour lesquels la suite de premier terme z est bornée. On note K_c *cet ensemble, et on l'appelle* ensemble de Julia. *Sa frontière présente des formes très belles et très variées selon les valeurs de c. Les premiers résultats, établis entre 1905 et 1920, sont dus à Fatou et Julia (évidemment sans aucun moyen informatique). En 1980, Mandelbrot étudia l'ensemble des points c pour lesquels* 0 *est dans* K_c *(le célèbre* ensemble de Mandelbrot*). Les ensembles de Julia ont les propriétés des fractales, en particulier l'autosimilitude. En revanche, l'ensemble de Mandelbrot est extraordinairement varié ; plus l'échelle est grande, plus l'image se complique. On a montré un caractère universel de l'ensemble de Mandelbrot : pour diverses fonctions complexes à un paramètre, on trouve des copies déformées de cet ensemble.*

Les premiers exercices sont assez généraux : étude de la monotonie, de la convergence d'une suite.

2.1. Une étude de monotonie

Étudier la monotonie de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \ln k.$$

(École polytechnique)

Solution.

Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k \ln k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}) \ln k + (-1)^{n+1} \ln(n+1) \\ &= u_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \mathrm{C}_n^k \ln(k+1), \end{aligned}$$

et $v_n = u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \mathrm{C}_n^k \ln(k+1)$. Pour étudier le signe de v_n, les logarithmes nous gênent. Pour les faire disparaître, on songe à dériver, mais pour cela il faut introduire une fonction. On remplace donc 1 par x et on pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \mathrm{C}_n^k \ln(x+k).$$

Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{\mathrm{C}_n^k}{x+k}$. Considérons la fraction rationnelle $\mathrm{F} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{X}+k}$. Il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\dots(\mathrm{X}+n)}$. En multipliant F par $\mathrm{X}+k$ et en évaluant en $-k$, on trouve, pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}\mathrm{C}_n^k &= \frac{\mathrm{P}(-k)}{(-k)(-k+1)\dots(-k+k-1)(-k+k+1)\dots(-k+n)},\\ &= \frac{\mathrm{P}(-k)}{(n-k)!(-1)^k k!} = \mathrm{P}(-k)(-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{n!}\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{P}(-k) = -n!$. Comme P est de degré $\leqslant n$ et qu'il prend la valeur $-n!$ au moins $n+1$ fois, on en déduit que $\mathrm{P} = -n!$. On a donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-n!}{x(x+1)\dots(x+n)} < 0$. La fonction f décroît sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculons sa limite en $+\infty$. Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\mathrm{C}_n^k\right) \ln x + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\mathrm{C}_n^k \ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\mathrm{C}_n^k \ln\left(1+\frac{k}{x}\right),\end{aligned}$$

puisque $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\mathrm{C}_n^k = (1-1)^n = 0$ pour $n \geqslant 1$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On conclut que, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. En particulier, $v_n = f(1) > 0$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc strictement croissante. ◁

Notons qu'on a démontré que, pour $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^{+\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,dx.$$

2.2. Permutation des termes d'une suite

Caractériser les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles qu'existe une permutation σ pour laquelle la suite $(u_{\sigma(n)})_{n\geqslant 0}$ est monotone à partir d'un certain rang.

(École normale supérieure)

Solution.

• *Analyse.* Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et σ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\sigma(n)})_{n\geqslant 0}$ soit monotone à partir d'un certain rang. Par le théorème des limites monotones, la suite $(u_{\sigma(n)})_{n\geqslant 0}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Montrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge également vers ℓ. Traitons le cas où $\ell\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse on peut trouver $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que $|u_{\sigma(n)}-\ell|\leqslant\varepsilon$ pour $n\geqslant\mathrm{N}$. Soit alors $\mathrm{N}' = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant \mathrm{N}-1}\sigma(k)$. Pour tout $n>\mathrm{N}'$ on a $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$ ce qui prouve le résultat. Il est facile d'adapter cette preuve au cas où ℓ est infini. Notons par ailleurs qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ se trouvent du même côté de la limite ℓ et même strictement si la suite n'est pas stationnaire.

• *Synthèse.* Considérons une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui n'est pas stationnaire (ce cas étant évident puisque $\sigma=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ convient) et telle qu'à partir d'un certain rang N_0 tous les termes de la suite sont strictement du même côté de ℓ. On supposera par exemple que $u_n<\ell$ pour $n\geqslant\mathrm{N}_0$. Traitons le cas où $\ell\in\mathbb{R}$. Posons tout d'abord $\sigma(n)=n$ pour $0\leqslant n\leqslant\mathrm{N}_0-1$. Considérons ensuite les ensembles $\Omega_0 = \{n\geqslant\mathrm{N}_0,\ u_n<\ell-1\}$ et $\Omega_k=\{n\geqslant\mathrm{N}_0,\ \ell-\dfrac{1}{k}\leqslant u_n<\ell-\dfrac{1}{k+1}\}$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Par hypothèse, les ensembles Ω_k sont tous finis et forment une partition de l'intervalle $[\![\mathrm{N}_0,+\infty[\![$. Il suffit de définir $\sigma(k)$ pour $k\geqslant\mathrm{N}_0$ en prenant les éléments de Ω_0 puis ceux de Ω_1, et ainsi de suite et en s'arrangeant pour que la suite $(u_{\sigma(k)})_{k\geqslant\mathrm{N}_0}$ soit croissante (on classe par ordre croissant les éléments de chaque ensemble Ω_k). Le raisonnement s'adapte aisément au cas où $\ell=+\infty$ (on considère un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont strictement positifs et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\Omega_k=\{n\geqslant\mathrm{N}_0,\ k<u_n\leqslant k+1\}$) et au cas où $u_n>\ell$ à partir d'un certain rang.

Conclusion. Les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ pour lesquelles il existe une permutation σ telle que $(u_{\sigma(n)})_{n\geqslant 0}$ soit monotone à partir d'un certain rang sont les suites stationnaires et les suites ayant une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et qui sont strictement inférieures ou supérieures à ℓ à partir d'un certain rang.

L'exercice qui suit utilise simplement la définition de la convergence d'une suite. Il est à rapprocher de l'exercice 4.4 sur les fonctions sur-additives. L'idée est la même.

2.3. Suites sous-additives

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$ pour tout couple (m,n) d'entiers naturels. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = \inf\limits_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

De l'hypothèse, on déduit immédiatement que, pour tout entier n, on a $u_{2n} \leqslant 2u_n$, puis par une récurrence simple, que $u_{mn} \leqslant mu_n$, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$.

Commençons par le cas où ℓ est réel. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver m tel que $\ell \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$. Si n est un entier quelconque, on en fait la division euclidienne par m et on obtient $n = qm + r$, où $0 \leqslant r < m$. On a alors $u_n \leqslant u_{mq} + u_r \leqslant qu_m + u_r$ et donc, en divisant par n,

$$\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q}{n}u_m + \frac{u_r}{n} \leqslant \frac{(\ell+\varepsilon)qm}{n} + \frac{\mathrm{M}}{n} \leqslant (\ell+\varepsilon)\left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{\mathrm{M}}{n},$$

où $\mathrm{M} = \max\limits_{0\leqslant k<m} u_k$. Puisque $0 \leqslant r < m$, $\frac{r}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $(\ell+\varepsilon)\left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{\mathrm{M}}{n}$ tend vers $\ell+\varepsilon$. On a donc pour n assez grand,

$$\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

Le cas où $\ell = -\infty$ se traite de même. Pour tout $\mathrm{A} < 0$, il existe m tel que $\frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{A}$. On obtient, comme précédemment

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \mathrm{A}\left(1 - \frac{n}{r}\right) + \frac{\mathrm{M}}{n} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{2},$$

pour n assez grand. ◁

On peut par exemple utiliser ce résultat pour montrer la convergence de la suite $\|\mathrm{A}^n\|^{1/n}$, où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et où $\|\cdot\|$ désigne une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, on voit tout de suite que la suite $(\ln\|\mathrm{A}^n\|)_{n\geqslant 1}$ vérifie l'hypothèse de l'exercice. C'est alors un exercice classique de montrer que la limite de $\|\mathrm{A}^n\|^{1/n}$ est le rayon spectral de la matrice A, c'est-à-dire le plus grand module de ses valeurs propres.

Les deux exercices suivants utilisent le fait qu'une suite monotone converge si et seulement si elle est bornée.

2.4. Suites monotones

À toute suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $a_0 = 1$, on associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}.$$

Montrer que $b_n \in [0,1]$. Étant donné $c \in [0,1[$, montrer l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

La suite (a_n) étant croissante et positive, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} \geqslant 0$ et donc $b_n \geqslant 0$. D'autre part, on peut écrire par croissance de la suite (a_n),

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2} \leqslant \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k a_{k-1}} \leqslant \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$$

En sommant ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n$, on obtient

$$b_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_n} < 1.$$

Ainsi, la suite (b_n) qui est croissante et majorée par 1 converge.

Soit $q \in]1, +\infty[$ et la suite (a_n) définie par $a_n = q^n$. Elle a les propriétés voulues. Pour ce choix de (a_n), on obtient

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{1}{q^k} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q}\right)\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{q}$. Quand q décrit $]1, +\infty[$, $\frac{1}{q}$ décrit $]0,1[$. En particulier, pour tout $c \in]0,1[$, il existe $q = \frac{1}{c} > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$. Pour $c = 0$, la suite (a_n) constante égale à 1 convient. ◁

Outre la convergence monotone, l'exercice suivant utilise le théorème de Cesàro, dont nous rappelons l'énoncé. Si la suite (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ (moyenne de Cesàro de la suite des u_n) converge aussi vers ℓ. Ce résultat sera au centre des énoncés qui suivent.

2.5. Suites convexes bornées

On considère une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note pour $n \geqslant 0$, $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geqslant 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $n\Delta u_n$ converge vers 0.

2. Montrer que la série $\sum(n+1)\Delta^2 u_n$ converge.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On note que la condition $\Delta^2 u_n \geqslant 0$ s'écrit $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n + u_{n+2})$. Autrement dit, la suite (u_n) est convexe.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1} \geqslant 0$: la suite (Δu_n) est décroissante. De plus, elle est bornée, puisque (u_n) l'est. Elle converge donc. Si on note ℓ sa limite, alors on a, d'après le théorème de Cesàro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Delta u_0 + \Delta u_1 + \cdots + \Delta u_{n-1}}{n} = \ell$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0 - u_n}{n} = \ell$. Si $\ell \neq 0$, la suite (u_n) n'est pas bornée, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $\ell = 0$. La suite (Δu_n), qui converge vers 0 en décroissant, est donc positive. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta u_n = u_n - u_{n+1} \geqslant 0$: la suite (u_n) décroît. Puisque de plus elle est bornée, elle converge. Notons L sa limite.

Pour montrer que la suite $(n\Delta u_n)$ converge, on commence par montrer que sa moyenne de Cesàro converge, ce qui est plus simple. En effet, quand on somme des termes successifs de cette suite, on obtient des simplifications puisque Δu_n est une différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=1}^{n} k u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1} \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - u_{n+1}.$$

Du théorème de Cesàro on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \mathrm{L}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k\Delta u_k = \mathrm{L} - \mathrm{L} = 0$. La suite (Δu_n) étant décroissante, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\Delta u_n \geqslant \frac{n+1}{2}\Delta u_n \geqslant \frac{n}{2}\Delta u_n \geqslant 0.$$

On en déduit, par encadrement, que $\lim_{n\to+\infty} n\Delta u_n = 0$.

Le lecteur observera que cette dernière question est une formulation en termes de suites d'un résultat classique sur les séries (cf. exercice 3.10). En effet, la suite (Δu_n) est positive décroissante et la série $\sum \Delta u_n$ converge. Cela implique que $n\Delta u_n$ tend vers 0.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2 u_k &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta u_k - \sum_{k=1}^{n+1} k\Delta u_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\Delta u_k - (n+1)\Delta u_{n+1}\\ &= u_0 - u_{n+1} - (n+1)\Delta u_{n+1}.\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \mathrm{L}$ et que $\lim_{n\to+\infty}(n+1)\Delta u_{n+1} = 0$, d'après la question précédente. On ne déduit que la série $\sum(k+1)\Delta^2 u_k$ converge et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\Delta^2 u_k = u_0 - \mathrm{L}.} \quad \triangleleft$$

Une suite dont les moyennes de Cesàro convergent peut très bien diverger, comme le prouve le contre-exemple classique $u_n = (-1)^n$. L'exercice suivant montre que pour qu'une suite positive bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 au sens de Cesàro, il faut et suffit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 sur une partie de $\mathbb{N}$ de densité 1.

2.6. Caractérisation de la convergence au sens de Cesàro

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle positive, majorée. Montrer qu'il y a équivalence entre

(i) $\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k$ tend vers 0 ;

(ii) il existe une partie $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ de densité nulle (c'est-à-dire telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap[\![0,n]\!])}{n} = 0$) telle que $\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\notin \mathrm{A}}} a_n = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• Supposons d'abord (ii) réalisé. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\notin \mathrm{A}} a_n = 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et $n \notin \mathrm{A}$, $a_n \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on coupe alors la moyenne de Cesàro en trois :

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} a_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{\mathrm{N}\leqslant k\leqslant n\\ k\notin \mathrm{A}}} a_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{\mathrm{N}\leqslant k\leqslant n\\ k\in \mathrm{A}}} a_k.$$

La somme du milieu est majorée par ε. Celle de gauche tend clairement vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Enfin, si on note $\mathrm{M} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$ (qui existe puisque la suite est majorée), celle de droite est inférieure à $\dfrac{\mathrm{M}\,\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap [\![\mathrm{N}, n]\!])}{n}$ et *a fortiori* à $\dfrac{\mathrm{M}\,\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap [\![0, n]\!])}{n}$, quantité qui tend également vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ tel que pour tout n supérieur à N', on ait $\mathrm{S}_n \leqslant 2\varepsilon$. L'assertion (i) est démontrée.

• Supposons maintenant que (i) est vérifié et que la suite (a_n) n'est pas de limite nulle (sinon $\mathrm{A} = \emptyset$ convient). Posons $\alpha_n = \sup\{\mathrm{S}_p,\ p \geqslant n\}$. La suite (α_n) est une suite décroissante tendant vers 0 de réels strictement positifs. Considérons $\mathrm{A} = \{p \in \mathbb{N},\ a_p \geqslant \sqrt{\alpha_p}\}$. Il est clair que $\lim\limits_{n\notin \mathrm{A}} a_n = 0$ (car si $n \notin \mathrm{A}$, $a_n < \sqrt{\alpha_n}$). Il ne reste plus qu'à prouver que A est de densité nulle. On a

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap [\![0, n]\!]) = \sum_{k\in \mathrm{A}\cap[\![0,n]\!]} 1 \leqslant \sum_{k\in \mathrm{A}\cap[\![0,n]\!]} \frac{a_k}{\sqrt{\alpha_k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{\alpha_k}},$$

de sorte que

$$\frac{1}{n}\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cap [\![0, n]\!]) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{\alpha_k}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{\alpha_n}} = \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{\alpha_n}} \leqslant \sqrt{\alpha_n},$$

car $\mathrm{S}_n \leqslant \alpha_n$. D'où le résultat. $\triangleleft$

L'exercice qui suit porte aussi sur des suites qui convergent au sens de Cesàro, mais cette fois dans $\mathbb{C}$. Notons que le théorème de Cesàro subsiste dans $\mathbb{C}$.

2.7. Suites convergentes au sens de Cesàro telles que $u_n^6 \to 1$

Soit E l'ensemble des suites (u_n) de nombres complexes vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^6 = 1$ et telles que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ converge. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{C}$ qui à la suite (u_n) associe la limite ℓ de la suite (v_n). Déterminer $\varphi(\mathrm{E})$.

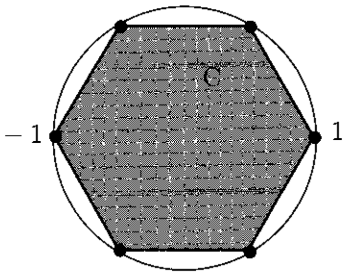
(**École polytechnique**)

Solution.

Notons U_6 l'ensemble des racines 6-ièmes de 1 et posons, pour $1 \leqslant k \leqslant 6$, $\omega_k = e^{\frac{ik\pi}{3}}$. La façon la plus simple de réaliser la condition $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^6 = 1$ est que la suite (u_n^6) soit constante égale à 1, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n soit élément de U_6. Notons F le sous-ensemble de E formé des suites ayant cette propriété et déterminons pour commencer $\varphi(F)$. Si (u_n) est dans F, on obtient, en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant i \leqslant 6$, $m_i(n)$ le nombre de termes u_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ de la suite (u_n) égaux à ω_i,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} m_i(n)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(n)}{n}\omega_i.$$

On en déduit que chaque terme de la suite (v_n) s'écrit comme barycentre à coefficients positifs de $(\omega_1, \dots, \omega_6)$, c'est-à-dire appartient à l'enveloppe convexe C de U_6. L'ensemble C étant fermé, il en résulte que la limite ℓ de la suite (v_n) appartient à C.



Démontrons réciproquement que $C \subset \varphi(F)$. Soit ℓ un élément de C qui s'écrit $\ell = \sum\limits_{i=1}^{6} \lambda_i \omega_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ sont des réels positifs de somme égale à 1. Montrons qu'on peut trouver une suite (u_n) de F telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant 6$, on ait, avec les notations précédentes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{m_i(n)}{n} = \lambda_i$.

Posons $\alpha_i(n) = E(\lambda_i n)$ si $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $\alpha_6(n) = n - \sum\limits_{i=1}^{5} \alpha_i(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'entier $\alpha_6(n)$ est positif, car

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i(n) \leqslant \sum_{i=1}^{5} \lambda_i n \leqslant n.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_i(n)}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(\lambda_i n)}{n} = \lambda_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 5$.

Ceci entraîne $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_6(n)}{n} = 1 - \sum\limits_{i=1}^{5} \lambda_i = \lambda_6$. On va choisir (u_n) pour que $m_i(n) = \alpha_i(n)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par construction, pour $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $n \geqslant 2$,

$$\lambda_i(n-1) - 1 < \alpha_i(n-1) \leqslant \lambda_i(n-1) \quad \text{et} \quad \lambda_i n - 1 < \alpha_i(n) \leqslant \lambda_i n.$$

On en déduit que

$$-1 \leqslant -1 + \lambda_i < \alpha_i(n) - \alpha_i(n-1) < \lambda_i + 1 \leqslant 2$$

et donc que $\alpha_i(n) = \alpha_i(n-1)$ ou $\alpha_i(n-1)+1$. Puisque $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i(n) = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_i(n) - \alpha_i(n-1) = 1$ pour l'un des entiers i ($1 \leqslant i \leqslant 6$) et 0 pour les autres. On note $f(n)$ cet entier i et $f(1)$ l'entier i tel que $\alpha_i(1) \neq 0$. On définit ensuite la suite (u_n) par $u_n = \omega_{f(n)}$. On a, par construction, $m_i(1) = \alpha_i(1)$ et, pour $n \geqslant 2$, $\alpha_i(n) - \alpha_i(n-1) = m_i(n) - m_i(n-1)$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_i(n) = \alpha_i(n)$. On en déduit que $v_n = \sum_{i=1}^{6} \frac{\alpha_i(n)}{n} \omega_i$. Finalement on obtient que la suite (v_n) converge et que sa limite est $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \omega_i = \ell$. Autrement dit, la suite (u_n) appartient à F et sa limite ℓ appartient à $\varphi(\mathrm{F})$. On a bien $\varphi(\mathrm{F}) = \mathrm{C}$.

Nous allons enfin montrer que $\varphi(\mathrm{E}) = \varphi(\mathrm{F}) = \mathrm{C}$. Considérons une suite (u_n) de E. Pour n assez grand, tout terme de la suite (u_n) est proche d'un élément de U_6. En effet, la suite (u_n^6) converge vers 1. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe n_0 tel que $|u_n^6 - 1| \leqslant \varepsilon^6$ si $n \geqslant n_0$. Puisque $|u_n^6 - 1| = \prod_{i=1}^{6} |u_n - \omega_i|$, on en déduit qu'il existe $i \in [\![1,6]\!]$ tel que $|u_n - \omega_i| \leqslant \varepsilon$. Les images des ω_i dans le plan complexe formant un hexagone, la distance entre deux sommets est $\geqslant 1$. Si $\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$, les disques de centre ω_i et de rayon ε sont donc disjoints. En particulier, un entier i tel que $|u_n - \omega_i| \leqslant \varepsilon$ est unique. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{3}$ et pour $n \geqslant n_0$, notons $f(n)$ un tel entier i, et prolongeons f en une application de $\mathbb{N}^*$ dans $[\![1,6]\!]$, en posant $f(n) = 1$ si $n < n_0$. Considérons la suite (u'_n) de terme général $\omega_{f(n)}$ et (v'_n) la moyenne de Cesàro associée. Pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, il existe un entier i tel que $|u_n - \omega_i| \leqslant \varepsilon$. Nous avons montré précédemment que nécessairement, $\omega_i = u'_n$. On a alors, pour $n \geqslant n_1$,

$$\begin{aligned}|v_n - v'_n| &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_n - u'_n| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1 - 1} |u_n - u'_n| + \varepsilon \frac{n - n_1}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1 - 1} |u_n - u'_n| + \varepsilon.\end{aligned}$$

On aura donc, pour n assez grand, $|v_n - v'_n| \leqslant 2\varepsilon$. On en déduit que la suite $(v_n - v'_n)$ converge vers 0. La suite (v_n) convergeant vers $\varphi((u_n))$, il en est de même pour la suite (v'_n). Ceci démontre que (u'_n) appartient à F et que $\varphi((u_n)) = \varphi((u'_n))$. On a bien $\varphi(\mathrm{E}) = \varphi(\mathrm{F})$.

Conclusion. L'ensemble $\varphi(\mathrm{E})$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines 6-ièmes de l'unité, c'est-à-dire l'intérieur d'un hexagone régulier. ◁

Il est clair que le nombre 6 ne joue aucun rôle particulier et que si on considère les suites (u_n) telles que (u_n^p) converge vers 1, on trouve que $\varphi(\mathrm{E})$ est l'intérieur d'un polygone régulier à p côtés.

Dans l'exercice suivant il est encore question de suites dont la moyenne de Cesàro converge, cette fois avec des systèmes dynamiques discrets. La seconde question de l'exercice fournit des exemples de suites divergentes dont la moyenne de Cesàro converge.

2.8. Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $v_0(a) = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}(a) = f(v_n(a))$. On pose

$$u_n(a) = \frac{v_0(a) + v_1(a) + \cdots + v_n(a)}{n+1}.$$

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que f admet un point fixe.

2. Trouver un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant un point fixe unique a et telle que pour tout $x \neq a$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite distincte de a.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Supposons par l'absurde que f n'ait pas de point fixe. Comme elle est continue, on a soit $f(x) > x$ pour tout x, soit $f(x) < x$ pour tout x. Plaçons-nous par exemple dans le premier cas. La suite $(v_n(a))$ est strictement croissante, et diverge nécessairement vers $+\infty$ (car si elle convergeait, sa limite serait un point fixe de f). Le théorème de Cesàro nous permet d'affirmer que la suite $(u_n(a))$ tend alors aussi vers $+\infty$ et ne peut donc être bornée, ce qui fournit la contradiction souhaitée.

2. Considérons la fonction f définie par $f(x) = -2x$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = -\dfrac{x}{2}$ si $x \geqslant 0$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et son seul point fixe est 0. La fonction $f \circ f$ est l'identité de sorte que pour tout $x > 0$ la suite $(v_n(x))$ vérifie $v_{2k}(x) = x$ et $v_{2k+1}(x) = -\frac{x}{2}$ pour tout entier naturel k. Il est alors aisé de voir que la transformée de Cesàro $(u_n(x))$ converge vers la moyenne de ces deux valeurs qui vaut $\frac{x}{4}\cdot$ De même, si $x < 0$ la suite $(u_n(x))$ converge vers $-\frac{x}{2}\cdot$ Cette fonction répond donc à la question. ◁

Plus généralement, toute fonction involutive continue, ayant 0 *comme seul point fixe et telle que* $f(x) \neq -x$ *pour* $x \neq 0$*, convient.*

Le théorème de Hardy énonce des conditions pour que la convergence de la moyenne de Cesàro entraîne la convergence de la suite initiale. Autrement dit, il étudie la réciproque du théorème de Cesàro. On peut le formuler en termes de séries : les suites dont on étudie ici la moyenne de Cesàro sont des sommes partielles de séries.

2.9. Théorème taubérien de Hardy

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_k$$

1. On suppose que les u_n sont des réels positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(*i*) la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge ;

(*ii*) la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

2. On revient au cas général. Montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est une condition suffisante pour que la convergence de la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ entraîne celle de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Si $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ alors, d'après le théorème de Cesàro, les moyennes σ_n convergent vers ℓ. Si (S_n) ne converge pas, elle diverge vers $+\infty$ puisqu'elle est croissante. Toujours d'après le théorème de Cesàro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$ et (σ_n) ne converge pas. L'équivalence est prouvée.

2. Supposons que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et que (σ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Nous contrôlons la moyenne des S_n. Il faut donc relier celle-ci à S_n. Afin d'y parvenir, on va comparer S_n à une moyenne des S_k pour k compris entre n et nx, où x est un réel strictement plus grand que 1. On pourra encadrer cette moyenne, grâce à l'hypothèse de convergence de (σ_n). On imagine que pour avoir une expression proche de S_n, il faudra peu de termes dans la moyenne *i.e.* x proche de 1.

Posons pour $u > 0$

$$\sigma_u = \frac{1}{u}\sum_{1\leqslant k\leqslant u} S_k = \frac{E(u)}{u}\sigma_{E(u)},$$

où E désigne la fonction partie entière. On a $\lim\limits_{u\to+\infty}\sigma_u = \ell$. Pour $x > 1$, appelons $M_n(x)$ la moyenne des S_k pour $n < k \leqslant nx$

$$M_n(x) = \frac{1}{E(nx-n)}\sum_{n<k\leqslant nx} S_k$$

et étudions la limite de $M_n(x)$. On obtient

$$M_n(x) = \frac{nx\sigma_{nx} - n\sigma_n}{E(nx-n)} = \frac{n(x-1)}{E(n(x-1))}\,\frac{x\sigma_{nx}-\sigma_n}{(x-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell x-\ell}{x-1} = \ell.$$

Estimons maintenant la différence entre la moyenne $M_n(x)$ et S_n. Comme on peut écrire $S_n = \dfrac{\sum\limits_{n<k\leqslant nx} S_n}{E(n(x-1))}$, il vient

$$\begin{aligned}|S_n - M_n(x)| &= \left|\frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}(S_k - S_n)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}|S_k - S_n|.\end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe $A \geqslant 0$ tel que si $n \geqslant 1$, $|u_n| \leqslant \dfrac{A}{n}$. Par conséquent si $k > n$, on a

$$\begin{aligned}|S_k - S_n| &= |u_k + u_{k-1} + \cdots + u_{n+1}| \leqslant A\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)\\ &\leqslant A\left(\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t} + \int_{k-2}^{k-1}\frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n}^{n+1}\frac{dt}{t}\right) = A\int_n^k \frac{dt}{t}\\ &\leqslant A\ln\frac{k}{n}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$|S_n - M_n(x)| \leqslant \frac{A}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}\ln\frac{k}{n} \leqslant \frac{A}{E(n(x-1))}\sum_{n<k\leqslant nx}\ln\frac{nx}{n},$$

ce qui donne après simplifications

$$|S_n - M_n(x)| \leqslant \frac{A}{E(n(x-1))} E(n(x-1)) \ln x = A \ln x,$$

où le majorant de dépend pas de n. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 > 1$ tel que $A \ln x_0 \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$|S_n - \ell| \leqslant |S_n - M_n(x_0)| + |M_n(x_0) - \ell| \leqslant \varepsilon + |M_n(x_0) - \ell| \leqslant 2\varepsilon$$

pour n assez grand, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n(x_0) = \ell$. On conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell.} \quad \triangleleft$$

Dans l'exercice suivant, il s'agit encore de comparer un terme d'une suite à une moyenne de termes d'indices consécutifs, en utilisant cette fois la monotonie de la suite.

2.10. Limites de tranches de Cauchy

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Pour $u \geqslant 0$ et $x > 1$, on pose $f_u(x) = \sum\limits_{u<n\leqslant ux} a_n$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) pour tout $x > 1$, $f_u(x)$ a une limite finie lorsque $u \to +\infty$;
(ii) la suite $(na_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Remarquons pour commencer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $L \geqslant 0$ puisqu'elle est décroissante et minorée par 0. Si $L > 0$, (ii) n'est pas vérifiée. Par ailleurs, si N est un entier naturel tel que $a_n \geqslant \frac{L}{2}$ pour $n \geqslant N$, on a, pour $x > 1$ et $u \geqslant N$,

$$f_u(x) \geqslant \frac{L}{2}(ux - u) = \frac{uL(x-1)}{2}$$

et donc $\lim\limits_{u\to+\infty} f_u(x) = +\infty$. Ainsi, ni ($i$), ni ($ii$) ne sont vérifiées, ce qui montre l'équivalence dans le cas $L > 0$. Nous supposerons donc dans la suite que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

• Supposons que la suite (na_n) converge et notons ℓ sa limite. Fixons $x > 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant na_n \leqslant \ell + \varepsilon$

pour $n \geqslant n_0$. Par conséquent, si $u \geqslant n_0$, on a

$$(\ell - \varepsilon) \sum_{n=\mathrm{E}(u)+1}^{\mathrm{E}(ux)} \frac{1}{n} \leqslant f_u(x) \leqslant (\ell + \varepsilon) \sum_{n=\mathrm{E}(u)+1}^{\mathrm{E}(ux)} \frac{1}{n}.$$

De $\displaystyle\sum_{n=\mathrm{E}(u)+1}^{\mathrm{E}(ux)} \frac{1}{n} \underset{u\to\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\mathrm{E}(ux)}{\mathrm{E}(u)}\right) \xrightarrow[u\to+\infty]{} \ln x$, on déduit que, pour u assez grand, on a $(\ell - 2\varepsilon)\ln x \leqslant f_u(x) \leqslant (\ell + 2\varepsilon)\ln x$. Ce qui traduit le fait que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} f_u(x) = \ell \ln x$.

• Supposons (i) et notons pour $x > 1$, $\ell(x) = \displaystyle\lim_{u\to+\infty} f_u(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, on peut écrire, pour $\mathrm{N} \geqslant 1$ et $x > 1$,

$$f_{\mathrm{N}}(x) = \sum_{\mathrm{N}<x\leqslant \mathrm{N}x} a_n \leqslant (\mathrm{E}(\mathrm{N}x) - \mathrm{N})a_{\mathrm{N}}$$

$$\text{et} \quad f_{\mathrm{N}/x}(x) = \sum_{\mathrm{N}/x<n\leqslant \mathrm{N}} a_n \geqslant (\mathrm{N} - \mathrm{E}\,(\mathrm{N}/x))a_{\mathrm{N}}.$$

On en déduit l'encadrement

$$\frac{f_{\mathrm{N}}(x)}{\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{N}x)}{\mathrm{N}} - 1} \leqslant \mathrm{N}a_{\mathrm{N}} \leqslant \frac{f_{\mathrm{N}/x}(x)}{1 - \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{N}/x)}{\mathrm{N}}}.$$

On a $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{f_{\mathrm{N}}(x)}{\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{N}x)}{\mathrm{N}} - 1} = \frac{\ell(x)}{x-1}$ et $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{f_{\mathrm{N}/x}(x)}{1 - \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{N}/x)}{\mathrm{N}}} = \frac{x\ell(x)}{x-1}$ $(*)$.

Supposons que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ell(x)}{x-1}$ existe et vaille L. Alors, pour x assez proche de 1, on aura $\dfrac{\ell(x)}{x-1}$ et $\dfrac{x\ell(x)}{x-1}$ dans l'intervalle $[\mathrm{L}-\varepsilon, \mathrm{L}+\varepsilon]$. Des limites $(*)$ et de l'encadrement de $\mathrm{N}a_{\mathrm{N}}$ trouvé, il résulte que pour N assez grand, $\mathrm{N}a_{\mathrm{N}}$ est dans l'intervalle $[\mathrm{L}-2\varepsilon, \mathrm{L}+2\varepsilon]$. Autrement dit, on a $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{N}a_{\mathrm{N}} = \mathrm{L}$.

Il reste donc à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ell(x)}{x-1}$ existe. La démonstration dans l'autre sens incite à penser que la fonction ℓ est un multiple de la fonction ln. La fonction ℓ est définie, positive et croissante sur $]1, +\infty[$. Pour $(x, y) \in\,]1, +\infty[^2$ et $u > 0$, on a

$$f_u(xy) = \sum_{u<n\leqslant uxy} a_n = \sum_{u<n\leqslant nu} a_n + \sum_{ux<n\leqslant uxy} a_n = f_u(x) + f_{ux}(y).$$

En faisant tendre u vers $+\infty$, il vient

$$\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y).$$

C'est un résultat classique que les morphismes croissants du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même sont les applications $x \longmapsto ax$. On en déduit immédiatement, en composant par la fonction ln que les morphismes croissants de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ sont les applications $x \longmapsto \mathrm{K} \ln x$.

Ici, ℓ n'est définie que sur $]1, +\infty[$. On la prolonge à $]0, +\infty[$ en posant

$$\begin{cases} \ell(x) = -\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ \ell(1) = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'on obtient ainsi un morphisme croissant de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Il existe donc $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que pour tout $x > 0$, on ait $\ell(x) = \mathrm{K} \ln x$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ell(x)}{x-1} = \mathrm{K}$. On a donc prouvé l'implication. $\triangleleft$

Sont regroupés ci-après plusieurs exercices utilisant la notion de valeur d'adhérence. *Rappelons que, le corps* K *étant* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *l'élément* ℓ *de* K *est valeur d'adhérence de la suite* $(u_n) \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ *s'il existe une sous-suite de* (u_n) *convergeant vers* ℓ *; autrement dit, s'il existe une application strictement croissante* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *(appelée* extraction*) telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. *Il est parfois plus simple d'utiliser la caractérisation suivante :* ℓ *est valeur d'adhérence de la suite* (u_n) *si, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, *il existe* $n \geqslant \mathrm{N}$ *tel que* $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. *Autrement dit, dans tout voisinage de* ℓ, *il existe une infinité de termes de la suite.*

On peut démontrer que l'ensemble X_u *des valeurs d'adhérence de la suite* u *est égal à* $\bigcap\limits_{\mathrm{N} \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{X}_\mathrm{N}}$, *où* $\mathrm{X}_\mathrm{N} = \{u_p,\ p \geqslant \mathrm{N}\}$ *pour* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. *Cela résulte des équivalences suivantes, où* $\mathcal{V}(\ell)$ *désigne l'ensemble des voisinages de* ℓ *:*

$$\begin{aligned} \ell \in \mathrm{X}_u &\iff \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \geqslant \mathrm{N} \ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ &\iff \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ \ \forall \mathrm{V} \in \mathcal{V}(\ell) \ \ \mathrm{V} \cap \mathrm{X}_\mathrm{N} \neq \emptyset \\ &\iff \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ \ \ell \in \overline{\mathrm{X}_\mathrm{N}}. \end{aligned}$$

Les ensembles $\overline{\mathrm{X}_\mathrm{N}}$ *étant fermés, il en de même de* X_u. *Si, de plus, la suite* (u_n) *est bornée, les ensembles* $\overline{\mathrm{X}_\mathrm{N}}$ *sont bornés et il en de même de* X_u *qui est donc compact.*

Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme que toute suite bornée de K *possède une valeur d'adhérence. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est donc un compact non vide. Le premier exercice donne un exemple non trivial.*

2.11. Valeurs d'adhérence d'une suite complexe

On pose $z_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right)$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(École polytechnique)

Solution.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, ρ_n le module de z_n. On a

$$\rho_n = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

et comme $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2}$ pour k tendant vers l'infini, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$. Par continuité de l'exponentielle, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_n = \mathrm{R} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

Notons pour $k \geqslant 1$, $\alpha_k = \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \equiv \arg\left(1+\frac{i}{k}\right) \pmod{2\pi}$. On a alors

$$z_n = \rho_n e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)} = \rho_n e^{i\mathrm{S}_n},$$

où $\mathrm{S}_n = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

Les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{i\mathrm{S}_n})$ sont de module 1. Montrons qu'on obtient le cercle unité U tout entier. Considérons $\alpha \in \mathbb{R}$ et montrons que $e^{i\alpha}$ est une valeur d'adhérence de $(e^{i\mathrm{S}_n})$. Il faut montrer pour cela que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel $n \geqslant k_0$ tel que $|e^{i\alpha} - e^{i\mathrm{S}_n}| \leqslant \varepsilon$.

Comme $\alpha_k \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{k}$, il existe $k_1 \geqslant k_0$ tel que $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \varepsilon$ si $k \geqslant k_1$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $2\mathrm{N}\pi + \alpha \geqslant \mathrm{S}_{k_1}$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, S_n diverge vers $+\infty$. Il existe donc $n \geqslant k_1$ tel que $\mathrm{S}_n > 2\mathrm{N}\pi + \alpha$. Considérons n_0, le plus petit des entiers $n \geqslant k_1$ vérifiant $\mathrm{S}_n > 2\mathrm{N}\pi+\alpha$. Dans ces conditions, on a $\mathrm{S}_{n_0-1} \leqslant 2\mathrm{N}\pi+\alpha < \mathrm{S}_{n_0}$. Comme $0 \leqslant \mathrm{S}_{n_0} - \mathrm{S}_{n_0-1} = \alpha_{n_0} \leqslant \varepsilon$, on en déduit que $|\mathrm{S}_{n_0} - \alpha - 2\mathrm{N}\pi| \leqslant \varepsilon$ et, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\left|e^{i\mathrm{S}_{n_0}} - e^{i\alpha}\right| = \left|e^{i\mathrm{S}_{n_0}} - e^{i(\alpha+2\mathrm{N}\pi)}\right| \leqslant |\mathrm{S}_{n_0} - \alpha - 2\mathrm{N}\pi| \leqslant \varepsilon.$$

L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(e^{i\mathrm{S}_n})_{n\geqslant 1}$ est donc exactement U.

Conclusion. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est le cercle de centre 0 et de rayon R. ◁

On peut démontrer plus généralement que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = 0$, *l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $(e^{i\mathrm{S}_n})$ *est le cercle unité.*

Il est important de savoir qu'une suite bornée converge si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Il est clair que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on raisonne par l'absurde, en supposant que la suite bornée (u_n) *ne converge pas vers son unique valeur d'adhérence* ℓ. *Il existe donc un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que l'on ait* $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$ *pour une infinité d'indices. Autrement dit, on peut extraire de* (u_n) *une sous-suite* $(u_{\varphi(n)})$ *telle* $|u_{\varphi(n)} - \ell| \geqslant \varepsilon$, *pour tout* n. *La suite* $(u_{\varphi(n)})$, *qui est bornée, possède une valeur d'adhérence* ℓ' *qui vérifie* $|\ell' - \ell| \geqslant \varepsilon$ *et donc* $\ell' \neq \ell$. *C'est impossible car* ℓ' *est aussi une valeur d'adhérence de la suite* (u_n). *Les deux exercices suivants utilisent ce résultat qu'il faudrait bien entendu redémontrer lors de l'oral.*

2.12. Question de convergence

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

(**École normale supérieure, école polytechnique**)

▷ **Solution.**

Il nous suffit de prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une unique valeur d'adhérence. Soit a une telle valeur (la suite en a au moins une d'après le théorème de Bolzano-Weierstarss) et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)}$ tende vers a. Notons par ailleurs ℓ la limite de la suite $v_n = u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}\cdot$ En considérant la suite $v_{\varphi(n)}$ on voit que $2(\ell - a)$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. En itérant cela, on en déduit que tous les termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = 2(\ell - a_n)$ sont des valeurs d'adhérence. Cette suite arithmético-géométrique de raison -2 n'est pas bornée sauf si $a_0 = a$ est le point fixe de la fonction affine $x \mapsto 2(\ell - x)$. Comme l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est borné, on a donc forcément $a = \dfrac{2\ell}{3}\cdot$

Conclusion. La suite bornée $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet $\dfrac{2\ell}{3}$ pour unique valeur d'adhérence et converge donc vers cette valeur. ◁

2.13. Étude de convergence

1. Soit a_n et b_n deux suites réelles telles que $a_n + b_n \to 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \to 2$. Montrer que les deux suites convergent.

2. Soient a_n, b_n, c_n trois suites réelles telles que $a_n + b_n + c_n \to 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \to 3$. Que peut-on dire de la convergence de ces trois suites ?

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Posons $u_n = e^{a_n} + e^{b_n}$. Comme $e^{a_n} \leqslant u_n$ et $e^{b_n} \leqslant u_n$ on peut déjà dire que les suites (e^{a_n}) et (e^{b_n}) sont majorées. Il en est donc de même des suites (a_n) et (b_n). On en déduit que les deux suites sont bornées : en effet, en écrivant par exemple $a_n = (a_n + b_n) - b_n$, on montre que (a_n) est minorée comme somme de deux suites minorées.

Soit alors a une valeur d'adhérence de a_n et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(a_{\varphi(n)})$ converge vers a. La suite $(b_{\varphi(n)})$ converge alors vers $-a$ et on a donc $e^a + e^{-a} = 2$. Or pour $x > 0$ on a toujours $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ avec égalité si et seulement si $x = 1$ (inégalité des moyennes). On en déduit que $e^a = 1$ donc que $a = 0$. Ainsi (a_n) admet 0 pour seule valeur d'adhérence et converge donc vers 0. Il en est de même pour (b_n).

2. On montre comme dans la question précédente que les trois suites sont bornées. Soit a une valeur d'adhérence de la suite (a_n) et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(a_{\varphi(n)})$ converge vers a. Quitte à extraire une sous-suite convergente de la suite bornée $(b_{\varphi(n)})$ on peut directement supposer que $(b_{\varphi(n)})$ converge vers une valeur d'adhérence b de la suite b_n. L'hypothèse $a_n + b_n + c_n \to 0$ permet alors de dire que $(c_{\varphi(n)})$ tend vers $-a-b$. Par continuité de l'exponentielle on a donc $e^a+e^b+e^{-a-b} = 3$. On va prouver que cela implique $a = b = 0$ ce qui permettra de conclure comme dans la question précédente.

Pour cela on étudie $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy} - 3$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: il suffit de prouver que le minimum de f est 0 et qu'il n'est atteint qu'en $(1,1)$. Supposons $y > 0$ fixé. La dérivée partielle par rapport à x vaut $1 - \dfrac{1}{x^2 y}$ et $x \mapsto f(x,y)$ est minimal lorsque $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$. On se ramène donc à l'étude de la fonction d'une variable $g : y \mapsto y + \dfrac{2}{\sqrt{y}} - 3$. Comme $g'(y) = 1 - y^{-3/2}$, on voit tout de suite que g est minimale en 1 et seulement en ce point, et que le minimum vaut 0.

Conclusion. Les trois suites convergent vers 0. ◁

Nous avons vu précédemment que l'ensemble X_u *des valeurs d'adhérence d'une suite bornée* (u_n) *est un compact non vide. Dans le cas d'une suite réelle,* X_u *possède donc un plus petit élément* ℓ*, appelé* limite inférieure *de* (u_n)*, noté* $\liminf u_n$*, et un plus grand élément* L*, appelé* limite supérieure *de* (u_n)*, noté* $\limsup u_n$.

Si (u_n) *est une suite réelle bornée, la suite de terme général* $\sup\limits_{p\geqslant n} u_p$ *est décroissante et bornée donc convergente. On peut démontrer que* $\limsup u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sup\limits_{p\geqslant n} u_p)$ *et de même que* $\liminf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\inf\limits_{p\geqslant n} u_p)$*, ce qui explique la notation.*

Dans l'exercice suivant on cherche donc à minorer la limite supérieure de la suite considérée.

2.14. Minoration de la limite supérieure

Soit (a_n) une suite réelle à termes strictement positifs. On pose $b_n = n\left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} b_k \geqslant 1$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

L'existence de la limite résulte de la décroissance de la suite $(\sup\limits_{k\geqslant n} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} b_k = \ell < 1$. Soit $\lambda \in]\ell, 1[$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $\sup\limits_{k\geqslant n} b_k \leqslant \lambda$, c'est-à-dire $b_k \leqslant \lambda$ pour tout $k \geqslant n_0$. On écrit cette inégalité $1 + a_{k+1} - a_k \leqslant \lambda \dfrac{a_k}{k}\cdot$ En sommant ces inégalités pour k variant de n_0 à n , on obtient, pour tout $n > n_0$,

$$n - n_0 + 1 + a_{n+1} - a_{n_0} \leqslant \lambda \sum_{k=n_0}^{n} \frac{a_k}{k}.$$

On pose $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{a_k}{k}\cdot$ On obtient $a_{n+1} = (n+1)(S_{n+1} - S_n)$ et donc

$$S_{n+1} \leqslant \frac{(n+1+\lambda)S_n - n + n_0 - 1 + a_{n_0}}{n+1}.$$

La suite (S_n) est croissante. Si elle converge vers L, on obtient par passage à la limite $L \leqslant L - 1$. La suite (S_n) diverge donc vers $+\infty$. Comme $\lambda < 1$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que l'on ait $\lambda S_n + n_0 - 1 + a_{n_0} \leqslant S_n$ et donc $S_{n+1} \leqslant \dfrac{(n+2)S_n - n}{n+1}$ pour $n \geqslant n_1$. Cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{S_n}{n+1} - \frac{S_{n+1}}{n+2} \geqslant \frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

La suite de terme général $\dfrac{S_n}{n+1}$ est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{S_n}{n+1} - \dfrac{S_{n+1}}{n+2}$ converge. C'est impossible car elle est supérieure à une série de terme général équivalent à $\dfrac{1}{n}$ et donc divergente. Nous obtenons la contradiction voulue ◁

Il a été démontré dans 1.13 que tout réel de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin n)$. Ce résultat est utilisé dans l'exercice suivant. On notera aussi que si ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), alors la suite (u_n) ne peut converger que vers ℓ.

2.15. Suites et approximation diophantienne

1. *Théorème de Dirichlet.* Soit α un irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

2. Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{n \sin n}\right)_{n \geqslant 1}$.

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $s \geqslant 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^s \sin(\pi \alpha n)}\right)_{n \geqslant 1}$ diverge.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère les $N+1$ réels $k\alpha$ (où k décrit les entiers de 0 à N). Les $N+1$ différences $k\alpha - E(k\alpha)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$ qui est réunion disjointe des N «tiroirs» $\left[\dfrac{i}{N}, \dfrac{i+1}{N}\right[$ $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$.

Ainsi, un de ces intervalles de longueur $\dfrac{1}{N}$ contient nécessairement deux de ces différences ; autrement dit, il existe $0 \leqslant k < \ell \leqslant N$ et $0 \leqslant i \leqslant N-1$ tels que

$$k\alpha - E(k\alpha) \text{ et } \ell\alpha - E(\ell\alpha) \text{ sont dans } \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right[.$$

En posant $q = \ell - k \in [\![1, N]\!]$ et $p = E(\ell\alpha) - E(k\alpha)$ on obtient

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{\mathrm{N}} \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Il nous reste à vérifier qu'il y a une infinité de couples vérifiant l'inégalité. Si on suppose ces couples en nombre fini, on peut en trouver un pour lequel la distance $d = |q\alpha - p|$ est minimale. Comme α est irrationnel, d est strictement positif et on peut choisir N entier naturel avec $\frac{1}{\mathrm{N}} < d$. Le travail qui vient d'être fait permet de construire un couple (p', q') de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|q'\alpha - p'| < \frac{1}{\mathrm{N}} < d$ et $\left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| \leqslant \frac{1}{q'^2}$, ce qui est contradictoire.

2. Il est classique que la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ est dense dans $[-1, 1]$ (c'est l'objet de l'exercice 1.13.) Aussi peut-on trouver une suite $(k_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers, strictement croissante, telle que la limite de $\sin k_n$ soit égale à 1. La suite extraite $\left(\frac{1}{k_n \sin k_n}\right)$ converge alors vers 0.

Pour prouver que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ ne peut pas converger vers 0, on cherche une suite extraite pour laquelle u_n reste assez grand, c'est-à-dire $n \sin n$ petit et donc n proche de $\pi\mathbb{Z}$, ou encore $\frac{n}{\pi}$ proche de $\mathbb{Z}$. On pose $\alpha = \frac{1}{\pi}$, qui est irrationnel, de telle manière que $\sin n = \sin \pi\alpha n$. On contrôle la distance de $n\alpha$ aux entiers à l'aide du théorème de Dirichlet, objet de la question précédente.

Soit $\mathrm{E} = \left\{q \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{Z}, \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}\right\}$. L'ensemble E est infini car non majoré. En effet, si E était majoré, il n'y aurait qu'un nombre fini de couples (p, q) satisfaisant à la relation $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$ puisque, dans ces conditions,

$$|p| - |\alpha| q \leqslant \frac{1}{q} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |p| \leqslant 1 + |\alpha| q,$$

ce qui, pour $q \in \mathrm{E}$, conduit à un nombre fini de p. Il existe donc une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante constituée des éléments de E et une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que, pour tout entier n,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n^2}, \quad \textit{i.e.} \quad |\alpha q_n - p_n| \leqslant \frac{1}{q_n}.$$

Ainsi, pour n entier naturel,

$$|\sin \pi\alpha q_n| = |\sin(\pi\alpha q_n - \pi p_n)| = |\sin \pi(\alpha q_n - p_n)| \leqslant \frac{\pi}{q_n},$$

si bien que $|u_{q_n}| = \dfrac{1}{q_n |\sin \alpha\pi q_n|} \geqslant \dfrac{1}{\pi}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne saurait converger vers 0. Comme 0 est une valeur d'adhérence, elle est donc divergente.

3. On va faire en sorte que la suite $(\sin \pi\alpha n)$ ait 0 comme valeur d'adhérence et, comme dans la question précédente, on va essayer de contrôler la vitesse de convergence afin d'estimer le produit $n^s \sin(\pi\alpha n)$. On pose $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$. On a alors

$$|\sin \pi\alpha 10^{n!}| = \left|\sin\left(\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!-n!}}\right)\right| \leqslant \pi \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!-n!}}\right)$$
$$\leqslant \pi \sum_{k=(n+1)!-n!}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \leqslant \frac{\pi}{10^{(n+1)!-n!}} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \leqslant \mathrm{K}\frac{10^{n!}}{10^{(n+1)!}},$$

où $\mathrm{K} = \frac{10\pi}{9}$. Pour $s \geqslant 0$, on étudie $v_n = (10^{n!})^s |\sin \pi\alpha 10^{n!}|$. On a la majoration

$$v_n \leqslant \mathrm{K}\frac{(10^{n!})^{s+1}}{10^{(n+1)!}}$$

et, en passant au logarithme,

$$\ln v_n \leqslant \ln \mathrm{K} + n!(s+1)\ln 10 - (n+1)!\ln 10 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

On en déduit que (v_n) converge vers 0 et par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{k_n^s \sin \pi\alpha k_n}\right| = +\infty \quad \text{pour } k_n = 10^{n!}.$$

Conclusion. Pour $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ et $s \geqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^s \sin(\pi\alpha n)}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge. ◁

On aura reconnu en α un nombre de Liouville (voir l'exercice 1.11 du présent tome ainsi que l'exercice 5.47 du tome 1 d'algèbre).

Nous commençons une série d'exercices étudiant des exemples concrets de suites.

2.16. Équivalent d'une suite d'entiers

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3, \ldots$ Elle prend une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3 et ainsi de suite. Donner une expression du terme général (à l'aide de la fonction partie entière) et un équivalent de u_n.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il est clair que la suite est croissante et diverge vers $+\infty$. En fait, on a $u_n = k$ lorsque $\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leqslant n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$. Sans expliciter le terme général, cet encadrement nous donne déjà un équivalent de u_n. En effet, on a

$$\frac{(u_n - 1)}{2u_n} + \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{n}{u_n^2} < \frac{(u_n + 1)}{2u_n} + \frac{1}{u_n}$$

de sorte que $\frac{n}{u_n^2}$ tend vers $\frac{1}{2}$ et $u_n^2 \sim 2n$ soit $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Cherchons maintenant une expression explicite de u_n. L'inégalité $\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leqslant n$ équivaut $k^2 - k + 2 - 2n \leqslant 0$ et, k étant positif, elle est vérifiée si et seulement si $k \leqslant \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$. De la même manière on a $n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$ si et seulement si $k + 1 > \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$. Cet encadrement prouve que

$$\boxed{u_n = \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right)}.$$

Bien entendu on retrouve l'équivalent obtenu plus haut. ◁

2.17. Somme des puissances n-ièmes des n premiers entiers

> Étudier la suite $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^n$.
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

On a

$$u_n = \frac{1}{n^n} + \cdots + \frac{(n-1)^n}{n^n} + \frac{n^n}{n^n} = 1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme $\left(1 - \frac{p}{n}\right)^n$ tend vers e^{-p} lorsque n tend vers l'infini, le second terme de cette somme tend vers $\frac{1}{e}$, le troisième vers $\frac{1}{e^2}$, …, de sorte qu'on peut penser que la limite de (u_n) est $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}$.

Pour le montrer, on écrit $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$. En utilisant l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout réel $x > -1$, on obtient déjà

$$0 \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

Minorons u_n maintenant. Soit $\mathrm{N} \geqslant 0$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$u_n \geqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n = v_n$$

et la limite de v_n est $\ell_{\mathrm{N}} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} e^{-k} = \dfrac{e-e^{-\mathrm{N}-1}}{e-1}$. La limite de ℓ_{N} est $\dfrac{e}{e-1}$ quand N tend vers l'infini. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N tel que $\ell_{\mathrm{N}} \geqslant \dfrac{e}{e-1} - \varepsilon$. Comme v_n converge vers ℓ_{N}, pour n assez grand, $v_n \geqslant \ell_{\mathrm{N}} - \varepsilon \geqslant \dfrac{e}{e-1} - 2\varepsilon$. Dans ces conditions, pour n assez grand, on a l'encadrement

$$\frac{e}{e-1} - 2\varepsilon \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{e-1},$$

ce qui prouve que u_n converge vers $\dfrac{e}{e-1}$. $\triangleleft$

Dans l'exercice suivant ont été regroupés deux énoncés posés séparément. Il fait la transition avec le prochain thème consacré aux suites récurrentes.

2.18. Racines itérées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$$

1. Étudier (u_n) lorsque (a_n) est constante égale à $a > 0$, puis lorsque $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$, où $\lambda > 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite $(a_n^{1/2^n})_{n\geqslant 0}$ est bornée.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Supposons tout d'abord que (a_n) est constante égale à $a > 0$. On a alors $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ pour tout entier n, ce qui nous ramène à une suite récurrente classique. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x+a}$. Celle-ci f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et y possède un unique point fixe $\ell = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Sur l'intervalle $[0, \ell]$ on a $f(x) > x$. Comme $u_0 = \sqrt{a} < \ell$, la suite (u_n) est croissante, majorée par ℓ et converge donc nécessairement vers ℓ.

Supposons maintenant que $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$. On a alors $u_0 = \sqrt{\lambda^2} = \lambda$, $u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4}} = \lambda\sqrt{1+\sqrt{1}}$ et plus généralement,

$$u_n = \lambda\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}.$$

D'après le point précédent, (u_n) converge donc vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda$.

2. Commençons par observer que la suite (u_n) est toujours croissante, car comme $a_n \leqslant a_n + \sqrt{a_{n+1}}$, la croissance de la fonction racine carrée conduit à $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) converge donc si et seulement si elle est majorée. Notons aussi que si (a'_n) est une seconde suite de réels positifs qui vérifie $a_n \leqslant a'_n$ pour tout n, alors on a $u_n \leqslant u'_n$ pour tout n, (u'_n) étant la suite associée à (a'_n) de la même manière que (u_n) est associée à (a_n). Démontrons maintenant l'équivalence proposée.

Si dans l'expression de u_n on minore $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ par 0, il vient $u_n \geqslant a_n^{1/2^{n+1}}$. On a donc $a_n^{1/2^n} \leqslant u_n^2$ de sorte que si la suite (u_n) converge, la suite $(a_n^{1/2^n})_{n\geqslant 0}$ est bornée. Montrons la réciproque.

Il existe par hypothèse un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout n, $a_n^{1/2^n} \leqslant \lambda$. On en déduit que $a_n \leqslant \lambda^{2^n}$ Les remarques qui précèdent, associées au résultat de la première question, permettent d'affirmer que (u_n) converge.

3. En faisant passer les entiers $2, 3, \ldots$ dans les racines carrées qui suivent on retrouve bien une suite du type précédent. En notant (u_n) la suite proposée, on écrit ainsi,

$$u_2 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3}} = \sqrt{1+\sqrt{2^2+\sqrt{2^4.3^2}}},$$

$$u_3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4}}} = \sqrt{1+\sqrt{2^2+\sqrt{2^4.3^2+\sqrt{2^8.3^4.4^2}}}}.$$

Il s'agit donc de la suite (u_n) associée à la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_n = 2^{2^n}3^{2^{n-1}}\ldots n^4(n+1)^2$ pour tout $n \geqslant 1$. On utilise le critère de convergence de la question 2. On a pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln a_n}{2^n} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\ln k}{2^{k-2}}.$$

Il s'agit de la somme partielle d'une série convergente. La suite $\frac{\ln a_n}{2^n}$ converge, et en passant à l'exponentielle, la suite $(a_n^{1/2^n})$ également. En particulier elle est bornée. D'après la question précédente, la limite recherchée est finie. On demande toutefois ici de déterminer sa valeur. Une étude numérique semble indiquer que la limite est 3. Pour le démontrer, on va majorer la quantité $3 - u_n$ en multipliant chaque expression par sa conjuguée pour éliminer les racines carrées. On a, puisque $u_n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}|3 - u_n| = \frac{|9 - u_n^2|}{3 + u_n} &\leqslant \frac{1}{4}|9 - u_n^2| \\ &\leqslant \frac{2}{4}\left|4 - \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}\right|.\end{aligned}$$

On recommence la même majoration. Il vient

$$|3 - u_n| \leqslant \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5}\left|5 - \sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{\cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}\right|.$$

On réitère le procédé pour obtenir finalement,

$$|3 - u_n| \leqslant \frac{2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{4 \cdot 5 \cdots (n+1)}\left(n + 1 - \sqrt{1+n}\right) \leqslant \frac{6}{n},$$

ce qui prouve que (u_n) converge vers 3. ◁

Les exercices qui suivent sont consacrés à l'étude de systèmes dynamiques discrets, autrement dit de suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. L'intervalle I étant stable par f et u_0 appartenant à I, on s'intéresse donc à la suite $(f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$ des images de u_0 par les itérés de f, qui constituent ce qu'on appelle l'orbite du point u_0.

On sait que dans le cas où f est continue, les limites possibles de la suite (u_n) sont les points fixes de f. L'exercice théorique suivant donne une condition nécessaire et suffisante de convergence d'un système dynamique lorsque f est définie sur un intervalle borné.

2.19. Un critère de convergence pour les systèmes dynamiques discrets

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Bien évidemment, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ,

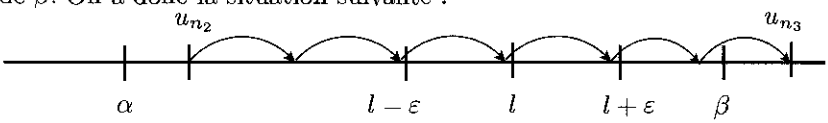
$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0.$$

Passons à la réciproque. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. La suite (u_n) étant bornée, il suffit de démontrer qu'elle possède une seule valeur d'adhérence. Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n) possède deux valeurs d'adhérence α et β ($\alpha < \beta$).

Nous allons montrer qu'alors tout réel $\ell \in]\alpha, \beta[$ est aussi valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \geqslant 0$. Il faut démontrer l'existence de $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Quitte à diminuer ε, on peut supposer qu'on a $\alpha < \ell - \varepsilon < \ell + \varepsilon < \beta$.

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Notons $n_1 = \max(\mathrm{N}, n_0)$. Pour $n \geqslant n_1$, on passe de u_n à u_{n+1} en faisant des «sauts» dont la longueur ne peut excéder ε.

Puisque α est une valeur d'adhérence, il existe $n_2 \geqslant n_1$ tel que u_{n_2} soit dans le voisinage $]-\infty, \ell - \varepsilon[$ de α. De même, β étant une valeur d'adhérence, il existe $n_3 \geqslant n_2$ tel que u_{n_3} soit dans le voisinage $]\ell+\varepsilon, +\infty[$ de β. On a donc la situation suivante :



Pour aller de $u_{n_2} < \ell - \varepsilon$ à $u_{n_3} > \ell + \varepsilon$ en faisant des sauts inférieurs à ε, les u_n pour $n \in [\![n_2, n_3]\!]$ sont obligés de passer dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Considérons

$$n = \max\{p \in [\![n_2, n_3]\!], u_p < \ell - \varepsilon\}.$$

L'entier n est bien défini puisque $\{p \in [\![n_2, n_3]\!], u_p < \ell - \varepsilon\}$ est une partie non vide (elle contient n_2), majorée de $\mathbb{N}$ et $n < n_3$. On a donc $u_{n+1} \geqslant \ell - \varepsilon$, mais aussi

$$u_{n+1} \leqslant u_n + |u_{n+1} - u_n| \leqslant u_n + \varepsilon \leqslant \ell - \varepsilon + \varepsilon = \ell.$$

On a trouvé un entier $n + 1 \geqslant \mathrm{N}$ tel que $u_{n+1} \in [\ell - \varepsilon, \ell]$. Ceci montre que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons qu'alors tout élément $\ell \in [\alpha, \beta]$ est point fixe de f. Puisque ℓ est valeur d'adhérence de la suite, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers ℓ. Par continuité de f, $f(u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Puisque par hypothèse $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $f(\ell) = \ell$.

En particulier, puisque $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [\alpha, \beta]$. Mais alors on a $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, contrairement à ce que nous avions supposé. $\triangleleft$

La démonstration précédente permet de montrer que si (u_n) est une suite bornée vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors l'ensemble X_u des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un intervalle. Mais nous savons déjà que, pour toute suite bornée, X_u est compact. Nous en déduisons que X_u est un segment[2].

Tout point fixe ℓ de f est limite d'au moins une suite vérifiant la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, à savoir la suite constante obtenue en prenant $u_0 = \ell$. Mais le cas intéressant est celui où il y a «beaucoup» de suites de limite ℓ : on dit par exemple que ℓ est un point fixe attractif s'il y a un intervalle ouvert I contenant ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ si $u_0 \in \mathrm{I}$. C'est le cas si f est de classe C^1 et $|f'(\ell)| < 1$. On choisit $k \in]|f'(1)|, 1[$ et un intervalle I contenant ℓ sur lequel $|f'| \leqslant k$. La convergence de (u_n) pour $u_0 \in \mathrm{I}$ résulte de l'inégalité des accroissements finis. Au contraire, si f est de classe C^1 et si $|f'(\ell)| > 1$, la suite (u_n) ne converge vers ℓ que si la suite est stationnaire : le point ℓ est appelé point fixe répulsif (ce résultat est démontré dans l'exercice suivant).

On peut s'intéresser à d'autres comportements asymptotiques que la convergence, par exemple au cas où la suite des termes pairs (u_{2n}) converge vers une limite ℓ_1 et la suite des termes impairs (u_{2n+1}) vers une limite ℓ_2. On a alors forcément $f(\ell_1) = \ell_2$ et $f(\ell_2) = \ell_1$, c'est-à-dire que ℓ_1 et ℓ_2 sont des points fixes de $f \circ f$. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont distincts ils ne sont pas points fixes de f et on parle de points d'ordre 2 : la suite définie par $u_0 = \ell_1$ (ou $u_0 = \ell_2$) est une suite périodique de période 2.

On sait que dans le cas où f est croissante la suite (u_n) est monotone. L'exercice suivant étudie un exemple de système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est décroissante. La fonction $f \circ f$ est croissante et les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.

---

2. Ce résultat se généralise : l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique compact (E, d) qui vérifie $\lim d(u_n, u_{n+1}) = 0$ est connexe : voir l'exercice 1-11 de (A.) CHAMBERT-LOIR, (S.) FERMIGIER, (V.) MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*, Analyse 1, Masson 1994.

2.20. Étude d'un système dynamique (1)

Soit $\lambda \in]0,1]$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Considérons la fonction $f : x \longmapsto 1 - \lambda x^2$. L'intervalle $]0,1[$ étant stable par f, la suite (x_n) est à valeurs dans $]0,1[$. D'autre part, f est décroissante sur $]0,1[$. On en déduit que la fonction $f \circ f$ est croissante sur $]0,1[$. Les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc monotones. Comme elles sont bornées, elles sont toutes deux convergentes. Reste à savoir si elles ont la même limite.

Les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un point fixe de $f \circ f$ dans $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$(f \circ f)(x) - x = -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^2 x^2 - x + 1 - \lambda.$$

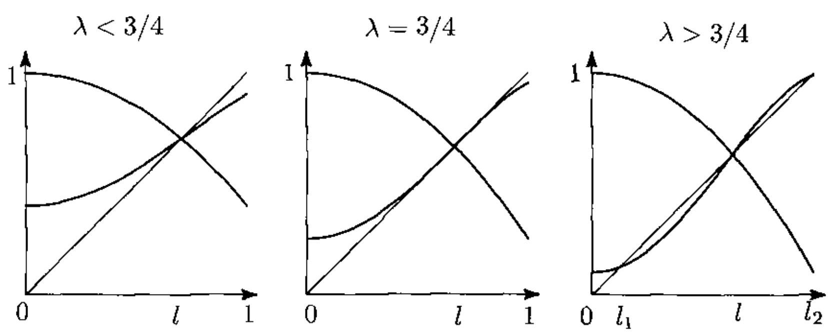
Cette expression peut être factorisée par $f(x) - x = -\lambda x^2 - x + 1$, car les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$. On trouve

$$(f \circ f)(x) - x = (-\lambda x^2 - x + 1)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda).$$

L'équation $-\lambda x^2 - x + 1 = 0$ a une seule solution dans $[0,1]$, qui est l'unique point fixe de f dans $[0,1]$,

$$\ell = \frac{\sqrt{1+4\lambda} - 1}{2\lambda} = \frac{2}{\sqrt{1+4\lambda}+1}.$$

Quant au discriminant de $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda$, il est égal à $\lambda^2(-3+4\lambda)$. Son signe dépend de la place de λ par rapport à $\frac{3}{4}$. On va donc distinguer trois cas. La figure ci-après donne l'allure des graphes de f et $f \circ f$ dans chacun des trois cas :



• Premier cas : $\lambda \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$. L'équation $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda = 0$ n'a pas de solution ; le seul point fixe de $f \circ f$ dans $[0,1]$ est ℓ. Les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

• Second cas : $\lambda = \frac{3}{4}$. L'équation $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda = 0$ a une seule solution $\frac{1}{2\lambda} = \frac{2}{3}$, qui est égale à ℓ. La conclusion est la même.

• Troisième cas : $\lambda \in \left]\frac{3}{4}, 1\right]$. L'équation $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda = 0$ a deux solutions

$$\ell_1 = \frac{1 - \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \frac{1 + \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ, à moins d'être stationnaire. On a $|f'(\ell)| = |-2\lambda\ell| = |\sqrt{1+4\lambda} - 1| = \sqrt{1+4\lambda} - 1 > 1$, car $\lambda > \frac{3}{4}$. On dit que ℓ est un point fixe répulsif de f. Soit $k \in \left]1, |f'(\ell)|\right[$. Par continuité de f', il existe un voisinage V de ℓ tel que si $x \in \mathrm{V}$, alors $|f'(x)| > k$. Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Il existe un entier n_0 tel que $x_n \in \mathrm{V}$ si $n \geqslant n_0$. De l'inégalité des accroissements finis, on déduit que $|f(x_n) - f(\ell)| \geqslant k|x_n - \ell|$, c'est-à-dire $|x_{n+1} - \ell| \geqslant k|x_n - \ell|$ pour $n \geqslant n_0$, puis $|x_n - \ell| \geqslant k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell|$ pour $n \geqslant n_0$. Si $x_{n_0} \neq \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell| = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On a donc $x_{n_0} = \ell$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. (Notons que cette démonstration est valable pour un point fixe répulsif d'une suite récurrente quelconque.)

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{n+1} = \ell \iff 1 - \lambda x_n^2 = 1 - \lambda\ell^2 \iff x_n^2 = \ell^2 \iff x_n = \ell,$$

car $x_n > 0$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est stationnaire que si $x_0 = \ell$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers ℓ que si $x_0 = \ell$.

Si $x_0 \neq \ell$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas converger vers ℓ (sinon l'autre sous-suite convergerait vers $f(\ell) = \ell$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait elle aussi). Elles ne peuvent pas avoir la même limite, pour les mêmes raisons. On en déduit que l'une converge vers ℓ_1 et l'autre vers ℓ_2, ce qui montre que $f(\ell_1) = \ell_2$ et $f(\ell_2) = \ell_1$.

Notons qu'on a $\ell_1 < \ell < \ell_2$. En effet, l'inégalité $\ell_1 < \ell$ équivaut à $\sqrt{1+4\lambda} + \sqrt{4\lambda - 3} > 2$. Cette dernière inégalité est réalisée car $\lambda > \frac{3}{4}$ et donc $\ell_1 < \ell$. La fonction f étant strictement décroissante, on en déduit $f(\ell_1) > f(\ell)$, c'est-à-dire que $\ell_2 > \ell$.

Si $x_0 < \ell$ alors $x_1 > \ell$ et pour tout entier n, $x_{2n} < \ell$ et $x_{2n+1} > \ell$, car $[0, \ell[$ et $]\ell, 1]$ sont stables par $f \circ f$; $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2. Si $x_0 > \ell$, c'est le contraire. ◁

En $\lambda = \dfrac{3}{4}$, *on a un changement de dynamique appelé* bifurcation.

La définition donnée précédemment d'un point d'ordre 2 se généralise aisément. Si α *est un point fixe de* f^p *qui n'est pas point fixe de* f^k *pour* $k < p$, *on dit que* α *est un point* périodique d'ordre p, *ou* p-périodique. *La suite définie par* $u_0 = \alpha$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *est périodique de période* p. *L'orbite de* α, *c'est-à-dire* $\{\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{p-1}(\alpha)\}$, *est appelée* cycle d'ordre p. *On peut alors regarder le comportement de la suite si* u_0 *est choisi proche de* α. *Dans le cas où* u_{np+k} *tend vers* $f^k(\alpha)$ *pour tout* $k \in [\![0, p-1]\!]$ *on dit que l'orbite de* α *est attractive. Il suffit pour cela que* $|(f^p)'(\alpha)| < 1$.

L'étude d'une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2-u_n^2$ *prolonge celle qui a été faite dans l'exercice 2.20. En effet, si on pose* $x_n = \dfrac{u_n}{2}$, *on obtient* $x_{n+1} = 1-2x_n^2$. *Il s'agit donc d'étudier le cas* $\lambda = 2$.

2.21. Étude d'un système dynamique (2)

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 - u_n^2$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

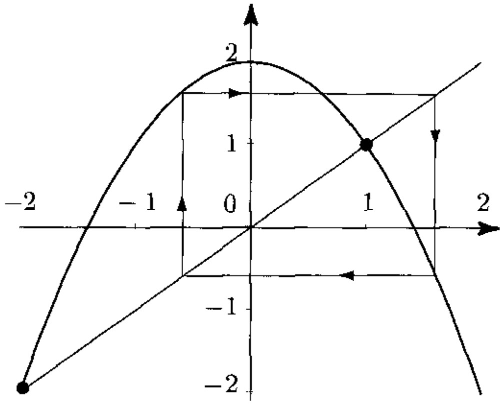
Une étude rapide de la fonction $f : x \longmapsto 2 - x^2$ montre qu'elle possède deux points fixes -2 et 1 et que

$$f([-2,2]) = [-2,2], \quad f(]-\infty,-2[) = f(]2,+\infty[) =]-\infty,-2[.$$

Enfin, l'étude de $f(x) - x = -(x-1)(x+2)$ montre que $f(x) < x$ si $x \in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$ et $f(x) > x$ si $x \in]-2,1[$.

Si u_0 appartient à $]-\infty,-2[$ ou à $]2,+\infty[$, tous les u_n, pour $n \geqslant 1$, sont dans $]-\infty,-2[$. On a alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$. La suite (u_n) décroît et ne peut pas converger, puisque f ne possède pas de points fixes dans $]-\infty,-2[$. La suite (u_n) diverge donc vers $-\infty$.

Si u_0 est dans $[-2,2]$, tous les termes de la suite sont dans $[-2,2]$. On remarque qu'on a $|f'(-2)| = 4$ et $|f'(1)| = 2$. Les deux points fixes de f étant répulsifs, la suite ne peut converger ni vers -2, ni vers 1, à moins d'être stationnaire. Elle diverge donc si elle n'est pas stationnaire.



Mais on peut calculer le terme général de la suite u_n. Si on écrit $u_n = -2\cos\theta_n$ (ce qui se révèle plus agréable que $u_n = 2\cos\theta_n$), on a alors $u_{n+1} = 2 - 4\cos^2\theta_n = -2\cos 2\theta_n$. Si on pose donc $u_0 = -2\cos\theta_0$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2\cos(2^n\theta_0)$. On peut donc prendre $\theta_n = 2^n\theta_0$. Ceci permet de déterminer les valeurs de θ_0 pour lesquelles (u_n) est stationnaire. Il faut qu'il existe n tel que $u_n = -2$ ou 1, c'est-à-dire $\cos\theta_n = 1$ ou $-\frac{1}{2}$. On trouve $\theta_0 = 2k\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ou $\theta_0 = \left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$.

Supposons que la suite (u_n) ne soit pas stationnaire. La fonction f étant croissante sur $[-2,0]$, les termes de la suite ne peuvent pas être tous dans cet intervalle à partir d'un certain rang, sinon la suite serait monotone et bornée et convergerait.

La fonction f est décroissante sur $[0,2]$. Si tous les termes de la suite sont dans $[0,2]$ à partir d'un certain rang, les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées. Elles convergent vers des limites distinctes, et distinctes de -2 et 1 (si u_{2n} converge vers un point fixe ℓ de f, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ converge vers $f(\ell) = \ell$), points fixes de $f \circ f$. Cherchons les points fixes de $f \circ f$. On obtient, pour tout $x \in [-2,2]$,

$$f\circ f(x) - x = 2 - (2-x^2)^2 - x = -x^4 + 4x^2 - x - 2 = (-x^2+2-x)(x^2-x-1),$$

car $f\circ f(x) - x$ est factorisable par $f(x) - x$. Outre -2 et 1, les points fixes de $f \circ f$ sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On remarque que $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et que $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Déterminons si ces points fixes de $f \circ f$ sont attractifs ou répulsifs. On obtient

$$(f\circ f)'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = (f\circ f)'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -4.$$

Ces points sont donc répulsifs. Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne peuvent donc pas converger si elles ne sont pas stationnaires. L'expression de u_n permet de déterminer les valeurs de u_0 pour lesquelles ceci est réalisé. Ce cas étant écarté, les termes de la suite ne peuvent être tous dans l'intervalle $[0,2]$ à partir d'un certain rang. Ils sont alternativement dans $[-2,0]$ et $[0,2]$.

On peut démontrer plus généralement que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f possède des points d'ordre p pour tout p. On peut les déterminer en remarquant que si $x = -2\cos\theta$, alors $f^p(x) = -2\cos(2^p\theta)$ et $f^p(x) = x$ si $(2^p - 1)\theta \equiv 0[2\pi]$ ou $(2^p + 1)\theta \equiv 0[2\pi]$. On en déduit que $x = -2\cos\dfrac{2\pi}{2^p+1}$ convient. On peut montrer que tous les points de ces cycles sont répulsifs. En effet, si $x = -2\cos\theta_0$ est un tel point, on a

$$\begin{aligned}(f^p)'(x) &= \prod_{k=0}^{p-1} f'(f^k(x)) = \prod_{k=0}^{p-1}(-2f^k(x)) = (-2)^p \prod_{k=0}^{p-1}(-2\cos(2^k\theta_0)) \\ &= 4^p \prod_{k=0}^{p-1}\cos(2^k\theta_0) = 4^p \prod_{k=0}^{p-1}\frac{\sin(2^{k+1}\theta_0)}{2\sin(2^k\theta_0)} = 2^p\frac{\sin(2^p\theta_0)}{\sin\theta_0}.\end{aligned}$$

Puisque $\cos(2^p\theta_0) = \cos(\theta_0)$, on en déduit que $|(f^p)'(x)| = 2^p$. Aucune sous-suite de (u_n) ne peut converger vers un tel point d'ordre p, si elle n'est stationnaire. $\triangleleft$

Le spectaculaire théorème de Sarkowski, qui fait l'objet de l'exercice suivant, montre que lorsqu'une application f admet un point d'ordre 3, elle a des points d'ordre p pour tout entier $p \geqslant 1$. Cela pourra être constaté sur l'exemple de l'exercice 2.23.

2.22. Théorème de Sarkowski (1964)

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une application continue.

1. Si K est un segment inclus dans $f(\mathrm{I})$, montrer qu'il existe un segment L inclus dans I tel que $\mathrm{K} = f(\mathrm{L})$.

2. On suppose qu'il existe n segments $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_{n-1}$ inclus dans I tels que $\mathrm{I}_0 \subset f(\mathrm{I}_{n-1})$ et $\mathrm{I}_{k+1} \subset f(\mathrm{I}_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Montrer que $f^n = f \circ \cdots \circ f$ a un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in \mathrm{I}_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

3. Si $x \in \mathrm{I}$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ on dit que x est un point n-périodique. Montrer que s'il existe un point 3-périodique, alors il existe un point n-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(École normale supérieure)

Solution.

1. Posons $K = [\alpha, \beta]$. Comme $K \subset f(I)$, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Si $\alpha = \beta$, alors $K = \{\alpha\}$ et le singleton $L = \{a\}$ convient. On suppose désormais $\alpha \neq \beta$ et donc $a \neq b$.

• Supposons $a < b$. L'idée est de prendre dans $[a, b]$ un antécédent u de α et un antécédent v de β, tels qu'entre u et v il n'y ait plus d'autre antécédent de α ni de β. Considérons $A = \{x \in [a, b], f(x) = \beta\}$. C'est un fermé non vide (il contient b) et minoré par a. Prenons v le plus petit élément de A. On a $f(v) = \beta$ et $f(t) < \beta$ pour tout $t \in [a, v[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires (car $f(a) = \alpha < \beta$). Considérons alors $B = \{x \in [a, v], f(x) = \alpha\}$. Par continuité de f, c'est un fermé non vide et majoré par v. Prenons u le plus grand élément de B. On a $u < v$ et $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$. Le segment $L = [u, v]$ répond à la question.

• Le cas $a > b$ se traite de la même manière en considérant cette fois $u = \max\{x \in [b, a], f(x) = \beta\}$, puis $v = \min\{x \in [u, a], f(x) = \alpha\}$.

2. Pour avoir des idées, il peut être bon de commencer par regarder les premières valeurs de n.

Commençons par le cas $n = 1$ (notons que cette question figure aussi dans l'exercice 4.8). On dispose, par hypothèse, d'un segment $I_0 = [a, b]$ tel que $I_0 \subset f(I_0)$. En particulier, il existe α et β dans I_0 tels que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. La fonction $g(x) = f(x) - x$ prend alors des valeurs de signes opposés en α et β et, comme elle est continue, s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit l'existence d'un point fixe de f dans l'intervalle I_0.

Regardons maintenant le cas $n = 2$. On a $I_0 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_0)$. En particulier, $I_0 \subset f(I_1) \subset f^2(I_0)$. Par le cas $n = 1$, le fait que $I_0 \subset f^2(I_0)$ implique l'existence d'un point fixe $x_0 \in I_0$ pour f^2. Mais il n'y a pas de raison *a priori* pour que $f(x_0)$ appartienne à I_1 (on a seulement l'inclusion $I_1 \subset f(I_0)$). On va raffiner un petit peu le choix du point fixe. En fait, d'après la question précédente, il existe un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a alors $J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. Le même argument que précédemment, assure l'existence d'un point fixe x_0 de f^2 dans J_1. Et celui-ci vérifie bien que $f(x_0) \in I_1$.

Dans le cas général, on applique la même démarche. Comme on a $f(I_1) \subset I_0$, on peut choisir un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. On a alors $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$. On choisit $J_2 \subset J_1$ tel que $f^2(J_2) = I_2$. Et de proche en proche, on construit ainsi une suite finie de segments $J_{n-1} \subset \cdots \subset J_2 \subset J_1 \subset I_0$ telle que $f^k(J_k) = I_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a enfin, $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1})$ de sorte qu'il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^n(J_n) = I_0$. Comme $J_n \subset f^n(J_n)$, f^n admet un point fixe x_0 dans J_n. Par construction des intervalles J_k, $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

3. Pour simplifier les notations, si I_1, I_2 sont deux segments tels que

$I_1 \subset f(I_2)$, on écrira $I_1 \to I_2$. La question précédente a donc montré que si on a un cycle $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$, f^n admet un point fixe x_0 dans I_0 vérifiant $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Par hypothèse, f admet un point 3-périodique a. Posons $b = f(a)$ et $c = f(b) = f^2(a)$. Les points b et c sont aussi 3-périodiques et, quitte à remplacer a par b ou c, on suppose que $a = \min(a, b, c)$. Deux éventualités se présentent selon la disposition de b et c.

• Supposons tout d'abord $a < b < c$ et posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Comme $f(a) = b$ et $f(b) = c$ on a $I_1 \subset f(I_0)$, c'est-à-dire $I_1 \to I_0$. De la même manière, on a aussi $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_1$. Cette dernière inclusion montre déjà que f admet un point fixe dans I_1. De même, le cycle $I_0 \to I_1 \to I_0$ montre que f^2 admet un point fixe x_0 dans I_0 tel que $f(x_0) \in I_1$. Comme x_0 ne peut pas être égal à b, $x_0 \notin I_1$ et $f(x_0) \neq x_0$. Ainsi, x_0 est un point 2-périodique. Soit maintenant $n \geqslant 4$. On écrit le cycle $I_0 \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_0$, où l'intervalle I_1 figure $n-1$ fois. D'après la question précédente, f^n admet un point fixe x dans I_0 tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k < n$. Comme précédemment, x ne peut pas être égal à b et est donc un point n-périodique.

• Regardons maintenant le cas où $a < c < b$. On pose $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. On a cette fois $I_1 \to I_0$, $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. On peut donc reprendre les idées précédentes en échangeant I_0 et I_1.

On a donc montré dans tous les cas que f admet des points n-périodiques pour tout $n \geqslant 1$. ◁

2.23. La fonction «tente»

On note $T : [0,1] \to [0,1]$ l'application définie par $T(x) = 2x$ pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $T(x) = 2 - 2x$ pour $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, T^n la n-ième itérée de T.

1. Tracer les graphes de T, T^2, T^3.

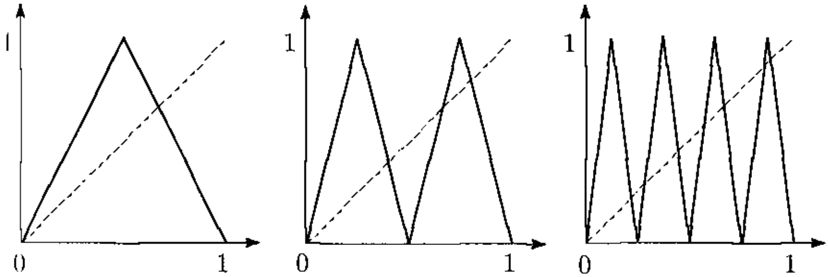
2. Combien T^n a-t-elle de points fixes ?

3. Soit $(x, y) \in [0,1]^2$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $z \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $|z - x| \leqslant \varepsilon$ et $|T^n(z) - y| \leqslant \varepsilon$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Voir ci-après les graphes demandés. Celui de T s'obtient immédiatement et explique le nom donné à la fonction T. Lorsque x parcourt l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $y = T(x)$ décrit tout le segment $[0,1]$ (deux fois plus vite). Il en résulte que le graphe de T^2 sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ est aussi un pic mais de base $\frac{1}{2}$. Quand x parcourt $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $y = \mathrm{T}(x)$ décrit à nouveau l'intervalle $[0, 1]$ (en décroissant) ce qui donne un second pic pour le graphe de T^2. De la même manière, on voit que le graphe de T^3 est formé de 4 pics de base $\frac{1}{4}$.



2. Le graphe de T^n est constitué de 2^{n-1} pics de base $\frac{1}{2^{n-1}}$ · Plus précisément, on montre facilement, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que si $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{T}^n(x) = 2^n(x - 2k) & \text{si } x \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \\ \mathrm{T}^n(x) = 2^n(2k + 2 - x) & \text{si } x \in \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Soit g_n la fonction $x \longmapsto \mathrm{T}^n(x) - x$. Sur chaque intervalle $\left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ la fonction g_n est une fonction affine de coefficient directeur $2^n - 1 > 0$; elle est croissante. On a, de plus, $g_n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = -\frac{2k}{2^n} \leqslant 0$ et $g_n\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = 1 - \frac{2k+1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2^n} > 0$. On en déduit que g_n s'annule une fois sur chaque intervalle $\left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right[$. On montre de même que g_n s'annule une fois sur chaque intervalle $\left]\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right[$. Au total g_n s'annule 2^n fois et T^n possède donc 2^n points fixes.

Le plus petit point fixe non nul de T^n *est un point n-périodique.*

3. Soit $x \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier k compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ tel que x appartienne à un intervalle de la forme $\left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ ou $\left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]$. Notons I cet intervalle. L'application T^n réalise une bijection de I sur $[0, 1]$. Si $y \in [0, 1]$, il existe $z \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{T}^n(z) = y$. On a alors $|\mathrm{T}^n(z) - y| = 0 \leqslant \varepsilon$ et $|z - x| \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$ si n est choisi assez grand. ◁

La dernière question montre que T *est topologiquement transitive : dans le voisinage de tout point x, on peut trouver des points z dont l'orbite va couper tout ouvert fixé à l'avance. On observe aussi que l'ensemble des points périodiques de* T *est dense dans* $[0,1]$. *Ces deux conditions permettent de qualifier le système dynamique associé à* T *de chaotique. Dans la définition donnée par Devaney*[3] *figurait une troisième condition, la sensibilité aux conditions initiales qu'on peut formuler ainsi pour $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$: il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \mathrm{I}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|x-y| < \varepsilon$ et $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$. Il a été démontré en* 1992 *que, pour une fonction continue, cette condition est une conséquence des deux premières*[4].

Dans l'exercice suivant, on cherche un équivalent du terme général d'une suite tendant vers 0. *La méthode est très classique et sera utilisée dans plusieurs des exercices qui suivent. Elle utilise le théorème de Cesàro sous la forme particulière appelée* lemme de l'escalier *: si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$ (on applique le théorème de Cesàro à la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).*

2.24. Un système dynamique discret et son analogue continu

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$, avec $f'(0) \in]-1,0[$ et $-x < f(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

1. On considère la suite (x_n) définie par $x_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = f(x_n)$.

a. Étudier la suite (x_n).

b. Montrer que, pour n assez grand, il existe un unique entier naturel $\varphi(n)$ tel que $x_{\varphi(n)+1} \leqslant \dfrac{1}{n} < x_{\varphi(n)}$.

c. Démontrer qu'il existe $\mathrm{C} \neq 0$ tel que $\varphi(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{C}\ln n$.

2. On passe au cas continu. On considère la solution de l'équation différentielle $x' = f(x)$ prenant en 0 la valeur $x(0) \in]0,1[$.

Montrer que x est définie sur $[0,+\infty[$ et que, pour n assez grand, il existe un unique $t_n \geqslant 0$ tel que $x(t_n) = \dfrac{1}{n}$. Déterminer un équivalent de t_n.

(École normale supérieure)

---

3. DEVANEY (R.L.), *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 2e édition, 1989.

4. On en trouvera la démonstration dans HOLMGREN (R.A), *A first course in discrete dynamical systems*, Springer, 1996, p. 81-83.

Solution.

1. a. Si $x_n \in]0,1[$, alors on a $0 < x_n + f(x_n) < x_n$, c'est-à-dire $0 < x_{n+1} < x_n < 1$. Une récurrence immédiate montre donc que la suite (x_n) est à termes dans $]0,1[$ et strictement décroissante. On en déduit qu'elle converge vers $\ell \in [0,1[$. La limite ℓ vérifie $\ell = \ell + f(\ell)$ et donc $f(\ell) = 0$. Par hypothèse, cela implique $\ell = 0$. La suite (x_n) converge vers 0.

b. Si n vérifie $\dfrac{1}{n} < x_0$, l'ensemble des entiers k tels que $\dfrac{1}{n} < x_k$ est non vide et majoré, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = 0$. Si on note $\varphi(n)$ le plus grand élément de cet ensemble, on a bien $x_{\varphi(n)+1} \leqslant \dfrac{1}{n} < x_{\varphi(n)}$. L'entier $\varphi(n)$ vérifiant ces inégalités est unique car, la suite (x_n) étant strictement décroissante, les intervalles $[x_{k+1}, x_k[$ $(k \in \mathbb{N})$ sont disjoints.

c. La suite $(\varphi(n))$ tend vers $+\infty$, puisque $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0. Cherchons, pour commencer un équivalent de x_n. On a $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \dfrac{f(x_n)}{x_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en déduit, puisque $f(0) = 0$ et que (x_n) converge vers 0, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + f'(0)$. Cette limite étant strictement positive, on peut écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln(1 + f'(0)) \neq 0$, puisque $f'(0) \neq 0$. Le théorème de Cesàro conduit à

$$\ln x_n \underset{n \to \infty}{\sim} \ln x_n - \ln x_0 \underset{n \to \infty}{\sim} n \ln(1 + f'(0)).$$

De la double inégalité $\ln(x_{\varphi(n)+1}) \leqslant -\ln n < \ln(x_{\varphi(n)})$, on déduit que $-\ln n \underset{n \to \infty}{\sim} \varphi(n) \ln(1 + f'(0))$, puisque les termes extrêmes de ces inégalités sont équivalents à $\varphi(n)\ln(1 + f'(0))$, et donc

$$\boxed{\varphi(n) \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln(1 + f'(0))}.}$$

2. La fonction $(t, x) \longmapsto f(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times]0,1[$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et il existe une solution maximale unique x définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et prenant en 0 la valeur $x(0)$.

Montrons pour commencer que x prend ses valeurs dans $]0,1[$. Démontrons d'abord qu'elle ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1. S'il existe t tel que $x(t) = 0$, alors la fonction constante $t \longmapsto 0$, qui est solution de l'équation différentielle, puisque $f(0) = 0$, coïncide avec x en t. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces deux solutions sont égales. C'est faux, car $x(0) \neq 0$. La démonstration est la même pour la valeur 1. Puisque $x(0) \in]0,1[$, la fonction x prend ses valeurs dans $]0,1[$, car sinon, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prendrait la valeur 0 ou la valeur 1.

Notons que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x'(t) = f(x(t)) < 0$, car $x(t) \in]0,1[$. La fonction x est donc strictement décroissante.

Montrons maintenant que l'ensemble de définition de cette fonction contient $[0,+\infty[$. Raisonnons par l'absurde et supposons que cet ensemble de définition est $\mathrm{I} =]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < 0$ et $b > 0$. Étant décroissante et minorée, x possède une limite finie ℓ appartenant à $[0,1[$ en b. À son tour, $x' = f(x)$ possède une limite finie $f(\ell)$ en b. On peut prolonger la solution de l'équation différentielle en b, ce qui contredit le fait qu'une solution maximale est définie sur un intervalle ouvert. La fonction est donc définie sur $[0,+\infty[$.

La fonction x, strictement décroissante et minorée, possède une limite finie $\ell \in [0,1[$ en $+\infty$ et x' a pour limite $f(\ell)$. Si ℓ n'est pas nul, $f(\ell)$ n'est pas nul également. La fonction x' n'est donc pas intégrable sur $[0,+\infty[$, ce qui contredit le fait que x a une limite finie en $+\infty$. On a donc $\ell = 0$. Ainsi la fonction x réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0,x(0)]$. On en déduit que, dès que $\dfrac{1}{n}$ est inférieur à $x(0)$, il existe un unique $t_n \geqslant 0$ tel que $x(t_n) = \dfrac{1}{n}$. Puisque $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, t_n tend vers $+\infty$.

Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers 0. Cherchons un équivalent de $x(t)$. Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, on a

$$x'(t) = f(x(t)) \underset{t\to+\infty}{\sim} f'(0)x(t),$$

c'est-à-dire que $(\ln \circ x)'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f'(0)$. La fonction $t \longmapsto f'(0)$ est négative et non-intégrable sur $[0,+\infty[$; on obtient, par intégration des relations d'équivalence, $\ln(x(t)) \underset{t\to+\infty}{\sim} tf'(0)$. En particulier, on a $-\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n f'(0)$ et donc

$$\boxed{t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{f'(0)}.} \quad \triangleleft$$

Explicitons le rapport entre $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ *et l'équation différentielle* $x' = f(x)$. *On suppose connu* $x(t_0)$ *et on fixe un pas* h. *La méthode d'Euler de résolution de l'équation différentielle consiste à confondre la courbe de* x *sur l'intervalle* $[t_0, t_0 + h]$ *avec sa tangente au point d'abscisse* t_0. *La valeur approchée de* $x(t_0 + h)$ *obtenue est* $x(t_0) + hx'(t_0) = x(t_0) + hf(x(t_0))$. *On peut réitérer le procédé à partir de* $t_0 + h$, *puis* $t_0 + 2h, \ldots, t_0 + nh$. *On prend* $h = 1$ *et* $t_0 = 0$. *Si on note* x_n *la valeur approchée de* $x(n)$ *ainsi obtenue, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$.

2.25. Équivalent d'une suite définie par récurrence

Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha) \ \text{ où } a > 0 \ \text{ et } \ \alpha > 1.$$

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.

2. Déterminer alors un équivalent de u_n.

3. Traiter l'exemple de $x \mapsto \sin x$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Par continuité de f on a $f(0) = 0$ et vu le développement asymptotique, il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) < x$ sur $]0, \eta]$. Si on choisit u_0 dans cet intervalle, la suite (u_n) est décroissante et positive, donc converge vers 0 qui est le seul point fixe de f dans $[0, \eta]$.

2. Déterminons β tel que la suite $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)$ ait une limite non nulle. On a, au voisinage de 0, puisque $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned}(f(x))^\beta - x^\beta &= (x - ax^\alpha + o(x^\alpha))^\beta - x^\beta \\ &= x^\beta((1 - ax^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^\beta - 1) \\ &= x^\beta(-a\beta x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})) \underset{x\to 0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

Si on prend $\beta = 1 - \alpha$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^\beta - x^\beta = a(\alpha - 1)$. En particulier, puisque la suite (u_n) converge vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = a(\alpha - 1).$$

Le théorème de Cesàro montre alors que

$$u_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} na(\alpha - 1)$$

d'où l'on déduit finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

3. Considérons le cas $f(x) = \sin x$. On se place sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il est stable par la fonction sinus. Pour $x > 0$, on a $\sin x < x$. On en déduit que si $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite (u_n) décroît et converge vers l'unique point fixe de la fonction sinus, 0. Le développement limité en 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \ \ (\text{cas } a = \frac{1}{6} \ \text{ et } \ \alpha = 3)$$

conduit à

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Traitons, de même, le cas $f : x \longmapsto \ln(1+x)$. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par f. Pour tout $x > 0$, on a $\ln(1+x) < x$. On en déduit que si $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite (u_n) décroît et converge vers 0, unique point fixe de f. Cette fois, le développement limité en 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \;\; (\text{cas } a = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = 2)$$

donne

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}. \quad \lhd$$

Le résultat précédent fait penser à la formule des accroissements finis. En effet, l'hypothèse vérifiée par la suite (u_n) *est*

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a u_n^{\alpha},$$

c'est-à-dire

$$(u_{n+1} - u_n)u_n^{-\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} a.$$

La fonction $x \longmapsto x^{-\alpha}$ *étant la dérivée à une constante près de la fonction* $x \longmapsto x^{1-\alpha}$, *il est naturel d'étudier* $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$. *Nous retrouverons cette méthode dans plusieurs exercices, y compris dans des cas où* u_n *tend vers* $+\infty$.

L'exercice suivant où l'on cherche encore un équivalent d'une suite définie par récurrence illustre la remarque précédente.

2.26. Développement asymptotique d'une suite récurrente (1)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \geqslant 0$, la relation $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2. On prend $u_0 = 5$. Montrer que $u_{1000} \in [45; 45{,}1]$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Il est clair que l'on a $u_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$ et que la suite (u_n) est croissante. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou converge vers un réel $\ell \geqslant 1$. Dans ce dernier cas, vue la continuité de f, le réel ℓ serait point fixe de f et on aurait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$, *i.e.* $\dfrac{1}{\ell} = 0$. C'est impossible. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Pour déterminer un équivalent de (u_n), on part de l'égalité $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}\cdot$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$, on a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} 2.$$

On peut écrire, d'après le théorème de Cesàro,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k^2 - u_{k-1}^2) \underset{n\to\infty}{\sim} 2n,$$

ce qui donne

$$u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n^2 - u_1^2 \underset{n\to\infty}{\sim} 2n.$$

Nous obtenons donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2n}.}$$

2. Pour démontrer l'encadrement demandé, on va préciser le développement asymptotique de $u_{n+1}^2 - u_n^2$. En sommant la relation $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \dfrac{1}{u_k^2}$ pour les entiers k de 0 à $n-1$, on obtient

$$u_n^2 = u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}\cdot$$

On va déduire de cette égalité un encadrement de u_n. On a déjà l'inégalité $u_n^2 > u_0^2 + 2n$, ce qui conduit à $u_{1000}^2 > 25 + 2000 = 2025 = 45^2$ et donc à la minoration voulue. Par ailleurs, cette inégalité nous permet de majorer les termes $\dfrac{1}{u_k^2}$ par $\dfrac{1}{u_0^2 + 2k}\cdot$ On obtient alors

$$u_n^2 < u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_0^2 + 2k} \leqslant u_0^2 + 2n + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant u_0^2 + 2n + \ln(2n),$$

puisqu'il est bien connu que la somme partielle de la série harmonique $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ est majorée par $\ln n$. En prenant $n = 1000$, on obtient

$$u_{1000} < \sqrt{2025 + \ln 2000} \simeq 45{,}08\ldots < 45{,}1,$$

ce qui établit la deuxième partie de l'inégalité demandée. $\triangleleft$

Il s'agit à nouveau, dans l'exercice suivant, de calculer un développement asymptotique d'une suite définie par une relation de récurrence. On retiendra la méthode qui consiste à construire successivement les termes du développement asymptotique. Partant de $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$, on en déduit, en sommant, un équivalent de u_n, puis on cherche un équivalent de $u_{n+1} - u_n - a_n$ et on somme de nouveau, et ainsi de suite. Bien entendu le seul théorème de Cesàro ne suffit plus. On utilise alors le théorème de sommation des équivalents : si (a_n) et (b_n) sont deux suites équivalentes à termes positifs telles que $\sum a_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} b_k$ (voir aussi pages 150 à 155).

2.27. Développement asymptotique d'une suite récurrente (2)

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner les deux premiers termes du développement asymptotique de u_n.
>
> **(École polytechnique)**

$\triangleright$ **Solution.**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si elle convergeait vers ℓ, on aurait par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n} = e^{-\ell} = 0$, ce qui est impossible. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.

Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = e^{u_n}$. On obtient

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \frac{1}{v_n}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs, croît et diverge vers $+\infty$.

Selon une méthode classique, on cherche successivement les termes du développement asymptotique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On part de

$$v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right)\right) = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n) = 1$. Le théorème de Cesàro nous donne

$$v_{n+1} - v_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \text{ et donc } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Pour obtenir le deuxième terme du développement asymptotique de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on reprend l'expression de $v_{n+1} - v_n$ qui conduit à

$$v_{n+1} - v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

En sommant de nouveau, on obtient

$$v_n - v_1 - (n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln n,$$

ce qui peut encore s'écrire $v_n = n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$. On a alors

$$u_n = \ln v_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

et finalement

$$\boxed{u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).} \quad \triangleleft$$

Les suites étudiées dans les exercices suivants vérifient des relations de récurrence plus compliquées que les systèmes dynamiques : x_{n+1} s'exprime en fonction de x_n et de n. On peut les rapprocher des équations différentielles $x' = f(x,t)$.

Le premier est assez facile car il est possible d'expliciter u_n en fonction de n.

2.28. Détermination d'une suite récurrente

Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_n u_{n+1} = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il est clair que la donnée de $u_1 \neq 0$ et de la relation $u_n u_{n+1} = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définit la suite (u_n) de manière unique. Le problème est donc de choisir u_1 pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \frac{2n-1}{u_{2n-1}} = \frac{2n-1}{\left(\frac{2n-2}{u_{2n-2}}\right)} = \frac{2n-1}{2n-2} u_{2n-2}$. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot u_2.$$

En multipliant par $(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2$ le numérateur et le dénominateur, on trouve

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{(2n-1)!}{[2(n-1)]^2[2(n-2)]^2\dots[2.2]^2[2.1]^2}u_2 = \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2}u_2 \\ &= \frac{2n-1}{4^{n-1}}\mathrm{C}_{2(n-1)}^{n-1}u_2, \end{aligned}$$

avec $u_2 = \dfrac{1}{u_1}\cdot$ On en déduit $u_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{4^n}\mathrm{C}_{2n}^n u_2$. On obtient de même

$$u_{2n+1} = \frac{2n}{2n-1}u_{2n-1} = \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdots\frac{2}{1}u_1 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!}u_1 = \frac{4^n}{\mathrm{C}_{2n}^n}u_1.$$

Avec la formule de Stirling qui donne $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on obtient au voisinage de l'infini,

$$\begin{aligned} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} &= \frac{(2n+1)(\mathrm{C}_{2n}^n)^2}{4^{2n}}\frac{u_2}{u_1} \sim (2n+1)\frac{\left(\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right)^2}{4^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^4}\frac{1}{u_1^2} \\ &\sim \frac{4\pi n(2n+1)}{(2\pi n)^2}\frac{1}{u_1^2} \sim \frac{2}{\pi u_1^2}, \end{aligned}$$

$$\text{et}\quad \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} \sim \frac{\pi u_1^2}{2}.$$

La condition $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1$, ce qui est réalisé si et seulement $u_1 = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot$ Il existe donc deux suites ayant les propriétés voulues. Elles sont opposées. ◁

2.29. Étude de $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n}$

Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

La suite est à termes strictement positifs. Le calcul des premiers termes, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2{,}5$, $x_5 = 2{,}6$... semble montrer qu'elle est croissante. On étudie l'inégalité $x_{n+1} \geqslant x_n$. On a les équivalences suivantes :

$$x_{n+1} \geqslant x_n \Longleftrightarrow 1 + \frac{n}{x_n} \geqslant x_n \Longleftrightarrow x_n^2 - x_n - n \leqslant 0.$$

Le trinôme $x^2 - x - n$ possède deux racines $\frac{1 - \sqrt{1+4n}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{1+4n}}{2}$. Compte tenu de $x_n > 0$, on obtient

$$x_{n+1} \geqslant x_n \Longleftrightarrow x_n \leqslant \frac{1 + \sqrt{1+4n}}{2}.$$

On remarque alors que

$$x_n \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} \Longleftrightarrow x_{n+1} \geqslant 1 + \frac{2n}{1+\sqrt{1+4n}}$$
$$\Longleftrightarrow x_{n+1} \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

Il semble plausible de démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

Montrons-le par récurrence. C'est vrai pour $n = 1$, car $x_1 = 1$ et si l'on suppose que $\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$, alors on a, d'après ce qui précède, $x_{n+1} \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\cdot$ On a d'autre part

$$x_{n+1} \leqslant 1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1} \leqslant 1 + \frac{2n(\sqrt{4n-3}-1)}{4(n-1)} \leqslant \frac{n\sqrt{4n-3}+n-2}{2(n-1)}.$$

Pour montrer que $x_{n+1} \leqslant \frac{1+\sqrt{5+4n}}{2}$, il suffit de démontrer que

$$\frac{n\sqrt{4n-3}+n-2}{2(n-1)} \leqslant \frac{1+\sqrt{5+4n}}{2} \quad i.e. \; n\sqrt{4n-3} \leqslant (n-1)\sqrt{4n+5}+1.$$

En élevant au carré et en simplifiant par $n-1$, on montre que cette inégalité équivaut à $3 \leqslant \sqrt{4n+5}$, ce qui est vérifié pour $n \geqslant 1$. La récurrence est terminée. On a donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}\cdot$ En effet, on a

$$\frac{\sqrt{4n+1}}{2} - \sqrt{n} = \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et de même $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n-3}}{2} - \sqrt{n} = 0$. On en déduit que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$. Plus précisément, on a le développement asymptotique

$$\boxed{x_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1).} \quad \triangleleft$$

L'énoncé suivant provient des Olympiades de 1985.

2.30. Un exercice d'Olympiades

On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ par la donnée de x_1 et la relation $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer qu'il existe un unique x_1 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $0 < x_n < x_{n+1} < 1$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Soit S l'ensemble des suites définies par $x_1 > 0$ et la relation de récurrence considérée. Toutes les suites de S sont à termes strictement positifs. Pour commencer, étudions les différents comportements possibles d'une suite (x_n) de S.

S'il existe $p \geqslant 1$ tel que $x_p \leqslant x_{p-1}$, alors on a

$$x_{p+1} = x_p\left(x_p + \frac{1}{p}\right) < x_{p-1}\left(x_{p-1} + \frac{1}{p-1}\right) = x_p$$

et par une récurrence immédiate, la suite (x_n) décroît strictement à partir du rang p. La suite (x_n) est donc soit strictement décroissante à partir d'un certain rang, soit strictement croissante. Notons que s'il existe $p \geqslant 1$ tel que $x_p \geqslant 1$, alors $x_{p+1} > x_p \geqslant 1$ et la suite est croissante.

Si la suite (x_n) décroît à partir d'un certain rang, elle converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell^2$: c'est 0 ou 1. D'après la remarque qui précède, ça ne peut pas être 1. Elle converge vers 0. Si la suite (x_n) est croissante, elle converge vers 1 (si tous ses termes sont dans $]0,1[$) ou diverge vers $+\infty$.

Soit I l'ensemble des réels a tels que la suite (x_n) de S définie par $x_1 = a$ soit croissante. L'ensemble I n'est pas vide, car il contient 1. Son complémentaire dans $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide non plus ; en effet, il contient 0,2 car si $x_1 = 0{,}2$ alors $x_2 = 0{,}24$ et $x_3 = 0{,}1776 < x_2$ et la suite décroît à partir du rang 2. Soit u et v deux éléments de S tels que $u_1 = a$ et $v_1 = b$, avec $a < b$. Par une récurrence immédiate, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$, puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. On en déduit que si $a \in \mathrm{I}$, alors $b \in \mathrm{I}$. Considérons $\alpha = \inf \mathrm{I}$. Il résulte de ce qui précède que $\alpha > 0$ et que I contient $]\alpha, +\infty[$. On a donc $\mathrm{I} =]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.

Soit a et b deux éléments de I (avec $a < b$), u et v les suites correspondantes de S. Montrons que u et v ne peuvent pas tendre toutes les deux vers 1. On a en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$ et $v_{n+1} - u_{n+1} = (v_n - u_n)(v_n + u_n + \dfrac{1}{n})$. Si les suites (u_n) et (v_n) convergeaient toutes deux vers 1, on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = 2 > 1$, ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = +\infty$ et une contradiction.

La seule valeur de x_1 qui puisse avoir la propriété voulue est α. Reste à montrer qu'elle convient effectivement, c'est-à-dire que la suite de S de premier terme α est croissante et majorée par 1. Pour cela, on va utiliser la définition de α.

Partons de la remarque suivante. L'application $f_p : x_1 \longmapsto x_p$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (on le montre facilement par récurrence).

Soit (x_n) la suite de S définie par $x_1 = \alpha$. Supposons que (x_n) n'est pas croissante. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{p+1} < x_p$ et donc $x_p + \dfrac{1}{p} < 1$. Par continuité de f_p, il existe $y_1 > x_1$ tel que la suite (y_n) de S de premier terme y_1 vérifie $y_p + \dfrac{1}{p} < 1$. On a donc $y_{p+1} < y_p$; la suite (y_n) décroît à partir du rang p et $y_1 \notin \mathrm{I}$. C'est faux car I contient $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que $\alpha \in \mathrm{I}$.

Supposons que (x_n) n'est pas majorée par 1. Il existe alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_p > 1$. Toujours par continuité de f_p, il existe $y_1 < x_1$ tel que la suite (y_n) de S de premier terme y_1 vérifie $y_p > 1$. L'existence de p tel que $y_p > 1$ implique que (y_n) est croissante et donc $y_1 \in \mathrm{I}$, d'où une nouvelle contradiction. On conclut que la suite (x_n) est croissante et majorée par 1.

Conclusion. Si $x_1 = \alpha$, la suite est croissante et majorée par 1 ; elle converge vers 1. Si $x_1 \in]0, \alpha[$, la suite est décroissante à partir d'un certain rang; elle converge vers 0. Si $x_1 > \alpha$, la suite est croissante et diverge vers $+\infty$. ◁

2.31. Équivalent d'une suite récurrente

> Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout n. Déterminer un équivalent de u_n.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Bien entendu la valeur absolue nous gêne pour expliciter la suite et il est naturel de s'intéresser au signe de $u_n - n$. Il n'est pas possible que cette quantité soit toujours positive. En effet, on aurait alors $u_{n+1} = u_n - n$ pour tout n et la suite serait décroissante. Cela contredit clairement le fait que $u_n \geqslant n$ pour tout n, qui implique que (u_n) diverge vers $+\infty$. Il existe donc toujours au moins un indice $\mathrm{N} \geqslant 1$ tel que $u_\mathrm{N} \leqslant \mathrm{N}$. Mais on a alors $u_{\mathrm{N}+1} = \mathrm{N} - u_\mathrm{N} \leqslant \mathrm{N} < \mathrm{N}+1$ et cela se propage clairement par récurrence : on a donc $u_n \leqslant n$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. La relation de récurrence se transforme donc à partir du rang N en $u_{n+1} = -u_n + n$. Cela permet d'expliciter la suite : si on pose $v_n = (-1)^n u_n$ on a $v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} n$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. En sommant cette égalité entre le rang N et un rang n plus grand, il vient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad v_n = v_\mathrm{N} + \sum_{k=\mathrm{N}}^{n-1} (-1)^{k+1} k,$$

autrement dit

$$u_n = (-1)^n v_n = (-1)^n v_\mathrm{N} + \sum_{k=\mathrm{N}}^{n-1} (-1)^{n+k+1} k = \mathrm{C}_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} k$$

où (C_n) est une suite bornée. La somme alternée

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} k = (n-1) - (n-2) + (n-3) - (n-4) + \cdots \pm 1$$

est égale à $\dfrac{n-1}{2}$ si n est impair et à $\dfrac{n}{2}$ si n est pair (regrouper les termes deux par deux). On en déduit donc que $\boxed{u_n \sim \dfrac{n}{2}}$. $\triangleleft$

Les deux exercices qui suivent concernent des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f_n(u_n)$ que l'on peut considérer comme des perturbations de suites récurrentes. Le premier concerne une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ (a non nul). Rappelons qu'une telle suite se ramène par une simple translation à l'étude d'une suite géométrique de raison a. En particulier, une telle suite converge (vers le point fixe de $x \mapsto ax+b$) lorsque $|a| < 1$. On peut se demander ce qu'il en est d'une suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = au_n + b + \varepsilon_n$, où (ε_n) tend vers 0. C'est ce que propose l'exercice suivant dans le cas particulier $a = -\dfrac{1}{2}$: on y montre que la suite converge toujours vers le point fixe.

2.32. Suite arithmético-géométrique perturbée

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombre réels. On pose, pour $n \geqslant 1$, $y_n = x_{n-1} + 2x_n$. Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) converge.

(École polytechnique)

Solution.

• Il est clair que si (x_n) converge vers ℓ, alors (y_n) converge vers 3ℓ. Pour la réciproque, on observe que l'application qui à (x_n) associe (y_n) est linéaire et qu'il suffit donc d'établir le résultat lorsque (y_n) tend vers 0 (dans le cas général où (y_n) converge vers ℓ, on regarde $x'_n = x_n - \dfrac{\ell}{3}$; la suite $y'_n = x'_{n-1} + 2x'_n$ converge vers 0 donc x'_n converge aussi vers 0 et x_n tend vers $\dfrac{\ell}{3}$).

• On suppose donc que (y_n) tend vers 0 et on se propose de montrer que (x_n) tend vers 0. Comme $x_n = -\dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{1}{2}y_n$ on peut voir la suite (x_n) comme une suite géométrique perturbée. On commence par exprimer x_n en fonction des y_k. On a

$$\begin{aligned} y_n &= x_{n-1} + 2x_n, \\ y_{n-1} &= x_{n-2} + 2x_{n-1}, \\ &\vdots \\ y_1 &= x_0 + 2x_1. \end{aligned}$$

On multiplie la première ligne par $\dfrac{1}{2}$, la seconde par $-\dfrac{1}{4}$, la troisième par $\dfrac{1}{8}$, ... et on additionne le tout. Il vient

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{y_k}{2^{n+1-k}} = x_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} x_0.$$

Il suffit de prouver que le premier membre tend vers 0. On a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{y_k}{2^{n+1-k}} \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} 2^k |y_k|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que $|y_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. On obtient, pour $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} 2^k |y_k| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n_0-1} 2^k |y_k| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \sum_{k=n_0}^{n} 2^k \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n_0-1} 2^k |y_k| + \varepsilon$$

et ceci est $\leqslant 2\varepsilon$ pour n assez grand. D'où le résultat. $\triangleleft$

Pour prouver que $\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n} 2^k|y_k|$ *tend vers* 0, *on peut aussi invoquer le théorème de sommation des relations de négligeabilité. Puisque la suite* (y_n) *converge vers* 0, *on a* $2^n y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$. *Comme* $\sum 2^n$ *diverge, on en déduit que* $\sum_{k=1}^{n} y_k 2^k = o\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)$, *ce qui donne le résultat voulu car* $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \sim 2^{n+1}$.

Voici un autre énoncé posé à l'oral de l'école polytechnique, qui se ramène au résultat de l'exercice : étudier la convergence d'une suite définie par $u_1 > 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}\sqrt{u_n}$. *Si on pose* $v_n = \ln u_n$ *on a aisément que* $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \ln 2 + \varepsilon_n$ *où* ε_n *tend vers* 0 . *On montre alors que* (v_n) *converge vers* $-2\ln 2$ *et donc que* (u_n) *converge vers* $\frac{1}{4}$.

L'énoncé suivant donne un dernier exemple un peu plus compliqué.

2.33. Système dynamique perturbé

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que $u_{n+1} - u_n - u_n^2$ tende vers 0. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
>
> (**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Notons que si la suite (u_n) converge, sa limite est nécessairement 0. Posons $v_n = u_{n+1} - u_n - u_n^2$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| \leqslant \varepsilon^2$ pour tout $n \geqslant n_0$.

On a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + v_n \geqslant u_n^2 - \varepsilon^2$ pour tout $n \geqslant n_0$. S'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \varepsilon$ et par une récurrence immédiate, la suite est croissante à partir du rang n et minorée par ε. Comme elle est bornée, elle converge vers $\ell \geqslant \varepsilon$. C'est impossible car elle ne peut converger que vers 0. On a donc $u_n < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$.

On va montrer que $u_n > -\varepsilon$ à partir d'un certain rang. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant -\varepsilon$, on a, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + v_n \geqslant u_n^2 - \varepsilon^2 \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante et majorée par $-\varepsilon$. Elle converge donc vers $\ell \leqslant -\varepsilon$. C'est impossible. Ainsi il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $u_{n_1} > -\varepsilon$.

Si $n \geqslant n_0$ et $u_n \geqslant -\varepsilon$, on a alors $u_{n+1} \geqslant u_n + u_n^2 - \varepsilon^2$. La fonction $f : x \longmapsto x + x^2$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $u_n \geqslant -\varepsilon$

implique $f(u_n) \geqslant f(-\varepsilon)$ et donc $u_{n+1} \geqslant f(-\varepsilon) - \varepsilon^2 \geqslant -\varepsilon$. Pour un tel choix de ε, on a par une récurrence immédiate $u_n \geqslant -\varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_1$.

Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il existe n_1 tel que $|u_n| < \varepsilon$ pour $n \geqslant n_1$, donc (u_n) converge vers 0. $\triangleleft$

Viennent maintenant des suites vérifiant des relations de récurrence linéaires.

2.34. Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On définit une suite de polynômes : $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour $n \geqslant 1$, $(q+1)XP_n = qP_{n+1} + P_{n-1}$ où q est un réel non nul fixé. Déterminer l'ensemble des réels z tels que la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Puisque q n'est pas nul, la relation donnée définit bien une suite de polynômes (P_n). Pour tout réel z, la suite $(P_n(z))$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants

$$P_{n+1}(z) = \frac{(q+1)z}{q}P_n(z) - \frac{1}{q}P_{n-1}(z)$$

dont l'équation caractéristique est $q\lambda^2 - (q+1)z\lambda + 1 = 0$.

Examinons d'abord le cas où le discriminant $\Delta = (q+1)^2z^2 - 4q$ n'est pas nul. L'équation possède deux solutions distinctes, réelles ou complexes conjuguées, λ_1 et λ_2 et il existe des constantes a et b telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(z) = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$. Les conditions $P_0(z) = 1$ et $P_1(z) = z$ conduisent à $a = \dfrac{\lambda_2 - z}{\lambda_2 - \lambda_1}$ et $b = \dfrac{\lambda_1 - z}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et donc

$$P_n(z) = \frac{\lambda_2 - z}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1^n + \frac{\lambda_1 - z}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n.$$

Notons que $z = \lambda_1$ ou λ_2, c'est-à-dire que z est solution de l'équation caractéristique, si $z = \pm 1$. Si on a par exemple $z = \lambda_1$, alors $P_n(z) = \lambda_1^n = z^n = \pm 1$ et la suite (P_n) est bornée. Les valeurs $z = -1$ et $z = 1$ conviennent. Désormais, on écarte ces cas et on suppose donc a et b non nuls.

La suite $(P_n(z))$ est alors bornée si et seulement si $|\lambda_1| \leqslant 1$ et $|\lambda_2| \leqslant 1$. La condition est clairement suffisante. Elle est aussi nécessaire si $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$ sont distincts, car alors on a $|P_n(z)| \underset{n\to\infty}{\sim} |a||\lambda_1|^n$ si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Si enfin, on a $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ et que la suite $(P_n(z))$ est bornée alors, en posant $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{i\theta}$, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} a + be^{in\theta} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n(z)}{\lambda_1^n} = 0$. En écrivant

$$a(1 - e^{i\theta}) = a + be^{i(n+1)\theta} - e^{i\theta}(a + be^{in\theta})$$

et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $a(1 - e^{i\theta}) = 0$, ce qui est contradictoire avec les hypothèses puisque $a \neq 1$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Distinguons maintenant selon le signe de Δ.

• La condition $\Delta < 0$ nécessite $q > 0$ et s'écrit $|z| < \dfrac{2\sqrt{q}}{q+1}\cdot$ Dans ce cas, les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et on a donc $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\cdot$ La suite $(P_n(z))$ est bornée si $q \geqslant 1$.

• Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $(q+1)^2z^2 > 4q$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles. La suite est bornée si elles sont comprises entre -1 et 1. En notant f le trinôme $qX^2 - (q+1)zX + 1$, il faut $qf(1) \geqslant 0$ et $qf(-1) \geqslant 0$ (pour que -1 et 1 soient à l'extérieur des racines) et $-1 \leqslant \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \dfrac{(q+1)z}{2q} \leqslant 1$ (pour que -1 et 1 soient de part et d'autre des racines). Les deux premières conditions s'écrivent $q(q+1)(1-z) \geqslant 0$ et $q(q+1)(1+z) \geqslant 0$, soit $-q(q+1) \leqslant q(q+1)z \leqslant q(q+1)$, ce qui nécessite $q(q+1) \geqslant 0$. Si $q = -1$, toutes les conditions sont réalisées pour z quelconque. Nous écartons ce cas désormais. Les conditions s'écrivent alors $-1 \leqslant z \leqslant 1$ et $-\dfrac{2q}{q+1} \leqslant z \leqslant \dfrac{2q}{q+1}\cdot$

Deux cas sont à distinguer.

⋆ Si $q < -1$, la condition $\Delta > 0$ est réalisée. Par ailleurs, on a $\dfrac{2q}{q+1} > 1$, donc on trouve une seule condition $|z| \leqslant 1$.

⋆ Si $q > 0$, la condition $\Delta > 0$ s'écrit $|z| > \dfrac{2\sqrt{q}}{q+1}\cdot$ Compte tenu de la condition $|z| \leqslant \dfrac{2q}{q+1}$, il faut $\sqrt{q} < q$ et donc $q > 1$. On a alors de nouveau $\dfrac{2q}{q+1} \geqslant 1$, donc la condition sur z est $\dfrac{2\sqrt{q}}{q+1} < |z| \leqslant 1$.

Reste à traiter le cas où $\Delta = 0$, soit $(q+1)^2z^2 = 4q$ (ce qui implique $q \geqslant 0$). L'équation caractéristique a une seule solution $\lambda = \dfrac{(q+1)z}{2q}\cdot$ Il existe des constantes a et b telles que $P_n(z) = (a+bn)\lambda^n$. Les conditions initiales donnent $b = 1$, $a = z - 1$. Le cas $z = 1$ étant écarté, il faut $|\lambda| = \dfrac{1}{\sqrt{q}} < 1$, soit $q > 1$ et $|z| = \dfrac{2\sqrt{q}}{q+1}\cdot$ Il ne reste plus qu'à rassembler les différents cas pour conclure.

Conclusion. Si $q \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$, la suite $(P_n(z))$ est bornée si $|z| \leqslant 1$. Si $q = -1$, on peut prendre z quelconque. Si enfin $q \in]-1, 1[$, la suite $(P_n(z))$ n'est bornée que pour $z = -1$ et $z = 1$. ◁

Bien que l'énoncé suivant concerne a priori une équation fonctionnelle, les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sont au cœur de la solution.

2.35. Une équation fonctionnelle

Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0,\ f(f(x)) = 6x - f(x).$$

(**École normale supérieure**)

Solution.

Analyse. Soit f une solution. Fixons $x > 0$ et posons $u_n = f^n(x)$ où $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ est la composée de f n fois avec elle-même. Par hypothèse, on a la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$. L'équation caractéristique associée est $X^2 + X - 6 = 0$ et ses racines sont 2 et -3. Il existe donc deux constantes A, B telles que $u_n = A2^n + B(-3)^n$ pour tout n. On trouve A et B avec les conditions initiales $u_0 = x$ et $u_1 = f(x)$. Il vient alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n(x) = u_n = \frac{3x + f(x)}{5} 2^n + \frac{2x - f(x)}{5}(-3)^n.$$

Or $f^n(x)$ doit être strictement positif pour tout n. Cela impose $f(x) = 2x$ (regarder u_{2n} et u_{2n+1} et faire tendre n vers l'infini).

Synthèse. La fonction $x \mapsto 2x$ est bien solution du problème posé. ◁

Voici encore une récurrence linéaire d'ordre 2. Les coefficients ne sont plus constants, mais les méthodes employées sont similaires. On utilise le fait que l'ensemble des solutions est encore un espace vectoriel de dimension 2.

2.36. Suites vérifiant $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$

Soit E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

2. On considère les deux suites (a_n) et (b_n) de E définies par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$.

3. On pose $w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$. Expliciter w_n.

4. Soit $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, pour $n \geqslant 1$. Montrer que la suite (c_n) converge.

5. Montrer qu'il existe un unique réel r tel que $(a_n + rb_n)$ converge vers 0.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. L'application $\varphi : (u_n) \in \mathrm{E} \longmapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire et clairement bijective car un élément de E est déterminé de manière unique par la donnée de u_0 et u_1, réels quelconques. L'espace vectoriel E est donc isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

2. On a $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour $n \geqslant 2$, comme le montre une récurrence immédiate. On en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont strictement croissantes à partir du rang 2. Comme elles sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, elles tendent vers $+\infty$.

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= a_{n+2}b_{n+1} - a_{n+1}b_{n+2} \\ &= ((n+1)a_{n+1} + a_n)b_{n+1} - a_{n+1}((n+1)b_{n+1} + b_n) = -w_n. \end{aligned}$$

Puisque $w_0 = -1$, on a $w_n = (-1)^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{w_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}.$$

La série de terme général $c_{n+1} - c_n$ est alternée et vérifie le critère spécial de convergence des séries alternées, car la suite (b_n) est à termes strictement positifs à partir du rang 1 et croît vers $+\infty$. De la convergence de $\sum (c_{n+1} - c_n)$, on déduit la convergence de la suite (c_n). On note ℓ la limite de cette suite.

5. Si la suite $(a_n + rb_n)$ converge vers 0, alors *a fortiori* $\left(\dfrac{a_n}{b_n} + r\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, puisque (b_n) tend vers $+\infty$ et donc $r = -\ell$. Montrons, réciproquement, que cette valeur convient. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n - \ell = \lim_{p \to +\infty} (c_n - c_p) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n}^{p-1} (c_k - c_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} (c_k - c_{k+1}).$$

Puisque cette série vérifie le critère spécial de convergence des séries alternées, cette somme est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme. On a donc, pour $n \geqslant 1$,

$$|c_n - \ell| \leqslant |c_n - c_{n+1}| \leqslant \frac{1}{b_n b_{n+1}}, \text{ soit } |a_n - \ell b_n| \leqslant \frac{1}{b_{n+1}}.$$

On en déduit que $(a_n - \ell b_n)$ converge vers 0. ◁

Les exercices ci-après concernent les suites récurrentes linéaires d'ordre quelconque.

2.37. Suites à récurrence linéaire (1)

1. Soit E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{0 \leqslant i < d} \in \mathbb{C}^d$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = \sum\limits_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}$. Montrer que E est stable par addition et multiplication.

2. Soit $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites périodiques. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et en donner une base.

3. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Peut-on expliciter une récurrence linéaire vérifiée par la suite $(P(n))_{n \geqslant 0}$?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Lorsque $d = 2$, nous savons quelle est l'expression de u_n en fonction de n et des racines de $X^2 - a_1 X - a_0$. Le lemme suivant étend le résultat à d quelconque.

Lemme. *Soit $(a_i)_{0 \leqslant i < d} \in \mathbb{C}^d$. On note*

$$P = X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \cdots - a_1 X - a_0 = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{k_i},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et les k_i dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose $a_0 \neq 0$. Alors, l'ensemble des suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = \sum\limits_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}$ est constitué des suites s'écrivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Q_1(n)\lambda_1^n + \cdots + Q_r(n)\lambda_r^n$$

avec pour tout i, $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg Q_i < k_i$.

Si $a_0 = 0$ et $\lambda_r = 0$, l'ensemble est constitué des suites s'écrivant

$$\forall n \geqslant k_r, \quad u_n = Q_1(n)\lambda_1^n + \cdots + Q_{r-1}(n)\lambda_{r-1}^n$$

avec pour tout i, $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg Q_i < k_i$, les $k_r - 1$ premiers termes étant quelconques.

Démonstration.

Notons T l'opérateur de translation sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}$, $\mathrm{T}(u) = (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$. Par définition de P, $\mathrm{P}(\mathrm{T})(u)$ est la suite de terme général $u_{n+d} - \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}$, si bien que $\operatorname{Ker}\mathrm{P}(\mathrm{T})$ n'est autre que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{n+i}$. Le lemme de décomposition des noyaux nous donne que $\operatorname{Ker}\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est la somme directe des $\operatorname{Ker}(\mathrm{T}-\lambda_i\,\mathrm{Id})^{k_i}$. On est donc amené à préciser $\operatorname{Ker}(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id})^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Traitons le cas λ non nul. Montrons que les éléments de $\operatorname{Ker}(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id})^k$ sont les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Q}(n)\lambda^n$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré strictement inférieur à k. On remarque que si u_n est de cette forme, $u_{n+1} - \lambda u_n = (\mathrm{Q}(n+1) - \mathrm{Q}(n))\lambda^{n+1} = \mathrm{D}(\mathrm{Q})(n)\lambda^{n+1}$ où D est l'endomorphisme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ défini par $\mathrm{A} \longmapsto \mathrm{A}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{A}(\mathrm{X})$. Par itération, $(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id})^k(u)$ est la suite de terme général $\mathrm{D}^k(\mathrm{Q})(n)\lambda^{n+k}$, ce qui vaut 0 si $k > \deg \mathrm{Q}$ car D diminue le degré d'une unité. Réciproquement, montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\operatorname{Ker}(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id})^k$ est de la forme $(\mathrm{Q}(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{Q} < k$. Pour $k = 1$, la suite vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \lambda u_n = 0$ ce qui donne $u_n = \lambda^n u_0$: c'est bien la forme attendue. Supposons $k \geqslant 2$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id})^k$. Alors $\mathrm{T}(u) - \lambda u$ est dans $\operatorname{Ker}(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id})^{k-1}$ et elle s'écrit par hypothèse de récurrence $(\mathrm{R}(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{R} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{R} < k-1$. Comme D diminue le degré d'une unité, on a classiquement l'égalité $\mathrm{D}(\mathbb{C}_{k-1}[\mathrm{X}]) = \mathbb{C}_{k-2}[\mathrm{X}]$, si bien qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{Q} < k$ tel que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{R}(\mathrm{X})}{\lambda}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \lambda u_n = (\mathrm{Q}(n+1) - \mathrm{Q}(n))\lambda^{n+1}$. La suite $v_n = \dfrac{u_n}{\lambda^n} - \mathrm{Q}(n)$ vérifie $v_{n+1} = v_n$, autrement dit, elle est constante. Ainsi, $u_n = (\mathrm{Q}(n) + v_0)\lambda^n$ et la suite est bien de la forme voulue.

Le cas $\lambda = 0$ est à part : le noyau $\operatorname{Ker}\mathrm{T}^k$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang k.

Comme $\operatorname{Ker}\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est somme directe des sous-espaces propres, on obtient bien la forme annoncée par le lemme. $\diamond$

Reprenons les notations du lemme et posons pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $e_{\lambda,\ell} = (n^\ell\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. À $\lambda \neq 0$ fixé, la famille des suites $e_{\lambda,\ell}$ pour $\ell \in \mathbb{N}$ est libre car si $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ avec $\alpha_p \neq 0$, la limite de

$$\frac{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1 n\lambda^n + \cdots + \alpha_p n^p\lambda^n}{n^p\lambda^n}$$

est α_p et la combinaison linéaire $\alpha_0\lambda^n + \alpha_1 n\lambda^n + \cdots + \alpha_p n^p\lambda^n$ ne peut être nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que les suites $e_{\lambda,0} = (\lambda^n)$,

$e_{\lambda,1} = (n\lambda^n)$,..., $e_{\lambda,k-1} = (n^{k-1}\lambda^n)$ forment une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^k$. En notant $e_{0,\ell} = (\delta_{n,\ell})_{n\in\mathbb{N}}$, les k suites $(e_{0,0}, e_{0,1}, \ldots, e_{0,k-1})$ constituent une base de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T}^k$. Par recollement des bases, puisque la somme des sous-espaces propres est directe et fait $\mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(\mathrm{T})$, on est en mesure de donner une base de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(\mathrm{T})$ à savoir les $e_{\lambda_i,\ell}$ avec $1 \leqslant i \leqslant r$ et $0 \leqslant \ell \leqslant k_i - 1$. On remarque que quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})^k = k$ et donc la dimension de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(\mathrm{T})$ est le degré de P.

L'ensemble E apparaît alors comme la réunion des noyaux de $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul. On en déduit que E est contenu dans le sous-espace E' engendré par les suites $e_{\lambda,\ell}$ avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Réciproquement, une suite de E' s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la forme $e_{\mu_1,\ell_1}, \ldots, e_{\mu_s,\ell_s}$ avec les $\mu_i \in \mathbb{C}$ (pas forcément deux à deux distincts) et $\ell_i \in \mathbb{N}$. D'après le lemme, elle est dans $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(\mathrm{T})$ avec $\mathrm{Q} = (\mathrm{X} - \mu_1)^{\ell_1} \cdots (\mathrm{X} - \mu_s)^{\ell_s}$ et elle vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre $\deg \mathrm{Q}$: c'est un élément de E, autrement dit E est le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui admet pour base les suites $e_{\lambda,\ell}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{N}$ (cette famille est effectivement libre).

Il est alors clair que E est stable par addition. Pour montrer la stabilité pour la multiplication, par multilinéarité du produit, il suffit de vérifier que le produit de deux éléments de la base des $e_{\lambda,\ell}$ est encore dans E, ce qui est immédiat.

2. La suite nulle est 1-périodique. Si u et u' sont deux suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de périodes respectives d et d' et $\lambda \in \mathbb{C}$, λu est périodique de période d et $u + u'$ est périodique de période dd' : l'ensemble $\mathcal{E}$ est bien un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Il apparaît en reprenant les notations de la question précédente que u est périodique de période d si, et seulement si,

$$u \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T}^d - \mathrm{Id}) = \bigoplus_{z \in \mathrm{U}_d} \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - z\,\mathrm{Id}),$$

où U_d désigne le groupe des racines d-ièmes de l'unité. Ainsi, $\mathcal{E}$ est la réunion pour $d \in \mathbb{N}^*$ des noyaux $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}^d - \mathrm{I})$ qui admettent comme base la famille constituée des suites $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $z \in \mathrm{U}_d$. On en déduit que les suites $\varepsilon_z = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour z racine d-ième de l'unité ($d \in \mathbb{N}^*$) engendrent $\mathcal{E}$. Comme $\varepsilon_z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - z\,\mathrm{Id})$, la famille des ε_z est libre : elle constitue une base de $\mathcal{E}$.

3. Si P est de degré d, alors P est dans le sous-espace F de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ engendré par les suites $(1), (n), \ldots, (n^d)$ qui est d'après le travail fait à la première question le noyau de $(\mathrm{T} - \mathrm{Id})^{d+1} = \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^{d+1-k} \mathrm{C}_{d+1}^k \mathrm{T}^k$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathrm{P}(n+d+1) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \mathrm{C}_{d+1}^k \mathrm{P}(n+k)}. \lhd$$

2.38. Suites à récurrence linéaire (2)

Soit $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$ avec $a_1 + \cdots + a_p = 1$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses p premiers termes $u_0, \dots, u_{p-1}$ et la relation de récurrence $u_{n+p} = a_p u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_n$ converge. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Comme dans l'exercice précédent, on note T l'opérateur de translation sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}$, $\mathrm{T}(u) = (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$. En posant $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - a_p\mathrm{X}^{p-1} - \cdots - a_1$, la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément du noyau de P(T). L'hypothèse sur les a_i nous assure que $\mathrm{P}(1) = 0$ et P s'écrit donc $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)^r\mathrm{Q}$ avec $r \geqslant 1$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Q}(1) \neq 0$. Il s'avère que la suite $\mathrm{Q}(\mathrm{T})(u) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{Id})^r$ et qu'il s'agit donc d'un polynôme d'après le lemme donnant la forme des suites à récurrence linéaire, démontré à l'occasion de l'exercice précédent. Or, u étant supposée convergente, il en est de même pour $\mathrm{Q}(\mathrm{T})(u)$ par théorème d'opérations ce qui entraîne que $\mathrm{Q}(\mathrm{T})(u)$ est une constante : en écrivant $\mathrm{Q} = \alpha_{p-1}\mathrm{X}^{d-1} + \cdots + \alpha_1\mathrm{X} + \alpha_0$ ($\deg \mathrm{Q} \leqslant p-1$), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = \alpha_{p-1}u_{p-1} + \cdots + \alpha_1 u_1 + \alpha_0 u_0.$$

En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en faisant tendre n vers l'infini, il vient $\mathrm{Q}(1)\ell = \alpha_{p-1}u_{p-1} + \cdots + \alpha_1 u_1 + \alpha_0 u_0$ ce qui donne

$$\boxed{\ell = \frac{\alpha_{p-1}u_{p-1} + \cdots + \alpha_1 u_1 + \alpha_0 u_0}{\mathrm{Q}(1)}}.$$

Remarquons que d'après la formule de Taylor, $\mathrm{Q}(1) = \dfrac{\mathrm{P}^{(r)}(1)}{r!}$. En particulier, si $r = 1$, on a $\mathrm{Q}(1) = \mathrm{P}'(1)$ et la factorisation suivante

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\left(\mathrm{X}^{p-1} + (a_{p-1} + \cdots + a_1)\mathrm{X}^{p-2} + \cdots + (a_2 + a_1)\mathrm{X} + a_1\right),$$

si bien que

$$\ell = \frac{u_{p-1} + (a_{p-1} + \cdots + a_1)u_{p-2} + \cdots + (a_2 + a_1)u_1 + a_1 u_0}{p - (p-1)a_p - \cdots - a_2}. \quad \triangleleft$$

Il y a une autre solution utilisant les séries entières qui a le mérite de ne pas utiliser le théorème de structure de l'espace des suites à récurrence linéaire : on multiplie la relation de récurrence par x^{n+d} et on somme *de $n = 0$ à l'infini. La série $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$ (exactement 1 si $\ell \neq 0$). En notant f la somme de cette série, on a alors pour $0 < |x| < 1$, $(1 - a_p x - \cdots - a_1 x^p) f(x) = x^p \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = g(x)$, où g est une fonction polynôme. On obtient ℓ en faisant tendre x vers 1, car $\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \ell$ (cf exercice 3.22 du tome 2 d'analyse). En particulier si 1 est racine simple de P, on a $\ell = \frac{g(1)}{\mathrm{P}'(1)}\cdot$*

Les exercice suivants concernent des suites récurrentes diverses qui n'entrent pas dans les catégories précédentes.

2.39. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite u définie par $u_0 = x \geqslant 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^2}$. Déterminer la limite de $\frac{2^n}{u_n}\cdot$ On pourra poser $\sin\theta_n = \frac{1}{u_n}\cdot$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On observe que la suite u est bien définie et strictement croissante. Il est assez naturel de comparer la suite à 2^n. En effet, si on modifie la relation de récurrence en enlevant le 1, c'est-à-dire si on regarde la suite v définie par $v_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, on constate que $v_n = 2^{n-1}x$ pour tout $n \geqslant 1$. Ce travail prouve déjà que $u_n \to +\infty$, puisqu'une récurrence très facile montre que $u_n \geqslant v_n$ pour tout n.

Pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant 1$. Suivons l'indication de l'énoncé, en considérant l'unique réel $\theta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta_n = \frac{1}{u_n}\cdot$ On a alors

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta_{n+1}} - 1 = \cot^2\theta_{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\cot\theta_{n+1} &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \cot\theta_n + u_n \\ &= \cot\theta_n + \frac{1}{\sin\theta_n} = \frac{\cos\theta_n + 1}{\sin\theta_n} = \cot\frac{\theta_n}{2},\end{aligned}$$

puis que, pour $n \geqslant 1$, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ et donc enfin $\theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}}\cdot$ Ceci permet de conclure que

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n \sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\theta_1 = 2\arcsin\frac{1}{u_1} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot \quad \triangleleft$$

Dans l'exemple suivant, où on ne peut invoquer aucune méthode générale, on essaie de se ramener à l'étude d'une récurrence d'ordre 1.

2.40. Suite vérifiant $u_{n+1} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1})$

Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1}).$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Une petite simulation numérique sur un ordinateur ou une calculatrice montre que, quel que soit le choix de u_0 et u_1, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers un réel strictement positif. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, le logarithme étant continu cela ne peut être que vers un point fixe de la fonction $x \longmapsto 2\ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Une rapide étude de fonction laisse apparaître deux points fixes, 0 et ℓ (qui vaut 2,51 à 10^{-2} près).

Nous allons vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, point fixe strictement positif de $x \longmapsto 2\ln(1+x)$. Pour cela, nous allons encadrer u_n par deux suites monotones vérifiant la même relation de récurrence. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_0 = v_1 = m$, $w_0 = w_1 = \mathrm{M}$, m étant un réel strictement positif strictement inférieur à u_0, u_1 et ℓ, M un réel strictement supérieur à u_0, u_1 et ℓ. Une récurrence immédiate prouve alors que pour tout n entier naturel, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Vérifions par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $v_n - v_{n-1} \geqslant 0$. On a $v_1 - v_0 = 0$, $v_2 - v_1 = 2\ln(1+m) - m \geqslant 0$ car $m \in [0,\ell]$ et la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ reste positive pour x entre 0 et ℓ. Pour n plus grand que 3,

$$v_n - v_{n-1} = \ln(1+v_{n-1}) - \ln(1+v_{n-3}) \geqslant 0.$$

car par hypothèse de récurrence, $v_{n-1} \geqslant v_{n-2} \geqslant v_{n-3}$.

On démontre, de même, que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante en établissant, par récurrence, que, pour $n \geqslant 1$, $w_n - w_{n-1} \leqslant 0$. On a $w_1 - w_0 = 0$ et $w_2 - w_1 = 2\ln(1+\mathrm{M}) - \mathrm{M} \leqslant 0$ car $f(x) - x$ est négatif pour x plus grand que ℓ. Ensuite pour $n \geqslant 3$,

$$w_n - w_{n-1} = \ln(1+w_{n-1}) - \ln(1+w_{n-3}) \leqslant 0$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi, pour $n \geqslant 0$, on a

$$0 < v_0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant w_0.$$

On en déduit que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers un réel, qui par passage à la limite dans la relation de récurrence, ne peut être que ℓ. Comme pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}. \triangleleft$$

Dans l'exercice suivant, on utilisera le fait qu'une suite bornée converge dès qu'elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

2.41. Suite vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{f(u_1)+\cdots+f(u_n)}{n}$

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{f(u_1)+\cdots+f(u_n)}{n}$ et $u_1 = \alpha \in [0,1]$. Montrer que u converge vers un point fixe de f.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons déjà que si u converge vers a, alors a est un point fixe de la fonction f. En effet, $f(u_n)$ tend vers $f(a)$ par continuité de f donc $u_{n+1} = \dfrac{f(u_1)+\cdots+f(u_n)}{n}$ tend aussi vers $f(a)$ par le théorème de Cesàro. Or u_{n+1} tend vers a donc par unicité de la limite on a $a = f(a)$.

Observons aussi que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{f(u_n)}{n} - \frac{f(u_1)+\cdots+f(u_{n-1})}{n(n-1)} = \frac{f(u_n)-u_n}{n}$$

et que cela tend vers 0 car u_n et $f(u_n)$ sont des suites bornées. On en déduit notamment que si u_{N} est un point fixe de f, alors la suite est stationnaire à partir de ce rang.

Pour prouver que u_n converge, il suffit de montrer qu'elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence[5]. Supposons donc par l'absurde que la suite possède deux valeurs d'adhérence $\alpha < \beta$. On va montrer que tout x de $]\alpha,\beta[$ est un point fixe de f. En effet, supposons qu'il existe $c \in]\alpha,\beta[$ avec par exemple $f(c) > c$. Par continuité de f, on peut trouver un intervalle $[a,b]$ tel que $\alpha < a < c < b < \beta$ et tel que $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [a,b]$. Comme $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, on peut trouver un rang N tel

5. D'après la constatation précédente l'ensemble des valeurs d'adhérence est un segment, mais cela ne va pas servir ici.

que $|u_{n+1}-u_n| < b-a$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Comme β est valeur d'adhérence, on peut trouver $p \geqslant \mathrm{N}$ tel que $u_p \geqslant a$. Mais il est alors impossible à la suite u de repasser à gauche de a. En effet, si u_n est dans l'intervalle $[a,b]$ on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ et si $u_n > b$, $u_{n+1} \geqslant a$ car l'écart entre u_n et u_{n+1} ne dépasse pas $b-a$. Cela est contradictoire avec le fait que α est valeur d'adhérence. On raisonne de manière analogue dans le cas où il existe $c \in]\alpha,\beta[$ avec $f(c) < c$. On a donc $f(x) = x$ pour tout $x \in]\alpha,\beta[$. Mais cela n'est pas possible car dès que la suite tombe dans cet intervalle (et cela arrive car pour n assez grand on a $|u_{n+1} - u_n| < \beta - \alpha$ et les termes de la suite ne peuvent pas passer d'un voisinage de α à un voisinage de β sans rencontrer l'intervalle $]\alpha,\beta[$), elle est stationnaire. D'où le résultat. $\triangleleft$

Les exercices suivants étudient des suites vérifiant des relations de récurrence simultanées. L'étude de telles suites se ramène souvent à celle de deux suites adjacentes.

2.42. Suites de Schwob

Soit $a < b$ deux réels strictement positifs. Étudier les deux suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}.$$

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

On a $x_0 < x_1 < y_0$, puis $x_0 < x_1 < y_1 < y_0$. Une récurrence immédiate montre que pour tout n, $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$. Les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes car monotones et bornées. Si $\ell = \lim x_n$ et $\ell' = \lim y_n$, on a $\ell' = \dfrac{\ell+\ell'}{2}$ donc $\ell = \ell'$. En fait, cette limite commune peut être calculée.

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = b\cos\theta$. On a alors $x_1 = b\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ et $y_1 = b\cos\dfrac{\theta}{2}$. Par récurrence sur n, on voit alors que $y_n = b\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$ et $x_n = y_n\cos\dfrac{\theta}{2^n}$. Le produit définissant y_n se simplifie si on le multiplie par $\sin\dfrac{\theta}{2^n}$ et on obtient $y_n = \dfrac{b\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}\cdot$ On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = b\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot \quad \triangleleft$$

Les suites (a_n) et (b_n) étudiées dans le prochain exercice sont définies de la manière suivante : a_{n+1} et b_{n+1} sont respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de a_n et b_n. On va montrer qu'elles convergent vers la moyenne géométrique de a_0 et b_0. Si on remplace la moyenne harmonique de a_n et b_n par leur moyenne géométrique, on obtient encore deux suites qui convergent vers la même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.

2.43. Moyenne arithmético-harmonique

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$ et les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right).$$

1. Étudier la convergence de ces suites.

2. Soit $\ell = \lim a_n$. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Les deux suites sont à termes strictement positifs. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \geqslant 0.$$

Autrement dit $a_n \geqslant b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que, si $n \geqslant 1$,

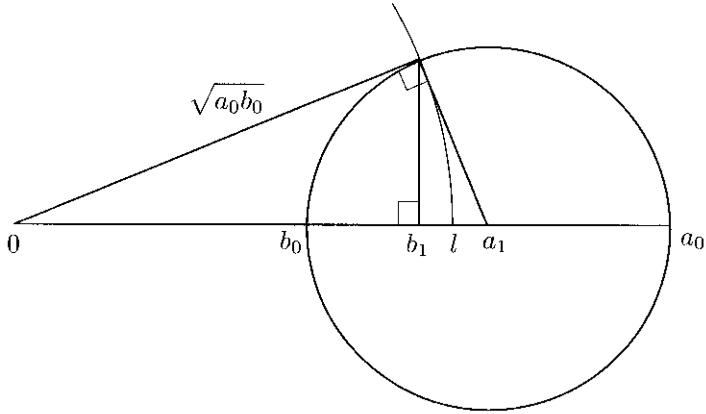
$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} \geqslant 0.$$

La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ décroît et est minorée par b_1 ; la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ croît et est majorée par a_1. Elles convergent donc toutes les deux. En passant à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on obtient qu'elles ont même limite. On appelle ℓ cette limite commune. Pour calculer ℓ, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2a_n b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n b_n}$$

et donc $a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n$: la suite $(a_n b_n)$ est constante et donc, pour tout n, $a_n b_n = a_0 b_0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, cela donne $\ell = \sqrt{a_0 b_0}$.

La figure suivante montre la construction géométrique des termes des suites. La convergence semble assez rapide.



2. Pour répondre à cette question, on va d'abord calculer a_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\ell^2}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 + \ell^2}{2a_n},$$

et donc

$$a_{n+1} - \ell = \frac{(a_n - \ell)^2}{2a_n} \quad \text{et} \quad a_{n+1} + \ell = \frac{(a_n + \ell)^2}{2a_n}.$$

On obtient finalement $\dfrac{a_{n+1} - \ell}{a_{n+1} + \ell} = \left(\dfrac{a_n - \ell}{a_n + \ell}\right)^2$. Une récurrence aisée donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n - \ell}{a_n + \ell} = \left(\dfrac{a_0 - \ell}{a_0 + \ell}\right)^{2^n}$. Sachant que $a_n + \ell$ est équivalent à 2ℓ, on obtient

$$\boxed{a_n - \ell \underset{n \to \infty}{\sim} 2\ell \left(\frac{a_0 - \ell}{a_0 + \ell}\right)^{2^n}.} \lhd$$

La suite (a_n) ci-dessus vérifie la récurrence $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_0b_0}{a_n}\right)$. On reconnaît l'algorithme dit babylonien d'extraction d'une racine carrée, en l'occurrence $\sqrt{a_0b_0}$. Il est basé sur le raisonnement suivant : si a_n est une valeur approchée par défaut (resp. par excès) de $\sqrt{a}$, alors $\frac{a}{a_n}$ en est une valeur approchée par excès (resp. par défaut) et la moyenne $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$ est une meilleure valeur approchée que a_n. L'équivalent obtenu dans l'exercice montre que cet algorithme converge très rapidement si a_0 est proche de $\sqrt{a}$.

2.44. Récurrences simultanées

On se donne trois réels a_0, b_0, c_0 tels que $-1 \leqslant a_0 \leqslant b_0 \leqslant c_0 \leqslant 1$ et on pose, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \int_{-1}^{1} \min(x, b_n, c_n)\mathrm{d}x, \\ b_{n+1} = \int_{-1}^{1} \operatorname{mil}(x, a_n, c_n)\mathrm{d}x, \\ c_{n+1} = \int_{-1}^{1} \max(x, a_n, b_n)\mathrm{d}x, \end{cases}$$

où $\operatorname{mil}(a, b, c)$ est le terme médian de (a, b, c). Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

(**École polytechnique**)

Solution.

Montrons, par récurrence sur n, que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. C'est vérifié pour $n = 0$ et si on suppose que la propriété est vraie au rang n, on obtient, pour tout $x \in [-1, 1]$:

⋆ si $x \leqslant a_n$,

$$\min(x, b_n, c_n) = x \leqslant a_n = \operatorname{mil}(x, a_n, c_n) \leqslant \max(x, a_n, b_n) = b_n;$$

⋆ si $a_n \leqslant x \leqslant c_n$,

$$\min(x, b_n, c_n) \leqslant x = \operatorname{mil}(x, a_n, c_n) \leqslant \max(x, a_n, b_n);$$

⋆ si $x \geqslant c_n$,

$$\min(x, b_n, c_n) = b_n \leqslant c_n = \operatorname{mil}(x, a_n, c_n) \leqslant x = \max(x, a_n, b_n).$$

On a donc, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\min(x, b_n, c_n) \leqslant \operatorname{mil}(x, a_n, c_n) \leqslant \max(x, a_n, b_n).$$

On en déduit, en intégrant ces inégalités sur $[-1, 1]$ que

$$a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant c_{n+1},$$

ce qui termine la récurrence.

On aimerait pouvoir dire que, pour tout n, $-1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant 1$. Il n'en est rien : si par exemple $b_0 = -1$, alors $a_0 = -2$. Nous allons cependant montrer que c'est réalisé pour n assez grand.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0$ et de même $c_{n+1} \geqslant 0$. Autrement dit, $a_n \leqslant 0$ et $c_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$. On en déduit que, pour $n \geqslant 1$,

$$b_{n+1} + 1 = \int_{-1}^{1} \operatorname{mil}(x + 1, a_n + 1, c_n + 1)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

car $c_n + 1 \geqslant 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $x + 1 \geqslant 0$. On montre de même que $b_{n+1} - 1 \leqslant 0$. On a donc $b_{n+1} \in [-1, 1]$ pour $n \geqslant 1$, soit $b_n \in [-1, 1]$ pour $n \geqslant 2$. On peut donc écrire, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_{-1}^{1} \min(x, b_n)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{b_n} x\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{1} b_n \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(b_n^2 - 1) + b_n(1 - b_n) = -\frac{(1 - b_n)^2}{2}. \end{aligned}$$

On trouve de même,

$$c_{n+1} = \int_{-1}^{b_n} b_n \mathrm{d}x + \int_{b_n}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{(b_n + 1)^2}{2}.$$

Soit n un entier $\geqslant 2$. Les conditions $a_{n+1} \geqslant -1$ et $c_{n+1} \leqslant 1$ sont réalisées si $|b_n| \leqslant \sqrt{2} - 1$. On note que $|c_{n+1}| + |a_{n+1}| = c_{n+1} - a_{n+1} = 1 + b_n^2 \leqslant 2$. On ne peut pas avoir simultanément $a_{n+1} < -1$ et $c_{n+1} > 1$.

$\star$ Si $|b_n| \leqslant \sqrt{2} - 1$, alors

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \int_{-1}^{a_{n+1}} a_{n+1}\mathrm{d}x + \int_{a_{n+1}}^{c_{n+1}} x\mathrm{d}x + \int_{c_{n+1}}^{1} c_{n+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + c_{n+1})(a_{n+1} - c_{n+1} + 2) \\ &= b_n(1 - b_n^2). \end{aligned}$$

On a alors $|b_{n+2}| \leqslant |b_n| \leqslant \sqrt{2} - 1$.

$\star$ Si $b_n > \sqrt{2} - 1$, alors $c_{n+1} > 1$ et

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \int_{-1}^{1} \max(x, a_{n+1})\mathrm{d}x = \int_{-1}^{a_{n+1}} a_{n+1}\mathrm{d}x + \int_{a_{n+1}}^{1} x\mathrm{d}x \\ &= a_{n+1}(a_{n+1} + 1) + \frac{1}{2}(1 - a_{n+1}^2) = \frac{(a_{n+1} + 1)^2}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit $b_{n+2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, puis $a_{n+3} = -\frac{(1 - b_{n+2})^2}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right]$. Si on a encore $b_{n+2} > \sqrt{2} - 1$, alors on obtient $b_{n+4} = \dfrac{(a_{n+3} + 1)^2}{2}$ et, cette fois, on a $0 \leqslant b_{n+4} \leqslant \dfrac{49}{128} \leqslant \sqrt{2} - 1$.

$\star$ On montre de même que si $b_n < -\sqrt{2} + 1$, alors $-\sqrt{2} + 1 \leqslant b_{n+4} \leqslant 0$.

On a donc, pour tout n assez grand ($n \geqslant 6$),

$$|b_n| \leqslant \sqrt{2} - 1, \quad b_{n+2} = b_n(1 - b_n^2) \quad \text{et} \quad |b_{n+2}| \leqslant |b_n|.$$

Les deux suites $(|b_{2n}|)$ et $(|b_{2n+1}|)$ sont donc décroissantes et bornées. Elles convergent. La limite de chacune vérifie $\ell = \ell(1 - \ell^2)$ et donc $\ell = 0$.

La suite (b_n) converge donc vers 0. Des relations $a_{n+1} = -\dfrac{(1-b_n)^2}{2}$ et $c_{n+1} = \dfrac{(b_n+1)^2}{2}$, on déduit que les suites (a_n) et (c_n) convergent respectivement vers $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$. ◁

Les exercices qui terminent ce chapitre étudient des suites définies implicitement. La démarche est toujours la même : montrer l'existence de x_n, démontrer la convergence de la suite x_n, déterminer un équivalent, puis un développement asymptotique de x_n. Pour cela il faut commencer par déterminer dans la relation qui définit x_n quels sont les termes prépondérants.

2.45. Suite définie implicitement (1)

On considère le polynôme $P_n = X^n + X^{n-1} + 2X - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $P_n(x_n) = x_n$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 1.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Posons, pour $n \geqslant 3$, $Q_n = P_n - X = X^n + X^{n-1} + X - 1$. On a $Q_n' = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 1$. Ce polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que Q_n réalise un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}_+$ sur $[Q_n(0), +\infty[= [-1, +\infty[$. En particulier, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $Q_n(x_n) = 0$.

2. Notons que puisque $Q_n(1) = 2 > 0$, on a $0 < x_n < 1$. En évaluant $Q_{n+1} - Q_n = (X+1)X^{n-1}(X-1)$ en x_n, on voit que $Q_{n+1}(x_n) < 0$. On a donc $x_{n+1} > x_n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge. Il ne reste plus qu'à prouver que sa limite est 1.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On calcule $Q_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n + (1-\varepsilon)^{n-1} - \varepsilon$. On observe que $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1-\varepsilon) = -\varepsilon$. Pour n assez grand, on a donc $Q_n(1-\varepsilon) < 0$ et ainsi $1-\varepsilon < x_n < 1$. Cela prouve que (x_n) tend vers 1. ◁

2.46. Suite définie implicitement (2)

Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Posons $f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1$. On a $f_n'(x) = 2n(x^{2n-1} - 1)$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $f_n(1) = 2(1-n) < 0$, la fonction f_n s'annule exactement deux fois pour $n > 1$. On a en particulier $a_n > 1$. Comme $f_n(2) = 4^n - 4n + 1 > 0$ on a $1 < a_n < 2$. Posons alors $a_n = 1 + \varepsilon_n$. En remplaçant dans l'égalité $f_n(a_n) = 0$, il vient

$$(1+\varepsilon_n)^{2n} = 2n(1+\varepsilon_n) + 1.$$

En passant au logarithme et en divisant par $2n$ on obtient,

$$\ln(1+\varepsilon_n) \sim \frac{\ln(2n)}{2n} \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Donc ε_n tend vers 0 et $\varepsilon_n \sim \ln(1+\varepsilon_n) \sim \dfrac{\ln n}{2n}$. On a donc le développement asymptotique suivant :

$$a_n = 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \lhd$$

2.47. Suite définie implicitement (3)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier cette suite et donner un développement asymptotique de u_n comportant deux termes.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Considérons $f_n : x \longmapsto x^5 + nx - 1$ pour $n \geqslant 1$. La fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = x^4 + n > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = n \geqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de u_n, qui est dans l'intervalle $[0, 1]$. Son unicité est due à la stricte monotonie de f_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = f_n(u_n) + u_n = u_n \geqslant 0$. Comme f_{n+1} est strictement croissante, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; étant minorée, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^5 - 1 = \ell^5 - 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} -nu_n$. Nécessairement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Comme u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini,

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1 \quad i.e. \quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

De la relation $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, on tire pour n tendant vers l'infini,

$$nu_n - 1 = -u_n^5 \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^5}, \quad i.e. \quad nu_n = 1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

On conclut

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).}$$

2.48. Suite définie implicitement (4)

1. Montrer que l'équation $x\sin x - c\cos x$ (où $c > 0$) admet une unique racine x_n dans tout intervalle $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle n'en admet pas d'autre dans $\mathbb{R}_+$.

2. Trouver un équivalent θ_n de $x_n - n\pi$, puis un équivalent de $x_n - n\pi - \theta_n$.

(École polytechnique)

Solution.

1. Posons, pour x réel positif ou nul, $f(x) = x\sin x - c\cos x$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée vaut $f'(x) = x\cos x + (1+c)\sin x$. On remarque que sur un intervalle de la forme $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ (n entier naturel), $\sin x$ et $\cos x$ ont le même signe, si bien que f' garde sur cet intervalle un signe constant : la fonction f est strictement monotone sur $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Or $f(n\pi)f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -c(-1)^n n\pi(-1)^n = -cn\pi < 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'une racine x_n de f dans $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, unique par stricte monotonie.

D'autre part, si $f(x) = 0$, $\cos x \neq 0$ (car sinon, $f(x) = x\sin x \neq 0$). Dans ces conditions,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{c}{x} > 0.$$

Il s'ensuit que x est dans un intervalle du type $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ ($n \geqslant 0$). En dehors des x_n, la fonction f n'a donc pas d'autre racine positive.

2. Pour n entier naturel non nul, $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$1 \leqslant \frac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \frac{\pi}{2n\pi}.$$

Le théorème d'encadrement nous donne l'équivalent $x_n \sim n\pi$.

Posons $u_n = x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La relation $f(x_n) = 0$ s'écrit

$$(-1)^n(u_n + n\pi)\sin u_n - c(-1)^n\cos u_n = 0,$$

ce qui se simplifie comme suit

$$\tan u_n = \frac{c}{n\pi + u_n} \text{ ou encore } u_n = \arctan \frac{c}{n\pi + u_n} \sim \frac{c}{n\pi + u_n} \sim \frac{c}{n\pi},$$

puisque $u_n = o(n\pi)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c}{n\pi + u_n} = 0$.

Posons ensuite $v_n = u_n - \dfrac{c}{n\pi} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. La relation $u_n = \arctan \dfrac{c}{n\pi + u_n}$ devient

$$v_n + \frac{c}{n\pi} = \arctan\left(\frac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right).$$

On a

$$\frac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{c}{n\pi\left(1 + \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Sachant que pour x tendant vers 0, $\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, on obtient

$$v_n + \frac{c}{n\pi} = \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

ce qui donne après simplification, $v_n = -\dfrac{c^2(c+3)}{3n^3\pi^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et finalement

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2(c+3)}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}. \lhd$$

La commande Maple `solve(series(arctan(c/(Pi/y + x)), y) = x, x)` *permet de trouver le résultat.*

2.49. Zéros des polynômes de Taylor d'ordre impair de l'exponentielle

Soit $P_n(X) = 1 + \dfrac{X}{1!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$.

1. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle.

2. Soit a_n l'unique zéro de P_{2n+1}. Étudier la limite de la suite (a_n).

3. Déterminer un équivalent de a_n.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il est clair pour commencer que $P_n(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Les éventuels zéros seront donc négatifs. Pour tout $n \geqslant 1$ on a $P'_n = P_{n-1}$. Cela invite clairement à faire une démonstration par récurrence. Prenons l'hypothèse suivante

(H_n) : la fonction P_{2n} est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et P_{2n+1} réalise un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur lui-même, et en particulier s'annule pour une unique valeur $a_n < 0$.

Pour $n = 0$ c'est clair : $P_0 = 1$ et $P_1(X) = 1 + X$. On a $a_0 = -1$.

Supposons (H_n) vraie. Alors comme $P'_{2n+2} = P_{2n+1}$, la fonction P_{2n+2} atteint son minimum en a_n.Puisque

$$P_{2n+2}(a_n) = P_{2n+1}(a_n) + \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0,$$

on a donc $P_{2n+2} > 0$. Enfin, comme $P'_{2n+3} = P_{2n+2}$, la fonction P_{2n+3} est strictement croissante. Comme ses limites en $\pm\infty$ sont respectivement $\pm\infty$ la seconde partie de (H_{n+1}) est vérifiée.

2. Essayons maintenant d'étudier la monotonie de la suite (a_n). Pour localiser a_{n+1} par rapport à a_n il suffit de connaître le signe de $P_{2n+3}(a_n)$. Or nous avons

$$P_{2n+3}(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}(2n+3+x)$$

donc $P_{2n+3}(a_n)$ a le signe de $2n + 3 + a_n$. On remarque que

$$P_{2n+3}(-2n-3) = P_{2n+1}(-2n-3) \leqslant P_{2n+1}(-2n-1).$$

Il en résulte que la suite $(P_{2n+1}(-2n-1))_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En particulier, $P_{2n+1}(-2n-1) \leqslant P_1(-1) = 0$ ce qui implique $-2n-1 \leqslant a_n$. En conséquence, $a_n + 2n + 3 \geqslant 2 > 0$, ce qui implique $P_{2n+3}(a_n) > 0$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ et la décroissance stricte de la suite (a_n).

On va maintenant prouver que la suite (a_n) tend vers $-\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite finie l. Alors, par croissance stricte des P_{2n+1}, on aurait, pour tout n, $P_{2n+1}(l) < 0$ et donc, en faisant tendre n vers l'infini, $e^l \leqslant 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

3. Cherchons un équivalent de a_n. Pour tout réel x, la suite $(P_n(x))$ converge vers e^x. De plus, pour $x < 0$, la série définissant e^x est alternée, donc e^x est encadré par $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$. D'où l'idée d'encadrer e^{a_n} par $P_{2n+2}(a_n)$ et $P_{2n+3}(a_n)$ (on sait déjà que $P_{2n+1}(a_n) = 0$).

Par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x < 0$, il existe $c \in]x;0[$ tel que $e^x - P_{2n+2}(x) = \dfrac{e^c}{(2n+3)!}x^{2n+3} < 0$. En particulier, pour $x = a_n$, on obtient $e^{a_n} - \dfrac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \leqslant 0$. De même, la formule de Taylor-Lagrange montre que $\mathrm{P}_{2n+3}(x) \leqslant e^x$ pour tout réel x et on obtient, pour $x = a_n$,

$$e^{a_n} \geqslant \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{a_n^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{a_n^{2n+2}}{(2n+3)!}(2n+3+a_n) \geqslant 2\frac{a_n^{2n+2}}{(2n+3)!}$$

(on a utilisé l'inégalité $a_n + 2n + 3 \geqslant 2$ démontrée plus haut). En passant au logarithme dans les deux inégalités précédentes, on obtient l'encadrement

$$\ln 2 + (2n+2)\ln(-a_n) - \ln(2n+3)! \leqslant a_n \leqslant (2n+2)\ln(-a_n) - \ln(2n+2)!.$$

On rappelle les premiers termes du développement asymptotique de Stirling

$$\ln k! = k \ln k - k + o(k).$$

Comme $\ln(2n+3)! = \ln(2n+3) + \ln(2n+2)! = (2n+2)\ln(2n+2) - (2n+2) + o(n)$, il vient

$$(2n+2)\ln\frac{-a_n}{2n+2} + (2n+2) + o(n) \leqslant a_n \leqslant (2n+2)\ln\frac{-a_n}{2n+2} + (2n+2) + o(n).$$

En divisant l'inégalité ci-dessus par $2n+2$ et en notant $x_n = -\dfrac{a_n}{2n+2}$, on a donc $1 + \ln(x_n) + o(1) \leqslant -x_n \leqslant 1 + \ln x_n + o(1)$. Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n + \ln x_n) = -1$. Or, la fonction $\psi : t \longmapsto t + \ln t$ réalise un homéomorphisme strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Par continuité de ψ^{-1}, x_n tend vers l'unique réel α tel que $\alpha + \ln \alpha = -1$ (α vaut environ 0,278) et on a l'équivalent cherché $\boxed{a_n \sim -2\alpha n}$. ◁

Chapitre 3
Séries numériques

*Dans une tentative d'historique des séries numériques, nous pourrions faire remonter leurs origines aux travaux développés dès la fin du XVII*e *siècle autour du comportement asymptotique de sommes du type* $\sum_{k=1}^{n} f(k)$. *Quelques années après les travaux de Bernoulli sur ce sujet, Euler et Mac-Laurin produisent indépendamment une «formule sommatoire» obtenue par inversion d'identités tayloriennes :*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \frac{f'(n)-f'(0)}{12} - \frac{f'''(n)-f'''(0)}{720} + \cdots$$

Si l'expression générale donnant les coefficients de cette formule leur échappe dans un premier temps, Euler établit leur lien avec les coefficients du développement en série de $\dfrac{x}{e^x-1}$ *et les nombres de Bernoulli, introduits par celui-ci dans le calcul des sommes* $\sum_{k=1}^{n} k^p$. *Euler en déduit, par de jolis calculs, les sommes des séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2s}}$ *pour* s *entier naturel non nul. Cependant, le problème de la convergence des sommes en question n'est jamais au centre de leurs réflexions et l'aspect formel l'emporte, ce qui conduit parfois les plus grands mathématiciens du siècle à commettre de lourdes erreurs. Vers 1768, d'Alembert commence à douter de la validité de l'emploi de séries non convergentes. En 1826, le mot d'Abel*[1] *illustre parfaitement cette nouvelle préoccupation : «Les séries divergentes sont des inventions du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes.»*

Mais ce sont les nécessités du calcul numérique qui imposent vraiment un effort de rigueur dont Gauss, s'étant fait une idée claire de la notion de limite, sera le principal artisan. À partir de là, il paraît naturel d'établir des critères simples de convergence : on en doit plusieurs à Cauchy[2]*, et notamment celui qui porte son nom : si la suite de réels positifs* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *est telle que la limite supérieure de* $\sqrt[n]{a_n}$ *est strictement inférieure à 1, alors la série* $\sum a_n$ *est convergente.*

---

1. ABEL (N.), *Œuvres*, 1881.
2. CAUCHY (A.), *Analyse algébrique*, 1821.

Les premiers exercices sont consacrés aux séries à termes positifs. Dans ce cas, la suite des sommes partielles est croissante, de sorte qu'une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

3.1. Étude de convergence

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum a_n$ converge.

1. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.

2. Que dire dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On peut envisager de majorer la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour faire apparaître la somme des a_n sur laquelle nous avons une hypothèse ; en effet, pour tout $N \geqslant 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha} &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} (\sqrt{a_n})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

puisque la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge (car $2\alpha > 1$). Les sommes partielles de la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ étant majorées, cette série à termes positifs converge.

On pouvait également majorer directement le terme général en écrivant : $\frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}} + a_n\right)$ *(c'est tout simplement l'inégalité arithmético-géométrique). Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.*

2. On ne peut répondre de manière générale : si les a_n sont tous nuls la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^{1/2}}$ converge. En revanche si $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ (pour $n \geqslant 2$), $\frac{\sqrt{a_n}}{n^{1/2}} = \frac{1}{n\ln n}$ est le terme général d'une série divergente. ◁

L'exercice suivant fournit un premier exemple très simple de transformation d'Abel. On trouvera des développements sur cette technique dans les exercices 3.35 à 3.37.

3.2. Une transformation d'Abel

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}).$$

(École polytechnique)

Solution.

Notons que les séries en question sont à termes positifs. Posons pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $\mathrm{T}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$. On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n &= \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))u_k + (1-1)u_1 - nu_{n+1} = \mathrm{S}_n - nu_{n+1}.\end{aligned}$$

• Supposons que $\sum u_k$ converge et notons S sa somme. Dans ces conditions, on a $\mathrm{T}_n \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{S}$ pour tout entier n. Donc, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont majorées par S. Cette série converge et sa somme T est, par passage à la limite dans l'inégalité $\mathrm{T}_n \leqslant \mathrm{S}$, inférieure ou égale à S (on pourrait ici invoquer le résultat de l'exercice 3.10 pour avoir directement $\mathrm{S} = \mathrm{T}$, mais ce n'est pas indispensable car on va obtenir l'égalité dans la preuve du sens réciproque).

• Réciproquement, supposons que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et notons T sa somme. Posons $v_k = k(u_k - u_{k+1})$. On va montrer que la suite nu_{n+1} tend vers 0, ce qui impliquera à la fois la convergence de la série $\sum u_n$ et le fait que les deux séries ont la même somme d'après l'identité $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n - nu_{n+1}$. On a pour tout entier $k \geqslant 1$, $u_k - u_{k+1} = \dfrac{v_k}{k}$, ce qui donne, puisque u_n tend vers 0,

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}.$$

On en déduit que $0 \leqslant nu_{n+1} \leqslant nu_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$, quantité qui tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente. La limite de nu_{n+1} est donc nulle.

Conclusion. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et en cas de convergence ont la même somme :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}).} \triangleleft$$

Cet exercice est très souvent posé à l'oral et parfois sous la forme «dérivée» suivante : si $\sum x_n$ est une série à termes positifs qui converge et si $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$ désigne son reste d'ordre n, alors les séries $\sum \mathrm{R}_n$ et $\sum nx_n$ sont de même nature et en cas de convergence ont la même somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx_n$. Il s'agit bien entendu du même exercice puisque la suite R_n tend vers 0 en décroissant. Sous cette forme il apparaît très clairement que le résultat découle immédiatement du théorème de Fubini pour les séries doubles positives :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} x_k = \sum_{k=1}^{+\infty} kx_k.$$

Les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs sont des outils puissants qui permettent de conclure sur des problèmes de convergence en étudiant le terme général de la série plutôt que la suite des sommes partielles. Rappelons les résultats les plus utilisés. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles positives, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge};$$

$$u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge};$$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Le plus souvent on utilise ces résultats avec les séries de référence que sont les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (qui convergent si et seulement si $\alpha > 1$) et les séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ (qui convergent si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$). On en trouvera plusieurs exemples dans les exercices qui suivent.

3.3. Nature d'une série (1)

Quelle est la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \ln(n+2)}\right)$?

(École polytechnique)

Solution.

Observons pour commencer que la série est positive. En effet, on a

$$u_n = \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n . \ln(n+2)}\right) = 2\ln\ln(n+1) - \ln\ln n - \ln\ln(n+2) \geqslant 0$$

par concavité de la fonction $t \longmapsto \ln\ln t$. On va maintenant estimer u_n par un développement asymptotique. Posons $u_n = \ln v_n$. On peut écrire pour n tendant vers $+\infty$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\ln n\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]} = \frac{\left[\ln n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2}{\ln n\left[\ln n + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} \\ &= \frac{\left[1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right]^2}{1 + \frac{2}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)} \\ &= \left(1 + \frac{2}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) \times \left(1 - \frac{2}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right), \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$u_n = \ln v_n = \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2\ln n}$ converge, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence de la série étudiée. ◁

En fait on peut même calculer sa somme, comme le lecteur l'aura peut-être fait. Il suffit de constater que dans la somme partielle

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} (2\ln\ln(k+1) - \ln\ln k - \ln\ln(k+2))$$

la plupart des termes s'éliminent. On obtient

$$\mathrm{S}_n = \ln\ln(n+1) - \ln\ln(n+2) + \ln\ln 3 - \ln\ln 2$$

qui tend vers $\ln\ln 3 - \ln\ln 2$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

3.4. Nature d'une série (2)

Soit (a_n) une suite réelle strictement positive et (b_n) une suite réelle. On suppose que $b_n = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ et que la série $\sum a_n$ converge. Étudier la nature de la série $\sum a_n^{b_n}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 1, la série converge. On va montrer que c'est toujours le cas. Pour n assez grand, $a_n < 1$ et on majore alors $a_n^{b_n}$ en minorant b_n. Il existe $\mathrm{N} \geqslant 0$ et $\mathrm{K} > 0$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $b_n \geqslant 1 - \dfrac{\mathrm{K}}{\ln n}$ et dans ces conditions,

$$0 \leqslant a_n^{b_n} \leqslant a_n \exp\left(-\mathrm{K}\frac{\ln a_n}{\ln n}\right).$$

On remarque que plus a_n est proche de zéro, plus la valeur de $\exp\left(-\mathrm{K}\dfrac{\ln a_n}{\ln n}\right)$ est grande et inversement. Soit $\mathrm{M} > 0$ à fixer plus tard. On a l'équivalence

$$\exp\left(-\mathrm{K}\frac{\ln a_n}{\ln n}\right) \geqslant \exp \mathrm{M} \iff -\mathrm{K}\ln a_n \geqslant \mathrm{M}\ln n \iff \ln a_n \leqslant -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{K}}\ln n,$$

ce qui donne

$$\exp\left(-\mathrm{K}\frac{\ln a_n}{\ln n}\right) \geqslant \exp \mathrm{M} \iff a_n \leqslant \frac{1}{n^{\mathrm{M}/\mathrm{K}}}.$$

Choisissons $\mathrm{M} = 2\mathrm{K}$. On peut alors majorer de la sorte

$$0 \leqslant a_n^{b_n} \leqslant \max\left(e^{\mathrm{M}}a_n, \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1-\frac{\mathrm{K}}{\ln n}}\right) \leqslant e^{\mathrm{M}}a_n + \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1-\frac{\mathrm{K}}{\ln n}}.$$

Or, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{1-\frac{\mathrm{K}}{\ln n}} = \exp(-2\ln n + 2\mathrm{K}) = \dfrac{e^{2\mathrm{K}}}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure : $\sum a_n^{b_n}$ converge. ◁

On rencontre parfois à l'oral le cas particulier $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$.

3.5. Majoration à l'aide d'une intégrale

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et, en cas d'existence, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouver que

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

2. On suppose que $\sum u_n$ converge. Prouver que

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1.$$

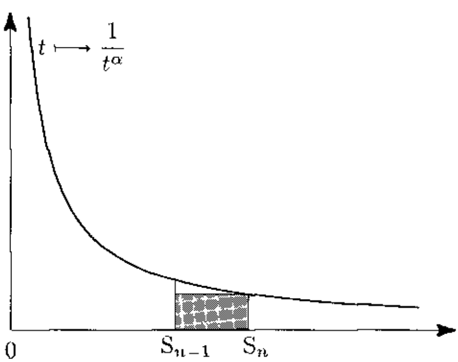
(**École polytechnique**)

Solution.

1. Comme la série $\sum u_n$ diverge, la suite (S_n) est croissante et tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

• Prouvons pour commencer que la série $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$. Pour cela, nous allons majorer $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ à l'aide d'une intégrale. Pour tout $n \geqslant 1$ on a,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$



Comme $\alpha > 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[S_0, +\infty[$ et on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leqslant \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \int_{S_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

La série étant à termes positifs, elle converge.

• On va maintenant montrer que la série diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$. En fait, il suffit de traiter le cas $\alpha = 1$. En effet, pour n assez grand on a $S_n \geqslant 1$ et donc $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \geqslant \dfrac{u_n}{S_n}$ pour $\alpha < 1$. Si on sait que la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge, le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors d'affirmer que la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge aussi. Pour prouver que $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge, on va montrer qu'elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Soit N et p deux entiers naturels. Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on peut écrire

$$\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n} \geqslant \sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_{N+p}} = \frac{S_{N+p} - S_{N-1}}{S_{N+p}} = 1 - \frac{S_{N-1}}{S_{N+p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1.$$

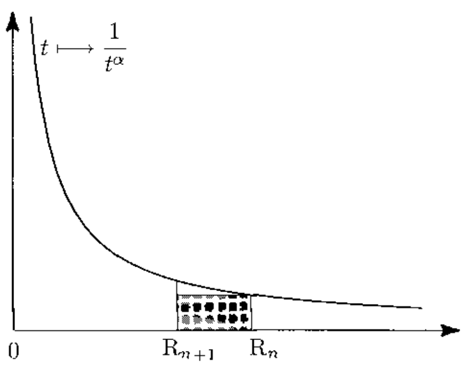
Ainsi, pour p assez grand, la tranche de Cauchy $\sum_{n=N}^{N+p} \dfrac{u_n}{S_n}$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$. Le critère de Cauchy n'est pas vérifié et la série diverge donc.

Cette question montre donc que si $\sum u_n$ *est une série divergente à termes positifs, on peut toujours trouver une suite positive* v_n *négligeable devant* u_n*, telle que la série* $\sum v_n$ *diverge encore : il suffit de prendre* $v_n = \dfrac{u_n}{S_n^\alpha} = o(u_n)$ *avec* $0 < \alpha \leqslant 1$.

2. Remarquons que R_n décroît et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

• Supposons $\alpha < 1$. On utilise, comme dans la question précédente, une majoration à l'aide d'une intégrale. On peut supposer $\alpha \geqslant 0$ car si $\alpha < 0$ on a $\dfrac{u_n}{R_n^\alpha} = o(u_n)$ et le théorème de comparaison permet de conclure que la série $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge. Soit n un entier naturel. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$



Il en résulte que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{R_k^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_0} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \int_0^{R_0} \frac{dt}{t^\alpha},$$

car la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, R_0]$ puisque $\alpha < 1$. La série étant à termes positifs, elle converge.

Ainsi, si u_n est le terme général d'une série convergente, il existe une suite (v_n) de $\mathbb{R}_+$ devant laquelle (u_n) est négligeable et qui est le terme général d'une série convergente. Il suffit de prendre $v_n = \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

• Supposons maintenant $\alpha = 1$ et montrons que la série $\sum \dfrac{u_n}{R_n}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy. Soit N et p des entiers naturels. On minore la tranche de Cauchy entre N et $N + p$ par :

$$\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{R_n} \geqslant \sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{R_N} = \frac{R_N - R_{N+p+1}}{R_N} = 1 - \frac{R_{N+p+1}}{R_N} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1.$$

Ainsi, pour p assez grand, $\sum\limits_{n=N}^{N+p} \dfrac{u_n}{R_n}$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$. Cela prouve que la série diverge.

• Supposons pour terminer $\alpha > 1$. Pour n assez grand, $R_n \leqslant 1$ et donc $R_n^\alpha \leqslant R_n$ et $\dfrac{u_n}{R_n^\alpha} \geqslant \dfrac{u_n}{R_n}$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la divergence de $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$. ◁

Dans l'exercice suivant, on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$, croissante et tendant vers $+\infty$. Aussi lente que soit la croissance de a_n, on peut construire une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec u_n assez petit pour que la série $\sum u_n$ converge, mais pas trop pour que la série $\sum a_n u_n$ diverge.

3.6. Sur la négligeabilité

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs qui tend vers l'infini. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge et $\sum a_n u_n$ diverge.

(École polytechnique)

Solution.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang

n_0. Comme le comportement d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite on peut, quitte à se placer au delà du rang n_0, supposer que $a_n > 0$ pour tout n.

Posons alors $u_n = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$ pour $n \geqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{1}{a_0} - \dfrac{1}{a_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{a_0}$ de sorte que $\sum u_n$ converge.

Par ailleurs, on a $a_n u_n = 1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Si $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ ne tend pas vers 1, alors $\sum a_n u_n$ diverge. Si $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers 1, alors

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \ln a_{n+1} - \ln a_n.$$

La suite $(\ln a_{n+1} - \ln a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^{n} (\ln a_{k+1} - \ln a_k) = \ln a_{n+1} - \ln a_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Donc $\sum(\ln a_{n+1} - \ln a_n)$ diverge et $\sum a_n u_n$ également d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. ◁

Si $\sum x_n$ est une série convergente à termes strictement positifs, et si on note $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} x_k$, on voit grâce à l'exercice 3.5 que la série $\sum \dfrac{x_n}{\mathrm{R}_n}$ diverge. Or, la suite $a_n = \dfrac{1}{\mathrm{R}_n}$ tend vers $+\infty$ en croissant. On a donc divergence de la série $\sum a_n x_n$ et convergence de la série $\sum x_n$. Mais $x_n = \mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$. Cela éclaire la solution donnée ci-dessus.

Dans les deux exercices suivants, comme dans beaucoup d'autres, on utilise le fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ sont de même nature, puisque pour $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$.

3.7. Série et suite

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le choix de α_0 et α_1 dans $]0, +\infty[$ et la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n \alpha_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Il est clair que la suite (α_n) est à termes strictement positifs et est croissante à partir du rang 1. Donc soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que la suite (α_n) converge et notons $\ell > 0$ sa limite. On obtient

$$a_n = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}(\alpha_{n+1} - \alpha_n).$$

Comme la série $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ converge, on en déduit que la série $\sum a_n$ converge.

Montrons que cette condition est suffisante. On suppose donc que $\sum a_n$ converge. En particulier a_n tend vers 0 et

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = a_n\alpha_{n-1} = o(\alpha_{n-1}) = o(\alpha_n),$$

car $0 < \alpha_{n-1} < \alpha_n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$, puis que

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 = a_n \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n.$$

Mais on sait aussi, puisque $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ tend vers 1, que

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = \ln\alpha_{n+1} - \ln\alpha_n.$$

On obtient donc finalement $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\alpha_{n+1} - \ln\alpha_n$. Par le théorème de comparaison, la série $\sum(\ln\alpha_{n+1} - \ln\alpha_n)$ converge, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(\ln\alpha_n)$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite (α_n) converge.

Conclusion. La suite (α_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge. ◁

3.8. Un théorème de comparaison

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles strictement positives. On suppose que $\sum b_n$ diverge, et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \ell.$$

Montrer que si $\ell > 0$, $\sum a_n$ converge et que si $\ell < 0$, $\sum a_n$ diverge.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Notons que, comme $\ell \neq 0$, l'hypothèse s'écrit $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \ell a_{n+1}$. On va raisonner par l'absurde dans les deux cas.

• Supposons pour commencer $\ell > 0$. Si la série $\sum a_n$ diverge, alors $\sum\left(\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$ diverge également. Cette série est à termes positifs, pour n assez grand, car $\ell a_{n+1} > 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = +\infty.$$

Mais ceci est impossible car $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{a_k}{b_k} - \dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = \dfrac{a_0}{b_0} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_0}{b_0}$. Cette contradiction prouve que la série $\sum a_n$ converge.

• Supposons $\ell < 0$. Si $\sum a_n$ converge, alors $\sum\left(\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$ converge également. Il existe un entier n_0 tel que $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < 0$ pour $n \geqslant n_0$. On a alors $\dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} - \dfrac{a_n}{b_n} = \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \left(\dfrac{a_k}{b_k} - \dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$ qui a pour limite $\mathrm{S} = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} \left(\dfrac{a_k}{b_k} - \dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} - \mathrm{S} = \mathrm{K} > 0$, c'est-à-dire que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{K} b_n$, ce qui est impossible car $\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ diverge. Donc la série $\sum a_n$ diverge. ◁

Dans le cas où $\ell = 0$ on ne peut rien dire : si on prend pour (b_n) la suite constante égale à 1, l'hypothèse est que $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers 1 et on sait que cela ne suffit pas pour connaître la nature de $\sum a_n$ (considérer les séries de Riemann).

Le regroupement de termes consécutifs d'une série $\sum u_n$ conduit à la notion de tranche de Cauchy, déjà utilisée dans l'exercice 3.5. Il s'agit des sommes finies de la forme $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = \mathrm{U}_{n+p} - \mathrm{U}_n$ où l'on note $\mathrm{U}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles. Lorsque la série réelle ou complexe $\sum u_n$ converge, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$ et tout $p \geqslant 0$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \varepsilon$. Ce résultat demeure pour une série $\sum u_n$ d'un espace vectoriel normé (le module, ou la valeur absolue, étant remplacé par la norme). La réciproque est vraie lorsque l'espace est complet (ce qui est bien entendu le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) : c'est le critère de convergence de Cauchy. L'exercice suivant utilise cette notion, toujours dans le cadre des séries réelles positives.

3.9. Étude de convergence

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. Étudier la nature de la série $\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Pour avoir une idée du résultat, on commence par regarder un ou deux exemples. On a $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pour avoir convergence il est donc nécessaire que $a_n \sim a_{n+1}$, c'est-à-dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas trop vite vers 0. Si on prend par exemple $a_n = \frac{1}{n}$, on obtient $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ qui conduit à une série divergente. On obtient un résultat identique avec d'autres exemples. On va donc essayer de montrer qu'il y a toujours divergence, et pour cela nous allons minorer une tranche de Cauchy de la série. Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$ et $p \geqslant 0$. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{N}+p} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \geqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{N}+p} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_\mathrm{N}} = \frac{a_\mathrm{N} - a_{\mathrm{N}+p+1}}{a_\mathrm{N}}$$
$$\geqslant 1 - \frac{a_{\mathrm{N}+p+1}}{a_\mathrm{N}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1.$$

Donc pour p assez grand, la somme $\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{N}+p} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ est supérieure à $\frac{1}{2}$; ainsi, le critère de Cauchy n'est pas vérifié et la série $\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge. ◁

Le lecteur aura remarqué que cet exercice est une autre formulation d'une partie de l'exercice 3.5. En effet, si on pose $u_n = a_n - a_{n+1}$ *la série* $\sum u_n$ *converge et son reste* R_n *d'ordre* n *est égal à* a_n *de sorte que* $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = \frac{u_n}{\mathrm{R}_n}$.

Le résultat de l'exercice suivant est classique et important.

3.10. Condition nécessaire de convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

L'idée consiste à majorer la quantité nu_n par une tranche de Cauchy contenant n termes consécutifs en utilisant la décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La majoration directe $nu_n \leqslant u_1 + \cdots + u_n$ est toutefois trop grossière pour conclure. On va commencer par la suite extraite $(2nu_{2n})$ afin d'avoir une tranche de Cauchy qui tend vers 0. On a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$2nu_{2n} \leqslant 2(u_{2n} + u_{2n-1} + \cdots + u_{n+1}) = 2(\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n),$$

avec $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Puisque la série $\sum u_n$ converge, la suite $\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n$ tend vers 0. Il s'ensuit que $2nu_{2n}$ converge vers 0. D'autre part, on peut écrire

$$0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} = 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$ et par conséquent la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. ◁

L'hypothèse de décroissance est bien entendu essentielle : $\sum u_n$ peut converger sans que u_n soit négligeable devant $\frac{1}{n}$. Par exemple, il suffit de poser $u_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 10 et 0 sinon. Par ailleurs, il est bien connu que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions de l'énoncé, l'hypothèse $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ n'est pas une condition suffisante pour avoir convergence de la série $\sum u_n$: on peut considérer par exemple $u_n = \frac{1}{n\ln n}$ pour $n \geqslant 2$.

Dans l'étude de la nature d'une série $\sum u_n$, on peut être amené à regrouper des termes afin de constituer une nouvelle série. On se donne une suite $(k_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ avec $k_0 = 0$, et on considère $p_n = \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} u_k$ pour $n \geqslant 0$ (ce sont les «paquets»). Les sommes partielles de la série $\sum p_n$ forment une suite extraite de la suite des sommes partielles de $\sum u_n$. Donc si la série $\sum u_n$ converge il en est de même de la série $\sum p_n$ et les deux séries ont la même somme. Bien entendu, la réciproque n'est pas toujours vraie. C'est toutefois le cas lorsque $\sum u_n$ est une série à termes positifs, car dans ce cas la suite des sommes partielles est croissante (on peut aussi voir cela comme un cas particulier du théorème d'associativité des familles sommables.) Dans le cas où la série n'est pas à termes positifs, on peut donner diverses conditions supplémentaires qui permettent d'avoir la réciproque. Nous invitons le lecteur à se reporter à l'exercice 3.34 où il trouvera un exemple très intéressant de sommation par paquets.

Les exercices qui suivent sont des applications dans le cadre de séries positives.

3.11. Entiers qui s'écrivent sans le chiffre 9

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ième entier naturel non nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Les entiers naturels (0 compris) inférieurs strictement à 10^n s'écrivent avec n chiffres en notation décimale. Ceux qui ne comportent pas de 9 s'écrivent donc avec n chiffres parmi les entiers de 0 à 8. On a 9^n possibilités pour les choix des n chiffres. Il y a donc 9^n entiers naturels (0 compris) strictement inférieur à 10^n sans 9 dans leur écriture décimale. Le nombre 10^n qui s'écrit avec 1 suivi de n zéros est donc le 9^n-ième entier naturel non nul s'écrivant sans 9 : $p_{9^n} = 10^n$.

La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour $n \geqslant 0$, on a la majoration suivante :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=9^n}^{9^{n+1}-1} \frac{1}{p_k} \leqslant \sum_{k=9^n}^{9^{n+1}-1} \frac{1}{p_{9^n}} = \sum_{k=9^n}^{9^{n+1}-1} \frac{1}{10^n} \leqslant \frac{9^{n+1}}{10^n} = 9\left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Comme la série géométrique $\sum 9\left(\frac{9}{10}\right)^n$ converge, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence de la série $\sum \mathrm{S}_n$. Le théorème de sommation par paquets permet de conclure à la convergence de la série à termes positifs $\sum \frac{1}{p_n}$. ◁

Le résultat de l'exercice suivant est une généralisation d'une propriété utilisée par Cauchy.

3.12. Critère de condensation de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante, qui converge vers 0.

1. Soit $p \geqslant 2$ un entier. Établir l'équivalence :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum p^n u_{p^n} \text{ converge.}$$

C'est le critère de condensation de Cauchy.

2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min(u_n, 1/n)$ diverge aussi.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Dans la série $\sum p^n u_{p^n}$, on ne prend que les termes u_k dont l'indice k appartient à la suite géométrique (p^n) mais chaque terme u_{p^n} est affecté d'un poids de p^n (ce qui est l'ordre de grandeur de $p^{n+1} - p^n$). La monotonie de la suite va permettre de montrer que les deux séries sont de même nature. On va procéder en regroupant les termes u_k pour k compris entre p^n et p^{n+1}.

Pour $p^n \leqslant k < p^{n+1}$, on pose $v_k = u_{p^{n+1}}$ et $w_k = u_{p^n}$. On a alors l'inégalité $v_k \leqslant u_k \leqslant w_k$ et donc,

$$(p^{n+1} - p^n)u_{p^{n+1}} = \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} v_k \leqslant \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leqslant \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} w_k = (p^{n+1} - p^n)u_{p^n},$$

ou encore

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{n+1} u_{p^{n+1}} \leqslant \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leqslant (p-1)p^n u_{p^n}.$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $p^n u_{p^n}$ converge si, et seulement si, celle de terme général $\sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k$ converge. Le théorème de sommation par paquets assure alors que les séries à termes positifs $\sum p^n u_{p^n}$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Dans le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$ *pour* $n \geqslant 1$ *et* $p = 2$, *on a* $2^n u_{2^n} = 1$ *ce qui n'est pas le terme général d'une série convergente : c'est ainsi que Cauchy prouva la divergence de la série harmonique* $\sum \dfrac{1}{n}$. *On peut également prouver la convergence des séries de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *lorsque* $\alpha > 1$. *En effet, toujours en prenant* $p = 2$, *on a* $2^n \dfrac{1}{(2^n)^\alpha} = \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ *qui est bien le terme général d'une série convergente (puisque* $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$*). Remarquons enfin que le critère de condensation donne une solution immédiate de l'exercice 3.11 en prenant* $p = 9$ *puisque* $p_{9^n} = 10^n$.

2. Posons $v_n = \min(u_n, 1/n)$. On observe qu'il s'agit d'une suite décroissante de limite nulle. On peut donc utiliser le résultat de la question précédente. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sum v_n$

converge. En prenant $p = 2$ dans le critère de condensation, la série $\sum 2^n v_{2^n}$ converge. Or, pour $n \geqslant 0$, on peut écrire

$$2^n v_{2^n} = 2^n \min\left(u_{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) = \min(2^n u_{2^n}, 1)$$

Comme le terme général d'une série convergente tend vers 0, on doit avoir $2^n u_{2^n} \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, soit $\min(2^n u_{2^n}, 1) = 2^n u_{2^n}$. Par conséquent, $\sum 2^n u_{2^n}$ converge. Le critère de condensation appliqué à la série $\sum u_n$ assure alors la convergence de $\sum u_n$ ce qui est contraire à l'hypothèse. $\lhd$

3.13. Séries définies à l'aide d'une permutation de $\mathbb{N}^*$

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

2. Même question avec $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$.

3. Même question avec $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. En prenant le cas particulier où σ est l'identité, on obtient la série harmonique qui est divergente. On va montrer qu'il y a toujours divergence. Pour montrer cela, nous allons minorer une tranche de Cauchy. Soit $N \geqslant 1$. Si on considère $2N$ entiers naturels non nuls deux à deux distincts, N d'entre eux nécessairement sont supérieurs ou égaux à N. C'est le cas notamment pour la famille des $\sigma(n)$ lorsque n décrit les entiers compris entre $N + 1$ et $3N$. Par conséquent, on peut minorer la tranche de Cauchy entre $N + 1$ et $3N$ par :

$$\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geqslant \sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\sigma(n)}{(3N)^2} \geqslant N \cdot \frac{N}{9N^2} = \frac{1}{9}.$$

Le critère de Cauchy n'étant pas vérifié, la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

2. Il est également légitime de penser que cette seconde série est toujours divergente puisque si σ est l'identité, on obtient la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln n}$ qui diverge. Comme la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$ est à termes positifs, elle est de même nature que la série de terme général $a_N = \sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$, d'après le théorème de sommations par paquets. Les

$\sigma(n)$, pour n compris entre $2^{\mathrm{N}}+1$ et $2^{\mathrm{N}+1}$, constituent un ensemble de 2^{N} entiers naturels non nuls distincts deux à deux. Aussi $2^{\mathrm{N}-1}$ d'entre eux, au moins, sont supérieurs où égaux à $2^{\mathrm{N}-1}$. On minore a_{N} en ne considérant que ces derniers (les autres étant positifs),

$$a_{\mathrm{N}}=\sum_{n=2^{\mathrm{N}}+1}^{2^{\mathrm{N}+1}}\frac{\sigma(n)}{n^2\ln n}\geqslant\sum_{n=2^{\mathrm{N}}+1}^{2^{\mathrm{N}+1}}\frac{\sigma(n)}{\left(2^{\mathrm{N}+1}\right)^2\ln 2^{\mathrm{N}+1}}\geqslant 2^{\mathrm{N}-1}\frac{2^{\mathrm{N}-1}}{2^{2\mathrm{N}+2}(\mathrm{N}+1)\ln 2}$$

et finalement, $a_{\mathrm{N}}\geqslant\dfrac{1}{16(\mathrm{N}+1)\ln 2}$ qui est le terme général d'une série divergente. Aussi, la série $\sum a_{\mathrm{N}}$ diverge et $\sum\dfrac{\sigma(n)}{n^2\ln n}$ de même.

3. La troisième série peut en revanche converger, ce qui est le cas si par exemple σ est l'identité. Mais ce n'est pas général, car pour d'autres permutations on peut avoir une série divergente. Il suffit par exemple de trouver une permutation σ telle que $\sigma(n)=n^3$ pour une infinité de n. Cherchons à expliciter un tel exemple. Posons $\mathrm{A}=\{(2k)^3,\ k\in\mathbb{N}^*\}$ et $\mathrm{B}=\mathbb{N}^*\setminus\mathrm{A}$. Les deux ensembles A et B sont infinis. On notera $\alpha_1<\alpha_2<\cdots$ la suite croissante des éléments de B. On considère σ la permutation de $\mathbb{N}^*$ définie par $\sigma(2k)=(2k)^3$ pour tout k et $\sigma(2k+1)=\alpha_{k+1}$ pour tout $k\geqslant 0$. La suite $\dfrac{\sigma(n)}{n^3}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum\dfrac{\sigma(n)}{n^3}$ diverge.

On aurait pu aussi prendre pour σ la permutation qui échange p et p^3 pour tout nombre premier p et qui laisse fixes les entiers autres que les nombres premiers et leurs cubes. $\triangleleft$

Le lecteur constatera aisément que l'argument utilisé en 3 se généralise et donc, pour tout exposant m, il existe des permutations σ qui rendent la série $\sum\dfrac{\sigma(n)}{n^m}$ divergente. On peut donner une autre solution de la question 1 en utilisant l'inégalité du réordonnement établie dans l'exercice 1.15 du chapitre 1. En effet, soit N un entier fixé. Notons $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{\mathrm{N}}$ les entiers de l'ensemble $\{\sigma(1),\ldots,\sigma(\mathrm{N})\}$ rangés dans l'ordre croissant. L'inégalité du réordonnement assure que

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{\sigma(k)}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{\alpha_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k},$$

car on a clairement $\alpha_k\geqslant k$ pour tout k. On conclut en invoquant la divergence de la série harmonique.

Lorsque les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et équivalentes au voisinage de $+\infty$, on peut «sommer» les équivalents dans les deux cas suivants :

• *si $\sum u_n$ converge, les restes sont équivalents :* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$;

• *si $\sum u_n$ diverge, ce sont les sommes partielles qui sont équivalentes :* $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

En considérant la différence $u_n - v_n = o(u_n)$, on a l'énoncé suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $w_n = o(u_n)$, alors le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$ est négligeable devant $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ dans le cas où $\sum u_n$ converge. Si cette série diverge, c'est la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} w_k$ qui est négligeable devant $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Le théorème de Cesàro pour les suites réelles n'est qu'un cas particulier de ce résultat.

3.14. Recherche d'un équivalent (1)

> On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$. Déterminer un équivalent de a_n.
>
> (**École polytechnique**)

Solution.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^2$. Si la série de terme général a_n^2 converge, S_n tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. On ne peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$. Comme la série de terme général $a_n^2 \geqslant 0$ ne converge pas, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Comme pour tout $n \geqslant 0$, $a_n^2 = S_n - S_{n-1}$, l'hypothèse s'écrit

$$S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{S_n^2} \quad (S_n > 0 \text{ pour } n \text{ assez grand}).$$

On constate alors que

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{S_n^2}(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= \left(1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3, \end{aligned}$$

car $S_{n-1} \sim S_n$ lorsque n tend vers l'infini. En effet, on a

$$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{S_n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{puisque} \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Le théorème de Cesàro conduit à

$$S_n^3 = \sum_{k=1}^{n} (S_k^3 - S_{k-1}^3) \underset{n\to\infty}{\sim} 3n.$$

D'où l'on déduit $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} (3n)^{1/3}$ et finalement

$$\boxed{a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(3n)^{1/3}}.} \quad \triangleleft$$

3.15. Recherche d'un équivalent (2)

Soit (x_n) une suite réelle définie par $x_1 = a > 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{S_n}$ où $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Déterminer un équivalent de x_n.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

La suite (x_n) est strictement croissante. Supposons qu'elle converge et notons α sa limite. Le théorème de Cesàro permet d'affirmer que $S_n \sim n\alpha$. Mais alors $x_{n+1} - x_n \sim \dfrac{1}{n\alpha}$ et la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ diverge, ce qui contredit la convergence de (x_n). Donc la suite (x_n) tend vers $+\infty$ et il en est de même de la suite (S_n).

On a $x_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} x_n$ et donc $x_{n+1}^2 - x_n^2 = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{S_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2x_n}{S_n}$. Prenons l'inverse qui se manipule mieux. En effet, on observe qu'on a

$$\frac{S_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{S_n + x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{S_n}{x_{n+1}} + 1$$

et donc

$$\frac{S_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{S_n}{x_n} = 1 + \frac{S_n(x_n - x_{n+1})}{x_n x_{n+1}} = 1 - \frac{1}{x_n x_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Le théorème de Cesàro implique $\dfrac{S_n}{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et donc $x_{n+1}^2 - x_n^2 \sim \dfrac{2}{n}$. La somme partielle de la série harmonique étant équivalente à $\ln n$, une application du théorème de sommation des équivalents conduit au résultat

$$\boxed{x_n \sim \sqrt{2 \ln n}}. \ \triangleleft$$

L'énoncé suivant porte sur le même thème mais il est plus théorique.

3.16. Sommation d'équivalents

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose que $\dfrac{\mathrm{S}_n}{nu_n}$ tend vers $\alpha > 0$. Étudier la convergence et la limite de $\dfrac{1}{n^2 u_n} \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $\mathrm{T}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ pour $n \geqslant 0$. On suppose que $\dfrac{\mathrm{S}_n}{nu_n}$ (resp. $\dfrac{\mathrm{T}_n}{nv_n}$) tend vers une limite $\alpha > 0$ (resp. $\beta > 0$). Étudier la convergence et la limite de $\dfrac{1}{n^2 u_n v_n} \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k v_k$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Notons que $\sum u_n$ diverge. Dans le cas contraire, on aurait, en notant S la somme de la série, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{S}}{\alpha n}$, ce qui est contradictoire avec la convergence de $\sum u_n$, car la série harmonique diverge. La suite (S_n) tend donc vers l'infini. Puisque $\sum \mathrm{S}_n$ diverge, que $\alpha n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{S}_n$ et que les séries en présence sont à termes positifs, le théorème de sommation des relations de comparaison permet d'affirmer que $\alpha \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k$. On remarque alors que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} u_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} u_i \ \text{ (par interversion de sommations.)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i) u_i = (n+1)\mathrm{S}_n - \sum_{i=0}^{n} i u_i.
\end{aligned}$$

Compte tenu de la relation précédente, on obtient

$$\frac{(n+1)S_n}{\sum\limits_{k=0}^{n} ku_k} = 1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} ku_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + 1,$$

et donc $\sum\limits_{k=0}^{n} ku_k \sim \dfrac{(n+1)S_n}{\alpha+1} \sim \dfrac{nS_n}{\alpha+1} \sim \dfrac{\alpha n^2 u_n}{\alpha+1}$ pour n tendant vers $+\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=0}^{n} ku_k = \frac{\alpha}{\alpha+1}.}$$

2. Cette seconde question est une généralisation de la précédente que l'on retrouve en prenant $v_n = 1$. On va utiliser la même méthode que précédemment. On a $\alpha n u_n v_n \underset{n\to\infty}{\sim} S_n v_n$, par hypothèse. La série $\sum v_n$ diverge ; la suite (S_n) tendant vers $+\infty$, il en est de même, *a fortiori*, de la série $\sum S_n v_n$. Le théorème de sommation entraîne $\alpha \sum\limits_{k=0}^{n} ku_k v_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k v_k$. De la même manière, on obtient $\beta \sum\limits_{k=0}^{n} ku_k v_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} T_k u_k$. On a donc

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k v_k + \sum\limits_{k=0}^{n} T_k u_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} ku_k v_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + \beta$$

et

$$(\alpha+\beta) \sum_{k=0}^{n} ku_k v_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} S_k v_k + \sum_{k=0}^{n} T_k u_k.$$

On observe alors que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_k v_k + \sum_{k=0}^{n} T_k u_k &= \sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n} u_l v_k + \sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n} v_l u_k \\
&= \Big(\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l \Big) + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n, \\
&= S_n T_n + \sum_{k=0}^{n} u_k v_k.
\end{aligned}$$

La série $\sum ku_k v_k$ étant divergente, et pour n tendant vers l'infini, $u_n v_n$ étant négligeable devant $nu_n v_n$, le théorème de sommation des équivalents entraîne que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$ est négligeable devant $\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k v_k$. Sachant que $(\alpha+\beta)\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k v_k \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{S}_n \mathrm{T}_n + \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$, on en déduit que

$$(\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n} k u_k v_k \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{S}_n \mathrm{T}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha\beta n^2 u_n v_n,$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 u_n v_n} \sum_{k=0}^{n} k u_k v_k = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.} \quad \triangleleft$$

La comparaison série-intégrale est un outil essentiel d'étude des séries à termes positifs pour leur convergence, l'estimation des restes, le comportement asymptotique des sommes partielles... Les exercices suivants en sont une illustration.

3.17. Estimation d'une somme partielle

Déterminer la partie entière de $\sum\limits_{n=1}^{10^9} \dfrac{1}{n^{2/3}}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2/3}}$ est positive, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \geqslant 2$, on a donc l'encadrement

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}} < \frac{1}{n^{2/3}} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}}.$$

En sommant de 2 à 10^9, on obtient

$$\int_2^{10^9+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}} < \sum_{n=2}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} < \int_1^{10^9} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}}.$$

On se contente d'encadrer la somme à partir de $n=2$ car le premier terme est entier égal à 1. Après calcul de l'intégrale, on obtient

$$3(\sqrt[3]{10^9+1} - \sqrt[3]{2}) < \sum_{n=2}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} < 3(\sqrt[3]{10^9} - 1) = 2997.$$

On constate que le minorant $3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})$ est plus grand que $3(\sqrt[3]{10^9}-\sqrt[3]{2})=3(1000-\sqrt[3]{2})\geqslant 2996$. En rajoutant le premier terme, on a

$$2997<\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{n^{2/3}}<2998,$$

et la partie entière cherchée est 2997. ◁

On peut noter que le calcul d'une valeur approchée de cette somme dépasse les capacités de Maple.

La divergence de la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ *est connue au moins depuis Johann Bernoulli. On peut résumer ainsi son argumentation : si on suppose que cette série converge, on peut écrire*[3]

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}&=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{(n-1)n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n(n+1)}\\
&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)}\\
&=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\quad\textit{(par interversion des sommations)}\\
&=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{=1/k}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=1+\mathrm{S},
\end{aligned}$$

ce qui est manifestement absurde.

L'exercice suivant propose d'établir un développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique et présente à cette occasion la constante d'Euler.

3.18. Développement asymptotique de la série harmonique

On pose $\mathrm{H}_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ pour $n\geqslant 1$.

1. Soit $u_n=\mathrm{H}_n-\ln n$ et $v_n=u_n-\frac{1}{n}$. Démontrer que ces suites sont adjacentes et convergent vers une constante réelle strictement positive γ.

2. Déterminer un développement asymptotique de H_n comprenant quatre termes.

3. Avec le formalisme moderne.

3. On pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N},\ \mathrm{H}_k \geqslant n\}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}$.

(École polytechnique)

Solution.

1. La différence $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ est positive et converge vers 0. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puisque

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0,$$

en vertu de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$. D'autre part, cette même inégalité assure la croissance de $(v_n)_{n\geqslant 1}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0.$$

Les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc adjacentes, et elles convergent vers un réel γ. Comme $v_2 = 1 - \ln 2 > 0$, on a $\gamma > 0$.

La limite γ est la constante d'Euler dont 0,577215 est une valeur approchée par défaut. On sait peu de choses de γ et, notamment, on ignore encore si γ est rationnel ou non.

2. On a prouvé que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ pour n tendant vers $+\infty$.

• Posons $t_n = u_n - \gamma$ $(n \geqslant 1)$. On emploie une méthode classique qui consiste, pour obtenir un équivalent de t_n, à chercher un équivalent de $t_n - t_{n-1}$, puis à «sommer» l'équivalent obtenu. On a pour n tendant vers l'infini,

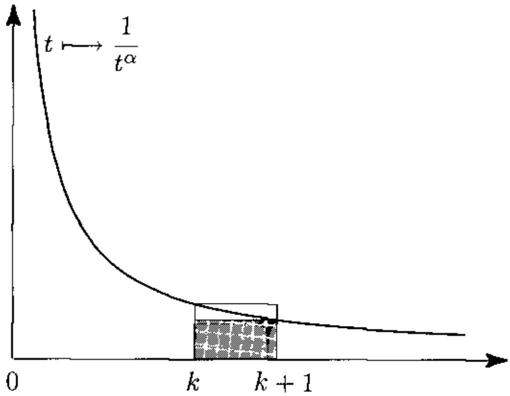
$$t_n - t_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum(t_k - t_{k-1})$ converge. Le théorème de sommation des équivalents nous donne

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n},$$

l'équivalent du reste de la série de Riemann s'obtenant à l'aide d'une simple comparaison série-intégrale : si $\alpha > 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$, si bien que pour $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$



En sommant cela entre $n+1$ et N, puis en faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Comme les membres de gauche et de droite sont tous deux équivalents à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, le théorème d'encadrement assure que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Le cas $\alpha = 2$ donne l'équivalent annoncé. On a donc déjà

$$\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

• On pose $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geqslant 1$, suite qui converge vers 0. La somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1})$ vaut $-w_n$ et son terme général s'écrit

$$w_n - w_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}.$$

Pour n tendant vers l'infini, on a

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.
\end{aligned}$$

Le théorème de sommation des équivalents donne

$$-w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi, on obtient le développement asymptotique

$$\boxed{\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

3. Pour estimer k_n on va utiliser le début du développement asymptotique de H_n. On sait que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où (ε_n) tend vers 0. Par définition de k_n, on a

$$\ln k_n + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geqslant n$$

et

$$\ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n.$$

Il en résulte, en passant à l'exponentielle, que

$$e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n - 1}} + 1 > k_n \geqslant e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n}}.$$

On a donc $k_n \sim e^n e^{-\gamma}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e}$. ◁

Les sommes de séries que l'on peut calculer explicitement sont assez rares. C'est le cas dans les deux exercices qui suivent. On va y retrouver la série harmonique.

3.19. Calcul de la somme d'une série (1)

Établir la convergence et calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right).$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons tout d'abord qu'en vertu du théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série converge : en réduisant au même dénominateur on voit que le terme général est

$$\frac{-16n^2 - 12n + 1}{4(n+1)(2n+1)(4n+1)(4n+3)} \sim -\frac{1}{8n^2}.$$

Pour calculer la somme on utilise le développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (voir l'exercice 3.18). Il vient :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4} \right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{4k+2} \\
&= H_{4n+4} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{4n+4} - 2\Big(H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n \Big) \\
&= \ln(4n+4) + \ln n + 2\gamma - 2(\ln(2n+1) + \gamma) + o(1).
\end{aligned}$$

On a donc $S_n = \ln \dfrac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} + o(1)$ ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent la somme de la série est nulle. ◁

L'exemple suivant est nettement plus ardu.

3.20. Calcul de la somme d'une série (2)

Établir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{p=2^{n-1}}^{2^n - 1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• Pour $n \geqslant 1$, notons $u_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}$. Le terme général de la série étudiée s'écrit $n(u_{2^n} - u_{2^{n-1}})$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, majorons grossièrement le terme général pour vérifier rapidement la convergence. Comme $\frac{1}{p^3} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{dt}{t^3}$ par décroissance de $t \longmapsto \frac{1}{t^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut majorer ainsi $u_{2^n} - u_{2^{n-1}}$:

$$u_{2^n} - u_{2^{n-1}} \leqslant \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{p^3} \leqslant \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \int_{p-1}^{p} \frac{dt}{t^3} \leqslant \int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} \frac{dt}{t^3} \leqslant \int_{2^{n-2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^3},$$

et on obtient

$$n(u_{2^n} - u_{2^{n-1}}) \leqslant \frac{n}{2.(2^{n-2})^2} = \frac{n}{2^{2n-3}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série étudiée converge.

• On va commencer par chercher une expression plus simple de u_n en décomposant en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{X(2X+1)(2X+2)}$ sur $\mathbb{C}$. On obtient $\dfrac{1}{2X} + \dfrac{1}{2X+2} - \dfrac{2}{2X+1}$. Pour $n \geqslant 1$, on a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2(p+1)} - \frac{2}{2p+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} - 2\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} - 2\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} - 2\left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} - 1\right) \\ &= 2\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} - 2\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} + 2 = -2\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2n} + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

ce qui donne $u_{2^n} = -2\displaystyle\sum_{p=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3}{2}$ pour tout $n \geqslant 0$.

• Si on note pour $N \geqslant 1$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n(u_{2^n} - u_{2^{n-1}})$ la somme partielle de la série à étudier, on a

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=1}^{N} n(u_{2^n} - u_{2^{n-1}}) &= \sum_{n=1}^{N} n u_{2^n} - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) u_{2^n} \\ &= N u_{2^N} - \sum_{n=0}^{N-1} u_{2^n}. \end{aligned}$$

Nous allons déterminer la limite de (S_N) en cherchant un développement asymptotique de chacun des termes ci-dessus jusqu'à un terme constant. Commençons par la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} u_{2^n}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} u_{2^n} &= -2\sum_{p=1}^{2^N-1}\frac{1}{p}+\sum_{p=0}^{N-1}\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{3}{2}N\\ &= -2H_{2^N-1}+\frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^N}{1-(1/2)}+\frac{3}{2}N\\ &= -2H_{2^N-1}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^N+\frac{3}{2}N,\end{aligned}$$

où $H_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$ désigne la somme partielle de la série harmonique.

Comme pour n tendant vers l'infini, $H_n = \ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$ où γ désigne la constante d'Euler, on obtient le développement asymptotique pour N tendant vers l'infini :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} u_{2^n} &= -2\ln(2^N-1)-2\gamma+O\left(\frac{1}{2^N-1}\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^N+\frac{3}{2}N\\ &= -2\ln 2^N-2\ln(1-2^{-N})-2\gamma+o(1)+1+\frac{3}{2}N\\ &= -(2\ln 2)N+\frac{3}{2}N-2\gamma+1+o(1).\end{aligned}$$

Il reste à regarder le terme Nu_{2^N}. Pour N tendant vers l'infini, on a

$$\begin{aligned}u_{2^N} &= -2H_{2^{N+1}-1}+2H_{2^N-1}+\frac{1}{2^{N+1}}+\frac{3}{2}\\ &= -2\ln(2^{N+1}-1)+2\ln(2^N-1)-2\gamma+2\gamma+O\left(\frac{1}{2^{N+1}-1}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2^{N+1}}+\frac{3}{2}+O\left(\frac{1}{2^{N+1}-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Nu_{2^N} &= -2N(\ln 2^{N+1}-\ln 2^N)-2N(\ln(1-2^{-N-1})-\ln(1-2^N))\\ &\quad+O\left(\frac{N}{2^N}\right)+\frac{3}{2}N\\ &= -2N\ln 2-N\,O\left(\frac{1}{2^N}\right)+O\left(\frac{N}{2^N}\right)+\frac{3}{2}N\\ &= -(2\ln 2)\ln N+\frac{3}{2}N+o(1).\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour N tendant vers l'infini,

$$\begin{aligned}S_N &= -(2\ln 2)N+\frac{3}{2}N+o(1)+(2\ln 2)N-\frac{3}{2}N+2\gamma-1+o(1)\\ &= 2\gamma-1+o(1)\xrightarrow[N\to\infty]{}2\gamma-1.\end{aligned}$$

Conclusion. La série étudiée converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{p=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)} = 2\gamma - 1.} \lhd$$

L'énoncé suivant se ramène à la recherche d'un développement asymptotique assez précis de la somme partielle d'une série grossièrement divergente.

3.21. Recherche d'un équivalent

Trouver un équivalent de $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k^k}$ lorsque n tend vers l'infini.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = \ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \ln k$. On va chercher un développement asymptotique de la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} k\ln k$. La fonction $t \longmapsto t\ln t$ est croissante sur $[1, +\infty[$, ce qui invite à utiliser une comparaison série-intégrale. On a

$$\int_1^n t\ln t \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\ln k \leqslant \int_1^{n+1} t\ln t \mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une intégration par parties, il vient

$$\int_1^n x\ln x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^n - \int_1^n \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{n^2\ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Cette expression prise au rang $n+1$, tout comme celle du rang n, est équivalente à $\frac{n^2 \ln n}{2}$, de sorte que l'inégalité ci-dessus permet d'affirmer que

$$v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_1^n x\ln x \mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n\ln n}{2},$$

ce qui s'écrit $v_n = \frac{n\ln n}{2} + o(n\ln n)$. Malheureusement, la limite du $o(n\ln n)$ n'est pas forcément nulle, et après le passage à l'exponentielle, cela ne permet pas d'obtenir un équivalent de u_n. Il faut pousser plus loin le développement asymptotique de $\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln k$. Posons

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} k\ln k - \int_1^n t\ln t\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(k\ln k - x\ln x)\mathrm{d}x.$$

La dérivée de la fonction $x \longmapsto x\ln x$ étant $x \longmapsto 1+\ln x$ qui est croissante, le théorème des accroissements finis assure que pour $x \in [k-1,k]$ $(k \geqslant 2)$, on a

$$(1+\ln(k-1))(k-x) \leqslant k\ln k - x\ln x \leqslant (1+\ln k)(k-x),$$

ce qui donne en intégrant entre $k-1$ et k.

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln(k-1)}{2} \leqslant \int_{k-1}^{k}(k\ln k - x\ln x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\ln k}{2}\cdot$$

En sommant, on obtient un encadrement de w_n,

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1) \leqslant w_n \leqslant \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\ln k.$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\ln n! - \frac{\ln n}{2} + O(1) \leqslant w_n \leqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\ln n! + O(1).$$

On a, d'après la formule de Stirling,

$$\ln n! = \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))\right) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + O(1).$$

En reportant dans l'encadrement de w_n, il vient

$$\frac{n\ln n}{2} + O(\ln n) \leqslant w_n \leqslant \frac{n\ln n}{2} + O(\ln n)$$

si bien que $w_n = \dfrac{n\ln n}{2} + O(\ln n)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln k = \frac{n^2\ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{n\ln n}{2} + O(\ln n),$$

soit en divisant par n,

$$v_n = \frac{n\ln n}{2} - \frac{n}{4} + \frac{\ln n}{2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

ou plus simplement $v_n = \frac{n\ln n}{2} - \frac{n}{4} + \frac{\ln n}{2} + o(1)$. En passant à l'exponentielle, il vient

$$u_n = \exp\left(\frac{n+1}{2}\ln n - \frac{n}{4} + o(1)\right) = (\sqrt{n})^{n+1}e^{-\frac{n}{4}}e^{o(1)}$$

et donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (\sqrt{n})^{n+1}e^{-\frac{n}{4}}.} \quad \triangleleft$$

Une autre approche consiste à faire apparaître à partir de v_n une somme de Riemann relative à la fonction $x \longmapsto x\ln x$ sur $[0,1]$ prolongée par continuité en 0. On écrit

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln n = n\mathrm{S}_n + \frac{n+1}{2}\ln n$$

où $\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}$ est la somme de Riemann en question. Comme la fonction $x \longmapsto x\ln x$ est continue sur $[0,1]$, on sait que S_n converge vers $\int_0^1 t\ln t\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$. Cela ne suffit pas pour conclure car on obtient un développement asymptotique de v_n en $o(n)$. Il faut estimer la différence entre la somme de Riemann et l'intégrale. C'est un exercice assez classique, lorsque la fonction intégrée f est de classe C^1, de montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f = \frac{1}{n}\int_0^1 f' + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On ne peut invoquer ce résultat directement car $x \longmapsto x\ln x$ n'est pas dérivable en 0. Cela dit sa dérivée sur $]0,1]$ est $x \longmapsto 1+\ln x$ et il s'agit d'une fonction intégrable et monotone sur $]0,1]$. On peut prouver que sous ces hypothèses le développement précédent demeure valable. On en déduit que $\mathrm{S}_n = -\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui permet de retrouver l'équivalent de u_n.

Voici maintenant plusieurs exercices en liaison avec l'arithmétique. Si (u_n) est une suite strictement croissante d'entiers $\geqslant 1$, on conçoit que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge si on prend peu d'entiers (par exemple $u_n = 2^n$, $u_n = n^2$) et diverge si on en prend trop (par exemple $u_n = 2n$). L'exercice qui suit montre qu'il y a suffisamment de nombres premiers pour qu'avec cette suite on soit dans le cas de la divergence.

3.22. Série des inverses des entiers premiers

Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Rappelons que l'ensemble des nombres premiers est infini, ce qui justifie l'existence de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$. Cette suite d'entiers diverge vers l'infini. Supposons par l'absurde que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Il en est alors de même de la série $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ puisque les termes généraux de ces deux séries sont positifs et équivalents. En passant à l'exponentielle, on en déduit que $u_{\mathrm{N}} = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-p_n^{-1}}$ converge. Or, comme pour tout $\mathrm{M} \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1-p_n^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} \geqslant 1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^{\mathrm{M}}},$$

on obtient

$$u_{\mathrm{N}} = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} \geqslant \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^{\mathrm{M}}}\right).$$

Il nous suffit de choisir M assez grand pour obtenir dans ce produit les inverses de tous les entiers compris entre 1 et p_{N} (ces entiers ont tous leurs facteurs premiers parmi $p_1, \ldots, p_{\mathrm{N}}$). On a donc

$$u_{\mathrm{N}} \geqslant \sum_{i=1}^{p_{\mathrm{N}}} \frac{1}{i}$$

ce qui est absurde puisque le terme de droite tend vers l'infini (la série harmonique diverge et p_{N} tend vers l'infini). ◁

Le célèbre théorème des nombres premiers affirme que $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$ *où* $\pi(n)$ *est le nombre d'entiers premiers inférieurs à* n. *On peut en déduire un équivalent de* p_n. *En effet, comme* $\pi(p_n) = n$ *on a* $\frac{p_n}{\ln p_n} \sim n$, *ou encore* $\frac{p_n}{\ln p_n} = n + o(n)$. *On prend le logarithme de cette égalité. Il vient* $\ln p_n - \ln\ln p_n = \ln n + \ln(1+o(1)) = \ln n + o(1)$. *Cela prouve que* $\ln p_n \sim \ln n$, *puis que* $p_n \sim n \ln n$, *équivalent qui éclaire la divergence de la série* $\sum \frac{1}{p_n}$.

3.23. Série définie à partir de ppcm

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. On pose $a_n = \operatorname{ppcm}(u_0, u_1, \ldots, u_n)$. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

(École polytechnique)

Solution.

La suite (a_n) est croissante et diverge vers $+\infty$. Notons $(n_k)_{k\geqslant 0}$ la suite strictement croissante telle que $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$ et (a_i) constante sur l'intervalle $[\![n_k, n_{k+1}-1]\!]$: les indices n_k donnent les premiers termes des segments sur lesquels la suite (a_n) reste constante. En regroupant les termes égaux, la série positive $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{a_n}$ est de même nature que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{n_{k+1}-n_k}{a_{n_k}}$. On va majorer le numérateur et minorer le dénominateur de ce terme général.

Le fait que $a_i = a_{n_k}$ pour $i \in [\![n_k, n_{k+1}-1]\!]$ implique que u_i divise a_{n_k} (puisque le ppcm reste le même). Comme les termes de la suite (u_n) sont deux à deux distincts, il y a au plus $d(a_{n_k})$ indices i dans $[\![n_k, n_{k+1}-1]\!]$ (où $d(m)$ désigne le nombre de diviseurs de l'entier m). Autrement dit on a la majoration $n_{k+1}-n_k \leqslant d(a_{n_k})$. De plus, il est clair que pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a la majoration $d(m) \leqslant 2\sqrt{m}$. On a donc $n_{k+1}-n_k \leqslant d(a_{n_k}) \leqslant 2\sqrt{a_{n_k}}$ et par conséquent

$$\frac{n_{k+1}-n_k}{a_{n_k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{a_{n_k}}}.$$

Il reste à minorer a_{n_k}. Mais comme a_{n_k} est un diviseur strict de $a_{n_{k+1}}$ on a $a_{n_{k+1}} \geqslant 2a_{n_k}$. En itérant cela, on a $a_{n_k} \geqslant 2^k a_{n_0}$ pour tout k. Il en découle que

$$\frac{n_{k+1}-n_k}{a_{n_k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{a_{n_k}}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^k}\right)$$

ce qui montre la convergence de la série. ◁

3.24. Nature d'une série

Pour $n \geqslant 2$, on note q_n le plus grand diviseur premier de n. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{nq_n}$?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Notons $(p_k)_{k\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Il est assez naturel de regrouper les entiers en fonction de la valeur de q_n. Posons donc $\Omega_k = \{n \in \mathbb{N}^*,\, q_n = p_k\}$. Les ensembles $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ forment une partition de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Les entiers de Ω_k sont ceux de la forme $p_k(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k})$ avec $(\alpha_1,\dots,\alpha_k) \in \mathbb{N}^k$. On en déduit que la famille $\left(\dfrac{1}{nq_n}\right)_{n\in\Omega_k}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\Omega_k} \frac{1}{nq_n} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k} \frac{1}{p_k^2(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k})} = \frac{\mathrm{M}_k}{p_k^2}$$

où, par produit de Cauchy,

$$\mathrm{M}_k = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k} \frac{1}{p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}} = \prod_{i=1}^{k}\sum_{\alpha_i=0}^{+\infty}\frac{1}{p_i^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}.$$

Par associativité pour les familles positives, la série $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{nq_n}$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{M}_k}{p_k^2}$ converge. Montrons que c'est le cas en majorant directement M_k. On passe au logarithme :

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{M}_k &= -\sum_{i\leqslant k}\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = \sum_{i\leqslant k}\ln\left(\frac{p_i}{p_i-1}\right)\\ &= \sum_{i\leqslant k}\ln\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right) \leqslant \sum_{i\leqslant k}\frac{1}{p_i-1}\end{aligned}$$

grâce à la majoration classique $\ln(1+x)\leqslant x$. On a $p_i - 1 \geqslant 2(i-1)$ pour tout $i\geqslant 1$ (car, hormis 2, les nombres premiers sont impairs). On en déduit que $\ln \mathrm{M}_k \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}\dfrac{1}{i-1} = 1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{H}_{k-1} = \mathcal{O}(\ln\sqrt{k})$. On a donc $\mathrm{M}_k = \mathcal{O}(\sqrt{k})$ et finalement $\dfrac{\mathrm{M}_k}{p_k^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{\sqrt{k}}{p_k^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$ et c'est terminé en vertu du théorème de comparaison des séries à termes positifs. ◁

Un théorème de Mertens montre que $\mathrm{M}_k \sim e^{\gamma}\ln p_k$ *et cela explique qu'il soit relativement facile d'obtenir une domination de la forme* $\mathrm{M}_k = \mathcal{O}(p_k^{\alpha})$ *avec* $\alpha > 0$.

La fonction arithmétique de Möbius a sans doute déjà été rencontrée par le lecteur (par exemple dans l'exercice 4.32. du tome 1 d'algèbre). L'exercice suivant établit la formule d'inversion de Möbius et étudie ensuite l'inversion d'un développement asymptotique.

3.25. Inversion de Möbius

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On lui associe la fonction $\hat{f} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{E}(x)} f\left(\frac{x}{k}\right)$ pour $x \geqslant 1$.

1. Montrer que, pour $x \geqslant 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{E}(x)} \mu(n)\hat{f}\left(\frac{x}{n}\right)$, où μ désigne la fonction de Möbius : $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers deux à deux distincts et $\mu(n) = 0$ sinon.

2. On suppose que, pour x tendant vers l'infini,

$$\hat{f}(x) = \mathrm{A}x(\ln x)^2 + \mathrm{B}x \ln x + \mathrm{C}x + O(x^{\beta})$$

où $\beta \in]0, 1[$ et A, B, C sont des constantes. Montrer que

$$f(x) = 2\mathrm{A}x \ln x + O(x).$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On convient que k désigne un entier strictement positif. Pour $x \geqslant 1$, on notera donc $\sum_{k \leqslant x}$ pour désigner la somme portant sur les entiers naturels non nuls inférieurs à x. On va calculer la somme proposée en remplaçant $\hat{f}$ par son expression. Il vient

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n)\hat{f}\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \sum_{k \leqslant \frac{x}{n}} f\left(\frac{x}{kn}\right) = \sum_{kn \leqslant x} \mu(n) f\left(\frac{x}{kn}\right).$$

Dans cette dernière somme, on regroupe les couples (k, n) selon la valeur m de leur produit. On obtient

$$\sum_{m \leqslant x} f\left(\frac{x}{m}\right) \sum_{n \mid m} \mu(n).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que si on pose $\varepsilon(m) = \sum_{n \mid m} \mu(n)$, alors $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(m) = 0$ si $m > 1$. Le fait que $\varepsilon(1) = 1$ est clair. Soit $m > 1$ que l'on décompose en facteurs premiers, $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Dans la somme définissant $\varepsilon(m)$ on peut se contenter de prendre les diviseurs sans facteurs carrés (on entend par là les entiers $n \geqslant 1$ qui sont produit de nombres premiers deux à deux distincts). De tels entiers s'écrivent $\prod_{i \in \mathrm{I}} p_i$ avec $\mathrm{I} \subset [\![1, k]\!]$. On obtient ainsi

$$\varepsilon(m) = \sum_{\mathrm{I}\subset[\![1,k]\!]} \mu\left(\prod_{i\in\mathrm{I}} p_i\right) = \sum_{\mathrm{I}\subset[\![1,k]\!]} (-1)^{|\mathrm{I}|} = 0$$

car il y a autant de parties de $[\![1,k]\!]$ de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

On peut aussi, dans le calcul de $\varepsilon(m)$, regrouper les parties I *de* $[\![1,k]\!]$ *selon leur cardinal i. On obtient alors*

$$\sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i(-1)^i = (1-1)^k = 0$$

par la formule du binôme de Newton.

2. Il est naturel de commencer par étudier le développement asymptotique de $\hat{g}$ pour la fonction $g : x \longmapsto x\ln x$. On a

$$\hat{g}(x) = \sum_{k\leqslant x} \frac{x}{k}\ln\frac{x}{k} = x\ln x\sum_{k\leqslant x}\frac{1}{k} - x\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln k}{k}.$$

Pour le premier terme de cette différence, on va utiliser le développement asymptotique classique $\sum\limits_{k\leqslant x}\dfrac{1}{k} = \ln x + \gamma + O(1/x)$ où γ désigne la constante d'Euler (cf. exercice 3.18). Il s'obtient à partir de celui de la somme partielle de la série harmonique. En effet, étant donné que $\mathrm{E}(x) = x + O(1)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant x}\frac{1}{k} &= \ln\mathrm{E}(x) + \gamma + O\left(\frac{1}{\mathrm{E}(x)}\right) = \ln(x+O(1)) + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \ln x + \ln\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \gamma + O(1/x) = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Cherchons maintenant un développement asymptotique de $\sum\limits_{k\leqslant x}\dfrac{\ln k}{k}$. Le calcul de la dérivée de $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$ montre la décroissance de cette fonction sur $[e, +\infty[$. On va procéder par une comparaison série-intégrale. Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln k}{k}$. Pour tout $k \geqslant 4 \geqslant e+1$, on a

$$\int_k^{k+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t,$$

et en sommant de $k=4$ à $k=n$, on obtient

$$\int_4^{n+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=4}^{n}\frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^{n}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t.$$

Comme $t \longmapsto \frac{1}{2}\ln^2 t$ est une primitive de $t \longmapsto \frac{\ln t}{t}$, on constate que $\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k}$ est encadré par deux termes équivalents à $\frac{1}{2}\ln^2 n$. Il en résulte que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2 n$. Pour pousser le développement asymptotique, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}\ln^2 n$ et on cherche un équivalent de $v_n - v_{n-1}$. On obtient aisément que $v_n - v_{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que v_n tend vers une limite C_1 et qu'en vertu du théorème de sommation des équivalents,

$$\mathrm{C}_1 - v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k - v_{k-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2k^2}.$$

Or, comme $\frac{\ln n}{2n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n-1)}{(n-1)} - \frac{\ln n}{n}$, le théorème de sommation des équivalents donne

$$\mathrm{C}_1 - v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\ln(k-1)}{(k-1)} - \frac{\ln k}{k}\right) = \frac{\ln n}{n}.$$

Ainsi, on obtient finalement $u_n = \frac{1}{2}\ln^2 n + \mathrm{C}_1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

On peut maintenant obtenir le développement asymptotique de $\sum_{k\leqslant x} \frac{\ln k}{k}$. Si on pose $n = \mathrm{E}(x) = x + O(1)$, on a $\frac{\ln x}{x} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$, si bien que

$$\sum_{k\leqslant x} \frac{\ln k}{k} = u_n = \frac{\ln^2(x + O(1))}{2} + \mathrm{C}_1 + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= \frac{\ln^2 x}{2} + \mathrm{C}_1 + O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

car $\ln^2(x + O(1)) = \ln^2 x + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$. Finalement, on a

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + \gamma x \ln x - \mathrm{C}_1 x + O(\ln x).$$

Posons alors $h = f - 2\mathrm{A}g$. Par linéarité, et vu que $\ln x = O(x^\beta)$, on a

$$\hat{h}(x) = \mathrm{C}_2 x \ln x + \mathrm{C}_3 x + O(x^\beta)$$

(C_2 et C_3 étant des constantes). Or le calcul précédent a aussi montré que

$$\widehat{\mathrm{Id}}(x) = \sum_{k\leqslant x} \frac{x}{k} = x\ln x + \gamma x + O(1).$$

Donc si on pose $k(x) = h(x) - C_2 x$, on a $\hat{k}(x) = C_4 x + O(x^\beta)$, C_4 étant une constante.

Enfin, en posant $l(x) = k(x) - C_4 = f(x) - 2Ax\ln x - C_2 x - C_4$, on obtient

$$\hat{l}(x) = \hat{k}(x) - C_4\,E(x) = C_4(x - E(x)) + O(x^\beta) = O(x^\beta).$$

Utilisons alors la formule d'inversion de Möbius pour la fonction l. On a, en notant $M > 0$ un réel tel que $|\hat{l}(x)| \leqslant Mx^\beta$,

$$|l(x)| \leqslant M \sum_{k<x} \left(\frac{x}{k}\right)^\beta = Mx^\beta \sum_{k\leqslant x} \frac{1}{k^\beta}.$$

Une comparaison série-intégrale classique assure que

$$\sum_{k\leqslant x} \frac{1}{k^\beta} = O\left(\frac{1}{x^{\beta-1}}\right) = O(x^{1-\beta}).$$

Ainsi, $l(x) = O(x)$ et on a donc bien $f(x) = 2Ax\ln x + O(x)$. ◁

La suite τ_n qui donne le nombre de diviseurs de l'entier n a un comportement assez erratique. Elle vaut 2 sur un entier de la forme $n = 2^p - 1$ qui est premier (nombre de Mersenne) puis vaut $p+1$ sur l'entier suivant qui est une puissance de 2. En effectuant la moyenne de Cesàro de la suite (τ_n), on «lisse» en quelque sorte le comportement de cette suite, et on peut obtenir un équivalent et même un développement asymptotique.

3.26. Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à x

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \tau_n$.

1. Trouver un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Démontrer que lorsque x tend vers $+\infty$

$$F(x) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

(École polytechnique)

Solution.

1. Soit $x \geqslant 1$. Les indices sous les signes de sommations désignent toujours des entiers naturels non nuls. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} 1 = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} 1 \quad \text{(par associativité)}\\
&= \sum_{\substack{d,d'\leqslant x\\ dd'\leqslant x}} 1 \quad \text{(par changement d'indices } d'=\frac{n}{d})\\
&= \sum_{d\leqslant x}\ \sum_{d'\leqslant \mathrm{E}(\frac{x}{d})} 1 \quad \text{(par associativité)}\\
&= \sum_{d\leqslant x} \mathrm{E}\left(\frac{x}{d}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $1 \leqslant d \leqslant x$, on a $\frac{x}{d} - 1 \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{x}{d}\right) \leqslant \frac{x}{d}$, ce qui donne l'encadrement suivant

$$\sum_{d\leqslant x}\left(\frac{x}{d}-1\right) \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \sum_{d\leqslant x}\frac{x}{d}$$

ou encore

$$x\sum_{d=1}^{\mathrm{E}(x)}\frac{1}{d} - \mathrm{E}(x) \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant x\sum_{d=1}^{\mathrm{E}(x)}\frac{1}{d}.$$

Or $\sum\limits_{d=1}^{\mathrm{E}(x)} \frac{1}{d} \underset{x\to\infty}{\sim} \ln \mathrm{E}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \ln x$. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x\ln x.}$$

2. Il ne sert à rien de pousser le développement de $\sum\limits_{d=1}^{n}\frac{1}{d}$ un cran plus loin car dans l'encadrement de $\mathrm{F}(x)$ ci-dessus l'écart entre le majorant et le minorant est en $O(x)$. Pour avoir un développement asymptotique de F en $O(\sqrt{x})$ on va utiliser une autre expression de F. L'idée est de couper la somme $\mathrm{F}(x) = \sum\limits_{dd'\leqslant x} 1$ selon la position de d et d' par rapport à $\sqrt{x}$. Si $dd' \leqslant x$, on a soit $d \leqslant \sqrt{x}$ soit $d' \leqslant \sqrt{x}$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{F}(x) = 2\sum_{\substack{d\leqslant\sqrt{x}\\ dd'\leqslant x}} 1 - \sum_{d,d'\leqslant\sqrt{x}} 1,$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}(x) = 2\left(\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mathrm{E}\left(\frac{x}{d}\right)\right) - \mathrm{E}(\sqrt{x})^2.$$

On a une somme du même type que précédemment, mais avec un nombre de termes de l'ordre de $\sqrt{x}$. On va pouvoir en déduire le développement de F avec la précision souhaitée encore à l'aide de l'encadrement $u-1 \leqslant \mathrm{E}(u) \leqslant u$ pour $u \in \mathbb{R}$. Il vient, pour x tendant vers l'infini

$$\mathrm{F}(x) = 2 \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{x}{d} + O(\sqrt{x}) - (x + O(\sqrt{x}))$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{\mathrm{E}(\sqrt{x})} \frac{x}{d} &= x\Big(\ln \mathrm{E}(\sqrt{x}) + \gamma + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big)\\ &= x\Big(\ln(\sqrt{x} + O(1)) + \gamma + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\ln(\sqrt{x} + O(1)) = \ln\sqrt{x} + \ln\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big) = \frac{1}{2}\ln x + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$. Donc,

$$\sum_{d=1}^{\mathrm{E}(\sqrt{x})} \frac{x}{d} = \frac{1}{2} x \ln x + \gamma x + O(\sqrt{x}).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).} \triangleleft$$

En moyenne les entiers ont donc assez peu de diviseurs : ainsi, le nombre moyen de diviseurs d'un entier compris entre 1 *et* 10^6 *(un million) est approximativement* 14. *Il ne faudrait toutefois pas croire que le nombre de diviseurs de* n *est «souvent» de l'ordre de* $\ln n$. *Le bon ordre de grandeur est* $(\ln n)^{\ln 2}$ *qui est nettement plus petit. Pour de plus amples renseignements sur le comportement asymptotique de la suite* (τ_n) *le lecteur pourra consulter* HARDY (G.H.) & WRIGHT (E.M.), An introduction to the theory of numbers, *Oxford*.

Les exercices ci-après concernent des séries réelles qui ne sont plus nécessairement positives et des séries complexes. Très souvent l'étude de la convergence d'une série $\sum u_n$ *quelconque commence par l'étude de la convergence absolue, c'est-à-dire de la convergence de la série positive* $\sum |u_n|$, *pour laquelle on peut utiliser les théorèmes de comparaison. La convergence absolue entraîne la convergence de la série : l'inégalité triangulaire assure que pour* n *et* p *entiers naturels,*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|.$$

Si $\sum |u_n|$ *converge, elle vérifie le critère de Cauchy (pour* n *assez grand, la tranche* $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|$ *peut être rendue plus petite que*

0 *arbitrairement fixé) et par l'inégalité ci-dessus,* $\sum u_n$ *vérifie ce même critère. Comme* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont complets, la série* $\sum u_n$ *converge.*

3.27. Nature de $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

> Quelle est la nature de la série $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Posons $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$. Déterminer si u_n converge vers 0, revient à savoir si la suite $(2+\sqrt{3})^n$, qui diverge vers l'infini, à tendance ou non à se rapprocher de valeurs entières. Ici, cela est facile à étudier car le nombre $2+\sqrt{3}$ est un entier algébrique (racine de l'équation $x^2-4x+1=0$) dont le conjugué $2-\sqrt{3}$ est strictement inférieur à 1 (le lecteur qui a traité l'exercice 1.12 du chapitre 1 aura reconnu un nombre de Pisot). En effet, on a pour tout n,

$$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n = 2\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}2^{n-2k}(\sqrt{3})^{2k} = 2\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}2^{n-2k}3^k,$$

qui est un entier. Ainsi, on a

$$|u_n| = \left|\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)\right| = \left|\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)\right| \leqslant \pi(2-\sqrt{3})^n.$$

Or, $\pi(2-\sqrt{3})^n$ est le terme d'une série géométrique convergente, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Il en résulte que la série $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$ converge. ◁

3.28. Suite (a_n) telle $\sum a_n^k = 0$ pour tout entier k non nul

> Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. On suppose que pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$. Montrer que la suite (a_n) est nulle.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On raisonne par l'absurde et on suppose que les termes de la suite (a_n) ne sont pas tous nuls. L'idée de la démonstration est de se ramener à une somme finie, seuls comptant les termes de module maximum. Posons

$\mathrm{M} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0$. Cette borne supérieure est atteinte. En effet, la suite (a_n) converge vers 0, puisque la série $\sum a_n$ converge et il existe un entier naturel n_0 tel que $|a_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{2}$ pour $n \geqslant n_0$. Ceci entraîne que $\mathrm{M} = \max_{0\leqslant n\leqslant n_0-1} |a_n|$. Quitte à diviser tous les termes de la suite par M, on se ramène à une suite dont tous les termes sont de module inférieur ou égal à 1, qui possède au moins un terme de module 1 et qui vérifie la même hypothèse que la suite initiale. On note que $\mathrm{I} = \{n \in \mathbb{N}, |a_n| = 1\}$ est fini, puisque la série $\sum a_n$ converge.

Si $|a_n| < 1$, la limite de a_n^k quand k tend vers l'infini est nulle. Cela va nous permettre d'éliminer les termes a_n lorsque n n'est pas dans I. Plus précisément, montrons que $\lim_{k\to+\infty} s_k = 0$, où $s_k = \sum_{n\notin\mathrm{I}} a_n^k$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=n_1}^{+\infty} |a_n| \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour $n \geqslant n_1$,

$$\begin{aligned} |s_k| \leqslant \sum_{n\notin\mathrm{I}} |a_n^k| &\leqslant \sum_{\substack{n\notin\mathrm{I}\\ n<n_1}} |a_n^k| + \sum_{\substack{n\notin\mathrm{I}\\ n\geqslant n_1}} |a_n^k| \\ &\leqslant \sum_{\substack{n\notin\mathrm{I}\\ n<n_1}} |a_n^k| + \sum_{n\geqslant n_1} |a_n| \leqslant \sum_{\substack{n\notin\mathrm{I}\\ n<n_1}} |a_n^k| + \varepsilon. \end{aligned}$$

La somme finie $\sum_{\substack{n\notin\mathrm{I}\\ n<n_1}} |a_n^k|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, car les $|a_n|$ qui interviennent sont de module strictement inférieur à 1, et on aura donc $|s_k| \leqslant 2\varepsilon$ pour k assez grand. Ceci démontre que $\lim_{k\to+\infty} s_k = 0$ et donc, compte tenu de l'hypothèse, que $\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathrm{I}} a_n^k = 0$. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs distinctes de a_n, pour $n \in \mathrm{I}$, on obtient $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{p} n_i\lambda_i^k = 0$, où $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont des entiers naturels tous non nuls. La contradiction voulue résulte du lemme suivant.

Lemme. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des nombres complexes distincts de module 1 et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes. On suppose que $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\lambda_i^k = 0$. On a alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p, le résultat étant évident pour $p = 1$. On suppose que le résultat est vérifié au rang $p-1$. On considère $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, de module 1, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\lambda_i^k$, tels que $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$. On a alors, pour tout

$k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - \lambda_p u_k = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_p)\lambda_i^k$ et $\lim_{k \to +\infty} u_{k+1} - \lambda_p u_k = 0$. De l'hypothèse de récurrence, on déduit, pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, que $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0$ et donc $\alpha_i = 0$, puisque les λ_i sont distincts. Le cas $p = 1$ donne alors $\alpha_p = 0$. ◁

3.29. Construction d'une série complexe

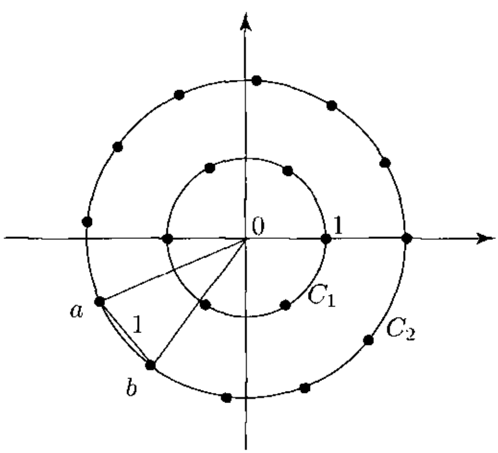
> Construire une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ diverge et vérifiant $|z_p - z_q| \geqslant 1$ pour tout couple (p, q) d'entiers distincts.
>
> **(École normale supérieure)**

▷ **Solution.**

On voit que les deux contraintes sont antagonistes : pour rendre la série divergente on souhaite choisir les z_n avec des « petits » modules, mais la seconde propriété ne permet que d'en prendre un nombre fini dans un compact donné. On est rapidement conduit à l'idée suivante : choisir les z_n sur les cercles C_k de centre 0 et de rayon k tout en respectant la seconde condition.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si a, b sont deux points de C_k tels que $|a - b| = 1$, l'angle en 0 du triangle $(0ab)$ vaut $2 \arcsin \frac{1}{2k}$. Il en résulte qu'on peut choisir

$n_k = E\left(\dfrac{\pi}{\arcsin \frac{1}{2k}}\right)$ points sur C_k écartés deux à deux d'au moins 1.



On définit alors la suite (z_n) en prenant $z_1, z_2, \dots, z_{n_1}$ sur C_1, puis $z_{n_1+1}, \dots, z_{n_1+n_2}$ sur C_2, et ainsi de suite. La seconde contrainte est alors respectée, et en sommant par tranches, on voit que la série $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ est de même nature que $\sum \frac{n_k}{k^2}$: en effet, pour n compris entre $n_1+\cdots+n_k+1$ et $n_1+\cdots+n_k+n_{k+1}$, $\frac{1}{|z_n|^2}$ vaut $\frac{1}{k^2}$. Comme $n_k \sim 2k\pi$, la série $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ est bien divergente. ◁

Le lecteur prouvera facilement qu'il est impossible de trouver une suite réelle vérifiant les mêmes hypothèses.

Lorsqu'une série n'est pas absolument convergente, elle peut être cependant convergente : on dit alors qu'elle est semi-convergente. *Pour étudier de telles séries, on peut envisager les techniques suivantes : un développement asymptotique du terme général, une application du théorème spécial des séries alternées, ou encore une transformation d'Abel.*

3.30. Développement asymptotique du terme général

Préciser la nature des séries suivantes :

1. $\sum(-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$;

2. $\sum \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}$;

3. $\sum \sin(n!\pi e)$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Notons pour $n \geqslant 1$, $u_n = (-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ et faisons-en un développement asymptotique. Pour n tendant vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n\left(e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)\\ &= (-1)^n\left(e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}\right)\\ &= (-1)^n e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)\\ &= (-1)^n e\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n e}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Le terme $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente en vertu du théorème de comparaison des séries à termes positifs. Quant à $\frac{(-1)^n e}{2n}$, c'est le terme général d'une série semi-convergente d'après le théorème spécial des séries alternées. La série $\sum u_n$ est donc semi-convergente.

Pour cette série, on pouvait directement appliquer le théorème spécial des séries alternées, car il est facile de voir que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *converge vers* e *en croissant.*

2. Pour n tendant vers l'infini, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sin\sqrt{1+n^2\pi^2} &= \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2\pi^2}}\right)\\
&= \sin n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2\pi^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \sin\left(n\pi+\frac{1}{2n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^n\sin\left(\frac{1}{2n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^n\left(\frac{1}{2n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{2n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Le terme général de la série étudiée apparaît comme la somme du terme général d'une série alternée semi-convergente et du terme général d'une série absolument convergente : il en résulte que la série $\sum\sin\sqrt{1+n^2\pi^2}$ est semi-convergente.

3. Pour $n\geqslant 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
n!e &= n!\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)\\
&= \underbrace{n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)}_{=p_n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.
\end{aligned}$$

Or, l'entier $p_n=n!+\cdots+n(n-1)+n+1$ est de même parité que $n+1$. D'autre part, on a pour $k\geqslant n+3$, $\frac{n!}{k!}\leqslant\frac{1}{k(k-1)(k-2)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^3}$. La somme $\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}$ est donc équivalente à $\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$, elle même équivalente à $\frac{1}{2n^2}$ (voir exercice 3.18). On en déduit que

$$\begin{aligned}
n!e &= p_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= p_n+\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=p_n+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Écrivons un développement asymptotique du terme général de la série étudiée

$$\begin{aligned}\sin(n!e\pi) &= \sin\left(p_n\pi + \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

On conclut comme dans les questions précédentes que la série $\sum \sin(n!\pi e)$ est semi-convergente. ◁

3.31. Autour des séries semi-convergentes

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des séries convergentes à termes réels. Existe-t-il une série divergente à termes réels non nuls $\sum b_n$, telle que

$$\inf_{(a_n)\in\mathcal{C}} \sup_{n\geqslant 0}\left|1 - \frac{a_n}{b_n}\right| = 0 \ ?$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

L'exercice demande de chercher une série divergente $\sum b_n$, telle que l'on puisse trouver des séries convergentes $\sum a_n$ avec la suite (a_n) aussi « proche » qu'on veut de la suite (b_n), cette « proximité » étant mesurée par $\sup_{n\geqslant 0}\left|1 - \frac{a_n}{b_n}\right|$.

Montrons pour commencer qu'une série divergente $\sum b_n$ à termes strictement positifs (par exemple $\sum \frac{1}{n}$) ne peut pas convenir. En effet, soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sup_{n\geqslant 0}\left|1 - \frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $1 - \frac{a_n}{b_n} \leqslant \left|1 - \frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, de sorte que $a_n \geqslant \frac{1}{2}b_n$. La série $\sum a_n$ est alors divergente.

Le lecteur sait que le théorème sur les séries à termes généraux équivalents est faux si l'une des séries n'est pas supposée de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). Prenons donc une suite b_n telle que $\sum b_n$ diverge et pour laquelle il existe une suite c_n équivalente à b_n mais telle que $\sum c_n$ converge. De tels exemples abondent : on peut prendre $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que pour $n \geqslant$ N, $\left|1 - \frac{c_n}{b_n}\right| \leqslant \varepsilon$. On prend alors la suite (a_n) définie par : $a_n = b_n$ pour $n < \mathrm{N}$ et $a_n = c_n$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Il est clair que $\sum a_n$ converge et que $\sup_{n\geqslant 0}\left|1-\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \varepsilon$. Cette construction étant possible pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien la propriété souhaitée. $\triangleleft$

Le théorème spécial des séries alternées fournit un critère simple et efficace pour prouver la convergence de nombreuses séries : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0, la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge.

3.32. Calcul de la somme d'une série alternée

> **1.** Montrer que la suite $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{\ln p}{p} - \dfrac{1}{2}\ln^2 n$ converge.
>
> **2.** En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$.
>
> **(École polytechnique)**

$\triangleright$ **Solution.**

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln^2 t}{2}$ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$ décroît sur $[3, +\infty[$, ce qui nous oriente vers la comparaison série-intégrale. On peut écrire pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2 n) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) décroît à partir du rang 3. Par ailleurs, on a pour $n \geqslant 3$,

$$\sum_{p=3}^{n}\frac{\ln p}{p} \geqslant \sum_{p=3}^{n}\int_p^{p+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \int_3^{n+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2 3).$$

On en déduit que

$$u_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2 n - \ln^2 3) \geqslant \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln^2 3).$$

La suite (u_n) est décroissante (pour $n \geqslant 3$) et minorée. Elle converge. On notera l sa limite.

2. La série de terme général $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ converge car elle vérifie le critère spécial de convergence des séries alternée. En effet la suite de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$ est décroissante pour $n \geqslant 3$ et tend vers 0.

Pour calculer sa somme, on part d'une somme partielle qu'on transforme astucieusement pour faire apparaître la suite de la question précédente. On peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n} &= 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^{2N}\frac{\ln n}{n}\\ &= \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{2N}\frac{\ln n}{n}\\ &= \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right) + u_N + \frac{1}{2}\ln^2 N - u_{2N} - \frac{1}{2}\ln^2(2N).\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2}\ln^2(2N) - \frac{1}{2}\ln^2 N = \frac{1}{2}(\ln(2N) - \ln N)(\ln(2N) + \ln N) = \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 \ln N,$$

on peut simplifier cette expression :

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n} = \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln N\right) + u_N - u_{2N} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Nous savons que $\lim\limits_{N\to+\infty} u_N - u_{2N} = l - l = 0$. La limite de $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln N$, lorsque N tend vers l'infini, est la constante d'Euler γ. On obtient finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n} = \gamma\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}.} \triangleleft$$

Il est également important de retenir que, lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels, tendant vers 0, on a une majoration simple des restes de la série alternée $\sum(-1)^n a_n$: pour tout $N \geqslant 0$,

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \leqslant a_N.$$

3.33. Transformation d'Euler

> Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls, décroissante et convergente vers 0. On pose $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$.

1. Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$,

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k}\Delta^k u_0\right) + \frac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta^p u_n.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$, $(-1)^p f^{(p)}(x) \geqslant 0$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{4}\Delta f(0) + \cdots + \frac{1}{2^p}\Delta^{p-1} f(0) + \mathrm{R}_p$$

avec $|\mathrm{R}_p| \leqslant \frac{1}{2^p}|\Delta^p f(0)|$. La série $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\Delta^k f(0)$ est appelée *transformée d'Euler* de la série $\sum(-1)^n f(n)$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La série $\sum(-1)^n u_n$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^{n-1}\Delta u_{n-1} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^{n-1}u_{n-1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^{n-1}u_n\\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}(-1)^n u_n + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^n u_n.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum(-1)^{n-1}\Delta u_{n-1}$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Delta u_{n-1} = 2\mathrm{S} - u_0$. Ceci peut s'écrire

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta u_n,$$

ce qui est l'égalité voulue pour $p = 1$. On va raisonner par récurrence sur p et noter S_p la quantité $\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k}\Delta^k u_0\right) + \frac{1}{2^p}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p u_n$ lorsque celle-ci existe. On vient de prouver l'existence de S_1, qui est égal à S. Si $\sum(-1)^n\Delta^p u_n$ converge et si $\mathrm{S}_p = \mathrm{S}$, alors pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Delta^{p+1}u_n &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n(\Delta^p u_n - \Delta^p u_{n+1})\\ &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Delta^p u_n + \sum_{n=1}^{N+1}(-1)^n\Delta^p u_n.\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum(-1)^n\Delta^{p+1}u_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^{p+1}u_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p u_n - \Delta^p u_0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}S_{p+1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^k}\Delta^k u_0\right) + \frac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p u_n - \frac{1}{2^{p+1}}\Delta^p u_0\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k}\Delta^k u_0\right) + \frac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p u_n = S_p = S.\end{aligned}$$

2. On utilise la question 1. On pose $u_n = f(n)$. Par hypothèse, les fonctions f et $-f'$ sont positives sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est donc positive et décroissante et il en est de même de la suite (u_n). Enfin, par hypothèse, la suite (u_n) converge vers 0. Le résultat de la question précédente s'applique et on a, pour $p \geqslant 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\Delta^k f(0) + \frac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p f(n),$$

ce qui est résultat demandé avec $R_p = \dfrac{1}{2^p}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p f(n)$. Il faut démontrer, pour conclure, que $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Delta^p f(n)\right| \leqslant |\Delta^p f(0)|$. Il s'agit en fait de majorer la somme de la série par son premier terme, propriété des séries alternées vérifiant le critère spécial de convergence.

Montrons donc que la série $\sum(-1)^n\Delta^p f(n)$ vérifie le critère spécial de convergence des séries alternées. Pour cela, on définit, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, la fonction Δf par $\Delta f(x) = f(x) - f(x+1)$ et on montre que, pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\Delta^p f$ est positive sur $\mathbb{R}_+$. On raisonne par récurrence sur p et on utilise le fait que $-f'$ vérifie les mêmes hypothèses que f. La propriété est vraie pour $p = 0$, par hypothèse. Si on suppose qu'elle est réalisée au rang p pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $(-1)^n f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors c'est vrai pour $-f'$. On a donc $\Delta^p(-f') \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Mais il est clair que $\Delta^p(-f') = -(\Delta^p f)'$. La fonction $\Delta^p f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et par définition, $\Delta^{p+1} f$ est positive. Cela termine la récurrence.

La suite $(\Delta^p f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à termes positifs. Il résulte de la démonstration précédente qu'on a aussi $\Delta^p f$ décroissante pour $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(\Delta^p f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ décroit. Enfin, son terme général tend vers 0, puisqu'il résulte de ce qui précède que $\sum(-1)^n\Delta^p f(n)$ converge. On a donc l'inégalité voulue.

On peut aussi noter que la suite $(\Delta^p f(0))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, car $\Delta^{p+1}f(0) = \Delta^p f(0) - \Delta^p f(1) \leqslant \Delta^p f(0)$. On a donc $|\mathrm{R}_p| \leqslant \frac{1}{2^p}|f(0)|$, d'où l'on tire $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathrm{R}_p = 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\Delta^k f(0). \ \triangleleft$$

La transformation d'Euler est une méthode classique d'accélération de convergence des séries alternées. Si on considère par exemple la série harmonique alternée, ce qui revient à prendre $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$, qui a les propriétés voulues, $\sum\limits_{k=0}^{29}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}\Delta^k f(0)$ $(p = 30)$ donne une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-10} près, alors qu'il faut additionner un milliard de termes de la série initiale pour arriver au même résultat.

Dans l'exercice suivant, on envisage un regroupement de termes par paquets pour déterminer la nature d'une série. C'est plutôt délicat car la série n'est pas absolument convergente.

3.34. Sommation par paquets

1. Montrer que l'équation (E) : $x^3 - x - 1 = 0$ admet une racine réelle α et deux racines complexes conjuguées β et γ. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{S}_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ est entier.

2. Étudier les séries $\sum \dfrac{\sin\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ et $\sum \dfrac{\cos\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. L'étude de la fonction $x \longmapsto x^3 - x - 1$ montre que le polynôme $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1$ possède une seule racine réelle α et que $\alpha > 1$. Les deux autres racines β et γ sont donc complexes conjuguées. De plus, on a $|\beta| = |\gamma| < 1$, puisque $\alpha\beta\gamma = 1$.

Si x est une racine de $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} - 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+3} = x^{n+1} + x^n$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_{n+3} = \mathrm{S}_{n+1} + \mathrm{S}_n$. Sachant que

$S_0 = 3$, $S_1 = 0$ et $S_2 = S_1^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0 - 2(-1) = 2$, on en déduit, par une récurrence immédiate, que S_n est entier, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le lecteur aura sans doute reconnu les sommes de Newton relatives au polynôme à coefficients entiers $X^3 - X - 1$. La relation de récurrence obtenue ici est un cas particulier des célèbres formules de Newton (démontrées dans le cas général dans le tome 1 d'algèbre, exercice 5.26). On peut aussi remarquer que α est un nombre de Pisot (voir l'exercice 1.12).

2. On a $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha^n$, d'où l'idée de comparer les séries proposées à $\sum \frac{\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ et $\sum \frac{\cos\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$. L'intérêt de remplacer α^n par S_n provient de ce que S_n est entier.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\left(\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{n}\sin\left((\beta^n + \gamma^n)\frac{\pi}{4}\right)\cos\left((S_n + \alpha^n)\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad |u_n| \leqslant \frac{2}{n}\left|\sin\left((\beta^n + \gamma^n)\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}(|\beta|^n + |\gamma|^n).$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente puisque $|\beta| = |\gamma| < 1$. Les séries $\sum \frac{\sin\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ et $\sum \frac{\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ sont donc de même nature. On montre de la même manière que les séries $\sum \frac{\cos\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ et $\sum \frac{\cos\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ sont de même nature.

• Les valeurs de $\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)$ ne dépendent que du reste r_n de S_n modulo 4. Calculons r_n pour les premières valeurs de n, en utilisant la relation de récurrence $S_{n+3} = S_{n+1} + S_n$. On obtient : $r_0 = 3$, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 2$, $r_5 = 1$, $r_6 = 1$, $r_7 = 3$, $r_8 = 2$, $r_9 = 0$, $r_{10} = 1$, $r_{11} = 2$, $r_{12} = 1$, $r_{13} = 3$, $r_{14} = 3$, $r_{15} = 0$, $r_{16} = 2$.

On remarque que : $r_{n+14} = r_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 2$. Une récurrence immédiate permet de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_{n+14} = r_n$: la suite (r_n) est 14-périodique.

• On va regrouper les termes par paquets de 14 termes et se ramener à la nature de la série $\sum a_n$ avec $a_n = \sum_{k=0}^{13} \frac{\sin\left(S_{14n+k} \frac{\pi}{2}\right)}{14n + k}$. Soit $N \geqslant 1$ et $n_0 = E(N/14)$. On peut écrire

$$\sum_{n=14}^{N} \frac{\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n} = \left(\sum_{n=1}^{n_0} a_n\right) - \delta_N \quad \text{avec} \quad \delta_N = \sum_{n=N+1}^{14n_0+13} \frac{\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

Or, la suite δ_N converge vers 0 puisque

$$|\delta_N| \leqslant \sum_{n=14n_0+1}^{14n_0+13} \frac{1}{n} \leqslant \frac{13}{14n_0} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que les séries $\sum \frac{\sin\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ et $\sum a_n$ sont de même nature.

Des calculs précédents, on tire

$$a_n = -\frac{1}{14n} - \frac{1}{14n+3} + \frac{1}{14n+5} + \frac{1}{14n+6} - \frac{1}{14n+7} + \frac{1}{14n+10} + \frac{1}{14n+12} - \frac{1}{14n+13}.$$

On a, pour tout $k \in [\![0, 13]\!]$, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{14n+k} = \frac{1}{14n}\left(1 + \frac{k}{14n}\right)^{-1} = \frac{1}{14n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, car dans la somme définissant a_n, il y autant de signes + que de signes −. Il en résulte que la série $\sum \frac{\sin\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ converge. Le même raisonnement montre que la série de terme général $\frac{\cos\left(S_n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$ a même nature que la série de terme général $b_n = \sum_{i=0}^{13} \frac{\cos\left(S_{14n+i} \frac{\pi}{2}\right)}{14n+i}$. Cette fois-ci, on trouve

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{14n+1} - \frac{1}{14n+2} - \frac{1}{14n+4} - \frac{1}{14n+8} + \frac{1}{14n+9} - \frac{1}{14n+11} \\ &= -\frac{1}{7n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit la divergence de la série $\sum \frac{\cos\left(\alpha^n \frac{\pi}{2}\right)}{n}$. ◁

Les exercices suivants exploitent la technique des transformations d'Abel, souvent présentée comme une intégration par parties discrète. Plus précisément, considérons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et des entiers* $M \leqslant N$. *Notons pour* $n \geqslant 0$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. *On peut alors écrire* $a_n = A_n - A_{n-1}$ *(avec la convention* $A_{-1} = 0$*) et*

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_N b_{N+1} - A_{M-1} b_M - \sum_{n=M}^{N} A_n (b_{n+1} - b_n).\end{aligned}$$

La suite A_n joue le rôle de la «primitive» de a_n et $b_{n+1} - b_n$ celui de la dérivée de b_n. Lorsque la série $\sum a_n$ converge, on peut écrire $a_n = R_n - R_{n+1}$ avec $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_n$. On arrive alors à

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = R_M b_{M-1} - R_{N+1} B_N + \sum_{n=M}^{N} R_n (b_n - b_{n-1}).$$

Cette transformation fut utilisée par Abel en 1826 pour donner un exemple de série de fonctions continues dont la somme n'est pas continue[4]*, à savoir $\sum \dfrac{\sin nx}{n}$.*

3.35. Exemple de transformation d'Abel

> Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs qui est croissante et tend vers $+\infty$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x_n}{a_n} = l$. Montrer que $\dfrac{1}{a_n} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Considérons le reste de la série $\sum \dfrac{x_n}{a_n}$, $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{x_n}{a_n}$ défini pour $n \geqslant 0$. Exprimons x_n en fonction des R_n. On a $R_n - R_{n+1} = \dfrac{x_n}{a_n}$ ce qui donne $x_n = a_n(R_n - R_{n+1})$. Posons pour n entier naturel, $U_n = \dfrac{1}{a_n} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ et opérons une transformation d'Abel sur le numérateur :

4. Dans les travaux de Cauchy, on pouvait lire à l'époque que la somme d'une série de fonctions continues est encore continue.

$$\mathrm{U}_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(\mathrm{R}_k - \mathrm{R}_{k+1})}{a_n} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\mathrm{R}_k - \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{k-1}\mathrm{R}_k}{a_n}$$

$$= \frac{a_0\mathrm{R}_0 - a_n\mathrm{R}_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathrm{R}_k}{a_n}$$

$$= \frac{a_0\mathrm{R}_0}{a_n} - \mathrm{R}_{n+1} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathrm{R}_k}{a_n}.$$

Pour montrer que U_n tend vers 0, il suffit de prouver que le quotient

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathrm{R}_k}{a_n}$$

tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $|\mathrm{R}_n| \leqslant \varepsilon$. On majore le quotient précédent pour $n \geqslant n_0$ en coupant la somme en deux :

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathrm{R}_k}{a_n}\right| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0}(a_k - a_{k-1})|\mathrm{R}_k|}{a_n} + \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n}(a_k - a_{k-1})\varepsilon}{a_n}$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0}(a_k - a_{k-1})|\mathrm{R}_k|}{a_n} + \frac{a_n - a_{n_0}}{a_n}\varepsilon \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon.$$

Donc pour n assez grand. $\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathrm{R}_k}{a_n}\right| \leqslant 2\varepsilon$. On conclut que U_n converge vers 0. ◁

3.36. Étude asymptotique à l'aide de transformations d'Abel

Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente.

1. Montrer que pour n tendant vers l'infini, $\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k = o(n)$.

On suppose de plus qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $na_n > -c$.

2. Montrer que pour n tendant vers l'infini,

$$\sum_{k=1}^{n} k|a_k| \leqslant 2cn + o(n).$$

3. On pose, pour $n \geqslant 1$, $t_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$. Justifier l'existence de t_n et montrer que pour n tendant vers l'infini, $t_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Posons pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$. On a $a_n = \mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}$. Effectuons une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n} k(\mathrm{R}_k - \mathrm{R}_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{R}_k - \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{R}_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{R}_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\mathrm{R}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k - n\mathrm{R}_{n+1}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k - \mathrm{R}_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 - 0 = 0,$$

en vertu du théorème de Cesàro (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0$). On conclut que

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = o(n).$$

2. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| &= \sum_{k=1}^{n} k(|a_k| - a_k) + \sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n} k(|a_k| - a_k) + o(n) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} 2c + o(n) \quad \text{car } k(|a_k| - a_k) = \begin{cases} -2ka_k \leqslant 2c & \text{si } a_k < 0 \\ 0 \leqslant 2c & \text{si } a_k \geqslant 0 \end{cases} \\ &\leqslant 2cn + o(n).\end{aligned}$$

3. Posons pour $n \geqslant 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} k|a_k|$. On a $n|a_n| = A_n - A_{n-1}$. Prenons $N \geqslant n$ et lançons-nous dans une nouvelle transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N} \frac{|a_k|}{k} &= \sum_{k=n}^{N} \frac{A_k - A_{k-1}}{k^2} = \sum_{k=n}^{N} \frac{A_k}{k^2} - \sum_{k=n}^{N} \frac{A_{k-1}}{k^2} \\
&= \sum_{k=n}^{N} \frac{A_k}{k^2} - \sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{A_k}{(k+1)^2} \\
&= \sum_{k=n}^{N} A_k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) - \frac{A_{n-1}}{n^2} + \frac{A_N}{(N+1)^2} \\
&= \sum_{k=n}^{N} \frac{(2k+1)A_k}{k^2(k+1)^2} - \frac{A_{n-1}}{n^2} + \frac{A_N}{(N+1)^2} \\
&= \sum_{k=n}^{N} \frac{(2k+1)A_k}{k^2(k+1)^2} - \frac{A_{n-1}}{n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ d'après 2.}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{(2k+1)A_k}{k^2(k+1)^2} = O\left(\dfrac{kA_k}{k^4}\right) = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ pour $k \geqslant 1$, la série $\sum \dfrac{(2k+1)A_k}{k^2(k+1)^2}$ est absolument convergente. La somme $\sum_{k=n}^{N} \dfrac{|a_k|}{k}$ admet donc une limite lorsque N tend vers l'infini. Ainsi t_n existe et on a

$$t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(2k+1)A_k}{k^2(k+1)^2} - \frac{A_{n-1}}{n^2}.$$

On a, lorsque n tend vers l'infini, $\dfrac{A_{n-1}}{n^2} = O\left(\dfrac{n}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. De plus, il existe $M \geqslant 0$ tel que si $k \geqslant 1$, $\dfrac{(2k+1)A_k}{k^2(k+1)^2} \leqslant \dfrac{M}{k^2}$. Par conséquent,

$$t_n \leqslant M \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Classiquement, pour n tendant vers l'infini, $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{n}$ (voir exercice 3.18) et finalement, $t_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. ◁

3.37. Séries de Hardy

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en traitant successivement les cas suivants :

1. $\alpha > 1$;

2. $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$;

3. $\alpha = \frac{1}{2}$ (on effectuera un développement asymptotique de la différence $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$) ;

4. $\alpha < \frac{1}{2}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Pour $\alpha > 1$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence absolue de la série.

2. Nous allons montrer qu'il y a convergence de la série lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$ en faisant une comparaison série-intégrale. Étudions l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Pour $x \geqslant 1$, en faisant le changement de variables $u = \sqrt{t}$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t &= 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin \pi u}{u^{2\alpha-1}} \mathrm{d}u \\
&= 2\left[-\frac{\cos \pi u}{\pi u^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{x}} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos \pi u}{u^{2\alpha}} \mathrm{d}u \\
&\xrightarrow[x \to +\infty]{} -\frac{2}{\pi} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} \int_{[1,+\infty[} \frac{\cos \pi u}{u^{2\alpha}} \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

car la fonction $u \longmapsto \frac{\cos \pi u}{u^{2\alpha}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le théorème de comparaison des fonctions positives intégrables (elle est majorée en valeur absolue par $u \longmapsto \frac{1}{u^{2\alpha}}$ et $2\alpha > 1$).

Posons pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$. D'après ce qui précède, la série de terme général v_n converge. Pour prouver que la série $\sum u_n$ converge, il suffit donc d'établir la convergence de la série de terme général $u_n - v_n$. Or, si $\varphi(t) = \frac{\sin \pi\sqrt{t}}{t^\alpha}$ pour $t \geqslant 1$,

$$|u_n - v_n| = \left|\int_n^{n+1} (\varphi(t) - \varphi(n))\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)|\mathrm{d}t.$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\cos(\pi\sqrt{t})t^\alpha - \alpha t^{\alpha-1}\sin(\pi\sqrt{t})}{t^{2\alpha}} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right),$$

il existe $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant 1$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|u_n - v_n| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{K}dt}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} = \frac{\mathrm{K}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Donc $\sum |u_n - v_n|$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. Il s'ensuit que $\sum(u_n - v_n)$ converge et $\sum u_n$ également.

3. Traitons le cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Déterminons un développement asymptotique de la différence $d_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned}
d_n &= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} - 1\right) = e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} - 1\right)\\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - 1\right) = e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)} - 1\right)\\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(\frac{i\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\\
&= \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on obtient alors

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\frac{\pi\sin(\pi\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2\cos(\pi\sqrt{n})}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est absolument convergente. Comme précédemment pour le sinus, on prouve que la série de terme général $\dfrac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge, si bien que la série de terme général $\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est de même nature que celle de terme général $\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})$. Or cette dernière diverge, puisque la suite $(\cos\pi\sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ ne converge pas : en effet, la suite extraite $(\cos\pi\sqrt{n^2}) = (\cos\pi n) = ((-1)^n)$ est divergente. Par conséquent, la série diverge pour la valeur $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

4. Venons-en maintenant au cas $\alpha < \dfrac{1}{2}$ et démontrons pas l'absurde qu'il y a divergence de la série. Supposons que la série de terme général

$\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge et notons $\mathrm{A}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{k})}{k^\alpha}$. Nous allons montrer que la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ convergerait à l'aide d'une transformation d'Abel, ce qui fournira la contradiction souhaitée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{k^\alpha}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\alpha}} = \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1})\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\alpha}}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{A}_k}{k^{\frac{1}{2}-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{A}_k}{(k+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \text{ avec } \mathrm{A}_0 = 0,\\ &= \frac{\mathrm{A}_n}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right).\end{aligned}$$

La suite A_n est bornée, donc le premier terme converge. Quant au second, c'est la somme partielle d'une série absolument convergente puisque

$$\left|\mathrm{A}_k \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right)\right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{A}_n| \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ se retrouve être convergente : c'est une contradiction.

Conclusion. La série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, on a $\alpha > \dfrac{1}{2}$. ◁

Le lecteur courageux pourra étudier plus généralement les séries de la forme $\sum \dfrac{\sin(\pi n^\beta)}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha, \beta > 0$.

3.38. Recherche d'un équivalent (1)

> Déterminer un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)$.
>
> (**École normale supérieure, École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Observons pour commencer que la somme définissant u_n est finie. Imaginons un instant que l'on enlève la partie entière. On aurait la suite $n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ qui est équivalente à $n \ln 2$. En effet, c'est un résultat classique[5] que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. On va essayer de formaliser cette idée.

Posons $v_n = \frac{u_n}{n}$. On a $v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} f(n,k)$ où $f(n,k) = (-1)^{k-1} \frac{1}{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)$.

Pour tout k, $f(n,k)$ tend vers $f(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$. On est donc face à un problème d'interversion de limites. La clef en est la majoration uniforme en n des restes des séries $\sum_k f(n,k)$. Comme la série $\sum_k f(n,k)$ est alternée et $|f(n,k)|$ décroît avec k, on a, pour $\mathrm{N} \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{k=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{\mathrm{N}}\right) \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}},$$

et de même $\left|\sum_{k=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$ et N entier naturel tel que $\frac{1}{\mathrm{N}} \leqslant \varepsilon$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{+\infty} f(n,k) - \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} f(n,k) - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} f(k)\right| + \left|\sum_{k=\mathrm{N}}^{+\infty} f(n,k)\right| + \left|\sum_{k=\mathrm{N}}^{+\infty} f(k)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} f(n,k) - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} f(k)\right| + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\left|\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} f(n,k) - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} f(k)\right|$ converge vers 0, pour n assez grand, $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} f(n,k) - \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\right| \leqslant 3\varepsilon$. On obtient donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$ soit

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n \ln 2.} \ \triangleleft$$

Notons que le théorème général d'interversion de limites (qui n'est pas au programme) permet de conclure dès lors que l'on a la majoration uniforme des restes.

5. L'identité $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est valable pour $x \in]-1,1]$ en vertu du théorème d'Abel-Dirichlet.

3.39. Recherche d'un équivalent (2)

Pour $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, déterminer un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n\alpha)^k}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!}.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On remarque que $u_n + v_n = e^{n\alpha}$, ce qui permet d'espérer que déterminer un des équivalents suffira. On va être amené à distinguer les cas $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$.

Pour $\alpha > 1$, les termes de la somme définissant u_n croissent et le terme prépondérant est le dernier. En mettant celui-ci en facteur, on obtient

$$u_n = \frac{(n\alpha)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \frac{1}{(n\alpha)^{n-k}} = \frac{(n\alpha)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(n\alpha)^k}.$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(n\alpha)^k} = \frac{1}{\alpha^k}$, puisque $\frac{n!}{(n-k)!} \underset{n\to\infty}{\sim} n^k$. On aimerait démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(n\alpha)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Il s'agit d'intervertir une sommation et une limite. Posons, pour n et k dans $\mathbb{N}$,

$$u_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(n\alpha)^k} \text{ si } k \leqslant n \text{ et } u_{n,k} = 0 \text{ si } k > n.$$

On a, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leqslant u_{n,k} \leqslant \frac{1}{\alpha^k}$, ce qui montre que la série $\sum\limits_k u_{n,k}$ converge uniformément[6] par rapport à n.

Si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut déterminer n_0 tel que $\sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour $n \geqslant n_0$,

6. Ici encore, on aurait pu utiliser le théorème général (hors programme) d'interversion des limites : comme les séries $\sum\limits_k u_{n,k}$ convergent uniformément en n, l'interversion est justifiée.

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(n\alpha)^k}-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left|u_{n,k}-\frac{1}{\alpha^k}\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|u_{n,k}-\frac{1}{\alpha^k}\right|+2\sum_{k=n_0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^k}$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|u_{n,k}-\frac{1}{\alpha^k}\right|+2\varepsilon.$$

La dernière somme tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ceci est inférieur à 3ε pour n assez grand. On a donc la limite de $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(n\alpha)^k}$ qui vaut $\frac{\alpha}{\alpha-1}$, d'où l'on déduit

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{(n\alpha)^n}{n!}.$$

En utilisant la formule de Stirling, $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, on peut encore écrire

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{(e\alpha)^n}{\sqrt{2\pi n}}.}$$

Pour trouver un équivalent de v_n montrons que u_n est négligeable devant $u_n+v_n=e^{n\alpha}$. On a $\frac{u_n}{e^{n\alpha}}\sim\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{e\alpha}{e^\alpha}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. De l'inégalité $e^x\geqslant x+1$, on déduit $e^\alpha=ee^{\alpha-1}\geqslant e\alpha$ et donc $\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{e\alpha}{e^\alpha}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^{n\alpha}}=0$. Puisque u_n est négligeable devant $e^{n\alpha}$, on a

$$\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\sim} e^{n\alpha}.}$$

Dans le cas $\alpha>1$, la méthode précédente ne donne rien. En effet, les termes de la somme définissant u_n décroissent, le terme prépondérant est le premier qui vaut 1 et chaque terme tend vers 0. Par contre, on peut l'appliquer à v_n. On obtient, en mettant $\frac{(n\alpha)^n}{n!}$ en facteur,

$$v_n=\frac{(n\alpha)^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n\alpha)^{k-n}n!}{k!}=\frac{(n\alpha)^n}{n!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n!(n\alpha)^k}{(n+k)!}.$$

Cette fois-ci, on pose, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$u_{n,k}=\frac{n!(n\alpha)^k}{(n+k)!}.$$

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k} = \alpha^k$ et, d'autre part, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $|u_{n,k}| \leqslant \alpha^k$. La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} u_{n,k}$ convergeant uniformément par rapport à n, on peut comme précédemment intervertir sommation et limite, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n!(n\alpha)^k}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

et donc

$$v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{(n\alpha)^n}{n!}.$$

Avec l'équivalent de Stirling, cela peut s'écrire encore

$$\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{(e\alpha)^n}{\sqrt{2\pi n}}.}$$

Cette fois, on trouve que v_n est négligeable devant $e^{n\alpha}$ et donc que

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} e^{n\alpha},} \quad \triangleleft$$

Le cas $\alpha = 1$ est plus difficile et nécessite l'utilisation de la méthode de Laplace. Le lecteur pourra trouver la solution dans CHAMBERT-LOIR (A.), FERMIGIER (S.), MAILLOT (V.), Exercices de mathématiques pour l'agrégation. *Masson 1994, exercices 6-8, p. 117-119.*

L'exercice qui suit est consacré au produit de Cauchy. On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (réelles ou complexes) est la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est de même de $\sum w_n$ et

$$\mathrm{W} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \mathrm{UV}$$

Le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut diverger. Toutefois, l'exercice suivant montre qu'au sens de Cesàro (c'est-à-dire en moyenne), il converge toujours vers UV. *En particulier, si $\sum w_n$ converge, sa somme ne peut être que le produit* UV *en vertu du théorème de Cesàro.*

3.40. Convergence en moyenne d'un produit de Cauchy

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes convergentes. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ et $P_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$. Étudier la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$.

(École polytechnique)

Solution.

La série $\sum c_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$. Comme rappelé ci-dessus, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, il en va de même de la série $\sum c_n$ et dans ces conditions, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Dans ce cas, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le produit des sommes des séries et il en va de même de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'après le théorème de Cesàro.

Nous allons voir dans cet exercice que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont seulement convergentes.

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} B_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B.$$

Pour un entier naturel n, on peut écrire,

$$S_n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_k b_{p-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{n-k} b_i = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$$
$$= \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} B_l$$

Exprimons maintenant P_N en fonction des termes des suites (A_n) et (B_n). On obtient, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_N} &= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{S}_n = \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\mathrm{B}_k \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} a_{n-k}\mathrm{B}_k = \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}_k \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} a_{n-k} \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_{\mathrm{N}-k}\mathrm{B}_k.
\end{aligned}$$

Montrons que $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{P_N} = \mathrm{AB}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|\mathrm{P_N} - \mathrm{AB}| &= \left|\frac{1}{\mathrm{N}+1}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}(\mathrm{A}_{\mathrm{N}-k}\mathrm{B}_k - \mathrm{AB})\right)\right| \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\left((\mathrm{A}_{\mathrm{N}-k} - \mathrm{A})\mathrm{B}_k + \mathrm{A}(\mathrm{B}_k - \mathrm{B})\right)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\left(|\mathrm{A}_{\mathrm{N}-k} - \mathrm{A}||\mathrm{B}_k| + |\mathrm{A}||\mathrm{B}_k - \mathrm{B}|\right)
\end{aligned}$$

La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente. Soit $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que pour tout $k \geqslant 0$, $|\mathrm{B}_k| \leqslant \mathrm{M}$. On obtient la majoration

$$\begin{aligned}
|\mathrm{P_N} - \mathrm{AB}| &\leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{A}_{\mathrm{N}-k} - \mathrm{A}| + \frac{|\mathrm{A}|}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{B}_k - \mathrm{B}| \\
&= \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{A}_k - \mathrm{A}| + \frac{|\mathrm{A}|}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{B}_k - \mathrm{B}|.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} |\mathrm{A_N} - \mathrm{A}| = \lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} |\mathrm{B_N} - \mathrm{B}| = 0$, on obtient par théorème de Cesàro $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{A}_k - \mathrm{A}| = \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{B}_k - \mathrm{B}| = 0$ et donc $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{P_N} = \mathrm{AB}$. On conclut que

$$\boxed{\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{P_N} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).} \lhd$$

Les exercices suivants sont consacrés aux familles sommables et aux séries doubles. Rappelons quelques résultats utiles : une famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de réels positifs est sommable s'il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que, pour tout $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ fini, $\sum\limits_{i\in\mathrm{J}} u_i \leqslant \mathrm{M}$. La somme $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} u_i$ est alors la borne supérieure des sommes *finies* $\sum_{i\in J} u_i$ *où* J *décrit l'ensemble des parties finies de* I. *Dans ces conditions, les* i *pour lesquels* $u_i \neq 0$ *forment un ensemble dénombrable et toute sous-famille est encore sommable.*

Le théorème d'associativité, ou encore théorème de sommation par paquets, constitue une proposition essentielle. Il affirme que si $(u_i)_{i\in I}$ *est une famille de réels positifs, et* $(I_k)_{k\in K}$ *une partition de* I, *on a l'équivalence des conditions suivantes :*

(i) $\forall k \in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ *est sommable et* $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ *est sommable ;*

(ii) $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable.*

Dans ces conditions, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres réels ou complexes est dite sommable si la famille* $(|u_i|)_{i\in I}$ *l'est. Dans ces conditions (avec* I *dénombrable), pour toute suite croissante* $(J_n)_{n\geqslant 0}$ *de parties finies de* I *recouvrant* I, $\sum_{i\in J_n} u_i$ *tend, quand* n *tend vers* $+\infty$, *vers un réel* L *indépendant de la suite* $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *choisie. Par définition,* L *est la somme des* u_i, *notée* $\sum_{i\in I} u_i$.

Si $(u_i)_{i\in I}$ *est une famille sommable,* $(I_k)_{k\geqslant 0}$ *une partition de* I, *on a encore la sommabilité de la famille* $\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ *et*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i.$$

Ce théorème s'exprime ainsi pour les séries doubles : si $(u_{p,q})_{p,q\geqslant 0}$ *est une famille de nombres réels ou complexes, la famille est sommable dès lors qu'une des séries suivantes est définie et convergente :*

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{q\in\mathbb{N}} |u_{p,q}| \quad \textit{ou} \quad \sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{p\in\mathbb{N}} |u_{p,q}|,$$

et dans ces conditions, $\sum_{p,q\geqslant 0} u_{p,q} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{q\in\mathbb{N}} u_{p,q} = \sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{p,q}$.

3.41. Application du théorème d'associativité

Établir, pour tout x réel tel que $|x| < 1$, les identités

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Prenons $x \in]-1,1[$.

• On peut écrire de manière formelle (les justifications viendront ensuite)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} x^{(2n-1)m} \text{ (somme d'une série géométrique)}, \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{(2n-1)m} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(2n+1)m} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (x^{2m})^n\right) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{1-x^{2m}}.
\end{aligned}$$

Ces égalités, et la convergence des séries en question, seront justifiées par le théorème d'associativité dès lors que nous aurons prouvé la sommabilité de la famille $(x^{(2n+1)m})_{\substack{n\geqslant 0\\ m\geqslant 1}}$. Comme $|x| < 1$, la série $\sum_n |x|^{(2n+1)m}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^{(2n+1)m} = \frac{|x|^m}{1-|x|^{2m}} \underset{m\to+\infty}{\sim} |x|^m.$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^{(2n+1)m}\right)$ converge et le théorème d'associativité assure la sommabilité de la famille $(x^{(2n+1)m})_{\substack{n\geqslant 0\\ m\geqslant 1}}$.

On conclut que les séries $\sum \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ et $\sum \frac{x^n}{1-x^{2n}}$ convergent et que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}.}$$

• Procédons de même par un calcul formel pour la seconde identité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} (x^{2^{n+1}})^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} x^{2^n(2m+1)}.$$

En remarquant que tout entier $k \geqslant 1$ s'écrit de manière unique $k = 2^n(2m+1)$ avec $n \geqslant 0$ et $m \geqslant 0$, par associativité formelle, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

La convergence des séries en question et les égalités sont justifiées par le théorème d'associativité, puisque la famille $(x^k)_{k\geqslant 1}$ est sommable ($|x| < 1$). On conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.} \lhd$$

3.42. Étude de sommabilité

Soit a et b des réels strictement positifs. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a^m + b^n}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable si, et seulement si, $a > 1$ et $b > 1$.

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

Supposons $a \leqslant 1$. Alors, la sous-famille $\left(\dfrac{1}{a^m + b^0}\right)_{m\geqslant 0}$ n'est pas sommable puisque la série de terme général $\dfrac{1}{a^m + 1}$ est grossièrement divergente. Il s'ensuit que la famille $\left(\dfrac{1}{a^m + b^n}\right)_{m,n\geqslant 0}$ ne peut être sommable. Il en va de même si $b \geqslant 1$.

Supposons $a < 1$ et $b < 1$. On va utiliser le théorème d'associativité en partitionnant les indices (m, n) selon la valeur de $m + n = p$. La famille étudiée est donc sommable si la série

$$\sum_p \Bigg(\sum_{m+n=p} \frac{1}{a^m + b^n} \Bigg) \text{ converge.}$$

Notons $c = \min(a, b) > 1$. On a

$$\sum_{m+n=p} \frac{1}{a^m + b^n} \leqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{c^k + c^{p-k}} \leqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{c^{p/2}} = \frac{(p+1)}{\sqrt{c^p}} = o\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

car l'un des deux termes de la somme $c^k + c^{p-k}$ est plus grand que $c^{p/2}$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_p \Big(\sum_{m+n=p} \dfrac{1}{a^m + b^n} \Big)$ converge et on conclut que la famille $\left(\dfrac{1}{a^m + b^n}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable. $\lhd$

3.43. Convergence et somme d'une série double

> Établir la convergence et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn}$.
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

Pour n fixé, $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{m^2n}$ de sorte que la série $\sum\limits_m \dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn}$ converge. Pour calculer sa somme, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{m^2n+n^2n+2mn}=\frac{1}{mn(m+n+2)}=\frac{1}{n(n+2)}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

et on obtient $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2n+n^2n+2mn}=\dfrac{1}{n(n+2)}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+n+2}\right)$.

Posons et calculons $u_n=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+n+2}\right)$:

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n+2}\frac{1}{m}-\sum_{m=N+1}^{N+n+2}\frac{1}{m}\right)=\sum_{m=1}^{n+2}\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Classiquement, on a $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$ et donc $\dfrac{1}{n(n+2)}u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$. Grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série double étudiée converge.

Remarquons que d'après le théorème d'associativité, la famille positive $\left(\dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn}\right)_{n,m\geqslant 1}$ *est sommable.*

Calculons la valeur de sa somme, *i.e.* la somme de la série $\sum\frac{1}{n(n+2)}u_n$. Pour $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}u_n&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{u_n}{n}-\frac{u_n}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n}{n}-\sum_{n=3}^{N+2}\frac{u_{n-2}}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\sum_{n=3}^{N+2}\frac{u_n-u_{n-2}}{n}-\frac{u_{N+1}}{N+1}-\frac{u_{N+2}}{N+2}\right).\end{aligned}$$

Simplifions l'expression de la dernière somme en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{u_n-u_{n-2}}{n}&=\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)\\&=\sum_{n=3}^{N+2}\left(\frac{3}{2n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}\right)\\&=\frac{3}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}-\sum_{n=4}^{N+3}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+4}\frac{1}{n}\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-\frac{3}{2(N+3)}-\frac{1}{2(N+4)}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{u_n-u_{n-2}}{n}=\frac{5}{8}\cdot$

Sachant que $\displaystyle\frac{u_N}{N}\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\ln N}{N}$, on obtient $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{u_N}{N}=0$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}u_n=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{5}{8}\right)$. On calcule $u_1=\dfrac{11}{6}$ et $u_2=\dfrac{25}{12}$ et on conclut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}u_n=\frac{7}{4}\cdot$

Conclusion. La série double $\displaystyle\sum_{m,n}\frac{1}{m^2n+n^2m+2mn}$ converge et sa somme est $\dfrac{7}{4}\cdot$ ◁

3.44. Étude de séries doubles

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum\frac{a_n}{n(n+1)}$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}$ existe et comparer sa valeur à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

2. On suppose que la série $\sum\sqrt{n}a_n$ converge et on pose pour $n\geqslant 0$, $\displaystyle w_n=\sum_{p=n}^{+\infty}a_p^2$. Montrer l'existence de w_n et la convergence de la série $\displaystyle\sum\sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{a_n}{n(n+1)} \leqslant a_n$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ converge.

Posons pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $u_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{ka_n}{n(n+1)} \text{ si } n \geqslant k \\ 0 \text{ si } n < k \end{cases}$. Nous avons donc à montrer la convergence de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{k,n}$. Il s'agit ici d'une série double à termes positifs. La convergence de cette série équivaut donc à celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_{k,n}$ *i.e.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_{k,n}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k,n} = \frac{a_n}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{a_n}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{a_n}{2}.$$

Donc, comme par hypothèse, $\sum \dfrac{a_n}{2}$ converge, la famille de réels positifs $(u_{k,n})_{k,n\geqslant 1}$ est sommable et

$$\sum_{k,n\geqslant 1} u_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

En intervertissant les sommations, il vient

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{ka_n}{n(n+1)}.$$

On conclut donc que la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

2. • Si $n \geqslant 1$, $a_n \leqslant \sqrt{n}a_n$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série des a_n converge. En particulier, a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, pour n assez grand, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Dans ces conditions, $a_n^2 \leqslant a_n$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série des a_n^2 converge. L'existence des w_n est donc prouvée.

• Posons pour $n \geqslant 0$, $b_n = \sqrt{n}a_n$. La série $\sum b_n$ converge par hypothèse. On a $\sqrt{\dfrac{w_n}{n}} = \sqrt{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{b_k^2}{kn}}$.

Remarquons que si $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de réels positifs, on a

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2,$$

ce qui s'écrit encore,

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

Par conséquent, pour tout $\mathrm{N}\geqslant n$, on peut écrire

$$\sqrt{\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}\frac{b_k^2}{kn}}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{b_k}{\sqrt{nk}}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, il reste $\sqrt{\dfrac{w_n}{n}}\leqslant\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{b_k}{\sqrt{nk}}$. Par conséquent, pour $\mathrm{N}\geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sqrt{\frac{w_n}{n}}\leqslant\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{b_k}{\sqrt{kn}}$$

Or la famille des $\dfrac{b_k}{\sqrt{kn}}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\geqslant n$ est sommable : en effet, comme cette famille est constitué de réels positifs, il suffit de vérifier que la série obtenue par interversion des sommations, à savoir $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{b_k}{\sqrt{kn}}$, converge. Or, pour $k\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{b_k}{\sqrt{kn}}=\frac{b_k}{\sqrt{k}}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{b_k}{\sqrt{k}}\int_0^{k-1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ puisque $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ (la fonction $x\longmapsto 1/\sqrt{x}$ est continue, décroissante et intégrable sur $]0,k-1]$). Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{b_k}{\sqrt{kn}}\leqslant\frac{b_k}{\sqrt{k}}2\sqrt{k-1}\leqslant 2b_k$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{b_k}{\sqrt{kn}}$ converge. Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sqrt{\frac{w_n}{n}}\leqslant\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\k\geqslant n}}\frac{b_k}{\sqrt{kn}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{b_k}{\sqrt{kn}},$$

ce qui assure la convergence de la série de terme général $\sqrt{\dfrac{w_n}{n}}$. ◁

3.45. Inégalité de Carleman (1923)

Montrer qu'il existe une constante universelle C telle que, pour toute série convergente à termes positifs $\sum a_n$, on ait l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \mathrm{C} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Quelle est la plus petite valeur possible de C ?

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

• Dans un premier temps, il paraît naturel d'exploiter directement l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Malheureusement, la famille $u_{k,n}$ définie par $u_{k,n} = \dfrac{a_k}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ n'est pas en général sommable puisque si $a_k \neq 0$, $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} u_{k,n}$ diverge.

• Écrivons plutôt

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \frac{\sqrt[n]{(1a_1)(2a_2)\dots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} ka_k.$$

Nous allons user de l'identité $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{k}$; on peut écrire

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n+1)}.$$

• La famille $(v_{k,n})_{k,n\geqslant 1}$ définie par $v_{k,n} = \dfrac{ka_k}{n(n+1)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et 0 sinon, est sommable puisqu'elle est positive, que pour k fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{n=k}^{+\infty} v_{k,n} = ka_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ka_k \frac{1}{k} = a_k$$

et que la série de terme général a_k est convergente.

• La quantité $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$ admet une limite en $+\infty$ puisque la formule de Stirling donne

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{e}{n} = e.$$

Par conséquent, il existe C $\geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant$ C.

Ainsi, si N $\geqslant 1$, $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum\limits_{k=1}^{n} v_{k,n} \leqslant \mathrm{C} \sum\limits_{k=1}^{n} v_{k,n}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C} \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \leqslant \mathrm{C} \sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} v_{k,n}\\ &\leqslant \mathrm{C} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_{k,n} = \mathrm{C} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.\end{aligned}$$

La série $\sum \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ étant à termes positifs, elle est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \mathrm{C} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

• Recherchons maintenant la meilleure constante C. Nous allons prouver qu'en fait $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant e$. Cette inégalité est équivalente à

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln k \ \text{ ou encore à } (n+1)\ln(n+1) - n \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \ln k.$$

Or pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$, on a $\ln k \geqslant \int_{k-1}^{k} \ln x \mathrm{d}x$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ln k = \sum_{k=2}^{n+1} \ln k \geqslant \int_1^{n+1} \ln x \mathrm{d}x$$

et comme

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} \ln x \mathrm{d}x = [x(\ln x - 1)]_1^{n+1} &= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (-1)\\ &= (n+1)\ln(n+1) - n,\end{aligned}$$

on a bien l'inégalité. La constante C $= e$ convient.

• C'est en fait la meilleure constante possible. Soit C une constante réalisant l'inégalité. Il y a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique lorsque tous les termes sont égaux : $1a_1 = 2a_2 = \ldots = na_n$. On aurait envie de choisir $a_k = \dfrac{1}{k}$ mais la série harmonique diverge. Aussi, fixons N un entier naturel non nul et posons $a_k = \dfrac{1}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant$ N et $a_k = 0$ pour $k >$ N. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \mathrm{C} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\sim} \mathrm{C} \ln \mathrm{N},$$

tandis que $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$ est le terme général d'une série divergente. Par conséquent, la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ est équivalent à $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{e}{n} \underset{N\to\infty}{\sim} e \ln N$. Nécessairement, $e \leqslant C$.

Conclusion. Pour toute série $\sum a_n$ à termes positifs, on a l'inégalité

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

et e est la meilleure constante réalisant cette inégalité. ◁

Bien qu'il n'utilise pas la théorie des familles sommables, nous avons tenu à rapprocher l'exercice suivant de l'inégalité de Carleman : si cette dernière permettait de majorer la somme de la série des moyennes géométriques des n premiers termes d'une suite (a_n), l'inégalité de Hardy s'avère être un résultat analogue sur les moyennes harmoniques ; en effet, si dans l'inégalité de Carleman on remplace les a_n par leurs inverses et les moyennes géométriques par des moyennes harmoniques, on tombe sur l'inégalité de Hardy.

3.46. Inégalité de Hardy

Établir l'existence d'une constante $K > 0$ telle que, pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs avec $\sum \dfrac{1}{a_n}$ convergente, on ait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

On pourra commencer par établir que

$$\frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leqslant \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

Quelle est la meilleure constante K possible ?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \dfrac{n}{a_1 + \dots + a_n}$.

- Soit $n \geqslant 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{a_k}}\sqrt{a_k}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{a_1+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right).$$

Par conséquent, $u_n \leqslant 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k n(n+1)^2}$. On a pour $\mathrm{N} \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n &\leqslant 4\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k n(n+1)^2} = 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{k^2}{a_k n(n+1)^2}\\ &= 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{k^2}{a_k}\left(\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)^2}\right).\end{aligned}$$

Majorons $\sum\limits_{n=k}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \geqslant \frac{2n}{n^2(n+1)^2} = \frac{2}{n(n+1)^2},$$

et on en déduit que

$$\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{2k^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n \leqslant 4\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{k^2}{a_k}\frac{1}{2k^2} \leqslant 2\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

La convergence de la série de terme général u_n est donc garantie et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+\cdots+a_n} \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

La constante $\mathrm{K} = 2$ satisfait l'inégalité ; nous allons prouver maintenant que c'est la plus petite possible.

Puisque la moyenne harmonique est inférieure ou égale à la moyenne géométrique, l'exercice précédent (3.45) permet d'établir directement *l'existence de* K *(en remarquant que* a_n *est changé en* $\dfrac{1}{a_n}$*) et de majorer* K *par* e.

• Soit K une constante satisfaisant la condition de l'énoncé. Pour garantir l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suffirait que pour k entier non nul $\dfrac{k}{\sqrt{a_k}} = \sqrt{a_k}$ *i.e.* $a_k = k$. Malheureusement, la série des $1/k$ est divergente. L'idée est prendre $a_k = k$ jusqu'à un certain rang, puis de prendre $\dfrac{1}{a_k}$ très petit au-delà.

Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$. Pour $n \leqslant \mathrm{N}$, on pose $a_n = n$ et pour $n > \mathrm{N}$, $a_n = 2^n$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} + 1 \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\sim} \ln \mathrm{N}$$

$$\text{et} \quad \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \mathrm{K} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{n}{a_1 + \cdots + a_n} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{2}{n+1}$, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2}{n+1} \leqslant \mathrm{K} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}, \text{ c'est-à-dire } \frac{2}{\mathrm{K}} \leqslant \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n+1}} \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\sim} \frac{\ln \mathrm{N}}{\ln \mathrm{N}} = 1.$$

On en déduit que $2 \leqslant \mathrm{K}$.

Conclusion. On a pour toute suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$ converge l'inégalité

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.}$$

et 2 est la meilleure constante possible. ◁

On peut se demander si un résultat analogue existe pour la moyenne arithmétique : la réponse est non puisque, si l'on prend $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ *pour* $n \geqslant 1$, *la série* $\sum a_n$ *converge mais la moyenne*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n}$$

n'est pas le terme général d'une série convergente.

Terminons maintenant par deux exercices portant sur l'étude de l'action sur une série d'une permutation de ses termes. Dans le premier exercice, on étudie la situation lorsque la série est absolument convergente : on constate que la nouvelle série est encore convergente et de même somme (notons qu'il s'agit là d'un résultat de cours sur les familles sommables) ; inversement, si $\sum u_{\sigma(n)}$ converge pour toute permutation σ, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans le second exercice, on prouvera un résultat troublant sur les séries semi-convergentes réelles : par une permutation idoine, il est possible d'obtenir une somme arbitrairement fixée (théorème de Riemann).

3.47. Convergence commutative

1. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Établir l'équivalence

$$\sum |a_n| \text{ converge } \Longleftrightarrow \forall \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}),\ \sum a_{\sigma(n)} \text{ converge.}$$

2. Soit (c_n) une suite de nombres complexes non nuls. Établir l'équivalence

$$\sum |c_n - 1| \text{ converge } \Longleftrightarrow\ \exists a \in \mathbb{C}^*, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}),\ \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} c_{\sigma(k)} = a.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. • Supposons que $\sum |a_n|$ converge. Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$. Alors, pour tout N de $\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On en déduit que $\sum |a_{\sigma(n)}|$ converge et donc que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge.

Montrons, de plus, ce qui nous sera utile pour la suite de l'exercice, que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et un entier n_0 tel que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| \leqslant \varepsilon$. Posons $n_1 = \max_{k\in[\![0,n_0]\!]} \sigma^{-1}(k)$. On a alors $\sigma(n) > n_0$ pour $n > n_1$. Pour $\mathrm{N} > n_0, n_1$, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\right| \leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| \leqslant 2\varepsilon,$$

car les termes de la suite (a_n) d'indice inférieur à n_0 sont présents dans les deux sommes. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité des sommes.

• Supposons maintenant que $\sum |a_n|$ diverge. Posons, pour tout entier n, $x_n = \mathrm{Re}(a_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(a_n)$. Puisque, pour tout n, $|a_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leqslant |x_n| + |y_n|$, on en déduit que $\sum |x_n|$ ou $\sum |y_n|$ diverge.

Montrons que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ diverge, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ tel que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge. Ceci nous montrera qu'on peut trouver $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ tel que $\sum x_{\sigma(n)}$ ou $\sum y_{\sigma(n)}$ diverge. On pourra conclure que $\sum a_{\sigma(n)}$ diverge.

Si (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang, $\sum u_n$ diverge et $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ convient. Sinon, il y a une infinité de termes strictement positifs et une infinité de termes strictement négatifs. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Puisque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, l'une des deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ diverge. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comportant les termes de la suite positifs ou nuls et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comportant les termes strictement négatifs. De ce qui précède, on déduit que $\sum u_{\varphi(n)}$ ou $\sum u_{\psi(n)}$ diverge. En effet, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\varphi(\mathrm{N})} u_n^+$ et $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_{\psi(n)} = -\sum_{n=0}^{\psi(\mathrm{N})} u_n^-$. Supposons que $\sum u_{\varphi(n)}$ diverge. Alors $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_{\varphi(n)} = +\infty$. On définit une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

* n_1 est le plus petit entier tel $u_{\psi(0)} + \sum_{j=0}^{n_1} u_{\varphi(j)} > 1$; n_1 existe car $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_{\varphi(n)} = +\infty$;

* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant déterminés, n_{k+1} est le plus petit entier supérieur à n_k tel que $u_{\psi(k)} + \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} u_{\varphi(j)} > 1$; n_{k+1} existe pour les mêmes raisons que n_1.

Définissons maintenant σ, élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N})$. On pose pour $n \in [\![0, n_1]\!]$, $\sigma(n) = \varphi(n)$ et $\sigma(n_1 + 1) = \psi(0)$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour $n \in [\![n_k + k + 1, n_{k+1} + k]\!]$, $\sigma(n) = \varphi(n - k)$ et $\sigma(n_{k+1} + k + 1) = \psi(k)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, σ réalise une bijection de $[\![n_k + k + 1, n_{k+1} + k]\!]$ sur $\varphi([\![n_k + 1, n_{k+1}]\!])$; σ réalise donc une bijection de $\mathbb{N} \setminus \{n_k + k, k \in \mathbb{N}^*\}$ sur $\varphi(\mathbb{N})$. D'autre part, σ réalise une bijection de $\{n_k + k, k \in \mathbb{N}^*\}$ sur $\psi(\mathbb{N})$. Puisque $\{\varphi(\mathbb{N}), \psi(\mathbb{N})\}$ est une partition de $\mathbb{N}$, σ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N})$.

Enfin, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{n_k+k+1} u_{\sigma(n)} \geqslant k$, donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$

diverge. Si c'est $\sum u_{\psi(n)}$ qui diverge, il suffit de considérer la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de lui appliquer la démonstration qui précède pour montrer l'existence de $\sigma \in \mathcal{S}$ tel que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \neq 0$. On note ρ_n le module de c_n et θ_n la mesure principale de l'argument de c_n ($\theta_n \in]-\pi, \pi]$). On a alors

$$\begin{aligned}|c_n - 1|^2 &= |\rho_n e^{i\theta_n} - 1|^2 = \rho_n^2 + 1 - 2\rho_n \cos\theta_n \\ &= (\rho_n - 1)^2 + 2\rho_n(1 - 2\cos\theta_n) = (\rho_n - 1)^2 + 4\rho_n \sin^2\frac{\theta_n}{2}.\end{aligned}$$

• Supposons que $\sum |c_n - 1|$ converge. Pour σ élément de $\mathcal{S}(\mathbb{N})$, on pose, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P_N} = \prod_{n=0}^{\mathrm{N}} c_{\sigma(n)} = \prod_{n=0}^{\mathrm{N}} \rho_{\sigma(n)} \prod_{n=0}^{\mathrm{N}} e^{i\theta_{\sigma(n)}} = \left(\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} \rho_{\sigma(n)}\right) \exp\left(i \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \theta_{\sigma(n)}\right).$$

Il résulte de l'expression de $|c_n - 1|^2$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\rho_n - 1| \leqslant |c_n - 1| \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\rho_n}\left|\sin\frac{\theta_n}{2}\right| \leqslant |c_n - 1|.$$

On en déduit que $\sum |\rho_n - 1|$ converge et que $\sum 2\sqrt{\rho_n}\left|\sin\frac{\theta_n}{2}\right|$ converge. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{\theta_n}{2} = 0$. Sachant que $\theta_n \in]-\pi, \pi]$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\arcsin\left(\sin\frac{\theta_n}{2}\right) = 0$, puis que $2\sqrt{\rho_n}\left|\sin\frac{\theta_n}{2}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \left|\frac{\theta_n}{2}\right|$. Ceci montre que $\sum |\theta_n|$ converge.

De la question 1, on déduit que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, les séries $\sum(\rho_{\sigma(n)} - 1)$ et $\sum \theta_{\sigma(n)}$ convergent et que de plus $\Phi = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \theta_{\sigma(n)}$ est indépendant du choix de σ. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{i\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \theta_{\sigma(n)}\right)} = e^{i\Phi}$.

Posons $\mathrm{R_N} = \prod\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \rho_{\sigma(n)}$; alors $\ln \mathrm{R_N} = \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \ln \rho_{\sigma(n)}$. La suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 ; on en déduit que $|\ln \rho_{\sigma(n)}| \underset{n\to\infty}{\sim} |\rho_{\sigma(n)} - 1|$, puis que $\sum |\ln \rho_{\sigma(n)}|$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln \rho_{\sigma(n)} = \mathrm{S}$ est indépendant du choix de σ. On obtient $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{R_N} = e^{\mathrm{S}}$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P_N} = e^{\mathrm{S}} e^{i\Phi} = a \neq 0$. De plus a est indépendant de σ.

• Réciproquement, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que , pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} c_{\sigma(k)} = a$. Notons R le module de a et Φ la mesure principale de l'argument de a.

Fixons $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ et reprenons les notations précédentes. On a $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N = \lim\limits_{N\to+\infty} |P_N| = |a| = R$. On en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \ln \rho_{\sigma(n)}$ $= \ln R$. On a donc montré que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, $\sum \ln \rho_{\sigma(n)}$ converge. On en déduit que $\sum |\ln \rho_n|$ converge. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 1$ et donc $|\rho_n - 1| \underset{n\to\infty}{\sim} |\ln \rho_n|$. On a donc également $\sum |\rho_n - 1|$ convergente.

Toujours pour $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ fixé, posons $\Phi_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \theta_{\sigma(n)}$ $(N \in \mathbb{N})$. On a

$$\lim_{N\to+\infty} e^{i\Phi_N} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_N}{|P_N|} = \frac{a}{R} = e^{i\Phi} \quad \text{et}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{i\theta_{\sigma(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{i\Phi_n}}{e^{i\Phi_{n-1}}} = 1.$$

Sachant que $|e^{i\theta_{\sigma(n)}} - 1| = 2\sin\dfrac{\theta_{\sigma(n)}}{2}$ et que $\theta_{\sigma(n)} \in]-\pi, \pi]$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_{\sigma(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\arcsin\left(\sin\dfrac{\theta_{\sigma(n)}}{2}\right) = 0$.

Nous savons que $\lim\limits_{N\to+\infty} e^{i(\Phi_N - \Phi)} = 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $k_N \in \mathbb{Z}$ tel que $\Phi_N - \Phi - 2k_N\pi \in]-\pi, \pi]$. Sachant que $\lim\limits_{N\to+\infty} e^{i(\Phi_N - \Phi - 2k_N\pi)} = 1$, on montre, comme précédemment, que

$$\lim_{N\to+\infty} \Phi_N - \Phi - 2k_N\pi = 0.$$

On a alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \Phi_N - \Phi_{N-1} - 2\pi(k_N - k_{N-1}) = 0$. Sachant que $\lim\limits_{N\to+\infty} \Phi_N - \Phi_{N-1} = \lim\limits_{N\to+\infty} \theta_{\sigma(N)} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} k_N - k_{N-1}$ $= 0$. (k_N) étant une suite d'entiers, elle est constante, égale à k, pour N assez grand. On a donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \Phi_N - \Phi - 2k\pi = 0$. La suite (Φ_N) converge, c'est-à-dire que $\sum \theta_{\sigma(n)}$ converge. Cela étant vrai pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, on en déduit que $\sum |\theta_n|$ converge.

Reprenant l'égalité $|c_n - 1|^2 = (\rho_n - 1)^2 + 4\rho_n \sin^2 \dfrac{\theta_n}{2}$, on en déduit

$$|c_n - 1| \leqslant |\rho_n - 1| + 2\rho_n \left|\sin\frac{\theta_n}{2}\right|.$$

Or $\sum |\rho_n - 1|$ converge et $2\rho_n \left|\sin\dfrac{\theta_n}{2}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} |\theta_n|$ donc $\sum \rho_n \left|\sin\dfrac{\theta_n}{2}\right|$ converge, et finalement $\sum |c_n - 1|$ converge. ◁

3.48. Théorème de Riemann

Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.

(École polytechnique)

Solution.

• La série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente, donc la famille $(a_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas sommable. On note A (resp. B) l'ensemble des indices $n \geqslant 0$ tels que $a_n \geqslant 0$ (resp. $a_n < 0$). L'ensemble $\mathbb{N}$ est réunion disjointe de A et de B.

La partie A est infinie sinon, à partir d'un certain rang les a_n seraient négatifs et la convergence de la série équivaudrait à l'absolue convergence. Or $\sum a_n$ est semi-convergente. De même, B est infini.

• Les familles $(a_n)_{n\in\mathrm{A}}$ et $(a_n)_{n\in\mathrm{B}}$ ne sont pas sommables. En effet, supposons par exemple $(a_n)_{n\in\mathrm{A}}$ sommable. Alors si on pose pour $n \geqslant 0$ $a'_n = 0$ si $a_n < 0$ et $a'_n = a_n$ si $a_n \geqslant 0$, la série $\sum a'_n$ est absolument convergente et donc convergente. La série $\sum(a_n - a'_n)$ est donc convergente et même absolument convergente puisque $a_n - a'_n$ est de signe constant négatif. Comme $a_n = (a_n - a'_n) + a'_n$, a_n est la somme de termes généraux de deux séries absolument convergentes. Il s'ensuit que $\sum a_n$ est absolument convergente, ce qui est contraire à l'hypothèse.

De même, on montre que $(a_n)_{n\in\mathrm{B}}$ n'est pas sommable.

On va construire $\sigma(n)$ par récurrence sur n. On pose $\sigma(0) = 0$ et pour $n \geqslant 1$, deux cas se présentent :

(i) si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} \leqslant \alpha$, on va ajouter un terme positif : on prend pour $\sigma(n)$ le plus petit des entiers k de A distincts de $\sigma(0), \ldots, \sigma(n-1)$ (ce plus petit élément est bien défini).

(ii) si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$, on va ajouter un terme négatif : on prend pour $\sigma(n)$ le plus petit des entiers k de B distincts de $\sigma(0), \ldots, \sigma(n-1)$.

L'application σ est par construction injective. Montrons qu'elle est surjective. Imaginons un instant qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ qui ne soit pas dans l'image de σ. Supposons par exemple $\mathrm{N} \in \mathrm{A}$. Les $\sigma(k)$ dans A sont tous inférieurs à N et ils sont donc en nombre fini. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel tous les $\sigma(n)$ sont dans B. Par conséquent, si $n \geqslant n_0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$$

Comme cette série est à termes négatifs (sauf pour un nombre fini de termes), et que ses sommes partielles sont minorées, elle converge. La famille $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc sommable. Mais, à un nombre fini de termes près, la famille des $a_{\sigma(n)}$ est la famille $(a_n)_{n\in B}$ qui, elle, n'est pas sommable. La contradiction permet de conclure que σ est bijective.

• Il reste à prouver que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et est de somme α. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_n$ converge, a_n tend vers 0. On a également $a_{\sigma(n)}$ convergente vers 0. En effet, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que si $n \geqslant n_1$, $|a_n| \leqslant \varepsilon$. Par injectivité de σ, il n'y a qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(n) \leqslant n_1$. Soit donc $n_0 > \max\{k, \sigma(k) \leqslant n_1\}$. Si $n \geqslant n_0$, $\sigma(n) \geqslant n_1$ et $|a_{\sigma(n)}| \leqslant \varepsilon$.

• Il existe un rang $\mathrm{N} \geqslant n_0$ tel que $\sigma(\mathrm{N}) \in \mathrm{A}$ et $\sigma(\mathrm{N}+1) \in \mathrm{B}$ car on a vu que les $\sigma(n)$ ne pouvaient rester dans A (resp. B).

Posons pour $n \geqslant 0$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$. Montrons que si $n \geqslant \mathrm{N}$, $|\mathrm{S}_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$. Si $\sigma(\mathrm{N}) \in \mathrm{A}$, c'est que $\mathrm{S}_{\mathrm{N}-1} \leqslant \alpha$ et si $\sigma(\mathrm{N}+1) \in \mathrm{B}$, c'est que $\mathrm{S}_\mathrm{N} > \alpha$. Or $|\mathrm{S}_\mathrm{N} - \mathrm{S}_{\mathrm{N}-1}| = |a_{\sigma(\mathrm{N})}| \leqslant \varepsilon$. Donc S_N appartient à $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$.

Soit $n > \mathrm{N}$. Imaginons que $\mathrm{S}_n > \alpha + \varepsilon$. Comme on passe de S_{n-1} à S_n d'un saut de longueur $a_{\sigma(n)}$ inférieur ou égal à ε, on ne peut avoir $\mathrm{S}_{n-1} \leqslant \alpha$.

Cela entraine $a_{\sigma(n)} < 0$ et finalement $\mathrm{S}_{n-1} \geqslant \mathrm{S}_n$. Mais alors de proche en proche, on obtient $\alpha + \varepsilon < \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{S}_{n-1} \leqslant \mathrm{S}_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{S}_\mathrm{N}$. On obtient une contradiction. Donc $\mathrm{S}_n \leqslant \alpha + \varepsilon$.

Imaginons que $\mathrm{S}_n < \alpha - \varepsilon$. Comme on passe de S_{n-1} à S_n d'un saut de longueur $a_{\sigma(n)}$ inférieur ou égal à ε, on ne peut avoir $\mathrm{S}_{n-1} > \alpha$. Cela entraîne $a_{\sigma(n)} \geqslant 0$ et finalement $\mathrm{S}_{n-1} \leqslant \mathrm{S}_n$. Mais alors de proche en proche, on obtient $\alpha - \varepsilon > \mathrm{S}_n \geqslant \mathrm{S}_{n-1} \geqslant \mathrm{S}_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{S}_\mathrm{N}$. C'est encore une contradiction et $\mathrm{S}_n \geqslant \alpha - \varepsilon$.

Ainsi, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $|\mathrm{S}_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.

Conclusion. On a donc construit une bijection σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha.} \triangleleft$$

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle

À partir du XVII^{e} *siècle, le développement du calcul infinitésimal, motivé par de nombreux problèmes de cinématique, de mécanique, ou de calcul des variations, fait de la «fonction» l'objet central des mathématiques modernes, alors que jusque là, le «nombre» était la base de l'édifice mathématique. Nous devons à Bernoulli et Leibniz le terme même de «fonction» : pour Bernoulli (1698), une fonction de la variable x est «une quantité formée d'une manière quelconque à partir de x et de constantes». L'écriture $y = f(x)$ est introduite par Euler en 1734. Les fonctions sont représentées par des courbes dans le plan et Euler se demande si une courbe donnée correspond toujours à une fonction. C'est lui qui distingue les courbes continues, des courbes discontinues, qui sont le plus souvent, à cette époque, des graphes de fonctions continues par morceaux. Cette double conception des fonctions, comme expressions analytiques ou comme graphes du plan, ne sera pas vraiment éclaircie avant le* XIX^{e} *siècle (c'est Dirichlet qui donnera la définition moderne d'une fonction comme correspondance ; il proposera ainsi (en 1837) un exemple de fonction discontinue partout, la fonction χ définie par $\chi(x) = 1$ pour x rationnel et $\chi(x) = 0$ pour x irrationnel). Lagrange, cherchant à établir les fondements de l'Analyse, s'en tient au point de vue formel et refuse de se référer à toute notion de limite. Ces hésitations empêchent les mathématiciens du* XVIII^{e} *siècle de mener jusqu'à leur achèvement certains de leurs travaux, comme l'étude de l'équation des cordes vibrantes. C'est la génération suivante, avec entre autres Gauss, Cauchy, Bolzano et Abel, qui donnera dans la première moitié du* XIX^{e} *siècle un statut rigoureux aux notions de convergence, de continuité... Quant au concept de limite d'une fonction numérique, on doit sans doute sa première définition précise à Weierstrass. Les premiers exercices concernent cette dernière notion.*

4.1. Applications propres

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$;

(ii) pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathrm{K})$ est compact.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Supposons que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$. Soit K un compact. Comme K est fermé et f continue, $f^{-1}(\mathrm{K})$ est fermé. S'il n'est pas compact, c'est qu'il n'est pas borné. Dans ce cas, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $f^{-1}(\mathrm{K})$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty$. Mais alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x_n)| = +\infty$ ce qui est impossible puisque $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de K, donc est bornée.

• Réciproquement, supposons (ii). Soit A un réel positif. Par hypothèse, $f^{-1}([-\mathrm{A}, \mathrm{A}])$ est compact. En particulier, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $f^{-1}([-\mathrm{A}, \mathrm{A}]) \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Ainsi pour tout réel x vérifiant $|x| > \mathrm{M}$, on a $|f(x)| > \mathrm{A}$. Cela exprime exactement que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$. ◁

Une application qui vérifie ces conditions est dite propre.

4.2. Zéros d'une combinaison linéaire d'exponentielles

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des réels et $a_1, \ldots, a_n$ des complexes. On suppose que la fonction $\mathrm{F} : t \in \mathbb{C} \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{\omega_k t}$ est non nulle. Montrer que l'ensemble des parties réelles des zéros de F est borné.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

En regroupant les différents termes correspondant à une même valeur de ω_k, on peut se ramener au cas où les ω_k sont distincts. On peut même supposer que $\omega_1 < \cdots < \omega_n$ et qu'aucun des a_k n'est nul (par hypothèse, il en existe au moins un non nul).

Si les a_k sont tous réels et si on se restreint à t réel le résultat est assez clair. En effet, quand t tend vers $+\infty$ le terme $a_n e^{w_n t}$ domine tous les autres de sorte que $\mathrm{F}(t) \underset{+\infty}{\sim} a_n e^{w_n t}$. En particulier $\mathrm{F}(t) \neq 0$ pour t assez grand. De même on a $\mathrm{F}(t) \underset{-\infty}{\sim} a_1 e^{w_1 t}$ de sorte que $\mathrm{F}(t)$ ne s'annule pas non plus sur un voisinage de $-\infty$.

Dans le cas général, l'idée est exactement la même. Pour $t \in \mathbb{C}$ on pose $x = \mathrm{Re}(t)$. On a alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $|e^{\omega t}| = e^{\omega x}$. Si on écrit

$$\frac{F(t)}{a_n e^{\omega_n t}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} e^{(\omega_k - \omega_n)t}.$$

on remarque que

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} e^{(\omega_k - \omega_n)t} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} e^{(\omega_k - \omega_n)x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

car les réels $\omega_k - \omega_n$ sont tous < 0. La dernière expression est indépendante de la partie imaginaire de t. On peut donc trouver $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $x = \mathrm{Re}(t) \geqslant \Lambda$, on ait $\left| \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} e^{(\omega_k - \omega_n)t} \right| \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $\left| \frac{F(t)}{a_n e^{\omega_n t}} \right| \geqslant \frac{1}{2}$ grâce à l'inégalité triangulaire. *A fortiori*, on a $F(t) \neq 0$ si $x \geqslant A$. En mettant $a_1 e^{\omega_1 t}$ en facteur et en faisant tendre x vers $-\infty$, on démontre de même qu'il existe un réel B tel que $F(t) \neq 0$ si $x \leqslant B$. Les zéros de la fonction F ont donc une partie réelle qui appartient au segment $[A, B]$. ◁

Bien entendu, dans les cas concrets, un des outils essentiels pour calculer les limites est le développement limité. En voici un exemple.

4.3. Un calcul de limite

> Calculer la limite lorsque x tend vers 0^+ de $\dfrac{x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x}{(\sin x)^x - x^{\sin x}}$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$: les deux termes du numérateur et les deux termes du dénominateur tendent vers 1 quand x tend vers zéro. On va chercher un équivalent du numérateur et du dénominateur. On a $(\operatorname{sh} x)^x = \exp(x \ln \operatorname{sh} x)$ et

$$\begin{aligned} x \ln \operatorname{sh}(x) &= x \ln(x + o(x)) = x(\ln x + \ln(1 + o(1))) \\ &= x(\ln x + o(1)) = x \ln x + o(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{sh} x \ln x \underset{0^+}{\sim} x \ln x$ tend également vers 0, on peut écrire pour le numérateur

$$x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x = (\operatorname{sh} x)^x (e^{\ln x \operatorname{sh} x - x \ln \operatorname{sh} x} - 1) \underset{0^+}{\sim} \ln x \operatorname{sh} x - x \ln \operatorname{sh} x,$$

car $(\operatorname{sh} x)^x$ tend vers 1 par continuité de l'exponentielle et $e^u - 1$ est équivalent à u en 0. De plus, si on pose $u(x) = \ln x \operatorname{sh} x - x \ln \operatorname{sh} x$, on a

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\ln x - x\ln\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= x\ln x + \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3\ln x) - x\ln x - x\ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{x^3\ln x}{6} + o(x^3\ln x).
\end{aligned}
$$

On procède de même pour le dénominateur. On a également $x\ln\sin x$ et $\sin x\ln x$ qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0^+, si bien que

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} \underset{0^+}{\sim} x\ln\sin x - \ln x\sin x = v(x)$$

et

$$
\begin{aligned}
v(x) &= x\ln\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \ln x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= x\ln x + x\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) - x\ln x + \frac{x^3\ln x}{6} + o(x^3\ln x) \\
&= \frac{x^3\ln x}{6} + o(x^3\ln x).
\end{aligned}
$$

On conclut que $\dfrac{x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x}{(\sin x)^x - x^{\sin x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^3\ln x}{6}}{\frac{x^3\ln x}{6}} = 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x}{(\sin x)^x - x^{\sin x}} = 1.} \lhd$$

L'exercice suivant est à rapprocher de l'exercice 2.3 qui concerne les suites sous-additives.

4.4. Fonctions sur-additives

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

(i) pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(s+t) \geqslant f(s) + f(t)$;

(ii) il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leqslant \mathrm{M}t$.

Montrer l'existence de $\alpha = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t}$ et de $\beta = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t}$. Comparer $f(t)$ avec αt et βt pour $t \in \mathbb{R}_+$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On remarque que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t > 0$ on a $f(nt) = f(\underbrace{t + \cdots + t}_{n \text{ fois}}) \geqslant nf(t)$ et donc $\dfrac{f(nt)}{nt} \geqslant \dfrac{f(t)}{t}$. Si $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = \beta$, alors, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient, pour tout $t > 0$, $\beta \geqslant \dfrac{f(t)}{t}$ et donc $\beta \geqslant \sup\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$. L'inégalité dans l'autre sens étant évidente, on a nécessairement $\beta = \sup\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$. En partant de l'inégalité $\dfrac{f(t)}{t} \geqslant \dfrac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}$, on montre de même que la limite en 0 ne peut être que $\inf\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$.

Pour tout $t > 0$, on a $\dfrac{|f(t)|}{t} \leqslant \mathrm{M}$. Donc $\alpha = \inf\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$ et $\beta = \sup\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$ existent dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = \beta$ et que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t} = \alpha$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u > 0$ tel que $\beta - \varepsilon \leqslant \dfrac{f(u)}{u} \leqslant \beta$. Montrons que pour t assez grand, $\beta - 2\varepsilon \leqslant \dfrac{f(t)}{t} \leqslant \beta$. L'inégalité de droite est vérifiée par définition de β. Pour tout $t > 0$, écrivons $t = nu + r$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < u$ (cette écriture est unique et n est la partie entière de $\dfrac{t}{u}$). On obtient

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(nu+r)}{t} \geqslant \frac{f(nu)+f(r)}{t} \geqslant \frac{nf(u)}{t} + \frac{f(r)}{t}.$$

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{n}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}\left(\frac{t}{u}\right)}{t} = \dfrac{1}{u}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(r)}{t} = 0$, puisque on a $|f(r)| \leqslant \mathrm{M}r \leqslant \mathrm{M}u$. On en déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{nf(u)}{t} + \frac{f(r)}{t} \right) = \frac{f(u)}{u} \geqslant \beta - \varepsilon.$$

Donc pour t assez grand, $\dfrac{f(t)}{t} \geqslant \dfrac{nf(u)}{t} + \dfrac{f(r)}{t} \geqslant \beta - 2\varepsilon$. D'où le résultat annoncé.

On vient de traiter la limite en $+\infty$. En 0 la démarche est analogue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u > 0$ tel que $\alpha \leqslant \dfrac{f(u)}{u} \leqslant \alpha + \varepsilon$. Montrons que pour t assez proche de 0, $\alpha \leqslant \dfrac{f(t)}{t} \leqslant \alpha + 2\varepsilon$. Il n'y a qu'une inégalité à démontrer. Soit $t < u$. Cette fois-ci, on divise u par t : $u = nt + r$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < t$. Alors on a $f(u) \geqslant f(nt) + f(r) \geqslant nf(t) + f(r)$ et donc

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{f(u)}{nt} - \frac{f(r)}{nt} \leqslant \frac{f(u)}{u-r} + \frac{\mathrm{M}r}{u-r}.$$

Quand t tend vers 0, r tend vers 0 et

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u)}{u-r} + \frac{\mathrm{M}r}{u-r} = \frac{f(u)}{u} \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

On a bien, pour t assez proche de 0,

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{f(u)}{u-r} + \frac{\mathrm{M}r}{u-r} \leqslant \alpha + 2\varepsilon,$$

ce qui est le résultat annoncé.

Enfin, par définition de α et β, on a $\alpha t \leqslant f(t) \leqslant \beta t$ pour tout $t > 0$. ◁

Une fonction réglée est une fonction qui a en tout point une limite à gauche et à droite. Dans l'exercice suivant, on démontre qu'une telle fonction n'a pas trop de discontinuités. Indiquons que la solution fait appel à la propriété de Borel-Lebesgue.

4.5. Points de discontinuité d'une fonction réglée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réglée, c'est-à-dire possédant en tout point une limite à droite et une limite à gauche. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Nous noterons, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi(a)$ la limite de f à droite en a et $\psi(a)$ la limite à gauche de f en a. Nous commençons par démontrer le résultat sur un intervalle compact I. Cela suffira car $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable de segments.

La fonction f est discontinue en a si $\varphi(a) \neq f(a)$ ou $\psi(a) \neq f(a)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons

$$\mathrm{D}_\varepsilon = \{x \in \mathrm{I}, |\varphi(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon \text{ ou } |\psi(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Pour tout $a \in \mathrm{I}$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, a+\eta[,\ |f(x) - \varphi(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \forall x \in]a-\eta, a[,\ |f(x) - \psi(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si on prend x et x' dans $]a, a+\eta[$, on a donc $|f(x) - f(x')| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$. On en déduit, en faisant tendre x' vers x par valeurs supérieures ou inférieures que, pour tout $x \in]a, a+\eta[$,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\psi(x) - f(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

On peut faire exactement le même raisonnement sur $]a-\eta, a[$ et on trouve finalement, en posant $\mathrm{I}_a =]a-\eta, a+\eta[$ que, pour tout $x \in \mathrm{I}_a \setminus \{a\}$, on a

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\psi(x) - f(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}\cdot$$

On en déduit que a est le seul point de I_a qui peut appartenir à D_ε.

Pour tout $a \in \mathrm{I}$, on peut trouver un tel intervalle I_a. Les intervalles ouverts I_a (pour a variant dans I) recouvrent manifestement I. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, I est recouvert par un nombre fini de tels intervalles. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que $\mathrm{I} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{I}_{a_i}$. D'après ce qui précède D_ε contient au plus $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Il est donc fini. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{D}_{\frac{1}{n}}$ est fini. Or il est clair que l'ensemble des points de discontinuité de f sur I est égal à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{D}_{\frac{1}{n}}$. On en déduit que cet ensemble est au plus dénombrable, car réunion d'une famille dénombrable d'ensembles finis.

Passons maintenant à l'ensemble des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{D}$ cet ensemble et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[-n, n]$. Il résulte de ce qui précède que chaque $\mathcal{D}_n$ est au plus dénombrable. On en déduit que $\mathcal{D}$, qui est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, est également au plus dénombrable, ce qui est le résultat que nous voulions démontrer. $\lhd$

Le lecteur pourra montrer qu'une fonction réglée sur un segment $[a, b]$ *est limite uniforme sur* $[a, b]$ *d'une suite* (f_n) *de fonctions en escalier (cela apparaît pratiquement dans la solution ci-dessus). Cela donne un autre éclairage du résultat de l'exercice : comme une fonction en escalier n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, il existe un ensemble dénombrable* D *tel que toutes les fonctions* f_n *soient continues sur l'ensemble* $[a, b] \setminus \mathrm{D}$. *Le théorème de continuité des limites uniformes montre que* f *est continue sur* $[a, b] \setminus \mathrm{D}$.

Cela permet aussi de construire très facilement la théorie de l'intégrale pour les fonctions réglées. On montre que si (f_n) *est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$, *alors la suite des intégrales* $\int_a^b f_n$ *est une suite de Cauchy donc converge. On prouve alors que sa limite ne dépend pas de la suite* (f_n) *choisie, mais seulement de* f *et par définition on dit qu'il s'agit de* $\int_a^b f$.

Une fonction monotone est bien entendu réglée d'après le théorème des limites monotones. Dans l'énoncé suivant on montre que n'importe quel ensemble dénombrable est l'ensemble des points de discontinuité d'une telle fonction.

4.6. Discontinuités d'une fonction monotone

Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, monotone, dont A est l'ensemble des points de discontinuité.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit $n \longmapsto a_n$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a_n \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } x > a_n. \end{cases}$ La fonction f_n est croissante et continue en tout point de $\mathbb{R}$ distinct de a_n. Posons pour tout réel x, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement et f est définie sur $\mathbb{R}$. Chacune des fonctions f_n est croissante donc f est croissante.

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$. Montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2\varepsilon.$$

Soit $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} |x_0 - a_n| > 0$. Si $|x - x_0| < \alpha$, le segment $[x_0, x]$ ne contient aucun point a_n pour $1 \leqslant n \leqslant N$, donc les fonctions $f_1, \dots, f_N$ sont constantes sur $[x_0, x]$. On a donc, pour $|x - x_0| < \alpha$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant 2\varepsilon$. La fonction f est continue en x_0.

Soit $x_0 \in A$, $x_0 = a_k$. Montrons que f n'est pas continue en x_0. On définit ε et N comme dans le premier cas, en supposant de plus $N \geqslant k$. Par inégalité triangulaire, on a, pour tout réel x,

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f_n(x_0) \right| - 2\varepsilon.$$

Soit $\alpha = \min\limits_{\substack{1 \leqslant n \leqslant N \\ n \neq k}} |a_n - x_0| > 0$. Si $|x - x_0| \leqslant \alpha$, le segment $[x_0, x]$ ne contient aucun a_n avec $1 \leqslant n \leqslant N$ et $k \neq n$. On a donc pour $|x - x_0| < \alpha$, $|f(x) - f(x_0)| \geqslant |f_k(x) - f_k(x_0)| - 2\varepsilon$. On a $f_k(x_0) = f_k(a_k) = 0$ et pour $x > x_0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{k^2}\cdot$ On en déduit que, pour $x_0 < x < x_0 + \alpha$, on a $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \dfrac{1}{k^2} - 2\varepsilon$. En choisissant $\varepsilon < \dfrac{1}{2k^2}$, on voit que $f(x) - f(x_0)$

ne tend pas vers 0 quand x tend vers x_0 : la fonction f n'est pas continue en x_0. L'ensemble des points de discontinuité de f est A. $\lhd$

La caractérisation séquentielle de la continuité en un point affirme qu'une fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite x_n qui converge vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$. Quelle notion de continuité obtient-on en remplaçant la convergence des suites par la convergence en moyenne ? C'est ce qu'étudie l'exercice suivant.

4.7. Continuité au sens de Cesàro

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro en a si pour toute suite $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to a \Longrightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \to f(a).$$

Déterminer les fonctions continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$. Quitte à retrancher à f la constante $f(0)$ on peut supposer que $f(0) = 0$. Soit x, y deux réels. Considérons la suite (u_n) qui prend alternativement les valeurs x et y : $u_{2p} = x$ et $u_{2p+1} = y$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Il est aisé de voir que (u_n) converge en moyenne vers $\frac{x+y}{2}$ et de même que $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Grâce à l'hypothèse, on a donc

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

et cela vaut pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $y = 0$ on a donc $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ pour tout réel x. Par suite f est additive, c'est-à-dire vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x, y). Il est classique d'en déduire que f est $\mathbb{Q}$-linéaire. On a donc $f(r) = f(1)r$ pour tout rationnel r. Si x est un réel quelconque on peut trouver une suite de rationnels $(r_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers x. Par le théorème de Cesàro cette suite converge aussi vers x en moyenne et on a donc

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(r_1) + \cdots + f(r_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} f(1)\frac{r_1 + \cdots + r_n}{n} = f(1)x.$$

On en déduit que f est linéaire. Par conséquent on a montré qu'une fonction continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ est nécessairement une fonction affine. Réciproquement, il est clair que toutes les fonctions affines sont continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$. ◁

Les exercices qui suivent concernent les propriétés globales des fonctions continues. Dans les premiers énoncés interviennent deux propriétés topologiques fondamentales des fonctions continues, à savoir le fait que l'image par une fonction continue d'un compact est un compact (Weierstrass énonce notamment en 1861 qu'une fonction continue sur un segment et à valeurs réelles est bornée et admet un maximum et un minimum) et le théorème des valeurs intermédiaires. Ce dernier résultat fut longtemps considéré comme une évidence, Euler et Gauss l'utilisant sans plus de justifications. C'est Bolzano qui entreprit d'en donner une preuve en 1817.

Les trois questions de l'énoncé suivant sont indépendantes.

4.8. Existence d'un point fixe

1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ ou si $\mathrm{I} \subset f(\mathrm{I})$, alors f admet un point fixe dans I.

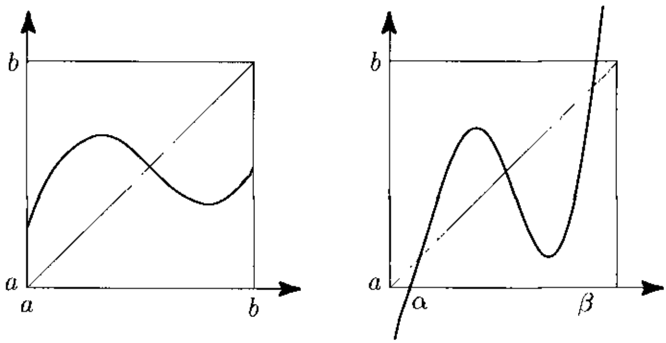
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

3. Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Posons $\mathrm{I} = [a,b]$ et $g(x) = f(x) - x$. Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ on a $g(a) \geqslant 0$, $g(b) \leqslant 0$ et, comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0$.



$f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ $\qquad$ $\mathrm{I} \subset \mathrm{F}(\mathrm{I})$

Si maintenant $I \subset f(I)$, il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. Alors $g(\alpha) \leqslant 0$ et $g(\beta) \geqslant 0$ de sorte que g s'annule dans ce cas aussi.

2. Posons $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x\}$. C'est une partie non vide ($1 \in A$) et minorée par 0. Soit $\alpha = \inf A$. On va montrer que $f(\alpha) = \alpha$. Soit $x \in A$. On a $\alpha \leqslant x$ donc $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant x$ par croissance de f. Il en résulte que $f(\alpha)$ minore A donc que $f(\alpha) \leqslant \alpha$. Toujours par croissance de f on a $f(f(\alpha)) \leqslant f(\alpha)$. Ainsi, $f(\alpha) \in A$ et on a donc $\alpha \leqslant f(\alpha)$. D'où l'égalité.

3. Supposons par l'absurde que $g - f$ ne s'annule pas et par exemple qu'elle est strictement positive sur $[0,1]$. Continue, elle atteint son minimum sur le compact $[0,1]$ et il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) - f(x) \geqslant \varepsilon$. On a alors pour tout x,

$$g^2(x) = g(g(x)) \geqslant f(g(x)) + \varepsilon = g(f(x)) + \varepsilon \geqslant f^2(x) + 2\varepsilon$$

puis, par une récurrence immédiate, $g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\varepsilon$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$. C'est impossible car, si $x \in [0,1]$, les suites $(g^n(x))_{n\geqslant 0}$ et $(f^n(x))_{n\geqslant 0}$ sont bornées. $\triangleleft$

Le résultat suivant est aussi connu sous le nom de « Universal chord theorem ». Il montre que si le graphe d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet une corde de longueur 1, alors il admet des cordes de longueur $1/n$ pour tout entier naturel non nul n (une corde étant par définition un segment horizontal qui joint deux points du graphe). Ce résultat est optimal au sens où si $\lambda \in]0,1]$ n'est pas l'inverse d'un entier, il existe des fonctions continues ayant une corde de longueur 1 mais pas de corde de longueur λ.

4.9. Un théorème de Paul Lévy (1934)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1)\}$. Si $f \in E$, on pose

$$A(f) = \{\sigma \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0,1],\ f(x+\sigma) = f(x)\}$$

1. Montrer que $\bigcap_{f \in E} A(f)$ est compact et que

$$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \bigcap_{f \in E} A(f).$$

2. Montrer que pour tout $f \in E$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que

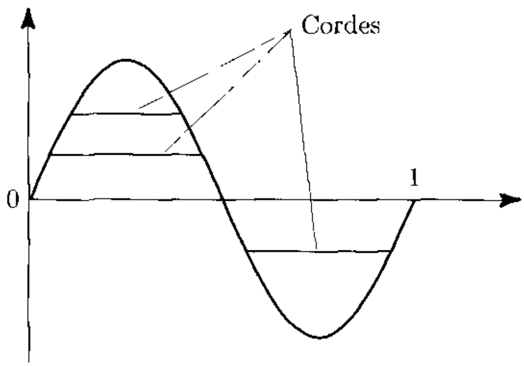
$$[0, \varepsilon] \cup \left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\} \subset A(f).$$

3. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{E}} \mathrm{A}(f) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. L'ensemble $\mathrm{A}(f)$ peut se voir comme l'ensemble des longueurs des «cordes» horizontales du graphe de f. Par exemple, dans le cas de la fonction $f : x \longmapsto \sin 2\pi x$, on a visiblement $\mathrm{A}(f) = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$:

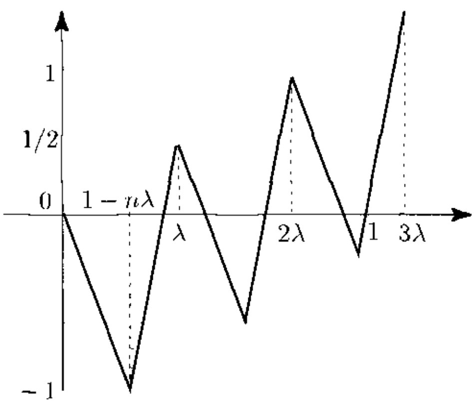


Il est clair que $0 \in \mathrm{A}(f)$ pour tout $f \in \mathrm{E}$ et que $\mathrm{A}(f) \subset [0,1]$. C'est donc une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathrm{A}(f)$ est fermé. Soit (σ_n) une suite de points de $\mathrm{A}(f)$ qui converge vers σ. Pour chaque entier n, il existe x_n dans $[0,1]$ tel que $f(x_n + \sigma_n) = f(x_n)$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un point $x \in [0,1]$. Par continuité de f, on a $f(x+\sigma) = f(x)$ et $\sigma \in \mathrm{A}(f)$. Donc $\mathrm{A}(f)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Comme l'intersection d'une famille de compacts est encore compacte, $\displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{E}} \mathrm{A}(f)$ est un compact.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f dans E. Montrons que $\dfrac{1}{p} \in \mathrm{A}(f)$. Considérons pour cela la fonction g définie sur $\left[0, 1-\dfrac{1}{p}\right]$ par $g(x) = f\left(x+\dfrac{1}{p}\right) - f(x)$. Comme $g(0) + g\left(\dfrac{1}{p}\right) + \cdots + g\left(\dfrac{p-1}{p}\right) = f(1) - f(0) = 0$, la fonction g s'annule nécessairement sur $\left[0, 1-\dfrac{1}{p}\right]$ (sinon elle garderait un signe constant et la somme précédente ne serait pas nulle). Donc $\dfrac{1}{p} \in \mathrm{A}(f)$ et on a bien $\displaystyle\{0\} \cup \left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \bigcap_{f\in \mathrm{E}} \mathrm{A}(f)$.

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Quitte à retrancher $f(0)$ à f, on peut supposer que $f(0) = f(1) = 0$. Si f est de signe constant sur $[0,1]$, on voit que $\mathrm{A}(f) = [0,1]$. En effet, si $\sigma \in [0,1]$, la fonction $f(x+\sigma) - f(x)$ prend en 0 et $1-\sigma$ des valeurs de signe opposé, donc s'annule. Le même raisonnement montre que si $\mathrm{I} = [a,b]$ est un intervalle de $[0,1]$ sur lequel f garde un signe constant avec $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors $[0, b-a] \subset \mathrm{A}(f)$ et $\varepsilon = b-a$ répond à la question. Un tel intervalle existe nécessairement. Si f est nulle, c'est clair. Sinon, elle prend par exemple une valeur strictement positive et l'ensemble $\{x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ est un ouvert non vide. En particulier, il existe $\alpha < \beta$ tel que le segment $[\alpha,\beta]$ est entièrement contenu dans cet ensemble. La partie $\{x \in [0,\alpha], f(x) \leqslant 0\}$ (resp. $\{x \in [\beta,1], f(x) \leqslant 0\}$) est non vide et majorée (resp. minorée). Si a (resp. b) désigne sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure), f reste strictement positive sur $]a,b[$. De plus $f(a)$ et $f(b)$ sont nuls : en effet, a et b sont adhérents aux parties $\{x, f(x) > 0\}$ et $\{x, f(x) \leqslant 0\}$ et f est continue. *Pour obtenir l'intervalle* $]a,b[$ *sur lequel* f *est strictement positive et* $f(a) = f(b) = 0$, *on pouvait également considérer une composante connexe de l'ouvert non vide* $\{x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ *(cf. exercice 1.27 dans lequel cette notion est étudiée).*

3. La première question a montré une des deux inclusions. Pour prouver la seconde, il suffit de montrer que si $\lambda \in]0,1]$ n'est pas l'inverse d'un entier, il existe une fonction f de E telle que $\lambda \notin \mathrm{A}(f)$. Notons n la partie entière de $1/\lambda$. On a $n\lambda < 1 < n\lambda + \lambda$. On commence par se donner f sur l'intervalle $[0,\lambda]$. On choisit une fonction continue quelconque vérifiant $f(0) = 0$, $f(\lambda) = 1/n$ et $f(1-n\lambda) = -1$. On prolonge alors f à $[0,1]$ en imposant $f(x+\lambda) = f(x) + 1/n$ pour tout x. Voici un exemple avec $n = 2$ où on choisit f affine par morceaux.



Par construction f n'a pas de corde de longueur λ puisque la différence $f(x+\lambda) - f(x)$ vaut toujours $1/n$. Il reste à vérifier deux choses. Tout d'abord le fait que f est bien continue et enfin que $f(1) = 0$. Le premier point provient du fait que les raccords aux points $k\lambda$ pour $k = 0, 1, \dots, n$ sont continus car $f(\lambda) = 1/n$. Enfin, $f(1) = f(1 - n\lambda + n\lambda) = f(1 - n\lambda) + 1 = 0$. $\triangleleft$

Petite application pratique de l'exercice : montrer que, si un candidat à l'X effectue le 2000 m en 10 minutes, il existe un intervalle de temps de 5 minutes pendant lequel il parcourt 1000 m.

Il est naturel de se demander si la propriété des valeurs intermédiaires caractérise les fonctions continues. Ce n'est pas le cas comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ *prolongée par la valeur* 0 *en* 0. *L'image d'un intervalle* I *qui ne contient pas* 0 *est un intervalle (car* f *est continue sur* I*) et l'image d'un intervalle qui contient* 0 *et qui n'est pas réduit à* $\{0\}$ *est le segment* $[-1, 1]$. *Pourtant* f *n'est pas continue en* 0. *Dans l'énoncé suivant on ajoute une hypothèse permettant d'obtenir une réciproque.*

4.10. Une réciproque au théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $f([a, b])$ est un segment et telle que $f^{-1}(\{x\})$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons le segment $\mathrm{K}_n = \left[a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right]$ pour tout $n \geqslant 1$. Son image directe $f(\mathrm{K}_n)$ s'écrit $[m_n, \mathrm{M}_n]$ avec $m_n \leqslant f(a) \leqslant \mathrm{M}_n$. On a $f(\mathrm{K}_{n+1}) \subset f(\mathrm{K}_n)$ pour tout n donc par le théorème des segments emboîtés, l'intersection $\mathrm{I} = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} f(\mathrm{K}_n) = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} [m_n, \mathrm{M}_n]$ est un segment $[m, \mathrm{M}]$ qui contient en particulier $f(a)$.

Montrons que I est en fait réduit à $\{f(a)\}$. Soit $y \in \mathrm{I}$. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe alors $a_n \in \mathrm{K}_n$ tel que $f(a_n) = y$. La suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers a et $a_n \in f^{-1}(\{y\})$. Or, la partie $f^{-1}(\{y\})$ étant fermée, a est dans cette partie, autrement dit $f(a) = y$. On a donc $\mathrm{I} = \{f(a)\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $[m_n, \mathrm{M}_n] \subset [f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon]$. Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - a| \leqslant \dfrac{1}{n}$, on a $f(x) \in f(\mathrm{K}_n) = [m_n, \mathrm{M}_n]$ et $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$: la fonction f est bien continue en a. $\triangleleft$

Dans le contre-exemple que nous avons donné avant l'exercice on voit par exemple que l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$ *n'est pas fermé.*

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$*, un homéomorphisme* $f : A \to B$ *est une bijection continue dont la réciproque est également continue. Si l'ensemble de départ est un intervalle* I*,* $f : I \to \mathbb{R}$ *réalise un homéomorphisme de* I *sur* $f(I)$ *dès lors que* f *est continue et strictement monotone. Réciproquement, si* f *désigne un homéomorphisme défini sur un intervalle* I*,* f *est strictement monotone : en effet, l'ensemble* $T = \{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$ *est convexe dans* $\mathbb{R}^2$ *et en particulier connexe. La fonction* F*, qui à* $(x, y) \in T$ *associe* $F(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$*, est continue et ne s'annule pas par injectivité de* f*. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit alors que* F *garde un signe constant, autrement dit, que* f *est strictement monotone.*

Il est aisé de vérifier que l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ *(ou plus généralement d'un intervalle quelconque) est un groupe pour la composition. L'exercice suivant se propose d'en chercher les sous-groupes finis.*

4.11. Sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes

> Trouver les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit G un tel sous-groupe et n son cardinal. Si $f \in G$ on a $f^n = \mathrm{Id}$ en vertu du théorème de Lagrange. Si f est strictement croissante, alors f est forcément l'identité. En effet, s'il existe un réel x tel que $f(x) > x$ alors on a, par croissance de f, $x = f^n(x) > f^{n-1}(x) > \cdots > f(x) > x$ ce qui est absurde. On voit de même qu'il ne peut exister de réel x tel que $f(x) < x$. Ainsi, hormis l'identité, toutes les fonctions de G sont des homéomorphismes strictement décroissants. Or, si $f \in G$ est strictement décroissante, alors f^2 est strictement croissante donc vaut l'identité. Il en découle que tous les éléments de G sont d'ordre 2. De même si f et g sont deux éléments strictement décroissants de G alors $g \circ f$ est strictement croissante et donc $g = f^{-1} = f$. On en déduit que G contient au plus deux éléments.

Conclusion. La réciproque étant immédiate, on peut conclure que les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sont $\{\mathrm{Id}\}$ et les groupes à deux éléments $\{\mathrm{Id}, f\}$, où f est une involution strictement décroissante. ◁

Dans l'exercice suivant on démontre que deux homéomorphismes de $[0, 1]$ *ayant pour uniques points fixes* 0 *et* 1 *sont conjugués.*

4.12. Conjugaison de deux homéomorphismes

On note H le groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ sur lui-même, c'est-à-dire des bijections continues de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Soit f et g deux éléments de H dont les seuls points fixes sont 0 et 1. Montrer qu'il existe $h \in \mathrm{H}$ tel que $f \circ h = h \circ g$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

• En termes de théorie des groupes, l'énoncé demande de montrer que f et g sont conjugués dans le groupe H. Les homéomorphismes f et g sont strictement monotones et vu les hypothèses, strictement croissants. Comme 0 et 1 sont les seuls points fixes de f, on a soit $f(x) > x$ pour tout $x \in]0, 1[$, soit $f(x) < x$ pour tout $x \in]0, 1[$. Si on est dans le second cas, on peut poser $\tilde{f}(x) = 1 - f(1 - x) = (h^{-1} \circ f \circ h)(x)$ avec $h : x \longmapsto 1 - x$. On a alors

$$\tilde{f}(x) = 1 - f(1 - x) > 1 - (1 - x) = x$$

pour tout $x \in]0, 1[$ et $\tilde{f}$ est conjugué à f. Comme la conjugaison est une relation d'équivalence, on peut donc supposer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) > x$ et $g(x) > x$.

• Choisissons $x_0 = y_0 = \dfrac{1}{2} \in]0, 1[$ et posons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = f^k(x_0)$ et $y_k = g^k(y_0)$. Les hypothèses sur f et g montrent que les suites $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont strictement croissantes et vérifient

$$\lim_{k \to -\infty} x_k = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} x_k = 1, \quad \lim_{k \to -\infty} y_k = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} y_k = 1.$$

Posons $\mathrm{I}_k = [x_k, x_{k+1}[$, $\mathrm{J}_k = [y_k, y_{k+1}[$: f induit un homéomorphisme de I_k sur I_{k+1}, et g induit un homéomorphisme de J_k sur J_{k+1}. Choisissons maintenant un homéomorphisme quelconque (par exemple affine) $h_0 : [y_0, y_1[\to [x_0, x_1[$ et posons, avec des notations un peu abusives, $h_k = f^k \circ h_0 \circ g^{-k}$: il est clair que h_k réalise un homéomorphisme de J_k dans I_k. Soit $h : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, et $h(y) = h_k(y)$ si $y \in \mathrm{J}_k$. Alors h est un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ dans lui-même et, comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f \circ h_k = f^{k+1} \circ h \circ g^{-(k+1)} \circ g = h_{k+1} \circ g$ on a bien $f \circ h = h \circ g$. ◁

L'exercice suivant introduit un outil important dans l'étude des homéomorphismes du cercle, le nombre de rotation de Poincaré. Le lecteur se reportera aux commentaires qui suivent l'exercice.

4.13. Nombre de rotation de Poincaré (1885)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue croissante, telle que pour tout x, $f(x+1) = f(x) + 1$. On veut prouver que pour tout x, la suite $u_n(x) = \dfrac{f^n(x)}{n}$ admet une limite finie l indépendante de x (f^n désigne la n-ième itérée de f).

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^n(x) - f^n(y)| \leqslant k$. Que peut-on en déduire ?

2. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$f^n(0) + f^m(0) - 1 \leqslant f^{n+m}(0) \leqslant f^n(0) + f^m(0) + 1.$$

3. En déduire que la suite $(u_n(0))_{n \geqslant 0}$ converge et vérifier que sa limite ℓ appartient à $[f(0) - 1, f(0) + 1]$. Conclure.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. L'entier k doit convenir pour $n = 0$. Choisissons donc un entier k tel que $|y - x| \leqslant k$. On a $-k + x \leqslant y \leqslant k + x$. En utilisant la croissance de f et la 1-périodicité de $t \longmapsto f(t) - t$, on a

$$-k + f(x) = f(-k + x) \leqslant f(y) \leqslant f(k + x) = f(x) + k,$$

et par une récurrence immédiate $-k + f^n(x) \leqslant f^n(y) \leqslant f^n(x) + k$ pour tout entier naturel n. Il en résulte que $|u_n(x) - u_n(y)| \leqslant \dfrac{k}{n}$ et donc que $\lim\limits_{n \to \infty} |u_n(x) - u_n(y)| = 0$.

Par conséquent, il suffit de montrer que la suite $(u_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge pour une valeur particulière de x, par exemple 0.

2. Fixons un entier n, et notons a la partie entière de $f^n(0)$. On a donc $a \leqslant f^n(0) < a + 1$. Comme la fonction f^m est croissante, on obtient $f^m(a) \leqslant f^{n+m}(0) \leqslant f^m(a) + 1$. Or, puisque a est un entier, $f^m(a) = f^m(0) + a$. On obtient donc

$$\begin{aligned} f^m(0) + f^n(0) - 1 \leqslant f^m(0) + a = f^m(a) &\leqslant f^{n+m}(0) \\ &\leqslant f^m(0) + a + 1 \leqslant f^m(0) + f^n(0) + 1. \end{aligned}$$

3. En prenant $m = n$, on en déduit que

$$2f^n(0) - 1 \leqslant f^{2n}(0) \leqslant 2f^n(0) + 1.$$

Une récurrence facile montre que

$$mf^n(0) - (m - 1) \leqslant f^{mn}(0) \leqslant mf^n(0) + (m - 1).$$

En divisant par nm, on en déduit que $|u_{nm}(0) - u_n(0)| \leqslant \dfrac{m-1}{nm} \leqslant \dfrac{1}{m}$. Par symétrie on a aussi $|u_{nm}(0) - u_m(0)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc, par inégalité triangulaire, $|u_m(0) - u_n(0)| \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}$. Il en résulte que la suite $(u_n(0))$ est une suite de Cauchy et donc qu'elle converge. Comme on a, de plus, $|u_m(0) - u_1(0)| \leqslant 1$, on obtient en faisant tendre m vers l'infini

$$|\ell - f(0)| \leqslant 1.$$

La question 1 montre alors que $u_n(x)$ converge aussi vers ℓ pour tout réel x. $\triangleleft$

Lorsque l'application f est strictement croissante elle induit un homéomorphisme «croissant» $\tilde{f}$ du cercle unité de $\mathbb{C}$ par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(e^{2i\pi\theta}) = e^{2i\pi f(\theta)}$$

Le qualificatif «croissant» traduit le fait que $f(x)$ tourne sur le cercle dans le même sens que x. Par exemple, si on prend pour f une translation $t_a : x \longmapsto x + a$, $\tilde{f}$ est la rotation d'angle $2\pi a$. Inversement, tout homéomorphisme croissant du cercle peut être obtenu de cette manière à partir d'un homéomorphisme strictement croissant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout x. Celui-ci est d'ailleurs unique à une constante entière près. Le lecteur pourra prouver ce «théorème de relèvement» à titre d'exercice.

La limite l obtenue dans l'exercice, prise modulo 1, est par définition le nombre de rotation de Poincaré de l'homéomorphisme $\tilde{f}$, introduit par celui-ci en 1885. Par exemple, le nombre de rotation de la rotation $\tilde{t}_a$ est égal à a (mod 1). Notons $r(\tilde{f})$ ce nombre. Le lecteur pourra montrer que $r(\tilde{f}) \equiv 0$ si et seulement si $\tilde{f}$ admet un point fixe, et que $r(\tilde{f}) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\tilde{f}$ admet un point périodique. Ces deux assertions se vérifient immédiatement dans le cas des rotations.

Les prochains exercices concernent quelques équations fonctionnelles. Il est bien connu que les seuls morphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même sont les homothéties $x \longmapsto ax$. Comme $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe et homéomorphe à $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ via le logarithme, on en déduit directement que les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont les exponentielles $(x \longmapsto a^x,\ a > 0)$, que les morphismes continus de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont les fonctions puissances $(x \longmapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R})$, que les morphismes continus de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ sont les fonctions logarithmes $(x \longmapsto \log_a(x)$ avec $a > 0)$.

Il existe des morphismes discontinus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, mais ils sont «indescriptibles» (leur existence résulte de l'axiome du choix). Dès qu'on cherche les morphismes qui ont une propriété raisonnable de *plus (par exemple monotones ou bornés sur un voisinage de 0) on ne trouve plus que les homothéties. C'est la situation de l'exercice suivant, qui s'intéresse aux morphismes qui ont la propriété de respecter l'inverse.*

4.14. Morphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ respectant l'inverse

Que dire d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 1$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}?$$

On pourra commencer par démontrer que f est bornée sur un voisinage de 0 en utilisant la fonction $x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$

(École normale supérieure)

Solution.

Comme f est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, on a classiquement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$ (c'est-à-dire que f est $\mathbb{Q}$-linéaire). Redémontrons ce fait. C'est vrai pour $r \in \mathbb{Z}$ puisque f est un morphisme de groupes. Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$qf(rx) = f(qrx) = f(px) = pf(x),$$

et donc $f(rx) = rf(x)$. En particulier, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1) = r$.

On va essayer d'exploiter la seconde propriété vérifiée par f pour prouver que f est l'identité. Suivons l'indication de l'énoncé et considérons la fonction $\varphi : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$. Une rapide étude des variations de φ montre que $\varphi(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Par hypothèse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} |f(\varphi(x))| &= \left| f\left(x + \frac{1}{x}\right) \right| = \left| f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= \left| f(x) + \frac{1}{f(x)} \right| = |\varphi(f(x))| \geqslant 2. \end{aligned}$$

Comme tout y tel que $|y| \geqslant 2$ peut s'écrire $y = x + \dfrac{1}{x}$, on en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$|y| \geqslant 2 \Longrightarrow |f(y)| \geqslant 2.$$

En passant à l'inverse, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$|x| \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| \geqslant 2 \Longrightarrow |f(x)| = \frac{1}{\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, f est bornée sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Cette information va être suffisante pour montrer que f est l'identité. Comme dans la recherche des morphismes continus, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$. Soit x un réel quelconque, et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de rationnels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x - r_n| \leqslant \dfrac{1}{2n}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f(x) - r_n| = |f(x) - f(r_n)| = |f(x - r_n)| = \frac{1}{n}|f(n(x - r_n))| \leqslant \frac{1}{2n}$$

(car $|n(x - r_n)| \leqslant \dfrac{1}{2}$) et donc $|f(x) - x| \leqslant \dfrac{1}{n}$. En passant à la limite, on en déduit que $f(x) = x$.

Conclusion. L'application f est l'identité. $\triangleleft$

Dans l'exercice suivant on se ramène aux morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ *dans lui-même.*

4.15. Une équation fonctionnelle (1)

> Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$.
>
> (**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

• *Analyse.* La fonction nulle est visiblement solution. On se donne donc dans la suite une solution f non nulle. On observe pour commencer que f est paire. En effet, si y_0 est un réel tel que $f(y_0) \neq 0$, on a l'égalité $f(x) = \dfrac{f(\sqrt{x^2 + y_0^2})}{f(y_0)}$ pour tout x et le second terme définit une fonction paire. On s'intéresse donc à la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

En prenant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0)^2$ et donc $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, la fonction f est nulle (prendre $y = 0$). On a donc $f(0) = 1$.

On va montrer que f ne s'annule pas. Elle sera donc, par continuité, strictement positive sur $\mathbb{R}$. En prenant $y = x$ dans l'équation vérifiée par f, on obtient $f(\sqrt{2}x) = f(x)^2$ pour tout réel x. Il en résulte que si t est un zéro de f, alors $\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ aussi et, en itérant, $\dfrac{t}{\sqrt{2}^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $\dfrac{t}{\sqrt{2}^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et comme f est continue, on en déduit que $f(0) = 0$. Cela n'est pas le cas, donc il n'existe pas de réel t tel que $f(t) = 0$.

Si on pose $g(x) = \ln f(\sqrt{x})$ pour $x \geqslant 0$, la fonction g est continue et vérifie l'équation fonctionnelle $g(x^2 + y^2) = g(x^2) + g(y^2)$, soit encore $g(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = g(\mathrm{X}) + g(\mathrm{Y})$ pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \geqslant 0$. Il en résulte que g est de la forme

$x \longmapsto ax$. On en déduit que $f(x) = e^{ax^2}$ pour tout $x \geqslant 0$ puis pour tout x réel par parité.

• *Synthèse.* Il est évident, réciproquement, que toutes les fonctions $x \longmapsto e^{ax^2}$ sont solutions du problème posé. ◁

L'équation fonctionnelle qui suit est nettement plus délicate à étudier.

4.16. Une équation fonctionnelle (2)

> Trouver toutes les fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(g(x)) = 2g(x) - x$ pour tout x.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Soit g une fonction répondant au problème. On observe d'abord que g est injective : si $g(x) = g(y)$, on a $g(g(x)) = 2g(x) - x = g(g(y)) = 2g(y) - y$, puis $x = y$. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc strictement monotone (voir les propos précédant l'exercice 4.12). Si g est strictement décroissante, $g \circ g$ est strictement croissante, mais $x \longmapsto 2g(x) - x$ est strictement décroissante, ce qui est absurde. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des limites monotones, elle admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une limite (finie ou infinie). Soit $l = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Si l est fini, $g(g(x)) - 2g(x)$ tend vers $g(l) - 2l$ ce qui est absurde car cette fonction vaut $-x$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. Ainsi, g réalise un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

• Si on considère la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$, l'hypothèse s'écrit : pour tout x, $h(g(x)) = h(x)$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h(g^n(x)) = h(x)$, soit $g^{n+1}(x) - g^n(x) = h(x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g^n(x) = x + nh(x)$ et $\dfrac{g^n(x)}{n}$ tend vers $h(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

• On va alors montrer que la limite de $\dfrac{g^n(x)}{n}$ quand n tend vers l'infini ne dépend pas de x, ce qui prouvera que la fonction h est constante et donc que g est une translation. On suppose h non nulle et on considère $a \in \mathbb{R}$ tel que $h(a) \neq 0$. On traite le cas $h(a) > 0$, l'autre cas étant similaire. La suite $(g^n(a))_{n\in\mathbb{Z}}$ est croissante et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} g^n(a) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to -\infty} g^n(a) = -\infty$. Soit alors x un réel quelconque. Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $g^p(a) \leqslant x < g^{p+1}(a)$. Pour tout n, on a, par croissance de g.

$$\frac{g^{n+p}(a)}{n} \leqslant \frac{g^n(x)}{n} < \frac{g^{n+p+1}(a)}{n}.$$

Par encadrement, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \frac{g^n(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{g^n(a)}{n}$. Cela vaut pour tout x, donc h est constante.

Conclusion. La réciproque étant immédiate, les translations sont les seules solutions de l'équation proposée. ◁

L'énoncé suivant est issu des Olympiades internationales de Mathématiques de 1983. Il s'agit d'une équation fonctionnelle avec très peu d'hypothèses sur la fonction.

4.17. Une équation fonctionnelle (3)

> Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et qui vérifient $f(xf(y)) = yf(x)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• *Analyse.* Soit f une solution. En prenant $y = x$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(xf(x)) = xf(x)$. Autrement dit, $xf(x)$ est un point fixe de f. Examinons ce qu'on peut dire de l'ensemble des points fixes de f. Soit $y > 0$ tel que $f(y) = y$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(xy) = yf(x)$. Supposons $y \neq 1$. Comme on a également, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{x}{y}y\right) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$, soit $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{y}$, on peut supposer $y > 1$. On déduit de la relation précédente que, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(xy^n) = y^n f(x)$. On fait tendre n vers $+\infty$. On obtient $\lim_{n\to+\infty} y^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} f(xy^n) = 0$, par hypothèse. On en déduit que $f(x) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc nécessairement $y = 1$. Le seul point fixe de f est 1. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $xf(x) = 1$, soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

• *Synthèse.* On vérifie aisément que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème. ◁

Les deux exercices qui suivent concernent la recherche de racines carrées au sens de la composition.

4.18. Une équation fonctionnelle (4)

Soit a, b deux réels avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(f(x)) = ax + b$ pour tout x.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

• *Analyse.* Soit f une solution de l'équation. Comme a est non nul, la fonction affine $\varphi : x \mapsto ax + b$ est bijective et il en est donc de même de f. Comme f est continue, elle est donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $f \circ f$ est strictement croissante de sorte qu'on doit avoir $a > 0$: il n'y a pas de solution si a est négatif. Appliquons la relation en $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Il vient $f(ax + b) = af(x) + b$ pour tout x. En dérivant cette identité on en déduit que $f'(ax + b) = f'(x)$ pour tout x. On va itérer cela. Supposons d'abord $0 < a < 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = x$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. D'après ce qui précède on a $f'(x) = f'(u_n)$ pour tout entier n. Or la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de $\varphi : x \mapsto ax + b$ à savoir $w = \dfrac{b}{1-a}$. Comme f' est continue on a $f'(x) = f'(w)$ et comme cela vaut pour tout x, f' est constante. Il en découle que f est affine. On a le même résultat dans le cas où $a > 1$ en remplaçant φ par φ^{-1} (comme $f' \circ \varphi = f'$ on a aussi $f' \circ \varphi^{-1} = f'$).

• *Synthèse.* Si on pose $f(x) = \alpha x + \beta$ on a $f(f(x)) = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$. Pour $a > 0$ on a donc deux solutions obtenues en prenant $\alpha = \pm\sqrt{a}$ et $\beta = \dfrac{b}{\alpha + 1}$ (on a $\alpha \neq -1$ puisque $a \neq 1$). ◁

On notera que pour l'identité on aurait une infinité de solutions.

4.19. Une équation fonctionnelle (5)

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que l'on ait $f(f(x)) = e^x$ pour tout x.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

• *Analyse.* Soit f une solution. La fonction exp étant injective, il en est de même de f. Celle-ci étant de plus continue, elle est strictement monotone. Ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert I. On a par hypothèse $(f \circ f)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et donc $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathrm{I}$. Ainsi l'une des bornes de I est $+\infty$ et comme $f(\mathrm{I}) \neq \mathbb{R}$ (car sinon $(f \circ f)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$), il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $\mathrm{I} =]a, +\infty[$. On a donc $+\infty = \lim\limits_{+\infty} f$ ou $\lim\limits_{-\infty} f$. Comme $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}_+^*$, on a nécessairement $+\infty = \lim\limits_{+\infty} f$, ce qui implique que f est strictement croissante et que $\lim\limits_{-\infty} f = a$. On a ensuite

$$0 = \lim_{-\infty} \exp = \lim_{-\infty} f \circ f = f(a) \quad \text{et} \quad f(0) = (f \circ f)(a) = e^a.$$

On définit la suite d'intervalles (I_n) par $\mathrm{I}_0 =]-\infty, a]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1} = f(\mathrm{I}_n)$. On a alors $\mathrm{I}_1 =]a, 0]$, $\mathrm{I}_2 =]0, e^a]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+2} = \exp(\mathrm{I}_n)$. Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = e^{a_n}$ et $b_{n+1} = e^{b_n}$. Elles sont strictement croissantes et vérifient $a_n < b_n < a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cela résulte de $a_0 < b_0 < a_1$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{2n+1} &= \exp^n(]a, 0]) =]a_n, b_n] \\ \mathrm{I}_{2n+2} &= \exp^n(\mathrm{I}_2) = \exp^n(]0, e^a]) =]b_n, a_{n+1}]. \end{aligned}$$

On constate que $\mathbb{R}$ est la réunion disjointe des intervalles I_n. Montrons que f est déterminée par sa restriction à I_0. Notons f_n la restriction de la fonction f à I_n. Elle réalise une bijection de I_n sur I_{n+1}. Soit $x \in \mathrm{I}_{n+1}$ et $y = f_n^{-1}(x) \in \mathrm{I}_n$. On a

$$f_{n+1}(x) = (f \circ f)(y) = e^y = e^{f_n^{-1}(x)}.$$

Ainsi f_{n+1} s'exprime en fonction de f_n et donc f est déterminée par la donnée de f_0.

• *Synthèse.* Montrons que toutes les fonctions de cette forme conviennent. Soit a un réel strictement négatif, (a_n) et (b_n) les suites définies comme précédemment. On pose $\mathrm{I}_0 =]-\infty, a]$, $\mathrm{I}_1 =]a, 0]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+2} = \exp(\mathrm{I}_n)$. On alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n+1} =]a_n, b_n]$ et $\mathrm{I}_{2n+2} =]b_n, a_{n+1}]$ et $\mathbb{R}$ est la réunion disjointe des intervalles I_n. Soit f_0 une bijection continue croissante quelconque de I_0 sur I_1. On définit par récurrence sur n une bijection croissante f_n de I_n sur I_{n+1} en posant $f_{n+1} = \exp \circ f_n^{-1}$. Si f_n est une bijection de I_n sur I_{n+1}, f_n^{-1} est une bijection de I_{n+1} sur I_n et exp une bijection de I_n sur I_{n+2}, donc f_{n+1} est une bijection de I_{n+1} sur I_{n+2}. On appelle f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle I_n est f_n. La fonction f est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n =]a, +\infty[$. Par construction, on a pour tout $x \in \mathrm{I}_n$,

$$(f \circ f)(x) = f_{n+1}(f_n(x)) = e^x.$$

Reste à vérifier la continuité de f. Par construction elle est continue sur chaque intervalle I_n. Il reste à vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la continuité à droite en la borne inférieure de l'intervalle I_n. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = \exp \circ f_n^{-1}$, il suffit de le vérifier pour I_1, c'est-dire de démontrer la continuité de f en a à droite. Pour $x \in I_1$, on a $f(x) = \exp(f_0^{-1}(x))$. Comme f_0 est une bijection de $]-\infty, a]$ sur $]a, 0]$, on a $\lim\limits_{a} f_0 = -\infty$ et donc $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{-\infty} \exp = 0 = f(a)$.

Les solutions du problème sont donc toutes les fonctions ainsi construites, $a < 0$ et f_0 étant quelconques. ◁

4.20. Une équation fonctionnelle (6)

Soient a, b, c des réels strictement positifs deux à deux distincts. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que pour tout x,

$$f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

On va montrer qu'il n'y a que la fonction nulle. On peut supposer sans perte de généralité que $0 < a < b < c$. Soit f une solution et $n \in \mathbb{N}$. En dérivant n fois l'égalité, on obtient, pour tout réel x,

$$a^n f^{(n)}(ax) + b^n f^{(n)}(bx) + c^n f^{(n)}(cx) = 0.$$

Cela peut s'écrire, en remplaçant x par $\frac{x}{c}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = -\frac{a^n}{c^n} f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right) - \frac{b^n}{c^n} f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right).$$

Choisissons n tel que $\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$. C'est possible car $\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n}$ tend vers 0. Soit $\alpha > 0$ et M_α le maximum de $f^{(n)}$ sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. On a, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{a^n}{c^n} \left|f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right)\right| + \frac{b^n}{c^n} \left|f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right)\right| \leqslant \left(\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n}\right) M_\alpha,$$

car $\frac{ax}{c}$ et $\frac{bx}{c}$ sont dans $[-\alpha, \alpha]$. On en déduit que $M_\alpha \leqslant \left(\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n}\right) M_\alpha$ et donc $M_\alpha = 0$, puisque $\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$. Ainsi la fonction $f^{(n)}$ est nulle sur $[-\alpha, \alpha]$ et comme ceci est vrai pour tout $\alpha > 0$, c'est la fonction nulle. On en déduit que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égale à $n - 1$. Si $f = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, on obtient, pour tout réel x,

$$f(ax)+f(bx)+f(cx)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(a^k+b^k+c^k)x^k=0.$$

Comme $a^k+b^k+c^k>0$ pour tout k, on a $a_k=0$ pour tout k et donc $f=0$. ◁

4.21. Valeurs propres d'un opérateur

1. Trouver toutes les fonctions continues $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{3^n}$ pour tout $x\in[0,1]$.

2. Même question avec la condition $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$ pour tout $x\in[0,1]$.

3. Pour $0<c<1$, déterminer toutes les fonctions continues $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)=c\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$. Traiter également le cas $c=2$.

(**École normale supérieure, école polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit f continue sur $[0,1]$ vérifiant $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x^n)}{3^n}$ pour tout $x\in[0,1]$. Comme $[0,1]$ est compact, f est bornée et on a, pour $0\leqslant x\leqslant 1$,

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\|f\|_\infty}{3^n}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-1/3}\|f\|_\infty=\frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Il en résulte que $\|f\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty=0$. La fonction f est nulle.

2. La démarche précédente ne donne rien ici car la somme de la série géométrique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ est égale à 1. Il en résulte que toutes les fonctions constantes conviennent. On peut aussi noter que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel. Soit f une solution. Quitte à lui retrancher la constante $f(0)$, on peut supposer que $f(0)=0$.

Soit $a\in\,]0,1[$. Comme f est continue sur le compact $[0,a]$, il existe $b\in[0,a]$ tel que $f(b)=\max\limits_{[0,a]}f$. Par hypothèse $f(b)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f(b^n)}{2^n}$. Comme pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant b^n\leqslant b\leqslant a$, on a $f(b^n)\leqslant f(b)$ par définition de b. On a donc

$$f(b) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(b)}{2^n} = f(b)$$

et l'inégalité serait stricte s'il existait un entier n tel que $f(b^n) < f(b)$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(b^n) = f(b)$. Comme $0 \leqslant b < 1$, la suite (b^n) converge vers 0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b^n) = f(0) = 0$, puisque f est continue. Ainsi pour tout $x \in [0, a]$, $f(x) \leqslant 0$. Comme a a été choisi arbitrairement dans $[0, 1[$, $f(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x < 1$ et par continuité, $f \leqslant 0$ sur $[0, 1]$.

Si f est solution, $-f$ est aussi solution, donc on a aussi $-f \leqslant 0$ et finalement f est nulle.

Conclusion. Les solutions du problème sont les fonctions constantes.

3. En majorant comme dans la question 1, on a $\|f\|_\infty \leqslant c\|f\|_\infty$, et si $0 < c < 1$, cela impose $\|f\|_\infty = 0$ et f est nulle. Supposons maintenant $c = 2$. On a, après simplification, pour tout $x \in [0, 1]$

$$0 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}}, \text{ c'est-à-dire } f(x^2) = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-2}}.$$

On obtient en particulier

$$f(0) = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{f(0)}{2^{n-2}} = -\frac{f(0)}{2} \quad \text{et} \quad f(1) = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{f(1)}{2^{n-2}} = -\frac{f(1)}{2},$$

et donc $f(0) = f(1) = 0$. Notons pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathrm{M}(x) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant x} |f(t)|$. On a pour $0 \leqslant t \leqslant x$,

$$|f(t^2)| \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}(x^3)}{2^{n-2}} = \mathrm{M}(x^3)$$

car si $n \geqslant 3$, $t^n \leqslant x^n \leqslant x^3$. Il s'ensuit que $\mathrm{M}(x^2) \leqslant \mathrm{M}(x^3)$. Mais $\mathrm{M}(x^3)$ est inférieur à $\mathrm{M}(x^2)$, puisque $x^3 \leqslant x^2$. On en déduit que $\mathrm{M}(x^2) = \mathrm{M}(x^3)$. Il en résulte que pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{M}(x) = \mathrm{M}(x^{3/2}) = \mathrm{M}(x^{(3/2)^2}) = \cdots = \mathrm{M}(x^{(3/2)^n}).$$

Montrons que M est continue en 0. On a $\mathrm{M}(0) = 0 = f(0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour $0 \leqslant x \leqslant \eta$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ puisque f est continue en 0. Il s'ensuit que pour $0 \leqslant x \leqslant \eta$, $|\mathrm{M}(x)| \leqslant \varepsilon$. D'où la continuité de M en 0.

Comme pour $0 \leqslant x < 1$, la suite $(x^{(3/2)^n})$ converge vers 0, on a $\mathrm{M}(x) = \mathrm{M}(x^{(3/2)^n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{M}(0) = 0$. Ainsi M est nulle sur $[0, 1[$, et f aussi.

Conclusion. La seule solution est la fonction nulle. ◁

Les deux énoncés qui suivent concernent la continuité uniforme, notion qui émerge dans les travaux de Dirichlet (1854) et Weierstrass (1861). C'est Heine qui, en 1870, en donne la définition que l'on connaît. Le célèbre théorème qui porte son nom affirme qu'une fonction continue sur un compact est automatiquement uniformément continue. Le premier exercice, très classique, montre qu'une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$ *est un* $O(x)$ *en* $\pm\infty$.

4.22. Domination d'une fonction uniformément continue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe a et $b > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$. La réciproque est-elle vraie ?

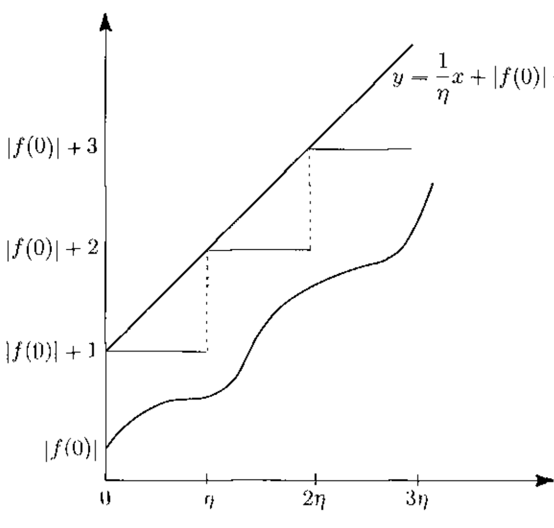
(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - y| \leqslant \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$. On en déduit que pour $x \in [0, \eta]$ on a $|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1$, puis que pour $x \in [\eta, 2\eta]$, $|f(x)| \leqslant |f(\eta)| + 1 \leqslant |f(0)| + 2$. Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f(x)| \leqslant |f(0)| + n + 1$ sur l'intervalle $[n\eta, (n+1)\eta]$. Sur cet intervalle on peut majorer n par $\dfrac{x}{\eta}$. On a donc prouvé que pour tout $x \geqslant 0$,

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1 + \frac{x}{\eta}.$$

La figure suivante représente le graphe de $|f|$ et les majorations effectuées.



On peut faire un travail analogue sur $\mathbb{R}^-$. Sur l'intervalle $[-\eta, 0]$ on a aussi $|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1$, et par récurrence on montre que pour tout $n \geqslant 1$, on a $|f(x)| \leqslant |f(0)| + n$ sur l'intervalle $[-n\eta, (-n+1)\eta]$. Comme pour $x \in [-n\eta, (-n+1)\eta]$, on a $n \leqslant \frac{|x|}{\eta} + 1$, il en résulte que pour tout $x \leqslant 0$,

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1 + \frac{|x|}{\eta}.$$

On a donc obtenu une majoration de la forme souhaitée.

Bien entendu, la réciproque est fausse. Par exemple la fonction bornée $x \longmapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue : en effet, lorsqu'une fonction f est uniformément continue sur un intervalle I, pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$. En prenant $x_n = \sqrt{2\pi n}$ et $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{6}}$, on obtient que $x \longmapsto \sin(x^2)$ ne peut être uniformément continue. ◁

4.23. Lemme de Croft

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$, la suite $f(nx)$ tend vers 0.

1. Montrer que si f est uniformément continue, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Donner un exemple où f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. L'hypothèse signifie que f tend vers 0 selon toute suite arithmétique de la forme $(nx)_{n\geqslant 0}$. Lorsque la fonction est uniformément continue, on peut facilement contrôler son comportement entre deux termes consécutifs de la suite. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$. La continuité uniforme de f permet de choisir $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ lorsque $|x - y| \leqslant \eta$. La suite $(f(n\eta))_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 par hypothèse. Fixons N tel que $|f(n\eta)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant$ N. Si x est un réel supérieur à $\mathrm{N}\eta$, il existe un entier $n \geqslant$ N tel que $|x - n\eta| \leqslant \eta$. On a alors $|f(x) - f(n\eta)| \leqslant \varepsilon$ de sorte que $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$. Cela prouve que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. L'exemple qui suit nous a été proposé par Daniel Kitachewsky, alors élève en classe de Mathématiques Supérieures. On pose $f(\pi^n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = 0$ sinon. La fonction f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, mais pour tout $x > 0$ la suite $f(nx)$ tend vers 0 car elle prend au plus une valeur non nulle : en effet, s'il y en avait deux distinctes, il existerait $0 < k < l$ et $n < m$ des entiers tels que $\pi^m = kx$ et $\pi^n = lx$.

Dans ces conditions, le rationnel $\frac{l}{k}$ serait égal à π^{n-m}, ce qui est exclu puisque π est transcendant. $\triangleleft$

Le fait que π est transcendant constitue le théorème de Lindemann établi en 1882 : le nombre π n'est pas racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers.

Le résultat de la première question reste vrai si la fonction f est seulement supposée continue. La démonstration utilise le théorème de Baire et est un peu plus délicate : on la trouvera dans le chapitre topologie du troisième tome d'analyse.

Les exercices suivants sont consacrés à la dérivabilité. Le développement des méthodes infinitésimales s'accéléra au XVII^{e} *siècle avec les problèmes de calcul de vitesse instantanée, de direction de tangentes, de minima et maxima, de longueur de trajectoire... Dans ce domaine, nous devons beaucoup à Pascal, à Fermat qui utilisait la notion d'infiniment petit, à Descartes qui critiquait déjà ce langage (la polémique ne s'éteindra vraiment qu'au début du* XIX^{e} *siècle). Mais c'est Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716) qui, par leur travaux, contribuèrent à donner de solides fondements à cette nouvelle branche des mathématiques. Reprenant au début les infiniment petits, Newton s'en éloigna dans son exposé de la méthode dites des «fluxions» et enfin, dans* Quadratura curvarum (1704), *il donna une version très proche de l'actuelle définition de la dérivée, comme limite du rapport* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. *De manière indépendante, Leibniz créa une partie du formalisme moderne (avec les notations dx, $\frac{dx}{dt}$, $\int$), introduisit les dérivées d'ordre supérieur et donna bon nombre de règles de dérivation des quantités composées par sommes, produits...*

4.24. Étude d'un taux d'accroissement

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{f(2x)-f(x)}{x}$ admette une limite en 0.

(École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

• La quantité $\frac{f(2x)-f(x)}{x}$ est le taux d'accroissement de f entre x et $2x$. Il est facile de l'estimer lorsque la fonction f est dérivable en 0. En effet, on peut alors écrire $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$. Il en résulte que

$f(2x) = f(0) + 2f'(0)x + o(x)$ et le rapport $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = f'(0) + o(1)$ tend donc vers $f'(0)$.

• On va montrer réciproquement que, si le rapport $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet une limite a en 0, alors f est dérivable en 0 avec $f'(0) = a$. Quitte à considérer la fonction $g(x) = f(x) - ax$, on peut supposer que $a = 0$. Posons $\varepsilon(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0 par $\varepsilon(0) = 0$. On a pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Comme $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ tend vers $f(0)$ par continuité de f en 0, on a en faisant tendre n vers l'infini

$$f(x) - f(0) = x\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x/2^k)}{2^k}}_{\tau(x)}.$$

Prenons $\alpha > 0$ tel que ε soit bornée sur $[-\alpha, \alpha]$ (un tel intervalle existe puisque ε tend vers 0 en 0). La série définissant τ converge normalement sur $[\alpha, -\alpha]$, de sorte que τ est continue en 0. Ainsi, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ tend vers $\tau(0) = 0$ quand x tend vers 0, *i.e.* f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. $\triangleleft$

La notion de dérivabilité prête à plusieurs généralisations. Pour définir la pseudo-dérivée dans l'exercice suivant, on utilise une expression symétrique par rapport au point considéré.

4.25. Pseudo-dérivée

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur I, et telle que

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

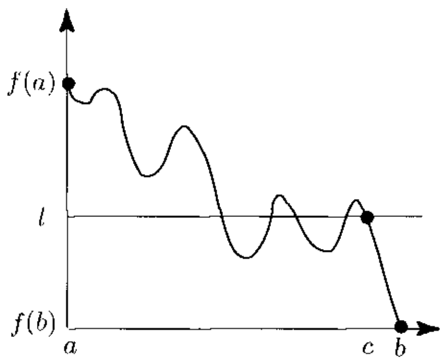
existe pour tout $x \in \mathrm{I}$ (nous dirons que f est *pseudo-dérivable* sur I). Montrer que si $\tilde{f} \geqslant 0$, alors f est croissante (on pourra d'abord supposer $\tilde{f} \geqslant \alpha > 0$).

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• Supposons $\tilde{f} \geqslant \alpha$ avec $\alpha > 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas croissante. Dans ces conditions, il existe $a < b$ tel que $f(a) > f(b)$. On va essayer de trouver un point c dans l'intervalle $]a, b[$ pour lequel il existe des valeurs de $h > 0$ aussi petites que l'on souhaite telles que $f(c-h) \geqslant f(c+h)$. Pour une telle valeur h le taux d'accroissements $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ est négatif ou nul ce qui en passant à la limite fournira une contradiction avec le fait que $\tilde{f}(c) > 0$.

Choisissons $l \in\,]f(b), f(a)[$ et considérons $\mathrm{E} = \{x \in [a,b], f(x) > l\}$. Comme f est continue, E est un ouvert (relatif) de $[a, b]$ qui contient a. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $[a, a+\eta] \subset \mathrm{E}$.



Posons $c = \sup \mathrm{E}$. On a $a < c < b$, la deuxième inégalité stricte étant justifiée par le fait que si c était égal à b, $f(b)$ serait par continuité supérieur ou égal à l. Par construction, on a $f(x) \leqslant l$ pour tout $x \in [c, b]$. On va maintenant montrer qu'à gauche de c il y a des points x aussi proches de c que l'on veut tels que $f(x) > l$ (autrement dit des points de E). Comme E est ouvert, $c \notin \mathrm{E}$ et comme $c = \sup \mathrm{E}$, c est un point d'accumulation de E : il existe donc une suite de réels strictement positifs $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers 0, telle que $c - h_n \in \mathrm{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors la contradiction annoncée plus haut. Pour tout n, on a

$$\frac{f(c+h_n)-f(c-h_n)}{2h_n} \leqslant \frac{l-l}{2h_n} = 0,$$

et donc $\tilde{f}(c) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(c+h_n)-f(c-h_n)}{2h_n} \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse. On conclut donc que si $\tilde{f} \geqslant \alpha > 0$, f est croissante.

• Supposons maintenant $\tilde{f} \geqslant 0$. Considérons pour tout $\alpha > 0$, la fonction $g_\alpha : x \in \mathrm{I} \longmapsto f(x) + \alpha x$. Il est clair que g_α est pseudo-dérivable et que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\tilde{g_\alpha}(x) = \tilde{f}(x) + \alpha \geqslant \alpha > 0$. D'après ce qui précède, g_α est croissante et donc pour $x \leqslant y$ dans I, on a $g_\alpha(x) \leqslant g_\alpha(y)$, ce qui s'écrit $f(x)+\alpha x \leqslant f(x)+\alpha y$. Si x, y sont fixés, cette inégalité est vraie pour tout $\alpha > 0$. En faisant tendre α vers 0, on obtient $f(x) \leqslant f(y)$. Donc f est bien croissante. $\triangleleft$

Il est clair qu'une fonction dérivable en un point est aussi pseudo-dérivable en ce point. La réciproque est fausse, la fonction n'étant même pas nécessairement continue. Par exemple, la fonction f qui est nulle partout, sauf en 0 où elle vaut 1, n'est pas continue en 0, mais elle est pseudo-dérivable avec $\tilde{f}(0) = 0$. Même si on rajoute une hypothèse de continuité, une fonction peut être pseudo-dérivable sans être dérivable : c'est par exemple le cas de $x \longmapsto |x|$ en 0.

Dire que f est une fonction dérivable en un point x_0 signifie que $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$, c'est-à-dire qu'en remplaçant f par l'équation de sa tangente en x_0, on commet une erreur qui est un $o(x-x_0)$: c'est d'ailleurs la formulation de la dérivabilité que donne Weierstrass. Cette simple approximation est la clé de bien des exercices dont le suivant.

4.26. Limite d'une somme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

(École normale supérieure, École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

L'idée est de remplacer f par son approximation affine en 0, qui conduit à une somme qui se calcule. On a $f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x)$ où ε est une fonction de limite nulle en 0. On a alors

$$s_n = f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)}_{=r_n}.$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, le premier terme ci-dessus tend vers $\dfrac{f'(0)}{2}$. Montrons que r_n tend vers 0. Soit $\alpha > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|\varepsilon(x)| \leqslant \alpha$ sur $[0, \eta]$. Soit N tel que $\dfrac{1}{\mathrm{N}} \leqslant \eta$. Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, toutes les fractions

$\dfrac{k}{n^2}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont dans l'intervalle $[0, \eta]$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n^2}\alpha = \dfrac{n+1}{2n}\alpha \leqslant \alpha$. D'où le résultat : $\lim s_n = \dfrac{f'(0)}{2}$. ◁

L'exercice qui suit possède des solutions très variées.

4.27. La fonction sinus n'est pas rationnelle

> Montrer que la fonction sinus n'est pas la restriction à $]a, b[$ d'une fraction rationnelle.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Cet exercice est facile si on pense à utiliser la notion de degré d'une fraction rationnelle : le degré de $F = \dfrac{P}{Q}$ est par définition l'entier relatif $\deg P - \deg Q$ si $P \neq 0$ et $-\infty$ si $P = 0$ (il est immédiat que cette définition ne dépend pas de la représentation choisie pour F).

La fonction sinus est égale à sa dérivée quatrième. Raisonnons par l'absurde en supposant que la fraction rationnelle F coïncide avec la fonction sinus sur l'intervalle $]a, b[$. On a alors $F^{(4)}(x) = F(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, et F est non nulle, puisque la fonction sinus ne saurait être nulle sur un intervalle ouvert non vide. La fraction rationnelle $F^{(4)} - F$ possède une infinité de zéros (puisque $]a, b[$ est infini). Or une fraction rationnelle non nulle n'a qu'un nombre fini de zéros. Donc $F^{(4)} - F$ est la fraction rationnelle nulle, autrement dit $F^{(4)} = F$.

Or si F est de degré n, F' est de degré $\leqslant n - 1$ comme on le vérifie sans peine, et $F^{(4)}$ est de degré $\leqslant n - 4$. L'égalité $F^{(4)} = F$ est donc impossible, ce qui fournit la contradiction attendue. ◁

Leibniz écrivait déjà à la fin du XVII^e *siècle que le sinus n'était pas fonction rationnelle de l'angle et donc que la quadrature algébrique du cercle est sans espoir.*

La formule des accroissements finis et l'inégalité qui en découle sont des outils puissants de l'Analyse. C'est Lagrange qui en 1797 énonce ce résultat fondamental : si f est une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, il existe c dans $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

La démonstration utilise le théorème de Rolle établi en 1690 (il s'agissait de prouver qu'entre deux racines d'un polynôme P, on peut en trouver une de P'). La formule des accroissements finis permet de caractériser *la monotonie d'une fonction, sur tout intervalle où elle est dérivable, à l'aide du signe de la dérivée.*

Dans l'exercice suivant on utilise la structure des ouverts de $\mathbb{R}$: un ouvert non vide U de $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme réunion d'une famille d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints (qui sont les composantes connexes de l'ouvert) ; cette famille est au plus dénombrable (puisque dans chaque intervalle ouvert on peut trouver un rationnel). Le lecteur trouvera tous ces résultats dans l'exercice 1.27.

4.28. Un cas simple du lemme de Sard

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles ouverts telle que $\mathrm{A} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{I}_n) < \varepsilon$ ($\mu(\mathrm{I})$ désigne la longueur d'un intervalle I).

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note C l'ensemble des zéros de f'. Montrer que $f(\mathrm{C})$ est négligeable.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties négligeables, $\mathrm{A} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_p$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout p, on peut trouver une famille dénombrable $(\mathrm{I}_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts, telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{I}_{n,p}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^p}$.

La famille $(\mathrm{I}_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est alors une famille dénombrable d'intervalles ouverts. Le théorème d'associativité pour les familles sommables de réels positifs assure la sommabilité de la famille $(\mu(\mathrm{I}_{n,p}))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \mu(\mathrm{I}_{n,p}) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\mathrm{I}_{n,p}) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^p} = 2\varepsilon.$$

Comme A est incluse dans la réunion des $\mathrm{I}_{n,p}$, le résultat est démontré.

Le résultat de cette question figure aussi dans l'exercice 1.23.

2. D'après la question précédente, il suffit de prouver que l'ensemble $f(\mathrm{C} \cap]-\mathrm{N},\mathrm{N}[)$ est négligeable pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\mathrm{A} = \{x \in]-\mathrm{N},\mathrm{N}[,\ |f'(x)| < \varepsilon\}$. Par continuité de f', A est un ouvert. Sur toute composante connexe $]a,b[$ de cet ouvert, f est ε-lipschitzienne par la formule des accroissements finis. Donc $f(]a,b[)$ est un intervalle (par le théorème des valeurs intermédiaires) dont la longueur est inférieure à $(b-a)\varepsilon$. L'ensemble des composantes connexes de A est au plus dénombrable puisque chacune d'entre elle contient un rationnel. Si on note $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ cette famille de composantes connexes, $f(\mathrm{C}\cap]-\mathrm{N},\mathrm{N}[)\subset f(\mathrm{A})\subset\bigcup_{i\in\mathrm{I}} f(\mathrm{U}_i)$ et

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}\mu(f(\mathrm{U}_i))\leqslant\varepsilon\sum_{i\in\mathrm{I}}\mu(\mathrm{U}_i)\leqslant 2\mathrm{N}\varepsilon.$$

Justifions la dernière inégalité : les U_i étant deux à deux disjoints, pour toute partie $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$, on a $\sum_{i\in\mathrm{J}}\mu(\mathrm{U}_j)\leqslant\mu(]-\mathrm{N},\mathrm{N}[)=2\mathrm{N}$ car $\mathrm{A}\subset\,]-\mathrm{N},\mathrm{N}[$.
On en déduit que $f(\mathrm{C}\cap]-\mathrm{N},\mathrm{N}[)$ est bien négligeable. ◁

Le résultat reste vrai si la fonction f est seulement supposée dérivable, mais la preuve est un peu plus compliquée. Il se généralise[1] *également aux applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Les fonctions dérivées, qui ne sont en général pas continues, ont tout de même des propriétés remarquables. En particulier, elles vérifient le théorème des valeurs intermédiaires. C'est ce qu'affirme le théorème de Darboux qui fait l'objet de l'exercice suivant. On en déduit donc qu'une fonction qui vérifie le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas nécessairement continue (il suffit de prendre la dérivée d'une fonction dérivable que n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, comme par exemple $x\mapsto x^2\sin 1/x$ prolongée par continuité en 0).

4.29. Théorème de Darboux

Soit I un intervalle et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

L'ensemble $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle s'il contient $[\alpha,\beta]$ dès que α et β sont dans $f'(\mathrm{I})$. Soit $a<b$ deux points de I et λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On va montrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f'(x)=\lambda$. En vertu de la formule des accroissements finis, il nous suffit de montrer qu'il existe deux points du graphe de f définissant un segment de pente λ. On va alors s'intéresser aux pentes des segments issus des deux points

1. Le lecteur pourra trouver le lemme de Sard pour les fonctions à plusieurs variables sous forme d'exercices dans GONNORD (S.) & TOSEL (N.), *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation, Calcul différentiel*, Ellipses 1998.

$(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. On pose donc $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ pour $t \in]a, b]$ et $\psi(t) = \dfrac{f(b) - f(t)}{b - t}$ pour $t \in [a, b[$. En fait, φ (resp. ψ) se prolonge en a (resp. en b) par $\varphi(a) = f'(a)$ (resp. $\psi(b) = f'(b)$) et sont donc continues sur $[a, b]$. Les images de l'intervalle $[a, b]$ par les applications φ et ψ sont donc deux intervalles qui contiennent respectivement $f'(a)$ et $f'(b)$ et qui se coupent puisqu'ils contiennent tous les deux le taux d'accroissement $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \varphi(b) = \psi(a)$. Par conséquent leur réunion est un intervalle qui contient l'intervalle délimité par $f'(a)$ et $f'(b)$. En particulier, l'un des deux au moins contient λ. La formule des accroissements finis permet de conclure.

Voici une seconde solution. Posons $\mathrm{T} = \{(x, y) \in \mathrm{I}^2 \mid y < x\}$ et soit $\psi : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

On a

$$\psi(\mathrm{T}) \subset f'(\mathrm{I}) \subset \overline{\psi(\mathrm{T})}.$$

La première inclusion provient de la formule des accroissements finis, et la seconde de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissements. Or T est connexe (et même convexe) et ψ est continue. Donc $\psi(\mathrm{T})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et son adhérence $\overline{\psi(\mathrm{T})}$ est l'intervalle fermé qui a les mêmes extrémités. Dans ces conditions $f'(\mathrm{I})$ ne peut être qu'un intervalle. $\triangleleft$

Il semble que ce théorème fut énoncé par Serret en 1868 et prouvé par Bonnet. Darboux l'utilise en 1875 pour prouver que si f' est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, la formule des accroissements finis affirme que tout taux d'accroissement $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ s'écrit $f'(c)$ pour un point c de $]x, y[$. L'exercice suivant montre que les polynômes de degré $\leqslant 2$ sont les seules fonctions pour lesquelles le point c peut toujours être pris au milieu du segment $[x, y]$.

4.30. Sur la formule des accroissements finis

Soit a et b deux réels. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que, si $x \neq y$,

$$f'(ax+by) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Soit f une fonction dérivable vérifiant la propriété de l'énoncé. On va commencer par étudier la régularité de f et notamment montrer que f est nécessairement de classe C^∞. Pour cela, il va suffire d'exprimer f' en fonction de f. On change de variable en posant $\mathrm{X} = ax + by$ et on élimine x.

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient, en fixant y quelconque, $f(x) = f'(by)x + f(y) - f'(by)y$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela montre que f est affine. Réciproquement, on peut observer que les fonctions affines conviennent et cela quelles que soient les valeurs de a et de b. Dans la suite on suppose $a \neq 0$. On a alors, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}$ et tout y réel tel que $(a+b)y - \mathrm{X} \neq 0$,

$$f'(\mathrm{X}) = \frac{f(y) - f\left(\dfrac{\mathrm{X}-by}{a}\right)}{y - \dfrac{\mathrm{X}-by}{a}} = a\frac{f(y) - f\left(\dfrac{\mathrm{X}-by}{a}\right)}{(a+b)y-\mathrm{X}}.$$

• Si $a + b \neq 0$, cette relation prouve que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par suite f est deux fois dérivable, donc par la relation ci-dessus f' aussi. Une récurrence immédiate montre que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Dans le cas où $a + b = 0$, on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(\mathrm{X}) = a\dfrac{f(y+\frac{\mathrm{X}}{a}) - f(y)}{\mathrm{X}}$, ce qui donne, en faisant tendre X vers 0, $\lim\limits_{\mathrm{X}\to 0} f'(\mathrm{X}) = f'(y)$. Cela implique que la fonction f' est constante, et donc que f est affine.

On continue l'étude dans le cas $a + b \neq 0$. Comme f est de classe C^∞ on peut dériver par rapport à x, puis par rapport à y, l'égalité $(y-x)f'(ax+by) = f(y) - f(x)$. On obtient

$$\begin{cases} -f'(ax+by) + a(y-x)f''(ax+by) &= -f'(x) \\ f'(ax+by) + b(y-x)f''(ax+by) &= f'(y), \end{cases}$$

En multipliant la première relation par $-b$, la seconde par a et en faisant la somme on trouve $(a+b)f'(ax+by) = bf'(x) + af'(y)$. En dérivant de nouveau cette relation par rapport à x et y, on a alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} (a+b)af''(ax+by) = bf''(x) \\ (a+b)bf''(ax+by) = af''(y), \end{cases}$$

Il en résulte que $f''(y) = \dfrac{b^2}{a^2} f''(x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $\dfrac{b^2}{a^2} = 1$, on en déduit que f'' est constante, *i.e.* que f est une fonction polynôme de degré $\leqslant 2$. Si $\dfrac{b^2}{a^2} \neq 1$, on obtient, en prenant $y = x$ dans la relation précédente, $f'' = 0$; donc f est affine.

Il reste à effectuer la synthèse de ce travail. On a déjà dit plus haut que les fonctions affines conviennent. Soit $f : x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ une fonction polynôme de degré $\leqslant 2$. On a

$$f'(ax+by) = 2\alpha(ax+by) \text{ et } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \alpha(x+y) + \beta.$$

On en déduit que, si $(a, b) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il faut $\alpha = 0$ et que sinon α, β, γ peuvent être quelconques.

Conclusion. Si $(a, b) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, les seules fonctions f qui conviennent sont les fonctions affines. Si $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on trouve les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. $\lhd$

La dérivation D *est une application linéaire de* $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ *dans* $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ *telle que, pour toute fonction* f *qui admet en un point* x_0 *un maximum local, on a* $\mathrm{D}(f)(x_0) = 0$. *L'exercice qui suit recherche tous les opérateurs ayant cette propriété sur l'espace* $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

4.31. Maximum local

1. Soit $\mathrm{T} : C^2([0, 1], \mathbb{R}) \to C^0([0, 1], \mathbb{R})$ une application linéaire vérifiant : pour tout $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $x_0 \in]0, 1[$ tel que f possède un maximum local en x_0, on a $\mathrm{T}(f)(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, $\mathrm{T}(f) = \varphi f'$.

2. On remplace dans la question **1** l'espace $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ par $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{T} = 0$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Trouver l'application φ qui va convenir est chose facile : il suffit de prendre f telle que $f' = 1$, par exemple $f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$. On pose donc $\varphi = \mathrm{T}(\mathrm{Id}_{[0,1]})$.

Remarquons que si f est une fonction constante, on a par hypothèse $\mathrm{T}(f)(x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in]0, 1[$ et donc $\mathrm{T}(f) = 0$, par continuité. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et $x_0 \in]0, 1[$. Considérons la fonction $g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0).$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a, au voisinage de x_0,

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + o(x - x_0)^2.$$

Si $f''(x_0) < 0$, g s'annule en x_0 et est négative au voisinage de x_0. Elle possède en x_0 un maximum relatif et on a donc $\mathrm{T}(g)(x_0) = 0$. Or la linéarité de T ainsi que la nullité de T pour les fonctions constantes conduisent à $\mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(f) - f'(x_0)\varphi$. L'égalité $\mathrm{T}(g)(x_0) = 0$ s'écrit donc $\mathrm{T}(f)(x_0) = f'(x_0)\varphi(x_0)$. En considérant la fonction $-f$, on obtient le même résultat si $f''(x_0) < 0$.

Regardons maintenant le cas où $f''(x_0) = 0$. On distingue deux cas. Si f'' est nulle sur un voisinage I de x_0, la fonction g est nulle sur I donc possède encore un maximum relatif en x_0 et le même raisonnement s'applique. Dans le cas où x_0 n'est pas intérieur à l'ensemble des zéros de f, on peut trouver une suite (y_n) de points de $]0, 1[$ qui converge vers x_0 avec $f''(y_n) \neq 0$ pour tout n. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{T}(f)(y_n) = f'(y_n)\varphi(y_n)$ pour tout n. La continuité de $\mathrm{T}(f)$, f' et φ entraîne que $\mathrm{T}(f)(x_0) = f'(x_0)\varphi(x_0)$.

On a donc, pour tout $x_0 \in]0, 1[$, $\mathrm{T}(f)(x_0) = f'(x_0)\varphi(x_0)$. Toutes les fonctions qui interviennent étant continues sur $[0, 1]$, on en déduit que $\mathrm{T}(f) = f'\varphi$. On a donc déterminé $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que T soit l'application $f \longmapsto \varphi f'$. On peut remarquer, réciproquement, que toute application de ce type a la propriété voulue.

2. On démontre, comme précédemment, que T est nulle pour les fonctions constantes.

Soit $x_0 \in]0, 1[$. Si $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ s'annule en x_0, la fonction $-f^2$ possède un maximum relatif en x_0. On a donc $\mathrm{T}(-f^2)(x_0) = 0$ et $\mathrm{T}(f^2)(x_0) = 0$. Si f est une fonction positive qui s'annule en x_0, on obtient $\mathrm{T}(f)(x_0) = \mathrm{T}((\sqrt{f})^2)(x_0) = 0$, d'après ce qui précède, puisque $\sqrt{f}$ est continue. Enfin, si f est un fonction quelconque s'annulant en x_0, on écrit $f = \dfrac{f + |f|}{2} - \dfrac{|f| - f}{2}$, différence de deux fonctions continues et positives, s'annulant en x_0. Par linéarité, on obtient $\mathrm{T}(f)(x_0) = 0$.

Si maintenant f est quelconque, on pose $g = f - f(x_0)$. L'application T étant nulle pour les fonctions constantes, on a $\mathrm{T}(f)(x_0) = \mathrm{T}(g)(x_0) = 0$, puisque $g(x_0) = 0$.

On a donc, pour tout $x \in]0,1[$, $\mathrm{T}(f)(x) = 0$. Par continuité, on en déduit que $\mathrm{T}(f) = 0$. Nous avons démontré que $\mathrm{T} = 0$. ◁

L'exercice suivant montre qu'une fonction quelconque (sans aucune hypothèse de régularité) définie sur $\mathbb{R}$ *ne peut pas avoir beaucoup de maxima locaux distincts.*

4.32. Dénombrabilité des maxima locaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et A l'ensemble des réels a tels que f admet un maximum local en a. Montrer que $f(\mathrm{A})$ est au plus dénombrable.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $\alpha \in f(\mathrm{A})$. Comme α est un maximum local, il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_\alpha) = \alpha$ et $a_\alpha < x_\alpha < b_\alpha$ tels que pour tout $x \in [a_\alpha, b_\alpha]$, $f(x) \leqslant \alpha = f(x_\alpha)$. (Notons que l'existence de la fonction $\alpha \mapsto x_\alpha$ utilise l'axiome du choix, que l'on peut contourner dans le cas où f est continue.) Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut choisir a_α et b_α dans $\mathbb{Q}$. On a $\alpha = \sup\limits_{x \in [a_\alpha, b_\alpha]} f(x)$ de sorte que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} f(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}^2 \\ \alpha & \longmapsto & (a_\alpha, b_\alpha) \end{array}$$

est injective. Or $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, donc $f(\mathrm{A})$ est au plus dénombrable. ◁

On en déduit facilement qu'une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui a un extremum local en tout point est constante. En effet, si* B *est l'ensemble des points où* f *a un minimum,* $f(\mathrm{B})$ *est aussi au plus dénombrable. Donc* $f(\mathbb{R}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$ *est au plus dénombrable. Mais si* f *est continue, son image est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires, donc un singleton ou un ensemble indénombrable.*

L'énoncé suivant a été tiré du volume «Fonctions d'une variable réelle» du célèbre traité de Nicolas Bourbaki.

4.33. Majoration de $f^2 + f'^2$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que $f^2(x) \leqslant a$ et $f'^2(x) + f''^2(x) \leqslant b$ pour tout réel x. Montrer que, pour tout réel x,

$$f^2(x) + f'^2(x) \leqslant \max(a, b).$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Posons $g(x) = f^2(x) + f'^2(x)$ et supposons, par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) > \max(a, b)$. L'idée est de montrer que g admet alors un maximum local strictement supérieur à $\max(a, b)$, maximum en lequel il y aura une contradiction.

Supposons que la fonction g reste supérieure à $g(x_0)$ sur tout l'intervalle $]-\infty, x_0]$. On a alors, pour $x \leqslant x_0$, $f'^2(x) \geqslant g(x_0) - a > 0$. Donc f' ne s'annule pas sur $]-\infty, x_0]$ et y garde un signe constant. Si elle est positive, $f'(x) \geqslant \sqrt{g(x_0) - a} > 0$ pour tout $x \leqslant x_0$, et si elle est négative, $f'(x) \leqslant -\sqrt{g(x_0) - a} < 0$ pour tout $x \leqslant x_0$. Les deux cas sont impossibles puisque f est bornée. Il existe donc $x_1 < x_0$ tel que $g(x_1) < g(x_0)$. Un raisonnement analogue permet d'établir qu'il existe $x_2 > x_0$ tel que $g(x_2) < g(x_0)$.

La fonction g est continue sur le compact $[x_1, x_2]$ donc atteint son maximum en un point $\alpha \in]x_1, x_2[$. En ce point $g'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $[f(\alpha) + f''(\alpha)]f'(\alpha) = 0$.

• Si $f'(\alpha) = 0$, on a $g(\alpha) = f^2(\alpha) \leqslant a$, ce qui est impossible car $g(\alpha) \geqslant g(x_0) > a$.

• Si $f(\alpha) + f''(\alpha) = 0$, on a $g(\alpha) = f'^2(\alpha) + f''^2(\alpha) \leqslant b$: c'est aussi exclu.

L'hypothèse initiale est absurde et on a donc l'inégalité demandée. ◁

Voici deux énoncés qui concernent des questions d'interpolation.

4.34. Interpolation par splines cubiques

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus 3. Un élément de $\mathcal{S}$ est appelé une *fonction spline cubique*.

1.a. Déterminer la nature de $\mathcal{S}$ et sa dimension.

b. Pour $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$\mathcal{T}(y) = \{\varphi \in \mathcal{S}, \forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi(x_i) = y_i\}.$$

Déterminer la nature de $\mathcal{T}(y)$ et sa dimension.

c. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction $\varphi \in \mathcal{T}(y)$ telle que $\varphi'(a) = \lambda$ et $\varphi'(b) = \mu$ (considérer, pour $\varphi \in \mathcal{T}(0)$ telle que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$, l'intégrale $\int_a^b (\varphi''(x))^2 \,\mathrm{d}x$).

2. Soit f une application $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi'(a) = f'(a)$ et $\varphi'(b) = f'(b)$. Calculer $\int_a^b (\varphi'' - f'')^2$, en fonction d'intégrales portant sur f, φ et leurs dérivées. Interpréter.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1.a. $\mathcal{S}$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. Si φ appartient à $\mathcal{S}$, alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction φ_i de φ à $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Il existe donc $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$\varphi_i(x) = \alpha_i (x - x_i)^3 + \beta_i (x - x_i)^2 + \gamma_i (x - x_i) + \delta_i.$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ si, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, φ_i, φ_i' et φ_i'' coïncident avec φ_{i+1}, φ_{i+1}' et φ_{i+1}'' en x_{i+1}. Cette condition équivaut à

$$\begin{cases} \varphi_i(x_{i+1}) = \delta_{i+1} \\ \varphi_i'(x_{i+1}) = \gamma_{i+1} \\ \varphi_i''(x_{i+1}) = \beta_{i+1}, \end{cases}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{cases} \alpha_i h_i^3 + \beta_i h_i^2 + \gamma_i h_i + \delta_i = \delta_{i+1} \\ 3\alpha_i h_i^2 + 2\beta_i h_i + \gamma_i = \gamma_{i+1} \\ 6\alpha_i h_i + 2\beta_i = 2\beta_{i+1}, \end{cases}$$

où $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Pour définir φ on a donc $4n$ degrés de liberté (pour choisir les n polynômes de degré $\leqslant 3$) et $3(n-1)$ contraintes (pour assurer un raccord de classe $\mathcal{C}^2$ en $n-1$ points). Ces contraintes se traduisent par des formes linéaires. Si ces formes sont indépendantes, ce qui intuitivement semble être le cas, la dimension de $\mathcal{S}$ sera égale à $4n - 3(n-1) = n + 3$. Utilisons le langage des systèmes linéaires. En posant $X = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \dots, \beta_{n-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \delta_0, \dots, \delta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{4n}$, les $3(n-1)$

équations ci-dessus se traduisent par un système linéaire homogène $AX = 0$ où A est une matrice de taille $(3(n-1), 4n)$. L'espace $\mathcal{S}$ est clairement isomorphe au noyau de A et sa dimension est égale à $4n - \operatorname{rg} A$.

On voit ci-dessus que les inconnues β_{i+1} et γ_{i+1} et δ_{i+1} sont parfaitement déterminées si on connaît $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i. On peut alors se donner arbitrairement $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et δ_0 (cela revient à choisir le polynôme sur le premier intervalle). Les valeurs de β_1, γ_1 et δ_1 sont alors fixées mais on peut choisir librement α_1 (cela signifie que le raccord $\mathcal{C}^2$ établi, il n'y a plus qu'un degré de liberté sur le second intervalle). Cela détermine alors uniquement β_2, γ_2 et δ_2. On choisit α_2 de manière quelconque et on poursuit de proche en proche. Bref, on a ainsi montré qu'on peut choisir $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comme inconnues secondaires et que le système est alors un système de Cramer en les inconnues restantes. Il en résulte donc bien que la dimension de $\mathcal{S}$ vaut $n+3$.

b. On garde les mêmes notations et on identifie toujours $\mathcal{S}$ avec un sous-espace de $\mathbb{R}^{4n}$. Le vecteur X doit vérifier, pour que φ appartienne à $\mathcal{T}(y)$, les conditions supplémentaires

$$\begin{cases} \text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!], \delta_i = y_i \text{ et} \\ \alpha_{n-1}h_{n-1}^3 + \beta_{n-1}h_{n-1}^2 + \gamma_{n-1}h_{n-1} + \delta_{n-1} = y_n. \end{cases}$$

On rajoute donc $n+1$ équations (avec second membre) au système précédent, pour obtenir un système de $3(n-1)+n+1 = 4n-2$ équations. On peut déjà dire que si $\mathcal{T}(y)$ n'est pas vide, il s'agit d'un sous-espace affine de S dont l'espace vectoriel associé est $\mathcal{T}(0)$.

Cette fois, $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}$ sont déterminés. On choisit arbitrairement α_{n-1} et β_{n-1}. La deuxième équation ci-dessus détermine γ_{n-1}. On voit alors de proche en proche que tous les autres coefficients sont déterminés. Le système possède donc des solutions : $\mathcal{T}(y)$ n'est pas vide. Puisque deux inconnues peuvent être choisies arbitrairement, on en déduit que $\mathcal{T}(y)$ est un espace affine de dimension 2.

Conclusion. Pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{T}(y)$ est un espace affine de dimension 2.

c. • Considérons, pour commencer, comme nous y invite l'énoncé, une application $\varphi \in \mathcal{T}(0)$ telle que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ et calculons $I = \int_a^b (\varphi''(x))^2 \, dx$. Avec les notations précédentes, on a

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i''(x))^2 \, dx.$$

En intégrant par parties, on obtient, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i''(x))^2 \, dx = [\varphi_i'(x)\varphi_i''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\varphi_i'''(x) dx.$$

La dernière intégrale vaut

$$6\alpha_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\mathrm{d}x = 6\alpha_i(\varphi_i(x_{i+1}) - \varphi_i(x_i)) = 0.$$

Il reste donc

$$\mathrm{I} = \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi'(x)\varphi''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} = \varphi'(b)\varphi''(b) - \varphi'(a)\varphi''(b) = 0.$$

Puisque I est nulle, la fonction φ'' est nulle. La fonction φ' est constante et s'annule en a : c'est la fonction nulle. De même, φ qui est constante et s'annule en a est la fonction nulle.

• X doit vérifier par rapport à la question précédente deux conditions supplémentaires. On a donc affaire à un système de $4n$ équations à $4n$ inconnues.

Considérons le système homogène associé. C'est le système que doivent vérifier les coefficients d'une fonction φ qui appartient à $\mathcal{T}(0)$ et vérifie de plus $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$. D'après ce qui précède, une telle fonction est la fonction nulle. Autrement dit, le système homogène n'a pas d'autre solution que la solution nulle. Le système est donc de Cramer. Il a donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ une solution unique.

Conclusion. Pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ une unique fonction $\varphi \in \mathcal{T}(y)$ telle que $\varphi'(a) = \lambda$ et $\varphi'(b) = \mu$.

2. L'existence et l'unicité de φ résulte de la question précédente, avec $y_i = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda = f'(a)$ et $\mu = f'(b)$.

• Montrons que $\int_a^b (\varphi'' - f'')^2 = \int_a^b (f'')^2 - \int_a^b (\varphi'')^2$.

Le même raisonnement que dans la question 1.c montre que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f'' - \varphi'')\varphi'' &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'' - \varphi'')\varphi'' \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left([(f' - \varphi')\varphi'']_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f' - \varphi')\varphi''' \right) \\
&= [(f' - \varphi')\varphi'']_a^b - \sum_{i=0}^{n-1} 6\alpha_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f' - \varphi') = 0,
\end{aligned}$$

car $f' - \varphi'$ s'annule en a et b et $f - \varphi$ s'annule en x_i pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

On en déduit que $\int_a^b f''\varphi'' = \int_a^b (\varphi'')^2$, puis que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f'' - \varphi'')^2 &= \int_a^b (f'')^2 - 2\int_a^b f''\varphi'' + \int_a^b (\varphi'')^2 \\
&= \int_a^b (f'')^2 - \int_a^b (\varphi'')^2.
\end{aligned}$$

• Interprétons ce résultat. On a

$$\int_a^b (f'')^2 - \int_a^b (\varphi'')^2 = \int_a^b (f'' - \varphi'')^2 \geqslant 0.$$

L'égalité $\int_a^b (f'')^2 = \int_a^b (\varphi'')^2$ est obtenue quand $\int_a^b (f'' - \varphi'')^2 = 0$. Alors $f'' - \varphi''$ est nulle ; $f' - \varphi'$ est constante et donc nulle, car elle s'annule en a ; $f - \varphi$ est constante, donc nulle, car elle s'annule en a. Il n'y a donc égalité entre $\int_a^b (f'')^2$ et $\int_a^b (\varphi'')^2$ que si $f = \varphi$.

Soit $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ fixés et $\mathcal{U}$ l'ensemble des applications de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f(x_i) = y_i$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f'(a) = \lambda$ et $f'(b) = \mu$. L'ensemble $\mathcal{U}$ contient une unique fonction spline cubique φ. Ce qui précède démontre que, pour tout $f \in \mathcal{U}$, on a

$$\int_a^b (f'')^2 \geqslant \int_a^b (\varphi'')^2,$$

avec égalité seulement si $f = \varphi$. L'application φ réalise le minimum sur $\mathcal{U}$ de $\int_a^b (f'')^2$. On peut dire que c'est la fonction de $\mathcal{U}$ qui est la moins «bosselée». ◁

4.35. Interpolation d'Hermite

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4, telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} x^2 (1 - x)^2.$$

2. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision du segment $[a, b]$ et $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer l'existence de $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, polynomiale de degré au plus trois sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ et telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\Phi(x_k) = f(x_k)$ et $\Phi'(x_k) = f'(x_k)$.

3. Dans les conditions de la question 2, on suppose en outre que f est de classe C^4. Montrer que

$$\|f - \Phi\|_\infty \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{384} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Si $x = 0$ ou 1, la propriété à démontrer est évidente : on prend ξ quelconque dans $]0,1[$. On suppose dans la suite que $x \in]0,1[$ et on s'inspire de la preuve classique du théorème de Taylor-Lagrange. On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = f(t) - \dfrac{\mathrm{A}}{24}t^2(1-t)^2$, A étant choisi pour que $\varphi(x) = 0$. Comme f, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^4$ et vérifie $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(x) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à φ sur les intervalles $[0,x]$ et $[x,1]$, on montre que φ' s'annule en $c \in]0,x[$ et $d \in]x,1[$: φ' s'annule donc quatre fois au moins sur $[0,1]$. En appliquant de nouveau le théorème de Rolle aux fonctions φ', φ'' et $\varphi^{(3)}$, on montre successivement que φ'' s'annule au moins trois fois, $\varphi^{(3)}$ au moins deux fois et $\varphi^{(4)}$ au moins une fois sur $]0,1[$: soit $\xi \in]0,1[$ tel que $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \mathrm{A}$ et donc $\mathrm{A} = f^{(4)}(\xi)$. Sachant que $\varphi(x) = 0$, on obtient $f(x) = \dfrac{\mathrm{A}}{24}x^2(1-x)^2 = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^2(1-x)^2$.

2. Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $\Phi_k \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ tel que $\Phi_k(x_k) = f(x_k)$, $\Phi_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, $\Phi_k'(x_k) = f'(x_k)$ et $\Phi'(x_{k+1}) = f'(x_{k+1})$. Soit $u_k : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire qui à tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ associe $u_k(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(x_k), \mathrm{P}(x_{x+1}), \mathrm{P}'(x_k), \mathrm{P}'(x_{x+1}))$. Cette application u_k est injective car si $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} u_k$, P admet x_k et x_{k+1} comme racines avec une multiplicité $\geqslant 2$. Comme $\deg \mathrm{P} \leqslant 3$, cela impose $\mathrm{P} = 0$. Comme $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}^4$ sont de même dimension, égale à 4, l'application u_k est un isomorphisme. Cela garantit l'existence, et même l'unicité, de Φ_k.

Soit alors $\Phi : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ l'application dont la restriction à chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$ est Φ_k. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. De plus, par construction, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\Phi(x_k) = \lim\limits_{x \to x_k} \Phi(x) = f(x_k)$, donc Φ est continue sur $[a,b]$; enfin, toujours par construction, Φ est dérivable à gauche et à droite en x_k avec $\Phi_d'(x_k) = \Phi_g'(x_k) = f'(x_k)$. Donc Φ est dérivable en chaque point x_k et on a $\lim\limits_{x \to x_k} \Phi'(x) = f'(x_k) = \Phi'(x_k)$. Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

3. Considérons la restriction f_k de $f - \Phi$ à $[x_k, x_{k+1}]$; f_k est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ et vérifie $f_k(x_k) = f_k(x_{k+1}) = f_k'(x_k) = f_k'(x_{k+1}) = 0$. On va se ramener au segment $[0,1]$ pour appliquer la question 1. La fonction g_k définie sur $[0,1]$ par $g_k(t) = f_k((1-t)x_k + tx_{k+1})$ vérifie les conditions de la question 1. Pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f_k(x) = g_k(t)$ et d'après 1, il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $g_k(t) = \dfrac{g_k^{(4)}(\xi)}{24}t^2(1-t)^2$. Sachant que $g_k^{(4)}(t) = (x_{k+1} - x_k)^4 f^{(4)}((1-t)x_k + tx_{k+1})$, on en déduit que

$$|f_k(x)| \leqslant \frac{(x_{k+1} - x_k)^4}{24}\|f^{(4)}\|_\infty t^2(1-t)^2,$$

puis que $|f_k(x)| \leqslant \dfrac{(x_{k+1}-x_k)^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$, car $\sup\limits_{t\in[0,1]} t^2(1-t)^2 = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$.

Conclusion. $\boxed{\|f-\Phi\|_\infty \leqslant \dfrac{\|f^{(4)}\|_\infty}{384} \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1} (x_{i+1}-x_i)^2}$. ◁

Les exercices qui suivent font appel aux différentes formules de Taylor. Les développements «tayloriens» apparaissent dans les travaux de Taylor sur l'interpolation polynomiale (1715) et ceux de Mac Laurin (1742). C'est Lagrange qui établit en 1797 la célèbre formule dite de Taylor-Lagrange : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors $c \in\,]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Lagrange pense alors que toute fonction indéfiniment dérivable peut se développer en série de Taylor. C'est Cauchy qui donnera le premier un contre-exemple. Un exemple classique de fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la série de Taylor ne converge pas vers f est fourni par $f(x) = e^{-1/x^2}$, prolongée par continuité en 0.

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, le reste peut s'écrire sous forme exacte à l'aide d'une intégrale :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx.$$

Il est à noter que cette formule avec reste intégral est valable pour une fonction à valeurs vectorielles (et se démontre par récurrence par une simple intégration par parties).

4.36. Dérivées dominées par un polynôme

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $|f^{(n)}(x)| \leqslant |\mathrm{P}(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Que dire de f ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Comme P est un polynôme de degré impair, on pense tout de suite à utiliser le fait qu'il admet au moins une racine réelle α. Par hypothèse, toutes les dérivées de f en α sont nulles. Pour $x \in \mathbb{R}$, on va estimer $f(x)$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange en α à l'ordre n. Il existe c_n

entre α et x tel que

$$f(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On a donc $|f(x)| \leqslant \dfrac{|\mathrm{P}(c_n)||x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}$, et le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car P est borné sur le segment $[\alpha, x]$ (ou $[x, \alpha]$). Ainsi, $f(x) = 0$ et comme cela vaut pour tout x, f est nulle. $\triangleleft$

Le résultat devient faux avec un polynôme de degré pair (prendre par exemple $f(x) = \sin x$ et $\mathrm{P}(x) = x^2 + 1$).

4.37. Une généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p.

1. On suppose qu'il existe $n \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $f(x) = o(x^n)$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Montrer que $f^{(p)}$ s'annule en un point.

2. Comment modifier la preuve précédente si on suppose simplement que f est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

3. Que se passe-t-il si $n = p$?

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Le cas $p = 1$ et $n = 0$ généralise le théorème de Rolle : si f tend vers 0 en $\pm\infty$, il existe un réel c tel que $f'(c) \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, f' garderait un signe constant sur $\mathbb{R}$ (car elle est continue) et f serait strictement monotone. Elle ne pourrait donc pas tendre vers 0 à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.

Passons maintenant au cas général. Il suffit bien entendu de traiter le cas où $n = p-1$. Supposons par l'absurde que la fonction $f^{(p)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Comme elle est continue, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et, quitte à prendre $-f$, on peut supposer qu'elle est strictement positive. Soit a un réel. La formule de Taylor-Lagrange permet d'affirmer que pour tout réel x, il existe un réel α_x tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}(x-a)^{p-1} + \frac{f^{(p)}(\alpha_x)}{p!}(x-a)^p.$$

On divise cela par x^{p-1} et on fait tendre x vers $+\infty$ et vers $-\infty$. On obtient

$$\frac{f^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{xf^{(p)}(\alpha_x)}{p!} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{xf^{(p)}(\alpha_x)}{p!}.$$

Mais comme $f^{(p)}(\alpha_x) > 0$, la première limite est positive et la seconde négative. Il en résulte que $f^{(p-1)}(a) = 0$. Comme cela vaut pour tout réel a, $f^{(p-1)}$ est identiquement nulle et cela contredit la stricte positivité de $f^{(p)}$.

On pouvait également argumenter de la sorte : si $f^{(p)} > 0$, $f^{(p-1)}$ est strictement croissante et il existe donc $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f^{(p-1)}(x) \geqslant a$ pour tout $x \geqslant \alpha$ ou bien $f^{(p-1)}(x) \leqslant -a$ pour tout $x \leqslant \alpha$. Supposons que nous sommes dans le premier cas, $f^{(p-1)}(x) \geqslant a$ pour $x \in [\alpha, +\infty[$. Par intégrations successives, on obtient $f(x) \geqslant \mathrm{P}(x)$ avec $\mathrm{P}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{ax^{p-1}}{(p-1)!}$, d'où la contradiction recherchée.

2. Dans la preuve précédente, on a toujours le droit d'écrire la formule de Taylor-Lagrange, mais on ne dispose plus de l'argument de continuité pour dire que $f^{(p)}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. En réalité, cela reste vrai car une fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. C'est un théorème de Darboux que l'on trouvera dans l'exercice 4.29.

Il est possible de contourner l'utilisation du théorème de Darboux : comme $f^{(p)}$ ne s'annule pas, $f^{(p-1)}$ est injective d'après le théorème de Rolle et par conséquent strictement monotone (on se reportera aux propos précédant l'exercice 4.12). La deuxième solution de la première question peut alors être reprise.

3. En revanche si $p = n$ le résultat n'est plus vrai. Pour $p = 1$ il suffit de prendre une fonction bornée à dérivée strictement positive, par exemple $x \longmapsto \arctan x$ ou $x \longmapsto \operatorname{th} x$. On peut alors en déduire des contre-exemples pour p quelconque. En effet, soit f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = o(x)$ et $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et g telle que $g^{(p-1)} = f$. On a donc $g^{(p)} = f'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pourtant, comme $g^{(p-1)}(x) = o(x)$ on a successivement $g^{(p-2)} = o(x^2)$, $g^{(p-3)}(x) = o(x^3), \ldots, g(x) = o(x^p)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (par le théorème d'intégration des relations de négligeabilité). ◁

4.38. Minoration de la dérivée seconde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,1[$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $|f''(x)| \geqslant 4$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On dispose d'une information sur f en deux points distincts 0 et 1. Pour utiliser simultanément ces deux informations, on va estimer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée en 0 puis en 1.

Il existe donc $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $d \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tels que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{8}f''(c) = \frac{1}{8}f''(c)$$

$$\text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - \frac{1}{2}f'(1) + \frac{1}{8}f''(d) = 1 + \frac{1}{8}f''(d).$$

Ainsi on a $f''(c) - f''(d) = 8$, de sorte que $|f''(c)| + |f''(d)| \geqslant 8$ et soit $|f''(c)| \geqslant 4$ soit $|f''(d)| \geqslant 4$. $\lhd$

Application pratique : si un candidat à l'X court le 100 m en 10 secondes, il y a un moment où son accélération est supérieure à 40 ms^{-2}.

Une autre solution consiste à raisonner par l'absurde en supposant $|f''| < 4$ et à intégrer cette information en tenant compte des conditions initiales en 0 et 1. Cette approche permet même d'améliorer le résultat car l'hypothèse $|f''| \leqslant 4$ suffit pour obtenir la contradiction. Par conséquent, il existe toujours un point $x \in]0, 1[$ tel que $|f''(x)| > 4$.

4.39. Zéros des dérivées successives

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) > 0$ et $f'(0) > 0$. On suppose que la limite de f en $+\infty$ est nulle.

1. Montrer qu'il existe $x_1 > 0$ tel que $f'(x_1) = 0$.

2. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

(École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Si f' ne s'annule pas, elle garde un signe constant (par continuité) et comme $f'(0) > 0$, elle est strictement positive. Mais alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f(0) > 0$, elle ne peut pas tendre vers 0 en $+\infty$. Il existe donc $x_1 > 0$ tel que $f'(x_1) = 0$.

2. On a naturellement l'idée de construire la suite par récurrence sur n. Supposons $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ construits avec $f^{(k)}(x_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Supposons par l'absurde que $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $]x_n, +\infty[$. Elle y garde alors un signe constant, par exemple strictement positif. Donc $f^{(n)}$ est strictement croissante sur $[x_n, +\infty[$ et donc strictement positive sur $]x_n, +\infty[$. Appliquons alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en un point $a > x_n$, pour estimer $f(x)$. Pour tout $x > a$, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

On en déduit que

$$f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Or le polynôme qui minore $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. D'où la contradiction avec l'hypothèse que f a une limite nulle. ◁

4.40. Théorème de Glaeser pour une variable (1963)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, positive sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Soit $\alpha > 0$ et $\mathrm{M}(\alpha) = \sup\limits_{t\in[-2\alpha,2\alpha]} |f''(t)|$. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour $x \in [-\alpha,\alpha]$ on a $f'^2(x) \leqslant 2f(x)\mathrm{M}(\alpha)$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $f(x_0) > 0$, alors le théorème de dérivation des fonctions composées garantit que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0, de dérivée $\dfrac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}$. En revanche si x_0 est un zéro de f on peut avoir des problèmes du fait de la non-dérivabilité de la fonction racine carrée en 0. Par exemple, si $f(x) = x^2$, on a $\sqrt{f(x)} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0. Elle est toutefois dérivable à droite et à gauche. On va voir que ce fait est général.

Soit x_0 un zéro de f. Comme f admet en x_0 un minimum local, on a $f'(x_0) = 0$. On va étudier le taux d'accroissement de $\sqrt{f}$ entre x_0 et x en utilisant un développement limité de f. On a $f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + o(x-x_0)^2$ par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Il en résulte que

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x-x_0} = \frac{|x-x_0|}{x-x_0}\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)}$$

(comme $f \geqslant 0$ on a nécessairement $f''(x_0) \geqslant 0$). Il en résulte que $\sqrt{f}$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec une dérivée à droite qui vaut $\sqrt{\dfrac{f''(x_0)}{2}}$ et une dérivée à gauche qui vaut $-\sqrt{\dfrac{f''(x_0)}{2}}$. Ainsi, $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$. La dérivée en x_0 de $\sqrt{f}$ est alors nulle.

Conclusion. $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si en tout zéro x_0 de f on a $f''(x_0) = 0$.

2. Soit $x \in [-\alpha, \alpha]$. Pour $|h| \leqslant \alpha$, on a, d'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c) \geqslant 0,$$

avec c entre x et $x+h$. *A fortiori*, on a

$$\mathrm{P}(h) = \mathrm{M}(\alpha)\frac{h^2}{2} + hf'(x) + f(x) \geqslant 0,$$

car $|c| \leqslant 2\alpha$. Le polynôme P est positif sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. Or le minimum de ce polynôme est atteint en $\dfrac{-f'(x)}{\mathrm{M}(\alpha)}$ et comme il existe d entre 0 et x tel que $f'(x) = f'(0) + xf''(d) = xf''(d)$, on a

$$\left|\frac{f'(x)}{\mathrm{M}(\alpha)}\right| = \left|\frac{xf''(d)}{\mathrm{M}(\alpha)}\right| \leqslant \alpha.$$

Le minimum de P est atteint dans le segment $[-\alpha, \alpha]$; il est donc positif. Donc P est positif sur $\mathbb{R}$ et son discriminant est négatif : $f'(x)^2 \leqslant 2f(x)\mathrm{M}(\alpha)$. C'est l'inégalité demandée.

3. On va montrer que la condition obtenue dans la question 1 suffit pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit de prouver que la dérivée de $\sqrt{f}$ est continue en tout zéro x_0 de f. À translation près on peut se placer en $x_0 = 0$. On est alors ramené aux hypothèses de la question précédente : $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. En reprenant les notations ci-dessus, on a pour tout point x de $[-\alpha, \alpha]$ tel que $f(x) \neq 0$,

$$|(\sqrt{f})'(x)| = \frac{|f'(x)|}{2\sqrt{f(x)}} \leqslant \frac{\sqrt{\mathrm{M}(\alpha)}}{\sqrt{2}}.$$

L'inégalité $|(\sqrt{f})'(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\mathrm{M}(\alpha)}}{\sqrt{2}}$ demeure pour un point x tel que $f(x) = 0$ puisqu'en un tel point la dérivée de $\sqrt{f}$ est nulle. Comme f'' est continue, la quantité $\mathrm{M}(\alpha)$ tend vers 0 lorsque α tend vers 0. Cela prouve la continuité de $(\sqrt{f})'$ en 0.

Conclusion. $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si en tout zéro x_0 de f on a $f''(x_0) = 0$. $\lhd$

Ce résultat, prouvé par Glaeser, se généralise aux fonctions positives de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le lecteur pourra en rédiger la démonstration en adaptant la solution de l'exercice.

4.41. Étude du maximum de $f \longmapsto f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ telles que, pour tout $x \in]0,1[$, $|f''(x)| \leqslant 1$. Pour $f \in \mathcal{E}$, on note $\mathrm{A}(f) = f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$.

1. Montrer que A est bornée sur $\mathcal{E}$ et déterminer $\sup\limits_{f\in\mathcal{E}} \mathrm{A}(f) = \mathrm{M}$.

2. Résoudre $\mathrm{A}(f) = \mathrm{M}$ dans $\mathcal{E}$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Si on pose $g(t) = f\left(t+\frac{1}{2}\right) - f(t)$ pour t dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\mathrm{A}(f) = g\left(\frac{1}{2}\right) - g(0)$. En utilisant la formule des accroissements finis, il existe donc $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $\mathrm{A}(f) = \frac{1}{2} g'(c)$. On a de plus $g'(c) = f'\left(c+\frac{1}{2}\right) - f'(c)$. En utilisant une nouvelle fois les accroissements finis, on obtient l'existence de $c' \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $\mathrm{A}(f) = \frac{1}{4} f''(c+c')$. On en déduit donc que $|\mathrm{A}(f)| \leqslant \frac{1}{4}$ pour toute fonction f de $\mathcal{E}$.

La valeur $\frac{1}{4}$ est atteinte. En effet, si on prend pour f une fonction telle que $f'' = 1$, c'est-à-dire de la forme $t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 + at + b$, on obtient exactement $\mathrm{A}(f) = \frac{1}{4}$.

Conclusion. On a $\sup\limits_{f\in\mathcal{E}} \mathrm{A}(f) = \max\limits_{f\in\mathcal{E}} \mathrm{A}(f) = \frac{1}{4}$.

2. On va prouver que les seules fonctions $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathrm{A}(f) = \frac{1}{4}$ sont les fonctions polynômes $t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 + at + b$. Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathrm{A}(f) = \frac{1}{4}$. On pose toujours $g(t) = f\left(t+\frac{1}{2}\right) - f(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. En fait, comme $|f''| \leqslant 1$, la fonction f' admet des limites finies en 0 et en 1 (f'' est sommable sur $]0,1[$ donc $\int_x^{1/2} f'' = f'(1/2) - f'(x)$ admet une limite quand x tend vers 0^+ et de même pour $\int_{1/2}^x f'' = f'(x) - f'(1/2)$ quand x tend vers 1). Le théorème sur la limite de la dérivée[2] nous assure de la dérivabilité de f en 0 et 1 et même du caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction f

2. Rappelons que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$ et telle que f' admette une limite finie ℓ en b, alors f est dérivable en b et $f'(b) = \ell$: c'est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis.

sur $[0,1]$. Ainsi, g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On va alors utiliser des expressions intégrales. On a, pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$g'(t) = f'\Big(t+\frac{1}{2}\Big) - f'(t) = \int_t^{t+\frac{1}{2}} f''(u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}.$$

On sait par ailleurs que $\mathrm{A}(f) = g\Big(\frac{1}{2}\Big) - g(0) = \int_0^{1/2} g'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$. La dernière égalité impose que $g'(t) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et cela donne que $f''(u) = 1$ pour tout $u \in]0,1[$. Il en résulte l'existence de a et b réels tels que, si $t \in]0,1[$, $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + at + b$. Cette formule reste vraie en 0 et 1 puisque f est continue.

Conclusion. Les solutions de $\mathrm{A}(f) = \frac{1}{4}$ sont donc les fonctions du type $t \in [0,1] \longmapsto \frac{t^2}{2} + at + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. $\lhd$

4.42. Puissances entières

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Pour $f \in \mathrm{E}$ on note $\Delta f \in \mathrm{E}$ l'application définie pour tout $x > 0$ par $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

1. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in]0,1[$, tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$.

2. En déduire l'ensemble des réels c tels que n^c soit entier pour tout $n \geqslant 1$.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

1. Soit $x > 0$. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant une application directe de la formule des accroissements finis. Supposons le résultat vrai au rang n. On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $g = \Delta f$. Soit $x > 0$. Il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $(\Delta^n g)(x) = g^{(n)}(x + n\theta)$. Cela s'écrit $\Delta^{n+1} f(x) = f^{(n)}(x + n\theta + 1) - f^{(n)}(x + n\theta)$. On applique alors l'égalité des accroissements finis

$$f^{(n)}(x + n\theta + 1) - f^{(n)}(x + n\theta) = f^{(n+1)}(x + n\theta + \theta'),$$

où $\theta' \in]0,1[$, et on conclut en remarquant que $0 < n\theta + \theta' < n+1$ donc qu'il existe $\theta'' \in]0,1[$ tel que $n\theta + \theta' = (n+1)\theta''$.

Cela ne se passe pas aussi bien si on écrit $\Delta^{n+1} f = \Delta(\Delta^n f)$ (ci-dessus on utilise la relation $\Delta^{n+1} f = \Delta^n(\Delta f)$). En effet, pour $x > 0$ on trouve $\theta \in]0,1[$ tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$. Mais par malheur ce θ dépend de x. Donc $\Delta(\Delta^n f)(x) = f^{(n)}(x + 1 + n\theta') - f^{(n)}(x + n\theta)$. Et ici, c'est ennuyeux car l'écart entre les deux points n'est pas de 1.

2. Notons Ω l'ensemble des réels c tels que, pour tout $n \geqslant 1$, $n^c \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\mathbb{N} \subset \Omega$. On va prouver par l'absurde qu'il y a égalité en supposant qu'il existe $\alpha \in \Omega$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. La fonction $f(x) = x^\alpha$ est dans E et ne prend que des valeurs entières sur $\mathbb{N}^*$. Il en est donc de même de $\Delta^p f$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Appliquons le résultat de la question précédente à f avec $n = \mathrm{E}(\alpha) + 1$. Comme $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, on a pour tout $x \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta^n f(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(x+n\theta)^{\alpha-n},$$

avec $\theta \in]0,1[$.

Pour tout entier x cette quantité est non nulle (car $\alpha \notin \mathbb{N}$) et entière d'après la remarque qui précède. De plus elle tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini (puisque $\alpha - n < 0$). C'est absurde, car une suite d'entiers non nuls ne peut converger vers 0. $\triangleleft$

L'énoncé suivant est un thème très classique des sujets de concours.

4.43. Inégalités de Kolmogorov

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $\mathrm{M}_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $\mathrm{M}_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. Montrer que

$$\mathrm{M}_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mathrm{M}_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, M_k est fini et

$$\mathrm{M}_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \mathrm{M}_0^{1-\frac{k}{n}} \mathrm{M}_n^{\frac{k}{n}}.$$

(ENS Ulm)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Une idée naturelle consiste à utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange. Soit x un réel et $h > 0$. On peut écrire

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2 \mathrm{M}_2}{2}.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on en déduit que $h|f'(x)| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \dfrac{h^2\mathrm{M}_2}{2}$ ou encore $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}$. Cela étant valable pour tout $h > 0$, on va choisir h de manière à minimiser le majorant. On peut étudier la fonction $h \longmapsto \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}$ ou plus simplement invoquer l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique : le produit de $\dfrac{2\mathrm{M}_0}{h}$ et $\dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}$ est constant et vaut $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2$. La somme sera minimale lorsque les deux termes sont égaux et valent donc chacun $\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$. On en déduit que

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2},$$

ce qui est plus faible que l'inégalité demandée par l'énoncé. Pour aboutir à la constante de l'énoncé, on raffine le travail précédent en écrivant aussi l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x-h$:

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{h^2\mathrm{M}_2}{2}.$$

En la combinant avec l'inégalité utilisée précédemment, on obtient, toujours grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leqslant h^2\mathrm{M}_2$$

puis

$$2h|f'(x)| \leqslant h^2\mathrm{M}_2 + |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant h^2\mathrm{M}_2 + 2\mathrm{M}_0.$$

Ainsi, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2} + \dfrac{\mathrm{M}_0}{h}$. En prenant la valeur de h qui minimise le majorant (à savoir $h = \sqrt{\dfrac{\mathrm{M}_2}{2\mathrm{M}_0}}$), on obtient $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$. Comme cela vaut pour tout réel x, f' est bornée et $\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$. Cela reste bien entendu vrai si $\mathrm{M}_0 = 0$, puisqu'alors f est nulle.

2. Montrons pour commencer que les M_k sont finis. Soit x un réel et $h > 0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ conduit à

$$\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leqslant \frac{h^n\mathrm{M}_n}{n!}$$

soit, par inégalité triangulaire, à

$$\left| hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \frac{h^n\mathrm{M}_n}{n!}$$

Écrivons cette inégalité pour $n-1$ valeurs distinctes de h, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_{n-1}$. Si on note X le vecteur colonne $(f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$, les inégalités précédentes signifient que $\|AX\|_\infty \leqslant K = 2M_0 + \dfrac{h_{n-1}^n M_n}{n!}$, où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & \dfrac{h_1^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n-1} & \dfrac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}.$$

Or A est clairement inversible (en sortant les factorielles et en mettant en facteur les h_k, on se ramène à une matrice de Vandermonde). On a donc $\|X\|_\infty \leqslant \|A^{-1}\|K$. Comme cette inégalité vaut pour tout réel x, les quantités M_k sont bien finies.

On va maintenant prouver les inégalités proposées par récurrence sur n. On observe que pour $k = 0$ et $k = n$ l'inégalité est triviale.

• Pour $n = 2$ et $k = 1$, on obtient $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$, ce qui a été prouvé dans la première question.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'au rang n et considérons une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Fixons k entre 1 et n. En appliquant le cas $n = 2$ à la fonction $f^{(k-1)}$ (ce qui est possible d'après ce qu'on vient de voir) on a l'inégalité

$$M_k^2 \leqslant 2M_{k-1}M_{k+1}.$$

On va maintenant majorer M_{k-1} et M_{k+1} en utilisant l'hypothèse de récurrence. Pour le premier, on utilise l'hypothèse de récurrence au rang k. Il vient

$$M_{k-1} \leqslant 2^{\frac{k-1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{\frac{k-1}{k}}.$$

Pour le second terme, on utilise l'hypothèse de récurrence au rang $n+1-k$ pour la fonction $f^{(k)}$. Il vient

$$M_{k+1} \leqslant 2^{\frac{n-k}{2}} M_k^{\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}.$$

En utilisant ces deux majorations, on aboutit à

$$M_k^2 \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{\frac{k-1}{k}+\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}.$$

En élevant cela à la puissance $\dfrac{k(n+1-k)}{n+1}$, on obtient le résultat souhaité

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}},$$

ce qui termine la récurrence. ◁

Les exercices suivants concernent les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4.44. Théorème de division

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'application $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose de plus que $f''(0) \neq 0$ et $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $g^2 = f$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On va donner deux preuves différentes de ce résultat.

• La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et tend vers $f'(0)$ en 0. On pose donc $g(0) = f'(0)$ de sorte que g est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est bien entendu de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On va montrer qu'elle est aussi dérivable à tout ordre en 0.

Pour $x \neq 0$, on a

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(0) + x^2 f''(0) - xf'(0) - \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)}{x^2},$$

ce qui tend vers $\frac{1}{2} f''(0)$. Donc, par le théorème sur la limite de la dérivée, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'(0) = \frac{1}{2} f''(0)$. Montrons alors par récurrence sur $n \geqslant 1$ que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. Le cas $n = 1$ vient d'être traité. Supposons le résultat établi au rang $n-1$, $n \geqslant 2$. Pour simplifier on va se ramener au cas où les $n+1$ premières dérivées en 0 de f sont nulles. Considérons pour cela la fonction

$$\tilde{f}(x) = f(x) - xf'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0) - \cdots - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses $n+1$ premières dérivées sont nulles en 0. Par hypothèse de récurrence, $\tilde{g}(x) = \dfrac{\tilde{f}(x)}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ avec $\tilde{g}(0) = \tilde{g}'(0) = \cdots = \tilde{g}^{(n-1)}(0) = 0$. En dérivant la relation $\tilde{g}(x) = \dfrac{\tilde{f}(x)}{x}$ à l'aide de la formule de Leibniz, il vient, pour tout x non nul :

$$\tilde{g}^{(n)}(x) = \frac{\tilde{f}^{(n)}(x)}{x} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} (n-k)! \frac{\tilde{f}^{(k)}(x)}{x^{n-k+1}}.$$

On effectue un $\mathrm{DL}_{n-k+1}(0)$ de $\tilde{f}^{(k)}(x)$. Comme les dérivées de $\tilde{f}$ en 0 jusqu'à l'ordre $n+1$ sont nulles, on a $\tilde{f}^{(k)}(x) = o(x^{n-k+1})$. Il en résulte que $\tilde{g}^{(n)}(x) = o(1)$ tend vers 0 en 0 et le théorème sur la limite de la dérivée permet de conclure que $\tilde{g}$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ avec $\tilde{g}^{(n)}(0) = 0$. La relation

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \tilde{g}(x) + f'(0) + \frac{x}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$$

montre que g est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. Cela termine la récurrence.

Conclusion. La fonction g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $n \geqslant 0$, $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Le résultat que l'on vient de démontrer est évident si la fonction f est développable en série entière en 0.

• Voici une seconde solution, nettement plus rapide, qui utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral. La fonction f étant de classe C^1, on peut écrire pour x réel

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = x\int_0^1 f'(ux)\mathrm{d}u$$

en faisant le changement de variables $t = ux$. Ainsi, pour x non nul,

$$g(x) = \int_0^1 f'(ux)\mathrm{d}u.$$

Si on pose $g(0) = f'(0)$, on voit que g est la fonction $x \longmapsto \int_0^1 f'(ux)\mathrm{d}u$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque f' l'est.

2. Notons qu'au voisinage de 0, on a $f(x) = xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$. Pour que f garde un signe constant, il faut $f'(0) = 0$. Posons alors $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ pour x non nul. La fonction h se prolonge par continuité en 0 par $h(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$. Le théorème de division de la question précédente, appliqué deux fois, montre que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, h est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\sqrt{h}$ est également de classe C^∞. Il nous suffit alors de poser $g(x) = x\sqrt{h(x)}$ pour obtenir une fonction répondant au problème posé. $\triangleleft$

On sait qu'une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ est parfaitement déterminée par la suite de ses dérivées en 0. *Il n'en est pas de même pour une fonction de classe C^∞.*

4.45. Le théorème de réalisation de Borel

Soit E l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $\mathrm{N}_p(f) = \max\limits_{0 \leqslant q \leqslant p} \|f^{(q)}\|_\infty$. Montrer que N_p est une norme sur E.

2. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-1, 1]$, et telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi^{(p)}(0) = 0$ si $p \geqslant 1$. Comment construire une telle fonction ?

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{N}_n \left(\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) x^{n+1}\right) = 0$.

4. On se donne une suite (a_n) de réels. Construire une suite décroissante de réels strictement positifs (ε_n), telle que

$$\mathrm{N}_n \left(\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) x^{n+1}\right) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{|a_{n+1}|}\right).$$

On pose $g(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\right) \frac{a_n x^n}{n!}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et vérifie $g^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(**École polytechnique**)

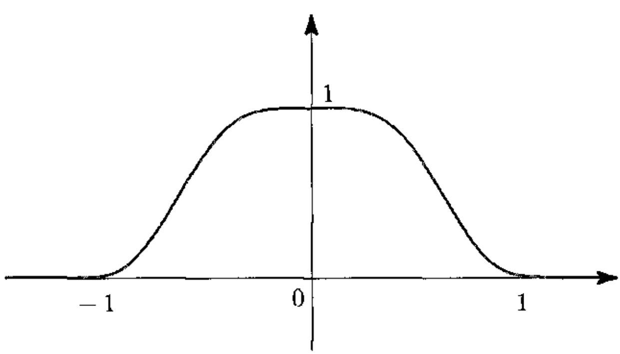
▷ **Solution.**

1. Remarquons que si $f \in \mathrm{E}$, f et toutes ses dérivées sont continues et à support compact, donc bornées, ce qui assure l'existence de $\mathrm{N}_p(f)$. La vérification que N_p est une norme est aisée. En utilisant la linéarité de la dérivation et l'inégalité triangulaire, on montre que si $(f, g) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{N}_p(f+g) \leqslant \mathrm{N}_p(f) + \mathrm{N}_p(g) \text{ et } \mathrm{N}_p(\lambda f) = |\lambda| \mathrm{N}_p(f).$$

De plus $\mathrm{N}_p(f) = 0$ implique $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f = 0$.

2. On va construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le graphe ressemble à ce qui suit :



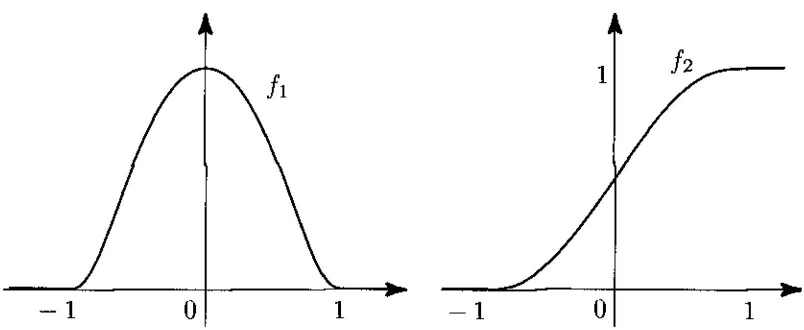
Pour simplifier on va la choisir paire. La partie difficile de la construction est bien entendu d'avoir les dérivées d'ordre $\geqslant 1$ nulle en 0, et les toutes les dérivées à gauche en 1 également nulles afin d'avoir un raccord de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On va partir d'une fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut vérifier que la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ f(x) = e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

convient. En effet, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et il suffit d'étudier les dérivées en 0. Pour cela, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$, pour tout $x > 0$. Cela établi, on montre par récurrence sur n que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, pour tout n. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$, donc f est continue. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^n$. Alors, par croissance comparée, $\lim\limits_{0^+} f^{(n+1)} = \lim\limits_{0^-} f^{(n+1)} = 0$. Du théorème sur la limite de la dérivée, on déduit que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et que $f^{(n+1)}$ est continue en 0. La fonction f est donc $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et cela termine la récurrence.

On considère alors la fonction f_1 définie par $f_1(x) = f(1+x)f(1-x)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire, nulle en dehors du segment $[-1, 1]$ et, par la formule de Leibniz, toutes ses dérivées en -1 et 1 sont nulles. Elle ne répond pas encore à la question posée car ses dérivées en 0 ne conviennent pas. Considérons alors f_2 définie par



$$f_2(x) = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{x} f_1(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-1}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t}.$$

La fonction f_2 est toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $[-1, 1]$. On a $f_2^{(n)}(-1) = 0$ pour tout n, $f_2(1) = 1$ et $f_2^{(n)}(1) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Le graphe de f_2 sur $[-1,1]$ est exactement ce qu'on souhaite obtenir pour φ sur $[-1,0]$.

On termine donc en posant $\varphi(x) = \varphi(-x) = f_2(2x+1)$ pour tout $x \leqslant 0$. La fonction ainsi construite répond à la question posée.

On dit que φ est une fonction plateau.

3. Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi_{\varepsilon,n} : x \longmapsto \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) x^{n+1}$. La fonction $\varphi_{\varepsilon,n}$ est C^∞ et nulle en dehors de $[-\varepsilon,\varepsilon]$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. La formule de Leibniz donne, pour tout $x \in [-\varepsilon,\varepsilon]$,

$$\varphi_{\varepsilon,n}^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (n+1)n\ldots(n+2-k)x^{n+1-k}\varphi^{(p-k)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-(p-k)}.$$

On en déduit que $\|\varphi_{\varepsilon,n}^{(p)}\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_n(\varphi)\varepsilon^{n+1-p}\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$. Ceci montre que, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \|\varphi_{\varepsilon,n}^{(p)}\|_\infty = 0$ et donc que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \mathrm{N}_n(\varphi_{\varepsilon,n}) = 0.$$

4. • On construit la suite (ε_n) par récurrence. On a $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \mathrm{N}_0(\varphi_{\varepsilon,0}) = 0$. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathrm{N}_0(\varphi_{\varepsilon_0,0}) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{|a_1|}\right)$. Les réels $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{n-1}$ étant choisis, de $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \mathrm{N}_n(\varphi_{\varepsilon,n}) = 0$ on déduit l'existence de $\varepsilon_n > 0$ tel que $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$ et $\mathrm{N}_n(\varphi_{\varepsilon_n,n}) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{|a_{n+1}|}\right)$.

• Posons, pour tout réel x, $g_0(x) = a_0$ et $g_n(x) = \varphi_{\varepsilon_{n-1},n-1}(x)\frac{a_n}{n!}$ si $n \geqslant 1$. On a, par le choix de la suite (ε_n), $\mathrm{N}_{n-1}(g_n) \leqslant \frac{1}{n!}$. On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a, si $n > p$,

$$\|g_n^{(p)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Il en résulte que la série $\sum g_n^{(p)}$ (la sommation portant sur n) est normalement convergente, pour tout p. Le théorème de dérivation des séries de fonctions permet de conclure que g est C^∞ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n^{(p)}$.

• Calculons $g^{(p)}(0)$, pour tout p, par la formule de Leibniz. Si $p < n$, alors on peut mettre en facteur x^{n-p} dans l'expression de $g_n^{(p)}(x)$; on a donc $g_n^{(p)}(0) = 0$. Si $p > n$, $g_n^{(p)}(0)$ est une combinaison linéaire de $\varphi^{(k)}(0)$ avec $k \geqslant p-n \geqslant 1$. On a encore $g_n^{(p)}(0) = 0$. Enfin $g_n^{(n)}(0) = \varphi(0)a_n = a_n$.

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n^{(p)}(0) = a_p$.

Conclusion. Nous avons démontré le théorème de Borel : pour toute suite de réels (a_n), il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = a_n$. ◁

L'exercice suivant s'intéresse à l'ensemble des zéros d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4.46. Théorème de Whitney

Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{F} \neq \mathbb{R}$, sinon la fonction nulle convient. D'après l'exercice 1.27, l'ouvert non vide $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts non vides disjoints.

Pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, on construit une fonction $f_{\mathrm{I}} : \mathbb{R} \longmapsto [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ positive ou nulle telle que, pour tout réel x, $f_{\mathrm{I}}(x) = 0$ soit équivalent à $x \notin \mathrm{I}$. On sait (voir la solution de l'exercice 4.45) que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est à valeurs dans $[0,1]$.

Si $\mathrm{I} =]a,b[$, avec a et b réels la fonction $f_{\mathrm{I}} : x \longmapsto f(-(x-a)(x-b))$ convient : elle est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $f_{\mathrm{I}}(x) = 0$ équivaut à $(x-a)(x-b) \geqslant 0$, *i.e.* à $x \notin]a,b[$. De même si $\mathrm{I} =]a,+\infty[$ avec a réel, on prend $f_{\mathrm{I}} : x \longmapsto f(x-a)$ et si $\mathrm{I} =]-\infty, b[$ avec b réel, on prend $f_{\mathrm{I}} : x \longmapsto f(b-x)$.

Si $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est une réunion d'un nombre fini d'intervalles ouverts on écrit $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{I}_k$. La fonction $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{\mathrm{I}_k}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Comme chacune des fonctions est positive, on a pour tout réel x,

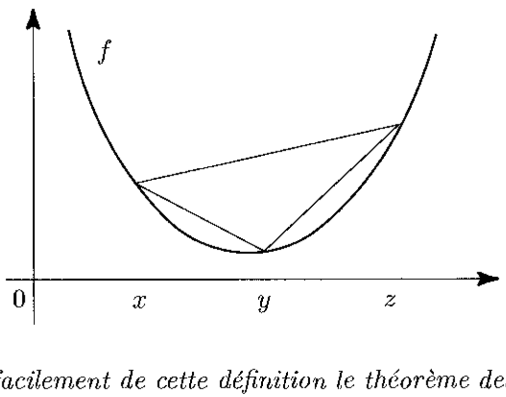
$$\varphi(x) = 0 \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ f_{\mathrm{I}_k}(x) = 0 \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ x \notin \mathrm{I}_k \iff x \in \mathrm{F}.$$

Si $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est une réunion d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts, $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n$, c'est un peu plus compliqué. On pose $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n f_{\mathrm{I}_n}$, où les a_n seront strictement positifs et choisis de telle façon que φ soit définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$. Chaque fonction f_{I_n} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{\mathrm{I}_n}^{(k)}$ est bornée. En effet si I_n est borné, $f_{\mathrm{I}_n}^{(k)}$ est à support compact et sinon elle tend vers 0 en $\pm\infty$ (cela résulte de la croissance comparée d'un polynôme et d'une exponentielle). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^2 \max(\|f_{\mathrm{I}_n}\|_\infty, \|f'_{\mathrm{I}_n}\|_\infty, \dots, \|f_{\mathrm{I}_n}^{(n)}\|_\infty)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, pour $n \geqslant k$, $a_n \leqslant \dfrac{1}{n^2 \|f_{\mathrm{I}_n}^{(k)}\|_\infty}$ et donc $a_n \|f_{\mathrm{I}_n}^{(k)}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum a_n f_{\mathrm{I}_n}^{(k)}$ est donc normalement convergente pour tout $k \in \mathbb{N}$. En appliquant de manière réitérée le théorème de dérivation des séries de fonctions, on prouve que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre comme dans le cas fini que l'ensemble des zéros de φ est F. ◁

La série d'exercices qui suit porte sur la convexité. Rappelons qu'une fonction f d'un intervalle I *dans* $\mathbb{R}$ *est dite convexe lorsque son graphe est en dessous de toutes ses cordes, c'est-à-dire si*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Si l'inégalité est stricte chaque fois que $x \neq y$ et $0 < t < 1$, la fonction est dite strictement convexe.



On déduit facilement de cette définition le théorème des pentes croissantes : f est convexe sur I *si et seulement si pour tout triplet (x,y,z) de points de* I *tel que $x < y < z$ on a*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

À partir de cela on montre facilement qu'une fonction convexe $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ admet en tout point intérieur à I *une dérivée à droite et une dérivée à gauche : en effet, si a est un point intérieur, la fonction qui à x associe la pente de la sécante entre a et x est croissante et bornée sur un voisinage* *pointé de x ; cette fonction admet donc des limites finies à droite et à gauche en x.*

En particulier f est continue sur l'intérieur de I.

Lorsque f est dérivable sur I, elle est convexe si et seulement si f' est croissante. Dans le cas où f est deux fois dérivable, elle est donc convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

4.47. Convexité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est convexe.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Posons pour $x > 0$, $g(x) = xf(x)$ et $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

• On peut déjà vérifier le résultat lorsque f est deux fois dérivable. On a $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$ et $h''(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(2f'\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{x^3}g''\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$. Il apparaît alors que $g'' \geqslant 0$ équivaut à $h'' \geqslant 0$, ce qui permet de conclure pour la convexité. Traitons maintenant le cas général en revenant à la définition de la convexité.

• Supposons g convexe et montrons que h est convexe. Considérons des réels strictement positifs $x < z < y$. Il s'agit d'établir que

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{y-z}{y-x} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{z-x}{y-x} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Comme $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{z} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et g est convexe, on peut écrire

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \frac{1}{y} f\left(\frac{1}{y}\right),$$

ce qui donne, après simplification, l'inégalité voulue.

• Supposons h convexe. On peut écrire $h(x) = x\dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\mathrm{F}(x)$, où $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. D'après ce que nous venons de faire, la fonction $x \longmapsto \mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est convexe. Or, si $x > 0$, $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right) = xf(x) = g(x)$. La fonction g est bien convexe. ◁

Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, *on montre facilement par récurrence sur n que si $x_1, \dots, x_n$ sont des points de* I, *et $t_1, \dots, t_n$ des réels positifs de somme* 1, *on a*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

Cela offre un outil puissant pour établir des inégalités. Le lecteur pourra par exemple retrouver l'inégalité arithmético-géométrique en utilisant la convexité de la fonction $x \longmapsto -\ln x$. Les exercices ci-après proposent d'autres exemples.

4.48. Inégalité de convexité (1)

> Soit $a, b \geqslant 0$ tels que $a + b = 1$. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a $1 + x^a y^b \leqslant (1+x)^a(1+y)^b$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

C'est trivial si $x = 0$ ou $y = 0$. Supposons $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathrm{X} = \ln x$, $\mathrm{Y} = \ln y$. Il s'agit de prouver que

$$\ln\left(1 + e^{a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}}\right) \leqslant a\ln(1+e^{\mathrm{X}}) + b\ln(1+e^{\mathrm{Y}}).$$

On reconnaît là une inégalité de convexité. Soit $f : u \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1+e^u)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et un petit calcul montre que

$$f''(u) = \frac{e^u}{(1+e^u)^2} \geqslant 0.$$

Donc f est convexe et $f(a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}) \leqslant af(\mathrm{X}) + bf(\mathrm{Y})$, ce qui est l'inégalité espérée. ◁

4.49. Inégalité de convexité (2)

> Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *bistochastique* (c'est-à-dire telle que $a_{ij} \geqslant 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de A soit égale à 1). Soit $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées positives. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. Montrer que $\prod_{i=1}^n y_i \geqslant \prod_{i=1}^n x_i$.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Si l'un des x_i est nul l'inégalité est évidente. On supposera donc les x_i strictement positifs. On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Il s'agit d'une combinaison convexe des x_i. Par concavité de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \ln y_i = \ln\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ln x_j.$$

En additionnant ces inégalités il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \ln y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ln x_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}_{=1} \ln x_j = \sum_{j=1}^{n} \ln x_j.$$

Le résultat est donc établi en passant à l'exponentielle. ◁

4.50. Condition suffisante de convexité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour x, y réels,

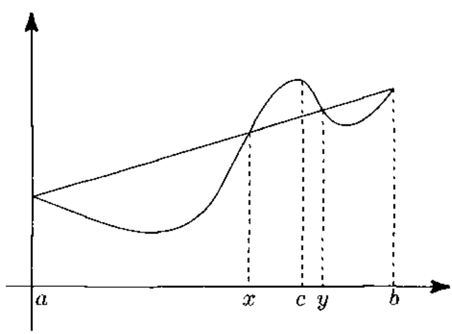
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas convexe. On peut donc trouver $a < b$ et $c \in]a,b[$ tel que le point $(c, f(c))$ soit au-dessus de la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Quitte à retrancher à f la fonction affine $x \longmapsto f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on peut supposer $f(a) = f(b) = 0$. (Le dessin est fait dans le cas général.) On a alors $f(c) > 0$. L'idée du raisonnement apparaît alors clairement : on va obtenir une contradiction avec l'hypothèse en prenant les deux zéros de f de part et d'autre de c qui sont les plus proches de c. Précisons cela. L'ensemble $\{u \in [a,c],\ f(u) = 0\}$ est non vide (car il contient a), majoré par définition et fermé car f est continue. Il admet donc un plus grand élément x. On a $x < c$ car $f(c) > 0$ et f est strictement positive sur l'intervalle $]x, c]$ par le théorème des valeurs intermédiaires. De la même manière on justifie l'existence de $y > c$ tel que $f(y) = 0$ et $f > 0$ sur $[c, y[$. On a alors $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) > 0$ alors que $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} = 0$ ce qui est la contradiction annoncée. $\triangleleft$

La solution ci-dessus montre, plus généralement, qu'une fonction continue f vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists t \in]0,1[, \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y),$$

est convexe (l'exercice est le cas particulier où on peut toujours prendre $t = 1/2$).

Le résultat de l'exercice ne reste pas vrai sans l'hypothèse de continuité. Il suffit de prendre pour f un morphisme discontinu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même. Le lecteur pourra en revanche montrer, mais c'est plus difficile, qu'avec l'hypothèse f majorée sur un intervalle ouvert I *donné, on peut encore conclure que f est convexe.*

4.51. Minimum d'une fonction convexe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local, il s'agit d'un minimum global. Que peut-on dire de l'ensemble des points où ce minimum est atteint ?

2. On suppose que f est dérivable et qu'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f admet en a un minimum global.

3. On suppose maintenant que f est deux fois dérivable et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'' \geqslant \alpha > 0$. Montrer que f possède un minimum unique. A-t-on encore ce résultat avec l'hypothèse $f'' > 0$?

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point où f admet un minimum local. On peut donc trouver $\eta > 0$ tel que $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a-\eta, a+\eta]$. Prenons $x > a + \eta$. D'après l'inégalité des pentes croissantes, on a

$$0 \leqslant \frac{f(a+\eta)-f(a)}{\eta} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Il en résulte en particulier que $f(a) \leqslant f(x)$. On montre de même que pour tout $x < a-\eta$, $f(a) \leqslant f(x)$ de sorte que f admet en a un minimum global.

Supposons que b soit un autre point où ce minimum est atteint : $f(a) = f(b)$. Par convexité de f on a $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in [a,b]$. Mais comme f atteint son minimum en a, on a nécessairement égalité. Il en résulte que f est constante sur tout le segment $[a,b]$. Cela prouve que l'ensemble des points où f atteint son minimum est une partie convexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle.

2. Comme f est convexe, la fonction f' est croissante. Elle est donc négative sur $]-\infty, a[$ et positive sur $]a,+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, a[$ et croissante sur $]a,+\infty[$. Elle possède donc un minimum global en a.

3. La fonction $x \longmapsto f'(x)-\alpha x$ est de dérivée positive, donc croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, $f'(x)-\alpha x \geqslant f(0)$ et donc $f'(x) \geqslant \alpha x+f'(0)$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f' = +\infty$. On a de même, $f'(x) \leqslant \alpha x + f'(0)$ si $x \leqslant 0$. On en déduit que $\lim\limits_{-\infty} f' = -\infty$. Comme f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en un unique point a. D'après la question précédente f admet en a un minimum global. Il est nécessairement unique, car en un minimum local de f la dérivée f' doit s'annuler.

L'existence d'un minimum n'est plus assurée avec la seule hypothèse $f'' > 0$ comme le montre l'exemple de la fonction exponentielle. $\lhd$

Bien entendu, pour une fonction dérivable quelconque $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (I ouvert), la condition $f'(a) = 0$ n'est pas suffisante pour que f admette un extremum (même local) en a. Toutefois, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a (elle est convexe sur un intervalle ouvert contenant a).

4.52. Intervalle de monotonie d'une fonction strictement convexe

Soit f une fonction strictement convexe de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Montrer qu'il existe un sous-intervalle J non vide de $[a,b]$, non réduit à un point, tel que la restriction de f à J soit strictement monotone.

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

Considérons $a' < b'$ dans $]a,b[$. Comme f est convexe sur $[a,b]$, f est continue sur $[a',b']$ et il existe $\alpha \in [a',b']$ tel que $f(\alpha) = \min\limits_{x\in[a',b']} f(x)$. Par stricte convexité, pour $x \neq \alpha$ dans $[a', b']$, $f(x) > f(\alpha)$. D'autre part, f n'admet pas de minimum local sur $[a', b']$ autre que α. En effet, par convexité, tout minimum local est automatiquement global.

Supposons $\alpha \neq b'$. Alors f est injective sur $[\alpha, b']$: en effet, si on suppose que $f(x) = f(y)$ avec $x < y$ dans $[\alpha, b']$, f admet par compacité un minimum sur $[x, y]$ en un point z. Or, par stricte convexité, z est dans l'intervalle ouvert $]x, y[$ et f admet donc en z un minimum local, ce qui est exclu. Comme une fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone (cf. les propos précédant l'exercice 4.12), f est bien strictement monotone sur $[\alpha, b']$.

Si $\alpha = b'$, on montre de même que f est strictement monotone sur $[a', \alpha] = [a', b']$. ◁

4.53. Étude asymptotique d'une fonction convexe

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que si $l \leqslant 0$, alors f est décroissante.

3. Montrer que si l est fini, alors $f(x) - lx$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Par le théorème des pentes croissantes, la fonction $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est croissante, donc admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers $+\infty$. Comme $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\psi(x) + \dfrac{f(1)}{x}$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend également vers l en $+\infty$.

2. Si f n'est pas décroissante, il existe $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$. Toujours en vertu du théorème des pentes croissantes, on aurait $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ pour tout $x \geqslant b$, ce qui est impossible car le terme de gauche de l'inégalité tend vers $l \leqslant 0$ en $+\infty$.

3. La fonction $g(x) = f(x) - lx$ est également convexe et $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$. D'après la question précédente, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ lorsque x tend vers $+\infty$. ◁

Une combinaison linéaire à coefficients positifs (en particulier une combinaison convexe) de fonctions convexes est encore convexe. L'exer-

cice suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'enveloppe convexe de n fonctions convexes contienne une fonction positive.

4.54. Combinaison convexe positive

Soit $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions convexes et continues sur $[0,1]$ telles que $\sup(f_1, \ldots, f_n) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe n réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de somme 1 tels que $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n \geqslant 0$.

(École normale supérieure)

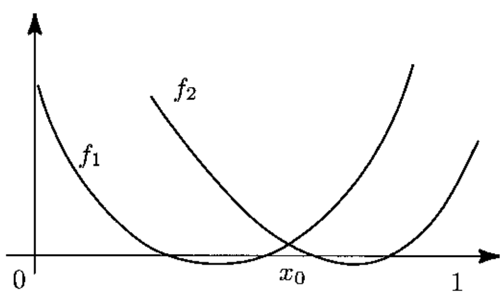
▷ **Solution.**

On va commencer par regarder le cas $n = 2$ avant d'envisager une récurrence sur n. Notons h la fonction $\sup(f_1, f_2)$. Si f_1 ou f_2 est positive, le résultat est trivial puisqu'il suffit de prendre $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$ ou l'inverse. On suppose donc dans la suite que $\min f_1 < 0$ et $\min f_2 < 0$. La fonction h est continue et convexe sur $[0,1]$ et atteint son minimum en un point $x_0 \in [0,1]$. Par hypothèse $h(x_0) \geqslant 0$. On a alors les faits suivants.

• On a nécessairement $f_1(x_0) = f_2(x_0) = h(x_0)$. En effet, si par exemple $f_1(x_0) < f_2(x_0) = h(x_0)$, alors par continuité, h coïncide avec f_2 sur un petit voisinage de x_0. Si $x_0 \in \,]0,1[$, f_2 admet un minimum local en x_0, mais comme elle est convexe, il s'agit d'un minimum global (voir exercice 4.51) et cela contredit l'hypothèse $\min f_2 < 0$. On obtient la même contradiction si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

• La fonction h n'atteint son minimum qu'en x_0. En effet, si $h(x_0') = h(x_0)$, avec par exemple $x_0 < x_0'$, alors h est constante sur le segment $[x_0, x_0']$. Mais d'après le point précédent, f_1 et f_2 seraient égales sur ce segment et par convexité positives sur $[0,1]$, ce qu'on a exclu.

On se retrouve donc avec une situation du type suivant :



On suppose dans la suite $x_0 \in \,]0,1[$, les cas où x_0 est au bord se traitant de la même manière.

• Montrons que les nombres dérivés à gauche en x_0 de f_1 et f_2 sont de signes opposés (au sens large). En effet, si $(f_1)'_g(x_0)$ et $(f_2)'_g(x_0)$ sont strictement positifs, f_1 et f_2 prennent toutes les deux des valeurs strictement inférieures à $h(x_0)$ à gauche de x_0, contredisant le fait que $h(x_0) = \min h$. Si $(f_1)'_g(x_0)$ et $(f_2)'_g(x_0)$ sont strictement négatifs, f_1 et f_2 prennent des valeurs supérieures à $h(x_0)$ à gauche de x_0. Considérons ce qui se passe à droite de x_0. Les deux nombres $(f_1)'_g(x_0)$ et $(f_2)'_g(x_0)$ ne peuvent pas être tous les deux strictement négatifs. Si on a par exemple $(f_1)'_d(x_0) \geqslant 0$, alors f_1 prend des valeurs supérieures à $h(x_0)$ à droite de x_0. La fonction f_1 a un minimum $h(x_0)$ positif, contrairement à notre hypothèse. On peut donc trouver deux réels positifs α_1 et α_2 de somme 1 tels que $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ ait une dérivée à gauche en x_0 nulle. Le théorème des pentes croissantes montre alors que $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ est du signe de $x - x_0$, c'est-à-dire que g atteint son minimum en x_0. Comme $g(x_0) = h(x_0) \geqslant 0$ (car $f_1(x_0) = f_2(x_0)$), g est positive sur $[0, 1]$.

• On peut maintenant traiter le cas général par récurrence sur $n \geqslant 2$. Supposons le résultat prouvé avec $n - 1$ fonctions où $n \geqslant 3$ et prenons n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ vérifiant les hypothèses. On a

$$h = \sup(f_1, \ldots, f_n) = \sup(f_1, \ldots, f_{n-2}, \sup(f_{n-1}, f_n)) \geqslant 0.$$

Comme $\sup(f_{n-1}, f_n)$ est convexe et continue, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ réels positifs de somme 1 tels que

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \sup(f_{n-1}, f_n) \geqslant 0.$$

On pose alors $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-2} f_{n-2} + \alpha_{n-1} f_{n-1}$ et $g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-2} f_{n-2} + \alpha_{n-1} f_n$. Ce sont deux fonctions convexes continues qui vérifient $\sup(f, g) \geqslant 0$. D'après le cas $n = 2$, on peut trouver $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\alpha f + (1 - \alpha) g \geqslant 0$, ce qui donne

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-2} f_{n-2} + \alpha \alpha_{n-1} f_{n-1} + (1 - \alpha) \alpha_{n-1} f_n \geqslant 0.$$

Cela termine la récurrence.

On notera que la réciproque du résultat de l'exercice est évidente. $\triangleleft$

L'exercice suivant étudie les fonctions à variation bornée.

4.55. Fonctions à variation bornée

Soit une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. À toute subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$, on associe la *variation totale* de f sur σ : $\mathrm{V}(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. On pose $\mathrm{V}_a^b(f) = \sup_\sigma \mathrm{V}(f, \sigma) \in [0, +\infty]$, que l'on appelle la *variation* de f sur $[a, b]$. Si $\mathrm{V}_a^b(f)$ est fini, on dit que f est à *variation bornée* sur $[a, b]$.

1. Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, f est à variation bornée sur $[a, b]$, et calculer sa variation. Examiner le cas où f est lipschitzienne ou monotone.

2. Comparer $\mathrm{V}_a^b(f + g)$ à $\mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$.

3. Pour $c \in]a, b[$, comparer la variation de f sur $[a, b]$ à la somme de ses variations sur $[a, c]$ et $[c, b]$.

4. Montrer que f est à variation bornée sur $[a, b]$ si et seulement si f est somme de deux fonctions monotones sur $[a, b]$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Pour toute subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)| \mathrm{d}t,$$

et donc $\mathrm{V}(f, \sigma) \leqslant \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t$. La fonction f est donc à variation bornée sur $[a, b]$ et $\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t$. Montrons, qu'en fait $\mathrm{V}_a^b(f)$ est égal à $\int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t$. Si σ est une subdivision de $[a, b]$ alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe, d'après la formule des accroissements finis, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$. On obtient $\mathrm{V}(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) |f'(\xi_k)|$. On reconnaît une somme de Riemann. Lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, $\mathrm{V}(f, \sigma)$ tend vers $\int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t$, puisque $|f'|$ est continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $\mathrm{V}(f, \sigma) \geqslant \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t - \varepsilon$. On peut conclure que $\mathrm{V}_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t$.

Si f est α-lipschitzienne, on a, avec les notations précédentes, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, $\mathrm{V}(f,\sigma) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(x_{k+1}-x_k) = \alpha(b-a)$. Ainsi f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \alpha(b-a)$.

Si f est croissante sur $[a,b]$, on obtient, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, $\mathrm{V}(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a)$. Ainsi f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $\mathrm{V}_a^b(f) = f(b) - f(a)$. On démontre, de même qu'une fonction décroissante est à variation bornée et que $\mathrm{V}_a^b(f) = f(a) - f(b)$.

2. Montrons que si f et g sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, on a $\mathrm{V}_a^b(f+g) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$. L'inégalité est évidente si $\mathrm{V}_a^b(f)$ ou $\mathrm{V}_a^b(g)$ est infini. Supposons donc f et g à variation bornée. Alors, pour toute subdivision σ de $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(f+g,\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} |(f+g)(x_{k+1}) - (f+g)(x_k)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1} - g(x_k)| \\
&\leqslant \mathrm{V}(f,\sigma) + \mathrm{V}(g,\sigma) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g).
\end{aligned}$$

On en déduit que $f+g$ est à variation bornée et que $\mathrm{V}_a^b(f+g) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$.

3. Soit σ une subdivision de $[a,b]$, $\sigma' = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en rajoutant à σ le point c s'il n'y est pas. Notons p l'entier tel que $x_p = c$; $\sigma_1 = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = c)$ est une subdivision de $[a,c]$ et $\sigma_2 = (x_p < \cdots < x_n = b)$ une subdivision de $[c,b]$. On a $\mathrm{V}(f,\sigma) \leqslant \mathrm{V}(f,\sigma')$: on rajoute au plus un point dans la subdivision et l'inégalité résulte de l'inégalité triangulaire. D'autre part, $\mathrm{V}(f,\sigma') = \mathrm{V}(f,\sigma_1) + \mathrm{V}(f,\sigma_2)$. On en déduit

$$\mathrm{V}(f,\sigma) \leqslant \mathrm{V}(f,\sigma_1) + \mathrm{V}(f,\sigma_2) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

On a donc $\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f)$. Montrons qu'il y a égalité. Supposons que f est à variation bornée sur $[a,c]$ et sur $[b,c]$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver des subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement telle que : $\mathrm{V}(f,\sigma_1) \geqslant \mathrm{V}_a^c(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\mathrm{V}(f,\sigma_2) \geqslant \mathrm{V}_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons la subdivision σ de $[a,b]$ obtenue en faisant la réunion de σ_1 et σ_2. On a alors $\mathrm{V}(f,\sigma) = \mathrm{V}(f,\sigma_1) + \mathrm{V}(f,\sigma_2) \geqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f) - \varepsilon$. On obtient finalement $\mathrm{V}_a^b(f) = \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f)$.

Si $\mathrm{V}_a^c(f)$ ou $\mathrm{V}_c^b(f)$ est infini, alors $\mathrm{V}_a^b(f)$ est infini, car si σ_1 est une subdivision quelconque de $[a,c]$, σ_2 une subdivision quelconque de $[b,c]$

et σ la réunion des deux, alors $V(f,\sigma) = V(f,\sigma_1) + V(f,\sigma_2)$, quantité qui n'est pas bornée.

4. D'après ce qui précède une fonction monotone est à variation bornée et la somme de deux fonctions à variation bornée est une fonction à variation bornée : la somme de deux fonctions monotones est donc une fonction à variation bornée.

Réciproquement, supposons que f est à variation bornée sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, f est à variation bornée sur $[a,x]$. Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = V_a^x(f)$. Si $a \leqslant x \leqslant x' \leqslant b$, alors $g(x') = g(x) + V_x^{x'}(f) \geqslant g(x)$; g est donc croissante. D'autre part, avec les mêmes notations, $V_x^{x'}(f) \geqslant |f(x') - f(x)|$ (on prend la subdivision $\sigma = (x < x')$). On en déduit $g(x') \geqslant g(x) + f(x') - f(x)$, c'est-à-dire $f(x') - g(x') \leqslant f(x) - g(x)$. La fonction $h = f - g$ est décroissante. La fonction $f = g + h$ est somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. $\lhd$

La notion de fonction à variation bornée intervient notamment dans l'étude des arcs rectifiables. Si au lieu de prendre f à valeurs réelles, on prend f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et si on remplace la valeur absolue par la norme euclidienne, la quantité $V_a^b(f)$ n'est autre que la longueur de l'arc défini par f. Cet arc est dit rectifiable si $V_a^b(f)$ est fini.

Le dernier thème de ce chapitre est celui des estimations asymptotiques. On peut y faire appel à différentes notions déjà mentionnées.

4.56. Un développement asymptotique

Pour $\lambda \in]0,1]$, on pose $f(\lambda) = \sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{\lambda}]} \left(e^{-x} - (1-\lambda x)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$.

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de la fonction f en 0.

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

La fonction f est définie sur $]0,1]$, car $g_\lambda : x \longmapsto e^{-x} - (1-\lambda x)^{\frac{1}{\lambda}}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{\lambda}\right]$. Étudions les variations de g_λ. On a, pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{\lambda}\right]$, $g'_\lambda(x) = -e^{-x} + (1-\lambda x)^{\frac{1}{\lambda}-1}$. La fonction g'_λ a même signe que h_λ, où $h_\lambda(x) = x + \left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)\ln(1-\lambda x)$. Pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{\lambda}\right[$, on a $h'_\lambda(x) = \dfrac{\lambda(1-x)}{1-\lambda x}$. La fonction h'_λ s'annule en 1 et h_λ croît sur $[0,1]$ et décroît sur $[1, \dfrac{1}{\lambda}[$. Comme on a de plus, $h_\lambda(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\lambda}} h_\lambda(x) = -\infty$, on conclut que h_λ

est positive sur $[0,1]$ et s'annule une fois sur $\left[1, \dfrac{1}{\lambda}\right[$, en α ; la fonction g'_λ s'annule en α, est positive sur $[0,\alpha[$ et négative sur $]\alpha, \dfrac{1}{\lambda}[$. On a donc $f(\lambda) = g_\lambda(\alpha)$. Sachant que $g'_\lambda(\alpha) = -e^{-\alpha} + (1-\lambda\alpha)^{\frac{1}{\lambda}-1} = 0$, on obtient

$$f(\lambda) = e^{-\alpha} - (1-\lambda\alpha)^{\frac{1}{\lambda}} = (1-\lambda\alpha)^{\frac{1}{\lambda}-1} - (1-\lambda\alpha)^{\frac{1}{\lambda}} = (1-\lambda\alpha)^{\frac{1}{\lambda}-1}(\lambda\alpha).$$

En posant $u = \lambda\alpha$, on peut écrire $f(\lambda) = u(1-u)^{\frac{1}{\lambda}-1} = ue^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\ln(1-u)}$. Pour commencer, on détermine un développement asymptotique de u.

L'équation $h_\lambda(\alpha) = 0$ équivaut à $\lambda\alpha + (1-\lambda)\ln(1-\lambda\alpha) = 0$, soit $u + (1-\lambda)\ln(1-u) = 0$. Le réel u vérifie donc les conditions $u \in \,]\lambda, 1[$ et $\dfrac{\ln(1-u)}{u} = \dfrac{1}{\lambda - 1}$. On étudie les variations de $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ sur $]0,1[$. On trouve $\varphi'(x) = \dfrac{\psi(x)}{x^2}$, où $\psi(x) = -\dfrac{x}{1-x} - \ln(1-x)$, puis $\psi'(x) = \dfrac{-x}{(1-x)^2} < 0$. Sachant que $\lim\limits_{0} \psi = 0$, on en déduit que ψ est négative. La fonction φ est donc strictement décroissante. Elle réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]-\infty, -1[$. On a donc $u = \varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{\lambda-1}\right)$. On en déduit que $\lim\limits_{\lambda\to 0} u = \lim\limits_{-1} \varphi^{-1} = 0$. On écrit le développement limité de $\varphi(u)$ en 0 à l'ordre 2 :

$$\varphi(u) = \frac{\ln(1-u)}{u} = -1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} + o(u^2)$$

et donc,

$$\varphi(u) + 1 = -\frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} + o(u^2) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

On en déduit que $-\dfrac{u}{2} \underset{\lambda\to 0}{\sim} -\lambda$ et donc $u \underset{\lambda\to 0}{\sim} 2\lambda$. Ceci signifie que α tend vers 2 quand λ tend vers 0. Pour obtenir le terme suivant dans le développement de u, on écrit $u = 2\lambda(1+v)$, avec $v = o(1)$ et on reporte dans l'égalité précédente, qui devient

$$-\lambda(1+v) - \frac{4\lambda^2}{3} + o(\lambda^2) = \frac{\lambda}{\lambda-1},$$
$$v = \frac{-1}{\lambda - 1} - 1 - \frac{4\lambda}{3} + o(\lambda) = -\frac{1}{3}\lambda + o(\lambda).$$

Finalement, on a le développement de u

$$u = 2\lambda(1 - \frac{1}{3}\lambda + o(\lambda)) = 2\lambda - \frac{2}{3}\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

Compte tenu de ce qui précède, on peut simplifier l'expression de $f(\lambda)$. On a, en effet $\left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)\ln(1-u) = \left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)\dfrac{u}{\lambda - 1} = -\dfrac{u}{\lambda}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(\lambda) = e^{-\frac{u}{\lambda}}u &= e^{-2+\frac{2}{3}\lambda+o(\lambda)}(2\lambda - \frac{2}{3}\lambda^2 + o(\lambda^2)) \\ &= \lambda e^{-2}(1 + \frac{2}{3}\lambda + o(\lambda))(2 - \frac{2}{3}\lambda + o(\lambda)), \end{aligned}$$

et finalement,

$$\boxed{f(\lambda) = 2e^{-2}\lambda + \frac{2}{3}e^{-2}\lambda^2 + o(\lambda^2).} \quad \triangleleft$$

4.57. Estimation du maximum d'une fonction polynôme

Soit $f_n : x \in [0,n] \mapsto \prod_{i=0}^{n}(x-i) \in \mathbb{R}$. Trouver un équivalent simple de $\|f_n\|_\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

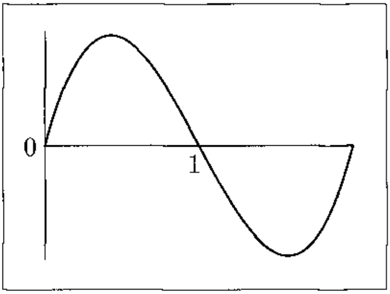
La fonction $|f_n|$ est continue sur $[0,n]$. Elle s'annule pour des valeurs entières. Sur chaque intervalle $[i, i+1]$, elle atteint son maximum sur l'intervalle $]i, i+1[$. De plus, f_n est dérivable sur $[0,n]$ et, pour $x \in [0,n]$, x non entier, on a

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x-i} = g_n(x).$$

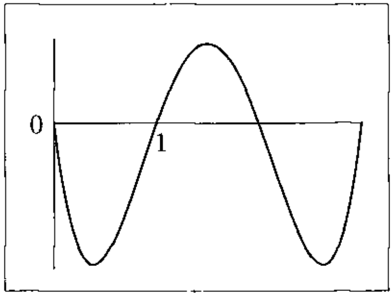
La fonction g_n est strictement décroissante sur chaque intervalle $]i, i+1[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et de plus, $\lim_{i^+} g_n = +\infty$ et $\lim_{(i+1)^-} g_n = -\infty$. Elle s'annule et change de signe une fois sur $]i, i+1[$. La fonction f_n gardant un signe constant sur cet intervalle, il en est de même pour f_n'. On en déduit que $|f_n|$ atteint son maximum sur $[i, i+1]$ en l'unique valeur qui annule g_n. Il nous faut maintenant déterminer sur quel intervalle $[i, i+1]$, le maximum de $|f_n|$ est atteint. Puisqu'on a, pour tout $x \in [0,n]$, $|f_n(n-x)| = |f_n(x)|$, on peut supposer $i < \frac{n}{2}$. Le tracé des courbes représentatives de quelques fonctions f_n indique clairement que le maximum de $|f_n|$ est atteint sur $[0,1]$ (et aussi sur $[n-1,n]$).

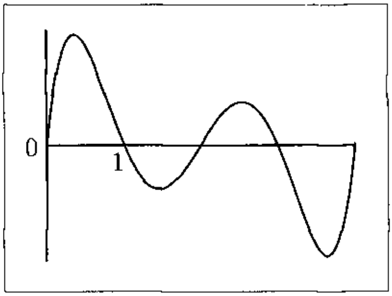
Pour le montrer, commençons par majorer $|f_n|$ sur $[i, i+1]$, pour $1 \leqslant i < \frac{n}{2}$.

$n = 2$

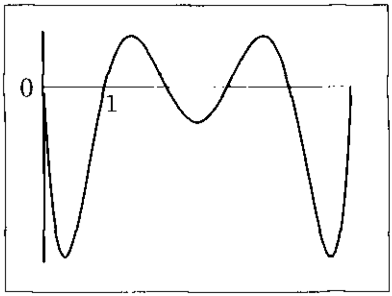


$n = 3$





$n = 4$



$n = 5$

On a, pour tout $x \in [i, i+1]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= x(x-1)\dots(x-i+1)(x-i)(i+1-x)(i+2-x)\dots \\ &\quad \dots(n-1-x)(n-x) \\ &\leqslant (i+1)i\dots 2(x-i)(i+1-x)2\dots(n-i) \\ &\leqslant \frac{1}{4}(i+1)!(n-i)!, \end{aligned}$$

puisque $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ si x est dans $[0,1]$. Posons $u_i = \dfrac{1}{4}(i+1)!(n-i)!$, pour $1 \leq i < \dfrac{n}{2}$. Montrons que la suite (u_i) est décroissante. Pour $1 \leqslant i < i+1 < \dfrac{n}{2}$, on a $\dfrac{u_{i+1}}{u_i} = \dfrac{i+2}{n-i} < 1$. On en déduit que $u_i \leqslant u_1 = \dfrac{(n-1)!}{2}$. On obtient finalement, pour tout $x \in [1, n-1]$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{(n-1)!}{2}.$$

Voyons maintenant ce qui se passe sur $[0,1]$. La fonction $|f_n|$ y atteint son maximum en a_n, l'unique zéro de g_n dans $[0,1]$. Cherchons un équivalent de a_n puis de $|f_n(a_n)|$. On a $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{a_n - i} = 0$, ce qu'on écrit

$\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n-1}=\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{i-a_n}$. On en déduit, par décroissance de la fonction $t\longmapsto \dfrac{1}{t}$, que

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n-1}\leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\leqslant 1+\int_1^{n-1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\leqslant 1+\ln(n-1)\ \text{ et}$$
$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n-1}\geqslant \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\geqslant \int_2^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\geqslant \ln(n+1)-\ln 2.$$

On obtient l'encadrement

$$\ln(n+1)-\ln 2\leqslant \frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n-1}\leqslant 1+\ln(n-1).$$

On en déduit que $\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n-1}\underset{n\to\infty}{\sim}\ln n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n-1}=+\infty$. Puisque a_n-1 est négatif, on a *a fortiori* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=+\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. On conclut finalement que

$$a_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\ln n}.$$

Il faut maintenant déterminer un équivalent de $|f_n(a_n)|$. On écrit

$$|f_n(a_n)|=a_n\prod_{i=1}^{n}(i-a_n)=a_n n!\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{a_n}{i}).$$

On sait que $a_n\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln n}$. Il faut s'occuper du produit. On passe au logarithme et on considère $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1-\dfrac{a_n}{i}\right)$. Chaque terme $\dfrac{a_n}{i}$ est inférieur à a_n et donc tend vers 0. Au voisinage de 0 on a $\ln(1-x)\underset{x\to 0}{\sim}-x$. Si on se donne $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $|\ln(1-x)+x|\leqslant\varepsilon|x|$, pour $|x|\leqslant\eta$. On en déduit que, pour n assez grand (tel que $|a_n|\leqslant\eta$), on aura, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\left|\ln\left(1-\frac{a_n}{i}\right)+\frac{a_n}{i}\right|\leqslant\varepsilon\left|\frac{a_n}{i}\right|\ \text{ et donc }\ \left|s_n+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_n}{i}\right|\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{a_n}{i}.$$

Ceci montre que $s_n\underset{n\to\infty}{\sim}-a_n\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$. Nous savons que $a_n\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln n}$ et que $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}\underset{n\to\infty}{\sim}\ln n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=-1$, et donc que $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-\dfrac{a_n}{i}\right)=\dfrac{1}{e}$. On obtient finalement

$$|f_n(a_n)| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n!}{e\ln n}.$$

Nous avons démontré précédemment que $\sup\limits_{x\in[1,n-1]} |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{4}(n-1)!$. Ce terme est négligeable devant $|f_n(a_n)|$. On en déduit que pour n assez grand, on a $\|f_n\|_\infty = |f_n(a_n)|$ et donc que

$$\boxed{\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n!}{e\ln n}.} \triangleleft$$

Notre majoration de $|f_n|$ sur $[1, n-1]$ a été très grossière. En fait, on peut démontrer que $\|f_n\|_\infty$ est toujours égal à $|f_n(a_n)|$.

De manière générale, il est interdit de dériver des équivalents. Toutefois, avec une hypothèse de monotonie en plus, on obtient tout de même des résultats.

4.58. Dérivation d'équivalents

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et croissante. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x) \sim \frac{x^\alpha}{\alpha}$ en $+\infty$. Montrer que $f(x) \sim x^{\alpha-1}$.

2. On suppose, toujours en $+\infty$, que $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x)$. Montrer que $f(x) = x + o(\sqrt{x})$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Remarquons qu'il s'agit de démontrer, avec une hypothèse supplémentaire de monotonie, la réciproque d'un résultat connu. En effet, si on suppose simplement f continue et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\alpha-1}$, alors la fonction f est positive au voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème d'intégration des relations d'équivalence permet d'affirmer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x t^{\alpha-1}dt = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. La réciproque serait fausse sans l'hypothèse supplémentaire «f croissante» (considérer par exemple $f(x) = 1 + \sin x$).

Revenons à la question posée. L'idée de la démonstration est d'intégrer f sur un intervalle où elle prend des valeurs proches de $f(x)$ et d'utiliser la croissance de f. Soit $h \in]0, 1[$, que l'on choisira plus tard. On a, par croissance de f, pour $x > 0$.

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x(1+h)) - \mathrm{F}(x) = \int_x^{x(1+h)} f(t)\mathrm{d}t \geqslant xhf(x) \quad \text{et}$$
$$\psi(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x(1-h)) = \int_{x(1-h)}^{x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant xhf(x),$$

d'où l'on tire l'encadrement $\dfrac{\psi(x)}{x^\alpha h} \leqslant \dfrac{f(x)}{x^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha h}$. Comme par hypothèse $\mathrm{F}(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ en $+\infty$, on déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha h} = \frac{(1+h)^\alpha - 1}{\alpha h} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x^\alpha h} = \frac{1-(1-h)^\alpha}{\alpha h}.$$

Notons ensuite que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{\alpha h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(1-h)^\alpha}{\alpha h} = 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $h \in]0,1[$ tel que $\dfrac{(1+h)^\alpha - 1}{\alpha h}$ et $\dfrac{1-(1-h)^\alpha}{\alpha h}$ appartiennent à $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Puisqu'alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha h}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x}$ appartiennent à $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, on aura, pour x assez grand, $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ et $\dfrac{\psi(x)}{x}$ et donc $\dfrac{f(x)}{x^{\alpha-1}}$ dans $[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]$. Ceci démontre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha-1}} = 1$.

2. La méthode précédente ne conduit pas au résultat. Remplaçons $x(1+h)$ et $x(1-h)$ par $x+\eta(x)$ et $x-\eta(x)$, où η est une fonction positive à choisir telle que $\eta(x) = o(x)$ en $+\infty$. On obtient, comme précédemment

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x+\eta(x)) - \mathrm{F}(x) = \int_x^{x+\eta(x)} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \eta(x)f(x),$$
$$\psi(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x-\eta(x)) = \int_{x-\eta(x)}^{x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \eta(x)f(x)$$

et l'encadrement $\dfrac{\psi(x)}{\eta(x)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\eta(x)}$. Par hypothèse, il existe une fonction ε telle que, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + x\varepsilon(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{\eta(x)} &= \frac{1}{\eta(x)}\left(\frac{1}{2}((x+\eta(x))^2 - x^2) + (x+\eta(x))\varepsilon(x+\eta(x)) - x\varepsilon(x)\right)\\ &= x + \frac{\eta(x)}{2} + \varepsilon(x+\eta(x)) + \frac{x}{\eta(x)}\left(\varepsilon(x+\eta(x)) - \varepsilon(x)\right).\end{aligned}$$

On obtient, de même,

$$\frac{\psi(x)}{\eta(x)} = x - \frac{\eta(x)}{2} + \varepsilon(x-\eta(x)) + \frac{x}{\eta(x)}\left(\varepsilon(x) - \varepsilon(x-\eta(x))\right).$$

Nous voulons que chacun de ces termes s'écrive $x + o(\sqrt{x})$. Pour cela il faut que $\eta(x) = o(\sqrt{x})$, $\frac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\,(\varepsilon(x+\eta(x)) - \varepsilon(x)) = o(1)$ et que $\frac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\,(\varepsilon(x) - \varepsilon(x-\eta(x))) = o(1)$. Posons $m(x) = \sup\limits_{t\in[x-\sqrt{x},+\infty[} |\varepsilon(t)|$ et montrons que $\eta(x) = \sqrt{xm(x)}$ convient. En effet, on a $\lim\limits_{+\infty} m = 0$, puisque $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$. On en déduit que $\eta(x) = o(\sqrt{x})$,

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\,(\varepsilon(x+\eta(x)) - \varepsilon(x))\right| \leqslant \frac{2\sqrt{x}m(x)}{\eta(x)} \leqslant 2\sqrt{m(x)} = o(1) \quad \text{et}$$
$$\left|\frac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\,(\varepsilon(x) - \varepsilon(x-\eta(x)))\right| \leqslant \frac{2\sqrt{x}m(x)}{\eta(x)} \leqslant 2\sqrt{m(x)} = o(1),$$

car pour x assez grand, on a x, $x+\eta(x)$ et $x-\eta(x)$ dans $[x-\sqrt{x},+\infty[$. Puisque $f(x)$ est encadré par deux termes de la forme $x + o(\sqrt{x})$, on peut conclure que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + o(\sqrt{x}).} \quad \triangleleft$$

4.59. Intégration d'équivalents

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\ell > 0$ et P un polynôme de degré n. On suppose que $f'(x)\mathrm{P}(f(x))$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue, $\ell > 0$, n un entier naturel. On suppose que $h(x)\int_0^x h^n(t)\mathrm{d}t$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de h en $+\infty$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit Q une primitive de P. L'hypothèse s'énonce $\lim\limits_{+\infty}(\mathrm{Q}\circ f)' = \ell$. Montrons que si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{+\infty} g' = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$ et x_0 tel que $\ell - \varepsilon \leqslant g'(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ si $x \geqslant x_0$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que, si $x > x_0$, on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc

$$(\ell-\varepsilon)\frac{x-x_0}{x}+\frac{g(x_0)}{x}\leqslant\frac{g(x)}{x}\leqslant(\ell+\varepsilon)\frac{x-x_0}{x}+\frac{g(x_0)}{x}.$$

Puisque

$$\lim_{x\to+\infty}(\ell-\varepsilon)\frac{x-x_0}{x}+\frac{g(x_0)}{x}=\ell-\varepsilon$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}(\ell+\varepsilon)\frac{x-x_0}{x}+\frac{g(x_0)}{x}=\ell+\varepsilon,$$

il existe $x_1 \geqslant x_0$ tel que, pour $x \geqslant x_1$, on ait $(\ell-\varepsilon)\dfrac{x-x_0}{x}+\dfrac{g(x_0)}{x}\geqslant\ell-2\varepsilon$ et $(\ell+\varepsilon)\dfrac{x-x_0}{x}+\dfrac{g(x_0)}{x}\leqslant\ell+2\varepsilon$. On en déduit que, pour $x\geqslant x_1$, on a $\ell-2\varepsilon\leqslant\dfrac{g(x)}{x}\leqslant\ell+2\varepsilon$, ce qui démontre le résultat voulu.

On a, d'après ce qui précède, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mathrm{Q}\circ f)(x)}{x}=\ell>0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{+\infty}\mathrm{Q}\circ f=+\infty$. Montrons que $\displaystyle\lim_{+\infty}f=+\infty$. Soit $\mathrm{A}>0$. La fonction Q étant continue, est bornée sur le compact $[0,\mathrm{A}]$; il existe $\mathrm{C}>0$ tel que $\mathrm{Q}(f(x))\leqslant\mathrm{C}$ si $0\leqslant f(x)\leqslant\mathrm{A}$. D'autre part, il existe $x_0>0$ tel que $\mathrm{Q}(f(x))>\mathrm{C}$ si $x>x_0$. On en déduit, puisque f est positive, que $f(x)>\mathrm{A}$ si $x>x_0$, ce qui démontre le résultat annoncé.

Le polynôme Q est de degré $n+1$; si a est le coefficient dominant de P, on a $\mathrm{Q}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{ax^{n+1}}{n+1}$. On a donc, quand x tend vers $+\infty$, $\mathrm{Q}(f(x))\sim\dfrac{a(f(x))^{n+1}}{n+1}\sim\ell x$. On en déduit que

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\frac{\ell(n+1)}{a}x\right)^{\frac{1}{n+1}}.}$$

2. On se ramène à la question précédente en posant, $f(x)=\int_0^x h^n(t)\mathrm{d}t$, pour $x\geqslant 0$. L'application f va de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et est de classe $\mathcal{C}^1$. L'hypothèse entraîne que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h^n(x)\left(\int_0^x h(t)\mathrm{d}t\right)^n=\ell^n$, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)(f(x))^n=\ell^n$. La fonction f vérifie les mêmes hypothèses que dans la question 1, avec $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n$, ℓ étant remplacé par ℓ^n. Il résulte de la question 1 que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}(\ell^n(n+1)x)^{\frac{1}{n+1}}$. Sachant que $h(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ell}{f(x)}$, on obtient finalement

$$\boxed{h(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\frac{\ell}{(n+1)x}\right)^{\frac{1}{n+1}}.}\ \triangleleft$$

Index

IMPRIMÉ EN GRANDE-BRETAGNE
PAR CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
DÉPÔT LÉGAL NOVEMBRE 2007

Le recueil d'exercices résolus des oraux des Écoles normales supérieures et de l'École polytechnique de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas comprendra six volumes : trois consacrés à l'algèbre et trois à l'analyse.

Le présent volume est consacré aux bases de l'analyse : nombres réels et complexes, suites, séries, fonctions d'une variable réelle. Hormis les séries, ces sujets sont traités dès la première année de classes préparatoires.

Les auteurs se sont attachés à dégager les idées qui se trouvent à la source des solutions fournies, sans pour autant omettre le détail des vérifications et des calculs. À côté d'exercices très classiques, le lecteur trouvera des développements sur des questions plus originales, notamment dans le chapitre 1. Un soin tout particulier a été apporté au texte de présentation qui accompagne les exercices, groupés par thèmes. La présentation historique qui ponctue la succession des énoncés montrera au lecteur que l'élaboration des concepts de l'Analyse – qui apparaît aujourd'hui comme un édifice achevé – n'a pas été sans erreurs, hésitations, retours en arrière. D'autre part, certains points du programme parfois négligés par les candidats font l'objet d'utiles rappels.

Ce livre s'adresse naturellement aux élèves des classes préparatoires, de première et de deuxième année, mais il sera également très utile aux candidats à l'agrégation qui y trouveront de nombreux développements pour leur oral. Ces exercices constituent aussi un excellent complément à la préparation à l'écrit du CAPES.

Dans cette seconde édition, qui voit le jour alors que les deux derniers volumes (Algèbre 3 et Analyse 3) restent à paraître, figurent 26 exercices nouveaux.

Collection enseignement des mathématiques

Graphisme : Massin

ISBN 978-2-84225-135-2