Chapitre 1 : Règles de calcul

I) Opérations multiples :

1) Utilisation des parenthèses

Rappel : on note $a+b$ la somme de deux nombres a et b ;
$a-b$ la différence de deux nombres a et b ;
$a\times b$ le produit de deux nombres a et b ;
$a\div b$ le quotient de deux nombres a et b.

Règle : lorsque l'on veut noter le résultat d'une suite d'opérations $(+,-,\times,\div)$ entre plus de deux nombres, on utilise des parenthèses comme suit :

- $2+(3\times4)$ est la somme de 2 et de 3×4.
- $(2+3)\times4$ est le produit de $2+3$ et de 4.
- $((1+2)\times3)+4$ est la somme de $(1+2)\times3$ et de 4.

Principe : on calcule toujours en premier les opérations le plus à l'intérieur des parenthèses, puis on remplace jusqu'à n'avoir qu'un nombre

exemple
$$(21+(3\times(4-1)))\div3$$
$$=(21+(3\times3))\div3$$
$$=(21+9)\div3$$
$$=30\div3$$
$$=10$$

On peut numéroter les opérations avant de se lancer dans les calculs :

$$(21\underset{③}{+}(3\underset{②}{\times}(4\underset{①}{-}1))\underset{④}{\div}3$$

Si l'on a bien mis des parenthèses autour de chaque calcul intermédiaire, il y a un seul ordre possible.

2) Parenthèses inutiles

a) sommes

Si on doit calculer la somme de trois nombres, on peut ajouter les deux premiers ensemble, puis le résultat avec le dernier, ou on peut additionner le premier nombre et la somme des deux autres.

exemple : $(3+4)+5 = 7+5 = 12$
et $3+(4+5) = 3+9 = 12$

(Cette propriété s'appelle l'associativité de l'addition.)

→ Règle : on peut enchaîner plusieurs additions entre elles sans préciser l'ordre avec des parenthèses.

exemple : $3+4+5 = 12$

b) produits

La multiplication est associative : par exemple, $2\times(3\times4) = 2\times12 = 24$
et $(2\times3)\times4 = 6\times4 = 24$.

Règle : On peut donc oublier les parenthèses dans une succession de multiplications et noter simplement $2\times3\times4 = 24$.

3) Conventions : priorités

On ajoute aux règles précédentes les règles suivantes, qui donnent un sens à un enchaînement d'opérations quand tout n'est pas donné par les parenthèses :

① Le produit et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.
exemple : $1+2\times3 = 1+(2\times3)$ $\quad 3\div4+2 = (3\div4)+2$

② Les additions et soustractions ont même priorité : sans parenthèses, on les effectue de gauche à droite.

<u>exemple</u> : $2+3-4+5 = ((2+3)-4)+5$
$= (5-4)+5$
$= 1+5$
$= 6$

③ Les multiplications et les divisions ont la même priorité.

<u>exemple</u> : $2\times4\div8\times5 = ((2\times4)\div8)\times5$
$= (8\div8)\times5$
$= 1\times5$
$= 5$

<u>exemple complexe</u> : $(3+7)\times2-3\times5\div(5-(1+1))$
$10\times2-3\times5\div(5-2)$
$10\times2-3\times5\div3$
$20-3\times5\div3$
$20-15\div3$
$20-5$
15

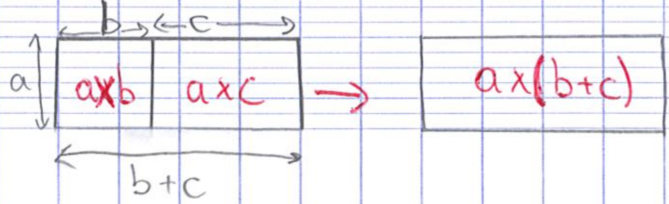
⚠ Il peut y avoir plusieurs ordres possibles (qui donnent le même résultat final).

II) Distributivité de la multiplication

1) par rapport à l'addition

<u>Théorème</u> : Étant donné trois nombres, le produit du premier et de la somme des deux autres est égal à la somme des produits de chacun des deux derniers avec le premier.

Formule : $\boxed{a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)}$



exemple : $3 \times (5+2) = 3 \times 7 = 21$

$(3 \times 5) + (3 \times 2) = 15 + 6 = 21$

2) par rapport à la soustraction

Théorème La multiplication est distributive par rapport à la soustraction.

Formule : $a \times (b-c) = (a \times b) - (a \times c)$

exemple : $7 \times (5-2) = 7 \times 5 - 7 \times 2$ $(= 21)$.

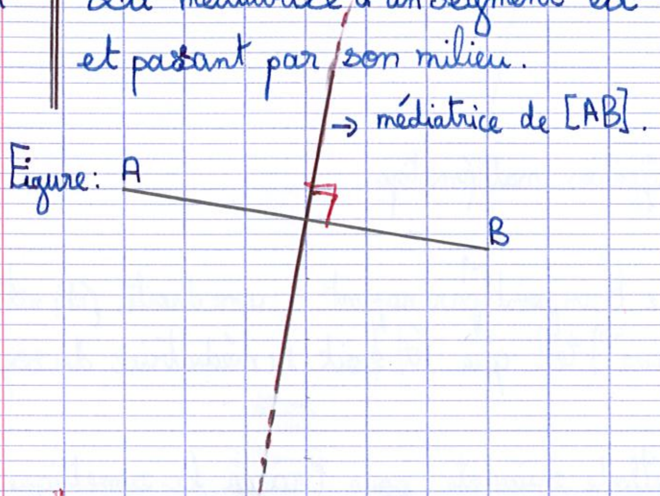
Chapitre Symétries

I) Symétrie axiale

1) Médiatrice d'un segment

Définition La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Figure :



Théorème On considère un segment [AB] et sa médiatrice (d).

1) Tout point de la médiatrice est équidistant de A et B :
si $M \in (d)$, alors $AM = BM$.

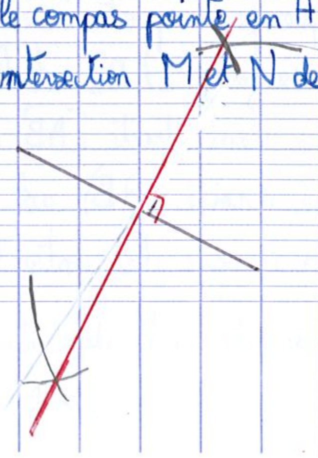
2) Tout point équidistant de A et B appartient à la médiatrice :
si $AM = BM$, alors $M \in (d)$.

On en déduit la méthode de tracé suivante :

Méthode : On veut tracer la médiatrice du segment [AB].

1) on fixe une fois pour toutes l'ouverture du compas (au moins $AB \div 2$).

2) on utilise le compas pointe en A, puis en B pour trouver les deux points d'intersection M et N des cercles correspondants.



3) La droite (MN) est alors la médiatrice de [AB].

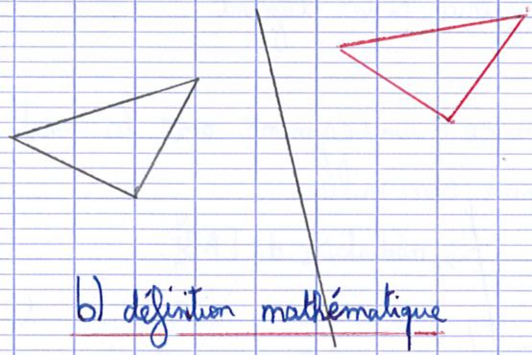
2) Symétrie axiale

a) définition intuitive

Définition

La symétrie axiale par rapport à une droite associe à une figure la figure qui s'y superposerait exactement si l'on pliait la feuille selon (d).

exemple :



b) définition mathématique

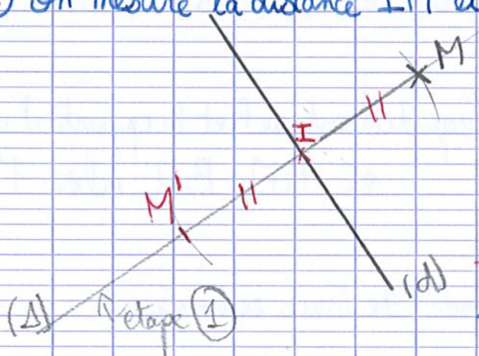
Définition

Le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) est le point M' (lire "M prime") tel que (d) soit la médiatrice du segment [MM'].

On en déduit la méthode suivante pour tracer le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) :

① on trace la perpendiculaire (Δ) à (d) passant par M. Elle coupe (d) en I.

② on mesure la distance IM et on trouve le point M' de l'autre côté de I tel que : • M' ∈ (Δ)
• IM' = IM.



Remarque : pour plus de précision, on peut réaliser l'étape ② en plantant le compas en I, en mettant la mine en M, puis en cherchant M' de l'autre côté avec le même écartement.

Théorème

Le symétrique par rapport à une droite :

(a) - d'un segment [AB] est le segment [A'B']

(b) - d'une demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B')

(c) - d'une droite (AB) est la droite (A'B')

(d) - d'un cercle de centre A est le cercle de centre A' et de même rayon.

(e) - d'un arc de cercle de centre A allant de B à C en passant par D est l'arc de cercle de centre A' allant de B' à C' en passant par D'.

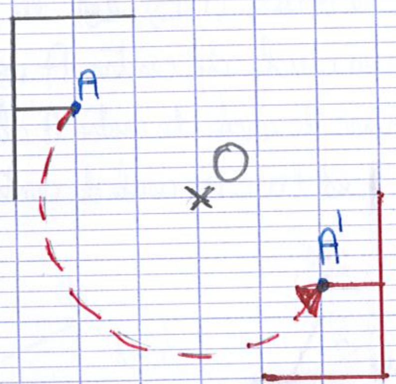
III Symétrie centrale

1) Définition

a) intuitive

Définition La symétrie centrale de centre O consiste à faire effectuer à une figure un demi-tour autour de O. (Par exemple en recopiant un calque puis en plantant une épingle en O et en faisant tourner le calque.)

exemple :



Remarques : • avec cette définition, le tracé serait pénible : il faudrait tracer pour chaque point un demi-cercle de centre O pour trouver son symétrique.

• sur la figure ci-dessus, on remarque que O est le milieu du segment [AA'].
Si on l'avait su à l'avance, on aurait pu trouver A' plus rapidement. C'est ce que l'on va faire maintenant.

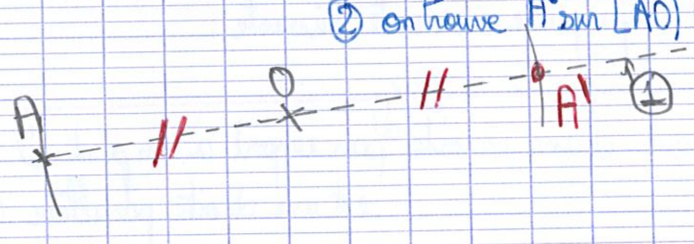
b) mathématique

Définition Le symétrique du point A par rapport au point O est le point A' tel que O soit le milieu de [AA'].

méthode de tracé : ① on trace [AO)

② on trouve A' sur [AO) tel que AO = OA', • soit en mesurant avec la règle graduée,

• soit avec le compas.



Remarques : · cette définition est plus rigoureuse, car on sait déjà ce qu'est un milieu alors que "tourner autour" est un peu plus vague a priori.

· surtout, elle simplifie beaucoup le tracé. On va en déduire maintenant une méthode générale.

Théorème

Le symétrique par rapport au point O :

ⓐ du segment [AB] est le segment [A'B']

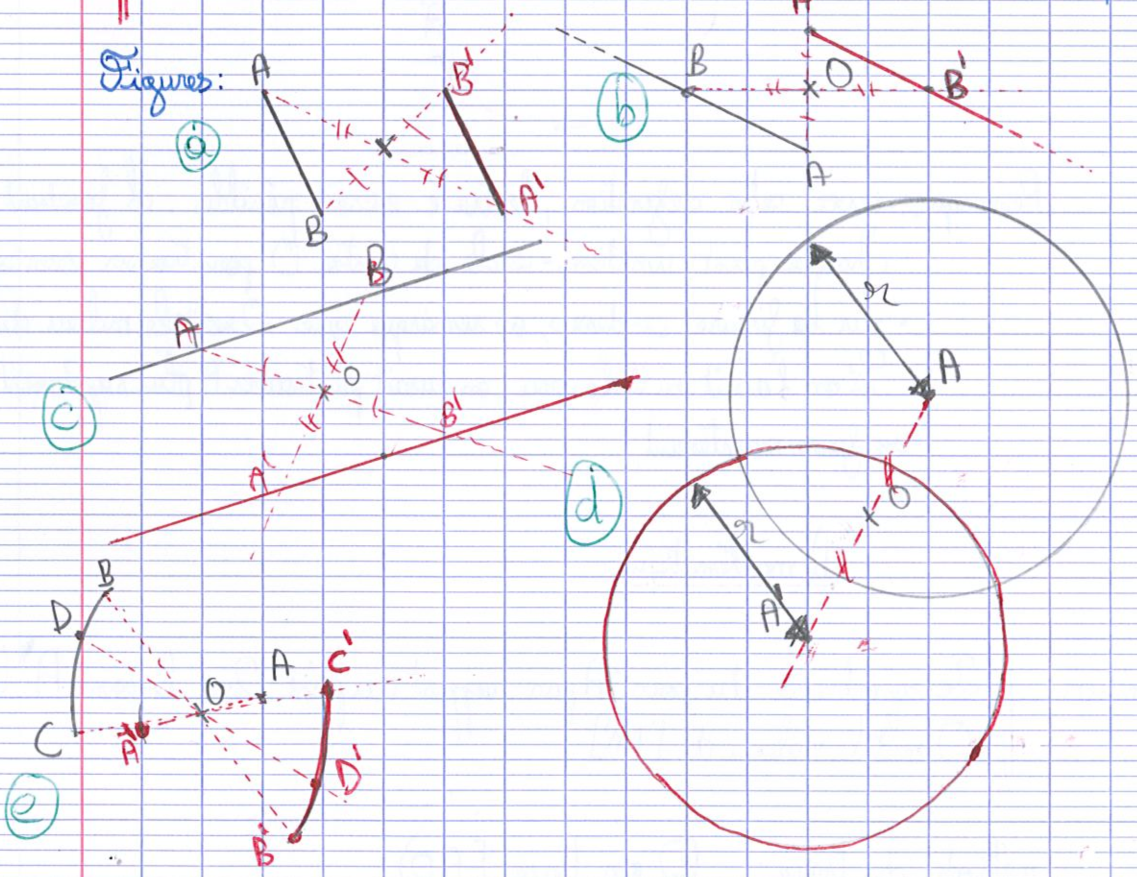
ⓑ de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B')

ⓒ de la droite (AB) est la droite (A'B')

ⓓ d'un cercle de centre A est le cercle de centre A' et de même rayon

ⓔ d'un arc de cercle de centre A allant de B à C en passant par D est l'arc de cercle de centre A' allant de B' à C' en passant par D'.

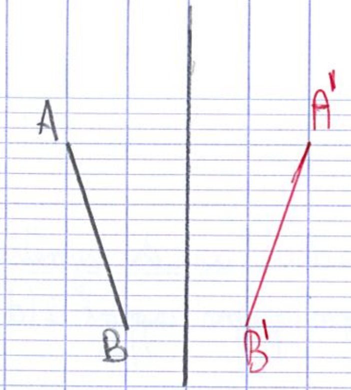
Figures :



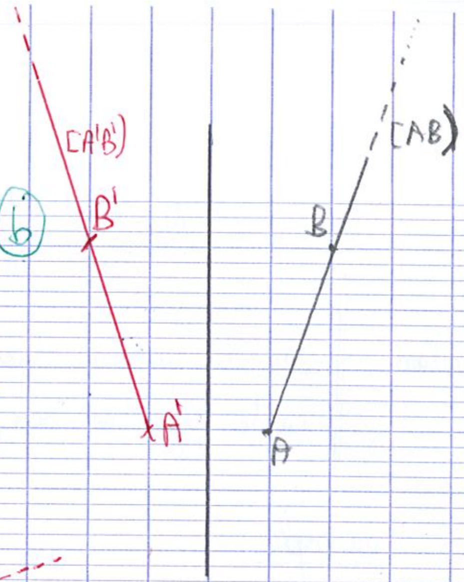
On remarque la propriété importante suivante :

Propriété : Le symétrique d'une droite (d) par rapport à un point O est une droite parallèle à (d).

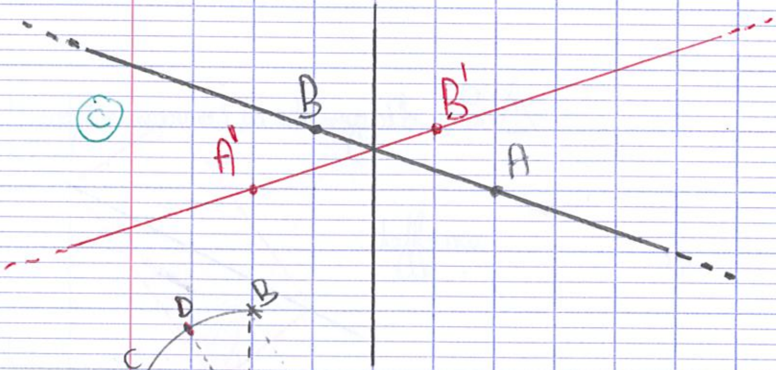
Figures : a



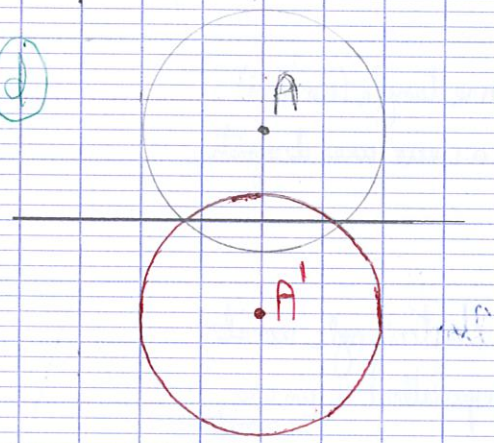
b



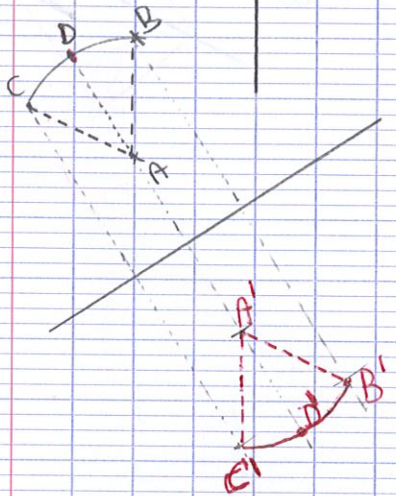
c



d



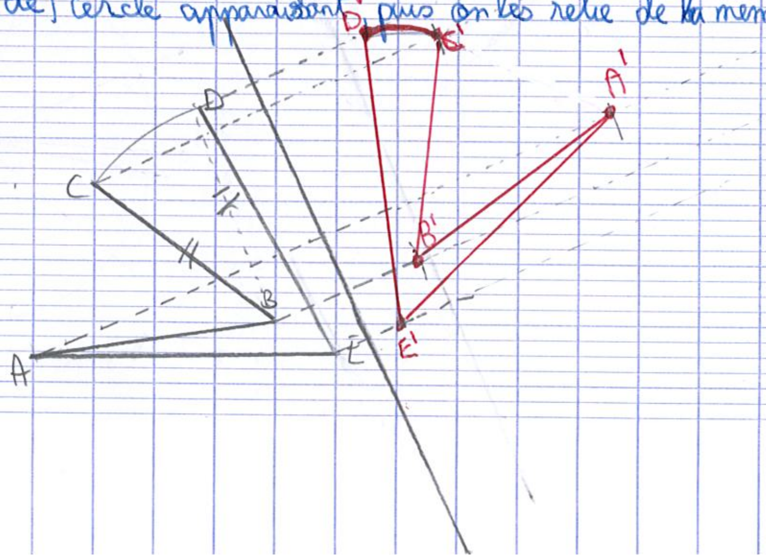
e



c) Méthode de tracé

Pour obtenir le symétrique d'une figure par rapport à une droite, on la décompose en morceaux élémentaires dont on sait trouver les symétriques : on trace donc les symétriques de tous les sommets de la figure, et des centres des (arcs de) cercle apparaissant, puis on les relie de la même manière.

exemple:

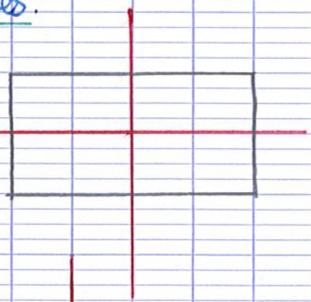


3) Axes de symétrie

Définition : On dit qu'une droite (d) est un <u>axe de symétrie</u> d'une figure si cette figure est son propre symétrique par rapport à (d).

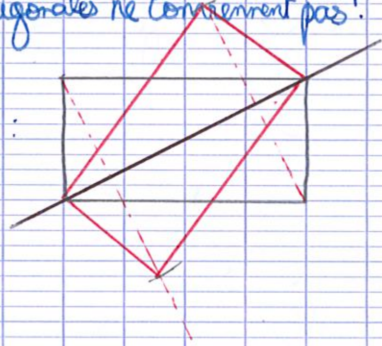
<u>exemples</u> :

Un rectangle (non carré) a deux axes de symétrie

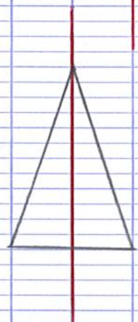


⚠ Les diagonales ne conviennent pas !

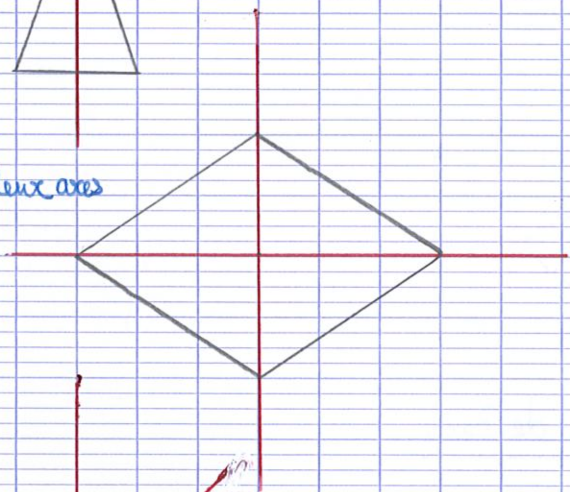
en effet :



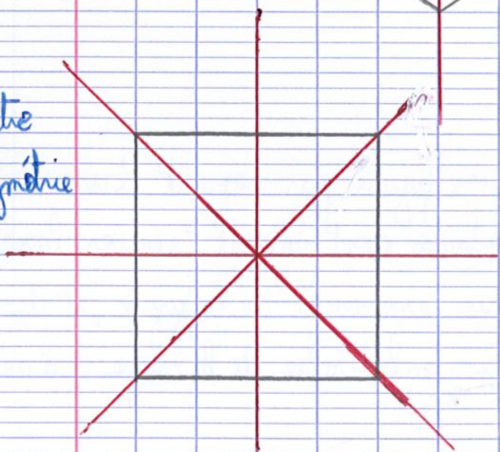
Un triangle isocèle (non equilatéral a un axe de symétrie)



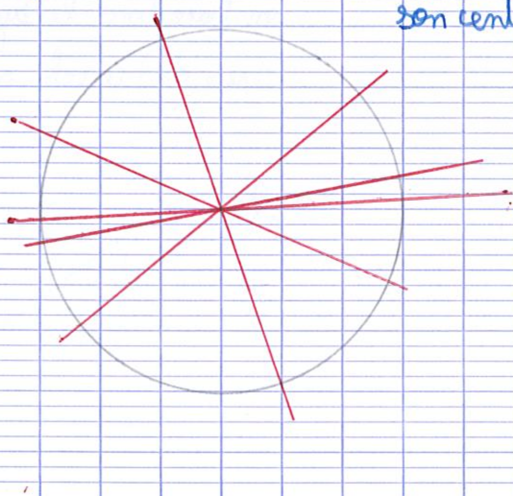
Un losange (non carré) a deux axes de symétrie



Le carré a quatre axes de symétrie



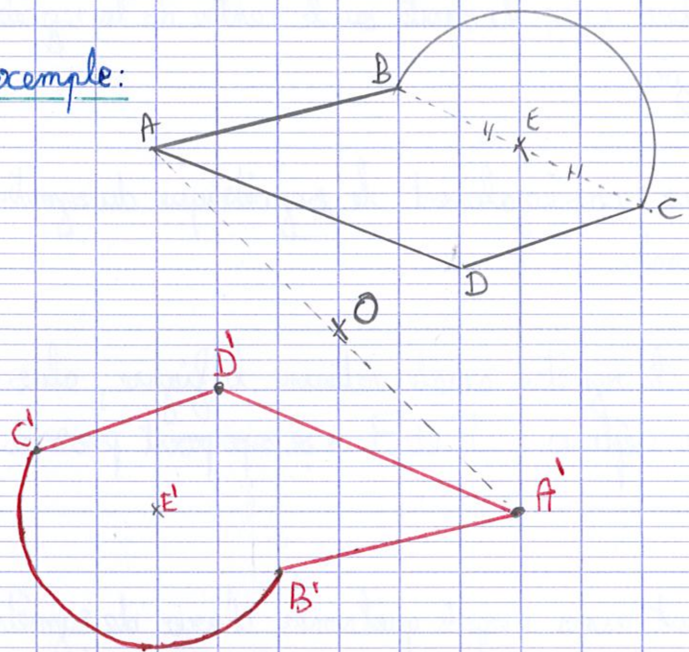
⚠ Le cercle a une infinité d'axes de symétrie : toutes les droites passant par son centre.



c) Méthode de tracé

De la même manière que pour la symétrie axiale, on décompose une figure en morceaux simples, dont on sait tracer les symétriques : on trouve donc les symétriques des points importants (sommets des segments, centre des cercles), et on les relie comme dans le modèle.

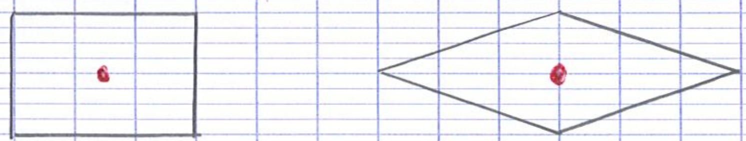
exemple :

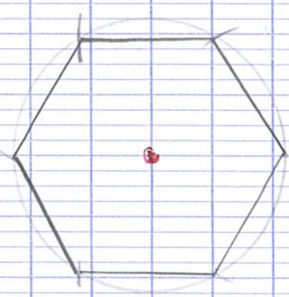


3) Centre de symétrie

Définition | On dit qu'un point O est un centre de symétrie d'une figure si cette figure est son propre symétrique par rapport à O.

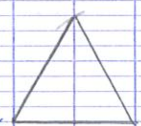
exemples :





contre-exemple :

aucun triangle, même équilatéral n'a de centre de symétrie.



III) Comparaisons

Énonçons des propriétés communes ou non des symétries axiales et centrales :

1) Les deux préservent les angles, les longueurs, les surfaces et les alignements.

2) Dans les deux cas, la droite ou le centre de la symétrie est le seul endroit qu'elle laisse fixe.

3) Dans les deux cas également, le symétrique du symétrique d'une figure est la figure de départ.

4) En revanche, la symétrie axiale retourne la figure, alors que la symétrie centrale se contente de la déplacer : F et ꟻ ne se superposent pas sans retourner, mais F et Ⅎ si.

5) Une figure peut avoir n'importe quel nombre d'axes de symétrie, mais aucune figure géométrique (finie) ne peut avoir plusieurs centres de symétrie.

↳ le plus petit contre-exemple consiste à prendre des droites parallèles.

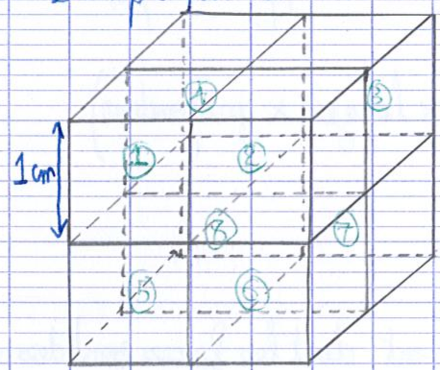
Chapitre Volume des solides

I) Introduction

Les années précédentes, vous avez vu les notions de longueur et de surface.

Exprimer une longueur, par exemple en cm, c'est regarder combien de segments de 1 cm y tiennent bout à bout.
De même, exprimer une aire en cm^2, c'est regarder combien de carrés de 1 cm de côté y tiennent collés côte à côte.
On mesurera donc les volumes en cm^3, pour exprimer combien de cubes de 1 cm de côté y tiendraient.

Par exemple, un cube de côté 2 cm contient huit cubes de côté 1 cm :



$\mathcal{V} = 8\ cm^3$

En pratique, ce découpage n'est que rarement possible et on pourra le remplacer par du calcul.
Sur le même exemple, on pourra dire que $\mathcal{V} = (2\ cm) \times (2\ cm) \times (2\ cm)$
d'où $\mathcal{V} = 8\ cm^3$.

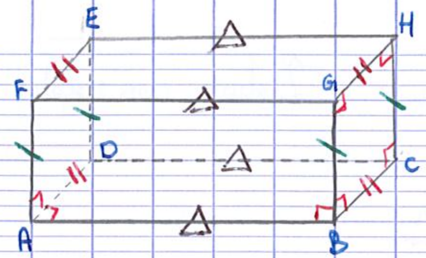
II) Solides classiques

1) Le pavé droit (ou parallépipède rectangle).

Définition

Un pavé droit (ou parallépipède rectangle) est un solide à six faces (donc un hexaèdre) dont toutes les faces sont des rectangles.

Figure :



→ six faces rectangulaires
→ huit sommets
→ douze arêtes (les segments), quatre à quatre parallèles et de même longueur.

Remarques : • on nomme un volume par une liste de ses sommets, mais de telle sorte que deux lettres successives soient deux sommets voisins. Ici, on peut donc choisir ABCDEFGH, ou AFEDCHGB, mais pas ABCDFGHE car [DF] n'est pas une arête.

• comme les faces sont des rectangles, $\begin{cases} AB = CD = EH = GF \\ AD = BC = GH = EF \\ AF = DE = BG = CH \end{cases}$

Volume : le volume du pavé droit est le produit des longueurs de trois arêtes du même coin.

$\boxed{\mathcal{V} = AD \times AB \times AF}$ (par exemple)

$\boxed{\mathcal{V} \text{ (= longueur } \times \text{ largeur } \times \text{ profondeur)}}$

2) Le cube

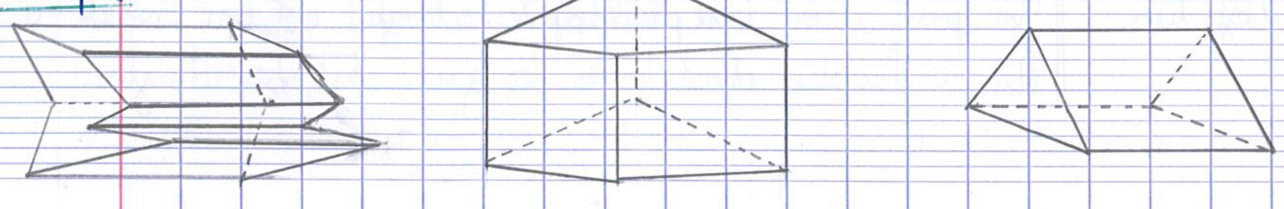
Un cube est un pavé droit dont les faces sont des carrés.
Toutes ses arêtes ont alors la même longueur, que l'on appelle le côté du cube.

Volume : $\boxed{\mathcal{V} = \text{côté} \times \text{côté} \times \text{côté}}$

3) Les prismes droits et cylindres

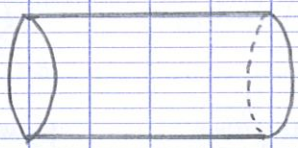
Définition : On appelle prisme droit le solide obtenu en déplaçant un polygone perpendiculairement à son plan :

exemples :

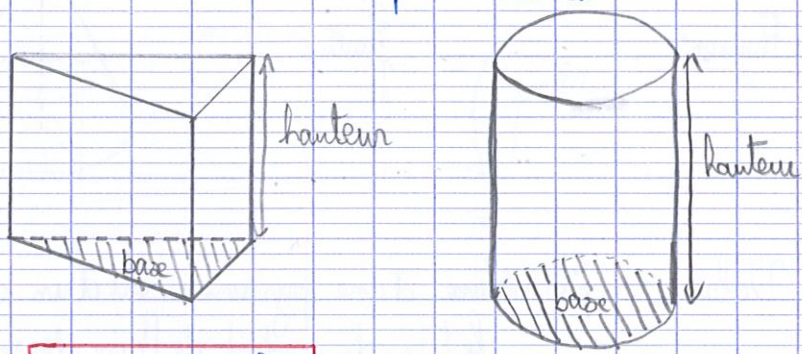


Définition || On appelle __cylindre__ le solide obtenu en déplaçant un disque perpendiculairement à son plan.

__Figure__ :



__Volumes__ : Pour les cylindres et les prismes droits, le volume est obtenu en multipliant l'aire de la figure de base par la hauteur.



$$\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h}$$

$\mathcal{B}$ → aire de la base

h → hauteur

__Remarques__ :

- Les pavés droits sont les prismes droits à base rectangulaire, les cubes sont les prismes droits à base carrée. Les formules des 1 et 2 sont des cas particuliers de celle ci-dessus.

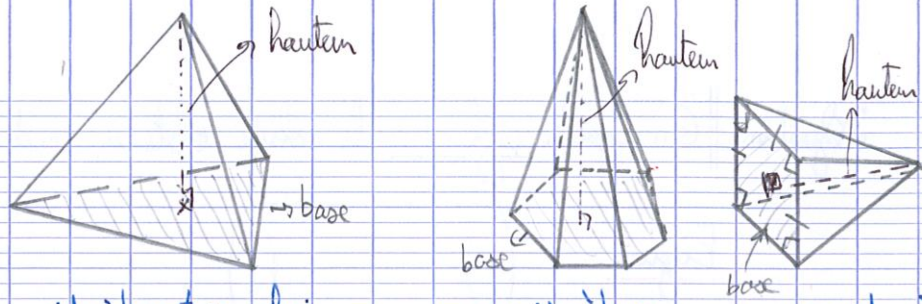
- Pour le cylindre, la base est un disque donc on peut donner une formule en fonction du rayon (car $\mathcal{B} = \pi \times R \times R$) :

$$\boxed{\mathcal{V} = \pi \times R \times R \times h}$$

4) Les cônes et pyramides

Définition || Une __pyramide__ est obtenue à partir d'un polygone (__sa base__) et d'un point (__son sommet__) en reliant tous les sommets de la base au sommet de la pyramide.

Figures :



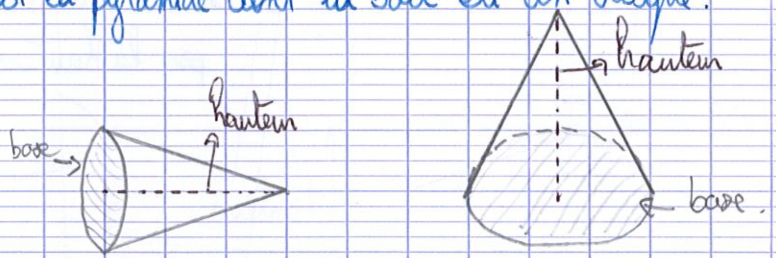
pyramide à base triangulaire (ou tétraèdre)

pyramide à base hexagonale

pyramide à base carrée

Définition : Le cône est la pyramide dont la base est un disque.

Figures :



Volumes : $\boxed{\text{Le volume d'une pyramide ou d'un cône est le tiers du produit de l'aire de sa base et de la hauteur de son sommet.}}$

$$\boxed{V = \frac{B \times h}{3}}$$

En particulier, pour un cône : $\boxed{V = \frac{\pi \times R \times R \times h}{3}}$

5) Les boules.

Définition : La sphère de centre O et de rayon R est constituée des points situés à une distance de O égale à R.
La boule de centre O et de rayon R est l'intérieur de cette sphère.

Figure :

Volume : $\boxed{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R \times R \times R}$

III) Unités de volume

Pour les unités de longueur, on a vu que les multiples du mètre étaient donnés par :
$1\,km = 1\,000\,m$
$1\,hm = 100\,m$
$1\,dam = 10\,m$
$1\,dm = 0{,}1\,m$
$1\,cm = 0{,}01\,m$
$1\,mm = 0{,}001\,m$.

En 6e, on a vu aussi que $1\,dm^2$, aire d'un carré de 1 dm de côté correspond donc à $1\,dm \times 1\,dm = 10\,cm \times 10\,cm = 100\,cm^2$.

Les unités de surface multiples du m^2 se convertissent donc de 100 en 100 : par exemple, $1\,m^2 = 100\,dm^2$
$1\,m^2 = 1000\,mm \times 1000\,mm = 1\,000\,000\,mm^2$, etc.

De même, les multiples du m^3 se convertissent de mille en mille :
$1\,m^3 = 1\,000\,dm^3$
$1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$
etc.

En particulier, $1\,m^3 = 1\,000\,000\,000\,mm^3$.

De manière indépendante, on peut mesurer les volumes avec le litre (L) et ses multiples, qui suivent les règles de conversion normales.
$1\,daL = 10\,L$
$1\,L = 10\,dL$
$1\,dL = 10\,cL$
etc.

(Définition) Théorème Les deux familles d'unités sont liées par la relation $\boxed{1\,L = 1\,dm^3}$

→ (Le litre est par définition le volume contenu dans un cube de 1 dm de côté !

Synthèse : tableau de conversion.

longueurs :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		2	4	1		

→ 241 dm = 2,41 dam

aires :

km^2		ha (hectare) hm^2		a (re) = dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
		1	0	0	0	0						
						0	0	1				

→ $1 hm^2 = 10000 m^2$

→ $1 dm^2 = 0,01 m^2$

volumes :

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
									kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
									0	0	0	0	3	3				
											1	2	2	5				
												0	7	5	0			

$33 cL = 0,00033 m^3$

$12,25 dm^3 = 12,25 L = 1225 cL$

$750 mL = 0,75 dm^3$

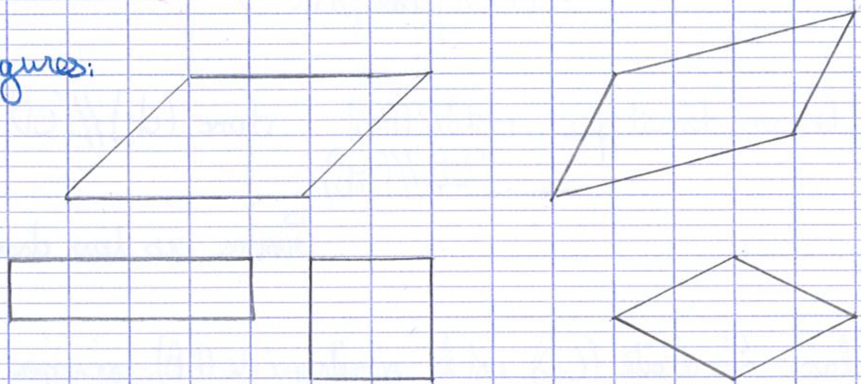
$(= 750 cm^3)$

Chapitre Parallélogrammes

I) Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

figures:



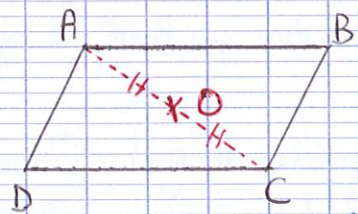
remarque : les losanges, les retangles et les carrés sont des cas particuliers de parallélogrammes.

II) Propriétés du parallélogramme.

1) Centre

Théorème : Le point d'intersection des diagonales est un centre de symétrie du parallélogramme.

démonstration :



Idée : on note O le milieu de la diagonale [AC] et on va montrer que O est un centre de symétrie.

1°) Comme O est le milieu de [AC], le symétrique de A par rapport à O est C.
2°) De même, le symétrique de C par rapport à O est A.
3°) Montrons que le symétrique de B est D.
On détermine pour cela les symétriques de (AB) et (BC).

Le symétrique de (AB) par rapport à O est :
· une droite (d_1)
· parallèle à (AB) (cf cours)
· passe par le symétrique de A (c'est-à-dire C).

Or, on sait que : · (CD) est parallèle à (AB) (car ABCD est un parallélogramme)
· (CD) passe par C.

On en déduit que : · $(d_1) // (AB)$ donc $(d_1) // (CD)$
· $(CD) // (AB)$

Comme ces deux droites parallèles passent par C, elles sont identiques.

Bilan : La droite (CD) est le symétrique de (AB) par rapport à O.

De la même manière, en remplaçant A par C ci-dessus, on montre que la droite (AD) est le symétrique de (BC) par rapport à O.

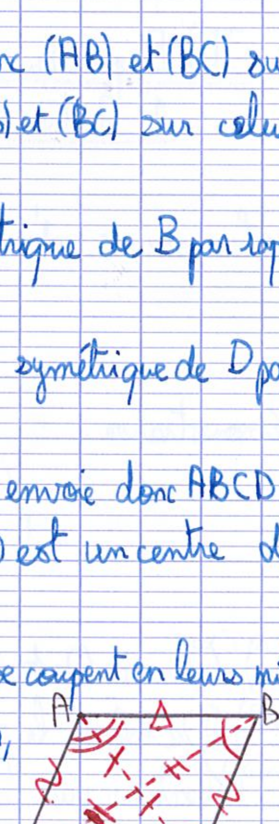
La symétrie de centre O envoie donc (AB) et (BC) sur (CD) et (AD), elle envoie donc le point d'intersection de (AB) et (BC) sur celui de (CD) et (AD).

On a bien montré que D est le symétrique de B par rapport à O.

4°) On peut donc aussi dire que B est le symétrique de D par rapport à O.

Conclusion : La symétrie de centre O envoie donc ABCD sur DCBA, qui est le même quadrilatère. Donc O est un centre de symétrie de ABCD.

Corollaire. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieux, les côtés opposés ont la même longueur, et les angles opposés ont la même mesure.



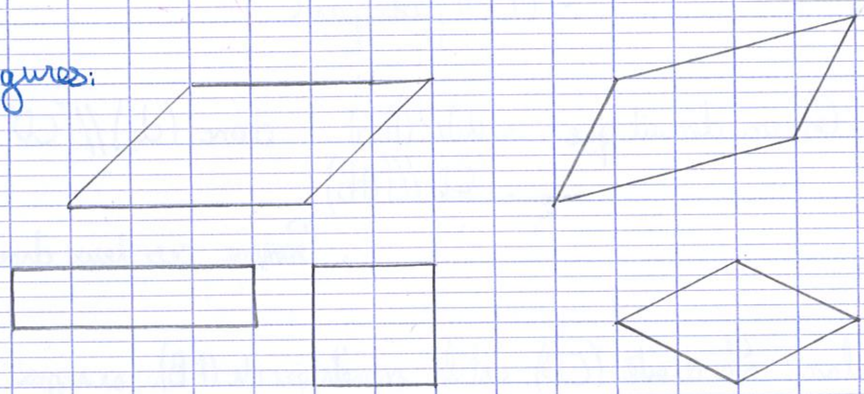
$AB = CD$, $AD = BC$, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$
et [AC] et [BD] ont le même milieu

Chapitre Parallélogrammes

I) Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

figures :



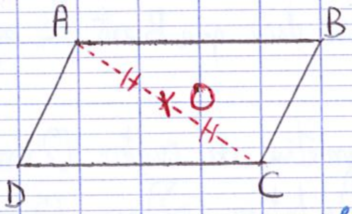
remarque : les losanges, les rectangles et les carrés sont des cas particuliers de parallélogrammes.

II) Propriétés du parallélogramme.

1) Centre

Théorème : Le point d'intersection des diagonales est un centre de symétrie du parallélogramme.

démonstration :



Idée : on note O le milieu de la diagonale [AC] et on va montrer que O est un centre de symétrie.

1°) Comme O est le milieu de [AC], le symétrique de A par rapport à O est C.
2°) De même, le symétrique de C par rapport à O est A.
3°) Montrons que le symétrique de B est D.
On détermine pour cela les symétriques de (AB) et (BC).

démonstration : - [AB] est envoyé sur [CD] par la symétrie de centre O, donc ces deux segments ont la même longueur.
- De même, [AD] et [BC] sont symétriques par rapport à O, donc AD = BC.
- La symétrie de centre O envoie les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DCB}$ l'un sur l'autre donc ils ont la même mesure. De même pour $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$.
- Enfin, comme A et C sont symétriques, O est le milieu de [AC], et comme B et D sont symétriques par rapport à O, O est le milieu de [BD].

Donc [AC] et [BD] se croisent en O, qui est leur milieu.

III) Caractérisations du parallélogramme

En II, on a donné des propriétés que l'on pouvait affirmer lorsqu'une figure était un parallélogramme. En III, on donne différentes manières de vérifier qu'une figure donnée est bien un parallélogramme.

1) à partir de sa définition.

Rappel : - par définition, si (AB)//(CD) et (BC)//(AD), alors ABCD est un parallélogramme.

2) à partir des diagonales

Théorème | Si les diagonales d'un quadrilatère se croisent en leurs milieux, ce quadrilatère est un parallélogramme.

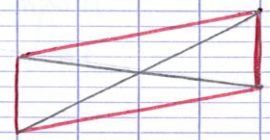
démonstration : si les diagonales se croisent en leur milieu, on peut montrer (exercice) que celui-ci est un centre de symétrie de la figure.
Donc les côtés opposés sont symétriques par rapport au centre.
On a vu au chapitre sur les symétries que cela entraînait qu'ils étaient parallèles.

Donc la figure est un parallélogramme.

Remarque : cela donne aussi une méthode de tracé simple pour construire des parallélogrammes :

① on trace deux segments de même milieu

② on relie leurs extrémités.



3) à partir des longueurs des côtés

Théorème

1) Si un quadrilatère non croisé (dont les côtés ne se croisent pas) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

2) Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

IV) Bilan

- côtés opposés parallèles : (AB)//(CD) et (AD)//(BC) — entraîne → ABCD est un parallélogramme
- diagonales [AC] et [BD] sécantes en leur milieu — entraîne → ABCD est un parallélogramme
- deux côtés opposés parallèles et de même longueur : AB = CD et (AB)//(CD) + non croisé — entraîne → ABCD est un parallélogramme
- les côtés opposés 2 à 2 de même longueur : AB = CD et AD = BC + non croisé — entraîne → ABCD est un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme — entraîne les quatre

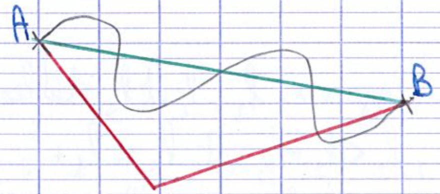
Chacune des quatre propriétés ci-dessus suffit à démontrer qu'une figure est un parallélogramme (ce qui entraîne alors que toutes ces propriétés sont vraies).
↳ elles sont donc équivalentes.

Chapitre Géométrie du triangle

I) Inégalité triangulaire

Formulation courante : Le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite.

Figure :



Le chemin vert (le segment [AB]) est le plus court chemin de A à B. Il est donc plus court que les deux autres ici tracés.

De ce principe général, on déduit le résultat suivant :

Théorème (inégalité triangulaire)

On considère un triangle ABC, non plat (A, B et C ne sont pas alignés).
Alors, chaque côté est plus petit que la réunion des deux autres, c'est-à-dire : 1) $AB < AC + CB$
2) $BC < BA + AC$
3) $AC < AB + BC$

Remarques : • C'est un cas particulier du principe précédent : la longueur AB du segment [AB] est plus courte que celle du chemin qui va de A à B en passant par C (qui serait $AC+CB$).

• Le principe énoncé plus haut fait partie des quelques propriétés que l'on considère comme immédiates en géométrie et que l'on ne démontre donc pas : on parle d'axiomes. (Deux autres axiomes par exemple : 1) deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles ; 2) étant donné un point A et une droite (d), il existe une droite (d') parallèle à (d) et passant par A.)

Le théorème ci-dessus nous donne, à partir d'un triangle existant des inégalités nécessairement vérifiées par les longueurs de ses côtés. Il permet donc de démontrer que certains jeux de longueurs sont impossibles.

exemple: on ne peut pas avoir de triangle ABC tel que
$AB = 10$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm,
car on aurait $AB > AC + BC$ ($10 > 9$).

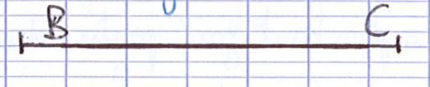
Ces conditions nécessaires sont en fait suffisantes: si les inégalités sont vérifiées, on peut construire le triangle

Théorème
(triangles constructibles)

Étant données trois longueurs ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 telles que
$\ell_1 < \ell_2 + \ell_3$, $\ell_2 < \ell_1 + \ell_3$ et $\ell_3 < \ell_1 + \ell_2$, (chacune est plus petite que la somme des autres)
il existe un triangle ABC tel que $AB = \ell_1$,
$AC = \ell_2$ et $BC = \ell_3$.
Il suffit même de vérifier que la plus grande longueur est plus petite que la somme des deux autres.

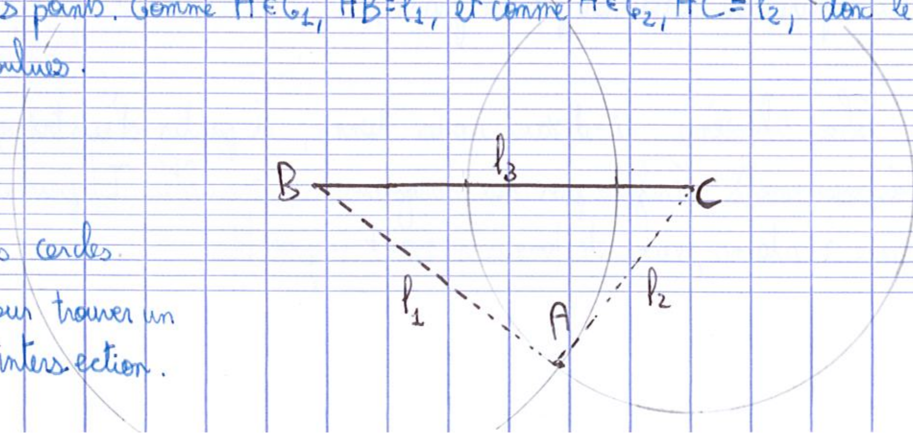
exemple: · il existe bien un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 5$ cm,
car $\underbrace{5\text{ cm}}_{\text{plus long côté}} < \underbrace{3\text{ cm} + 4\text{ cm}}_{\text{somme des deux autres}}$

démonstration (et méthode de construction):
Supposons que l'on dispose de trois longueurs ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3, dont ℓ_3 est la plus grande et que $\ell_3 < \ell_1 + \ell_2$. On veut construire un triangle avec ces longueurs.
1) on trace un segment [BC] avec $BC = \ell_3$ (la plus grande longueur).



2) on trace les cercles $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon ℓ_1, et $\mathcal{C}_2$ de centre C et de rayon ℓ_2.
Comme $BC = \ell_3 < \ell_1 + \ell_2$, ils se croisent en deux points. On prend pour A un de ces points. Comme $A \in \mathcal{C}_1$, $AB = \ell_1$, et comme $A \in \mathcal{C}_2$, $AC = \ell_2$, donc le triangle ABC a les longueurs voulues.

⚠ En pratique, on ne tracera que la partie des cercles nécessaire pour trouver un point d'intersection.



II) Droites remarquables du triangle.

Dans cette partie, on présente quatre familles de trois droites associées à chaque triangle. Pour chacune, on observe que les trois droites sont concourantes et on donne un nom à leur point de concours, ainsi que ses propriétés intéressantes. Dans une cinquième sous-partie, on observe que trois de ces points sont alignés. Dans tout ce qui suivra, les triangles sont supposés non aplatis.

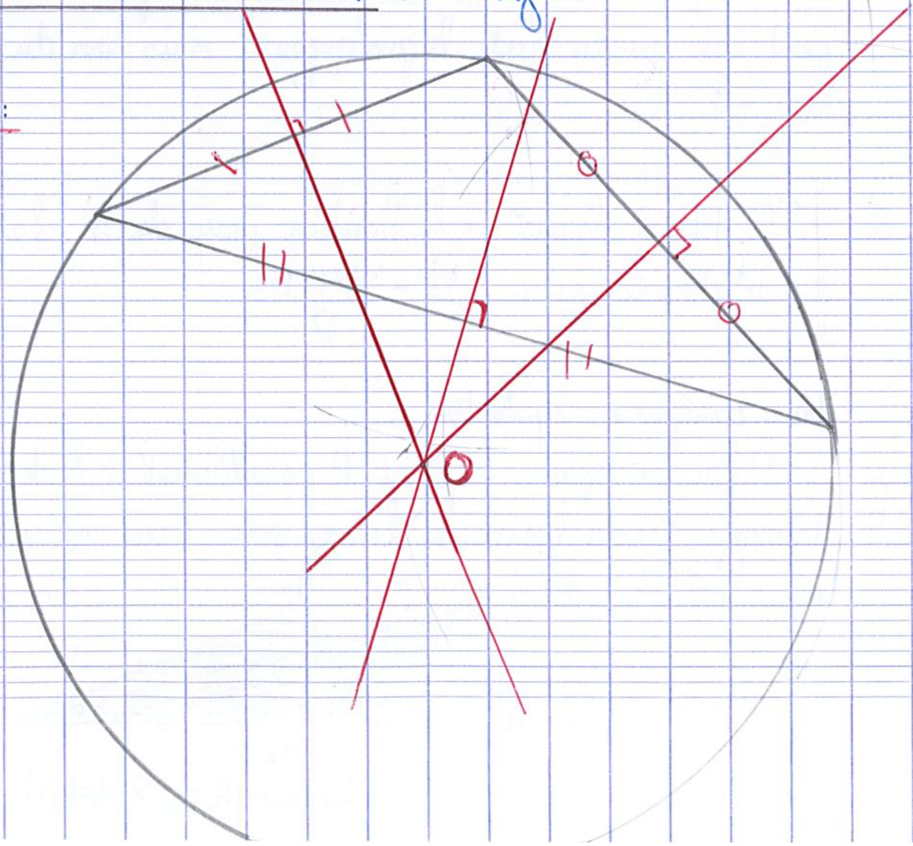
1) Médiatrices, cercle circonscrit

Rappel: La médiatrice (d) d'un segment [AB] est la droite le coupant perpendiculairement en son milieu. Elle contient exactement les points équidistants de A et B.
Autrement dit, $M \in (d)$ exactement si $AM = BM$.

Théorème (cf démonstration 1) Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés se rencontrent en un point O. On dit qu'elles sont concourantes.
Ce point est le centre du seul cercle $\mathscr{C}$ qui passe par les trois sommets du triangle.

Définition Le cercle $\mathscr{C}$ est appelé <u>cercle circonscrit</u> du triangle, le point O est donc appelé <u>centre du cercle circonscrit</u> au triangle.

<u>Figure</u>:



Remarques : · Par trois points non alignés, on peut donc faire passer un unique cercle, dont on trouve le centre en traçant les médiatrices de deux des segments entre ces points.

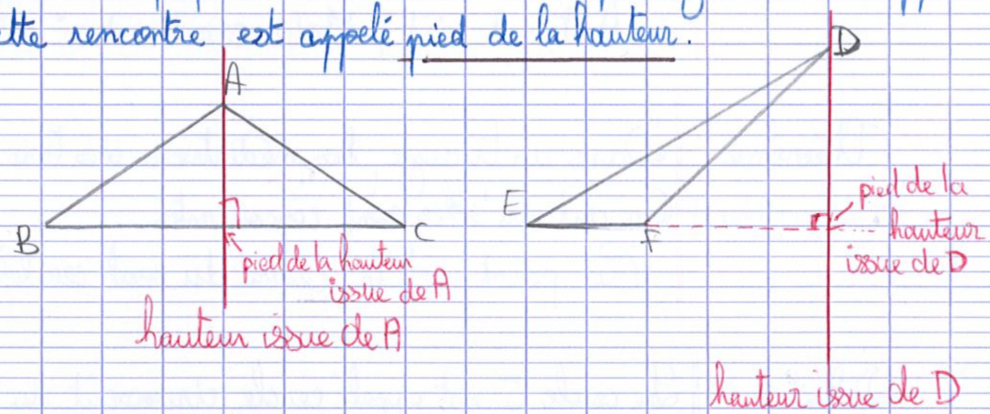
· Étant donné un cercle, on peut retrouver son centre en traçant les médiatrices de deux cordes et en regardant où elles se croisent.

· Pour chacune des parties où ce sera possible, je donnerai des démonstrations des théorèmes en IV. Celle-ci est la plus simple

2) Hauteurs , orthocentre

Définition Dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et rencontrant perpendiculairement la droite prolongeant le côté opposé. Le point de cette rencontre est appelé pied de la hauteur.

Figures :

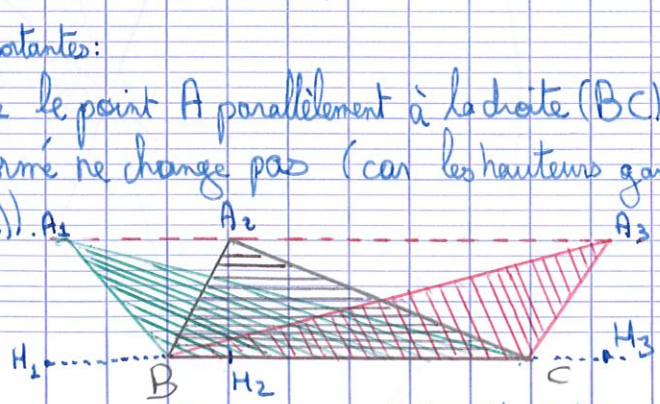


Remarque : Le pied de la hauteur n'est pas nécessairement sur le côté opposé, il peut être sur la droite le prolongeant mais hors du segment, comme sur la figure de droite.

Rappel de 6e Si H est le pied de la hauteur issue de A, l'aire du triangle ABC est donnée par $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{AH \times BC}{2}}$

deux conséquences importantes :

1) Si on déplace le point A parallèlement à la droite (BC), l'aire du triangle ainsi formé ne change pas (car les hauteurs garderont la même longueur de A à (BC)).



↳ comme $A_1H_1 = A_2H_2 = A_3H_3$, les trois aires sont égales.

exemple : on ne peut pas avoir de triangle ABC tel que $AB = 10\,cm$, $AC = 4\,cm$ et $BC = 5\,cm$,
car on aurait $AB > AC + BC$ $(10 > 9)$.

Ces conditions nécessaires sont en fait suffisantes : si les inégalités sont vérifiées, on peut construire le triangle

Théorème (triangles constructibles)

Étant données trois longueurs l_1, l_2 et l_3 telles que
$l_1 < l_2 + l_3$, $l_2 < l_1 + l_3$ et $l_3 < l_1 + l_2$, (chacune est plus petite que la somme des autres)
il existe un triangle ABC tel que $AB = l_1$, $AC = l_2$ et $BC = l_3$.

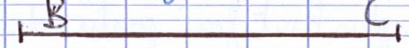
Il suffit même de vérifier que la plus grande longueur est plus petite que la somme des deux autres.

exemple : · il existe bien un triangle ABC tel que $AB = 4\,cm$, $AC = 3\,cm$ et $BC = 5\,cm$,
car $\underbrace{5\,cm}_{\text{plus long côté}} < \underbrace{3\,cm + 4\,cm}_{\text{somme des deux autres}}$.

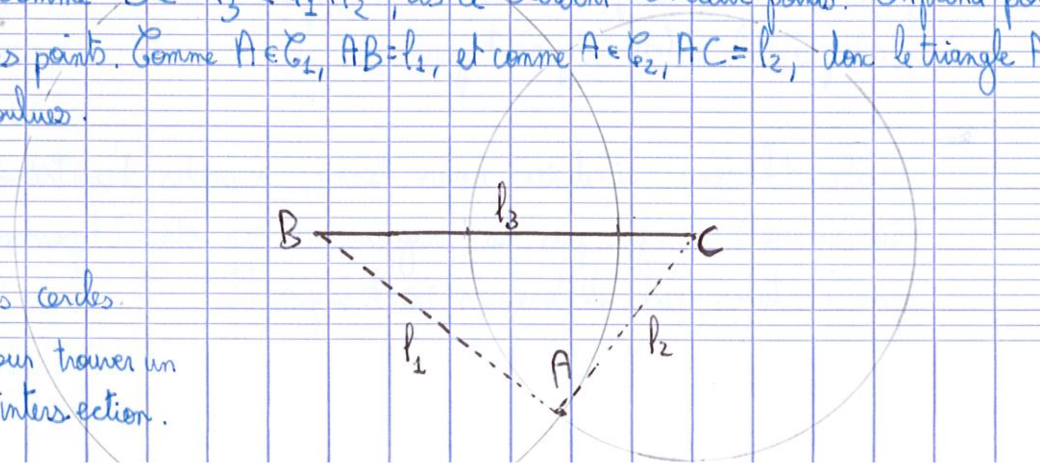
démonstration (et méthode de construction) :

Supposons que l'on dispose de trois longueurs l_1, l_2 et l_3, dont l_3 est la plus grande et que $l_3 < l_1 + l_2$. On veut construire un triangle avec ces longueurs.

1) on trace un segment [BC] avec $BC = l_3$ (la plus grande longueur).



2) on trace les cercles $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon l_1, et $\mathcal{C}_2$ de centre C et de rayon l_2.
Comme $BC = l_3 < l_1 + l_2$, ils se croisent en deux points. On prend pour A un de ces points. Comme $A \in \mathcal{C}_1$, $AB = l_1$, et comme $A \in \mathcal{C}_2$, $AC = l_2$, donc le triangle ABC a les longueurs voulues.



⚠ En pratique, on ne tracera que la partie des cercles nécessaire pour trouver un point d'intersection.

2) Si on note H, K et L les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C, on peut calculer l'aire de trois manières : $\frac{AH \times BC}{2}$, $\frac{BK \times AC}{2}$ et $\frac{CL \times AB}{2}$.

Donc, ces aires étant identiques, on a : $\boxed{AH \times BC = BK \times AC = CL \times AB}$

Théorème (cf démonstration 2) | Dans un triangle, les hauteurs issues des trois sommets sont concourantes.

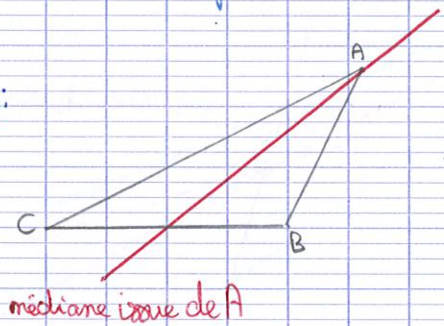
(Figure page suivante).

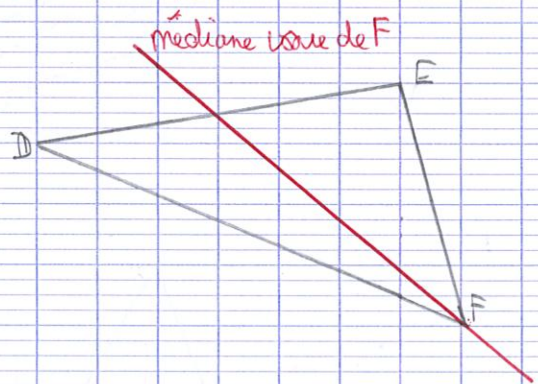
Définition | Le point de concours des hauteurs est appelé l'orthocentre du triangle.

3) Médianes, centre de gravité

Définition | Dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et par le milieu du côté opposé.

Figures :





Remarques : 1) Comme la médiane coupe le côté opposé en deux parties égales, les deux triangles ainsi formés ont la même aire.

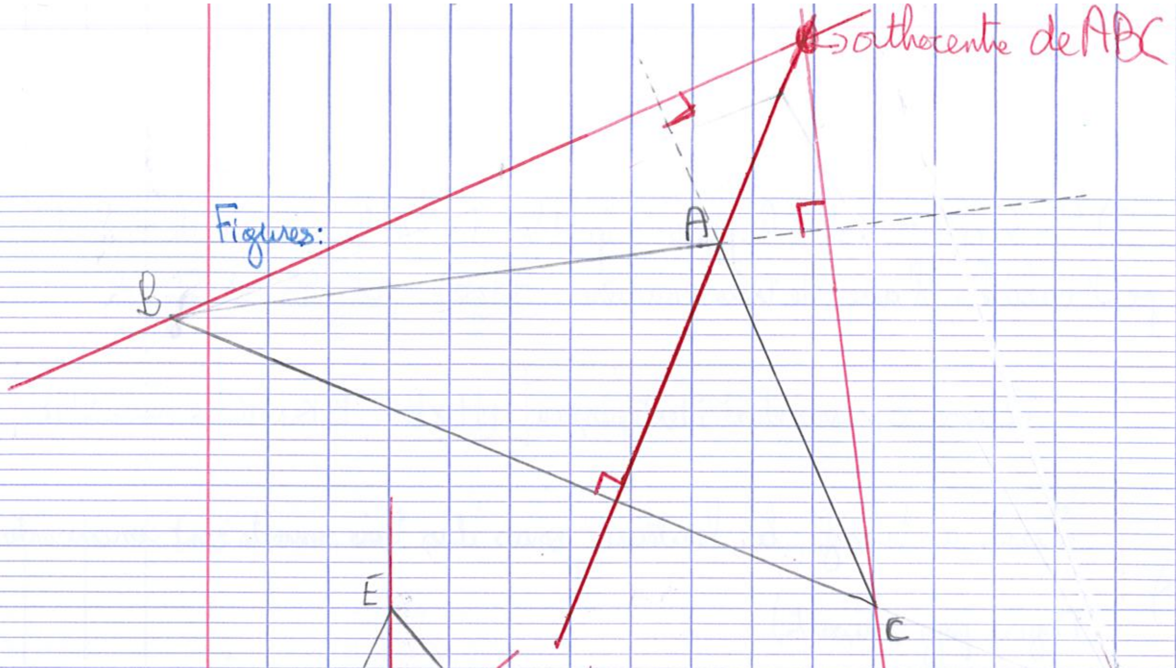
2) La médiane et la médiatrice du côté opposé se croisent au milieu de celui-ci.
→ (medium)

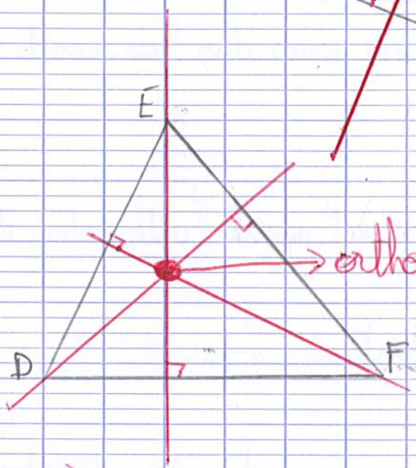
Théorème | Dans un triangle, les médianes issues des trois sommets sont concourantes, et leur point de concours est aux deux tiers de chaque médiane.

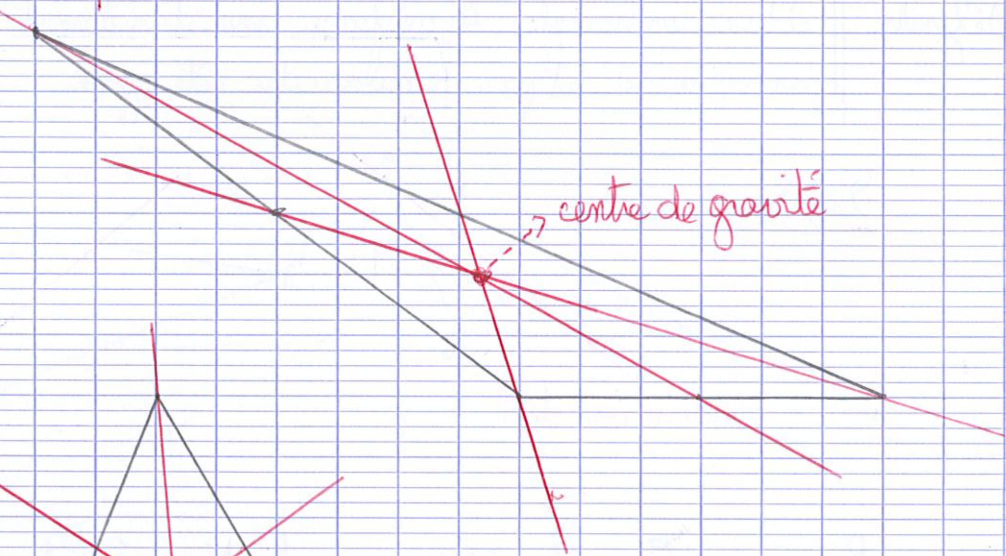
Définition | Le point de concours des médianes est appelé centre de gravité du triangle.

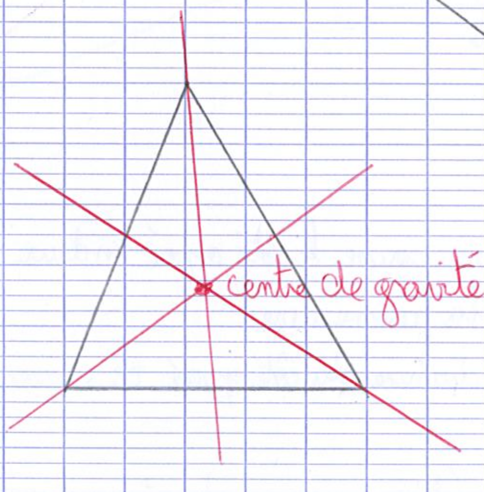
Remarques : 1) Le centre de gravité est le point où un triangle solide peut tenir en équilibre sur une mine de crayon.

Figures:


orthocentre de ABC
A
B
C


E
D
F
orthocentre de DEF


centre de gravité


centre de gravité

4) Bissectrices, centre du cercle inscrit

Définition Étant donné un angle $(\widehat{xOy})$, la bissectrice de $\widehat{xOy}$ est la demi-droite $[Oz)$ issue de O telle que les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{zOy}$ soient égaux.

méthode de tracé :

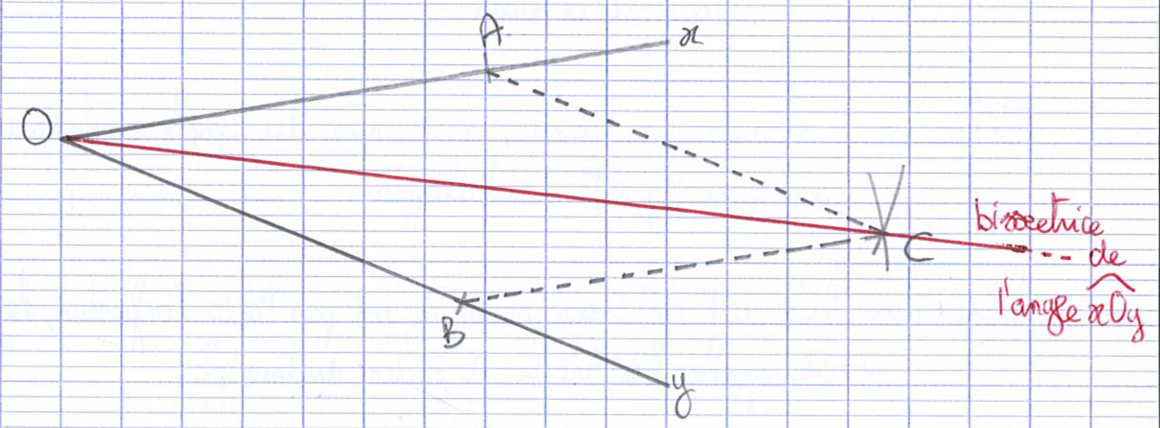
1) on fixe une fois pour toutes l'ouverture d'un compas.

2) on le plante en O pour trouver un point A sur $[Ox)$ et un point B sur $[Oy)$.

3) on le plante en A puis en B pour trouver un point C tel que OACB soit un losange.

4) La diagonale (OC) est alors un axe de symétrie du losange ; elle coupe donc l'angle $\widehat{AOB}$ en deux angles égaux.

[OC) est donc la bissectrice voulue.

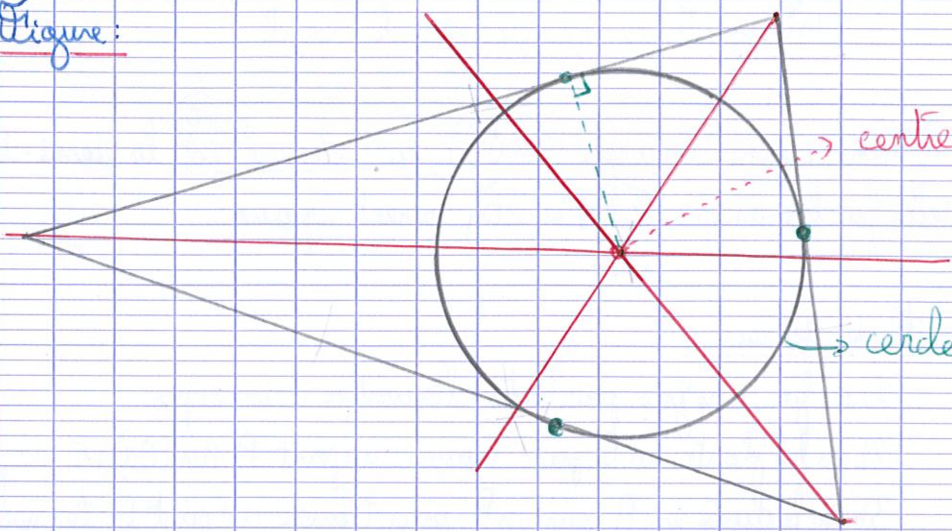


Théorème Les bissectrices des trois angles d'un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est le centre du seul cercle touchant chaque côté une seule fois.

Définition Ce cercle est appelé cercle inscrit dans le triangle et le point de concours est donc appelé centre du cercle inscrit.

Remarque: Le centre du cercle inscrit est le seul point situé à la même distance de chacun des trois côtés du triangle.

Figure :



Remarque : pour tracer le cercle inscrit, on trace les trois bissectrices afin de déterminer son centre, puis on trace la perpendiculaire à un côté passant par ce point pour avoir un rayon (vert sur la figure).

5) Droite d'Euler.

Théorème — Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés.

Définition — Quand ces trois points ne sont pas tous confondus, la droite qu'ils définissent s'appelle la droite d'Euler du triangle.

Remarques : 1) C'est un résultat obtenu par Leonhard Euler en 1765.

2) Le centre de gravité est alors deux fois plus proche du centre du cercle circonscrit que de l'orthocentre.

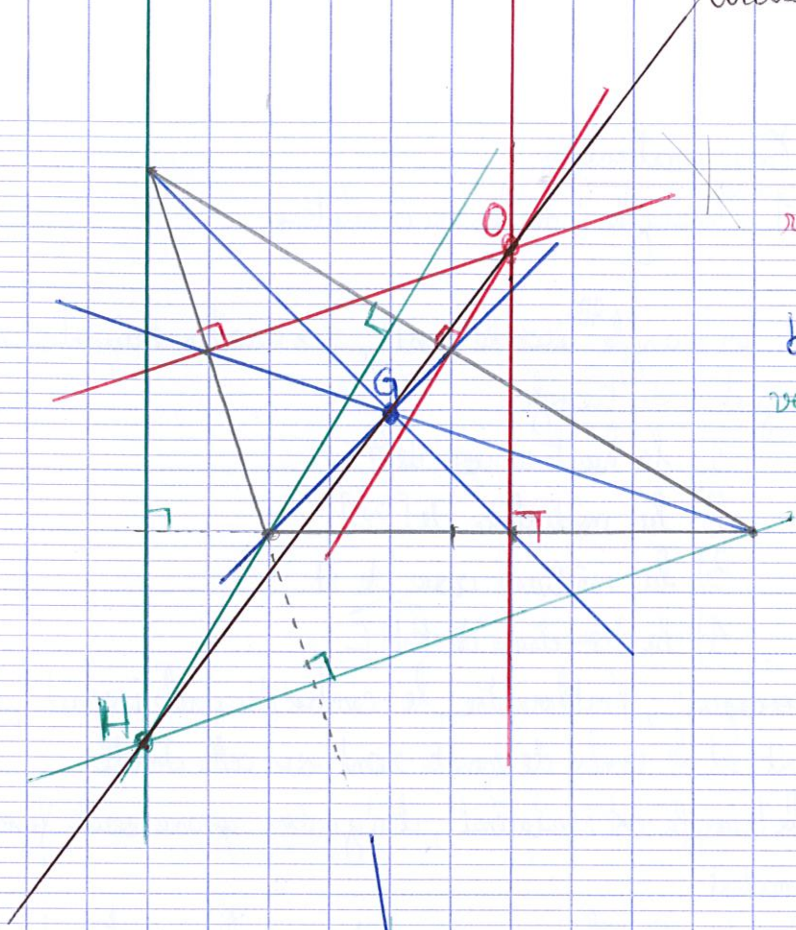
3) La condition au début de la définition ci-dessus exclut les triangles équilatéraux où les trois points coïncident et ne définissent donc pas une unique droite...

4) Le centre du cercle inscrit n'est, en général, pas sur cette droite.

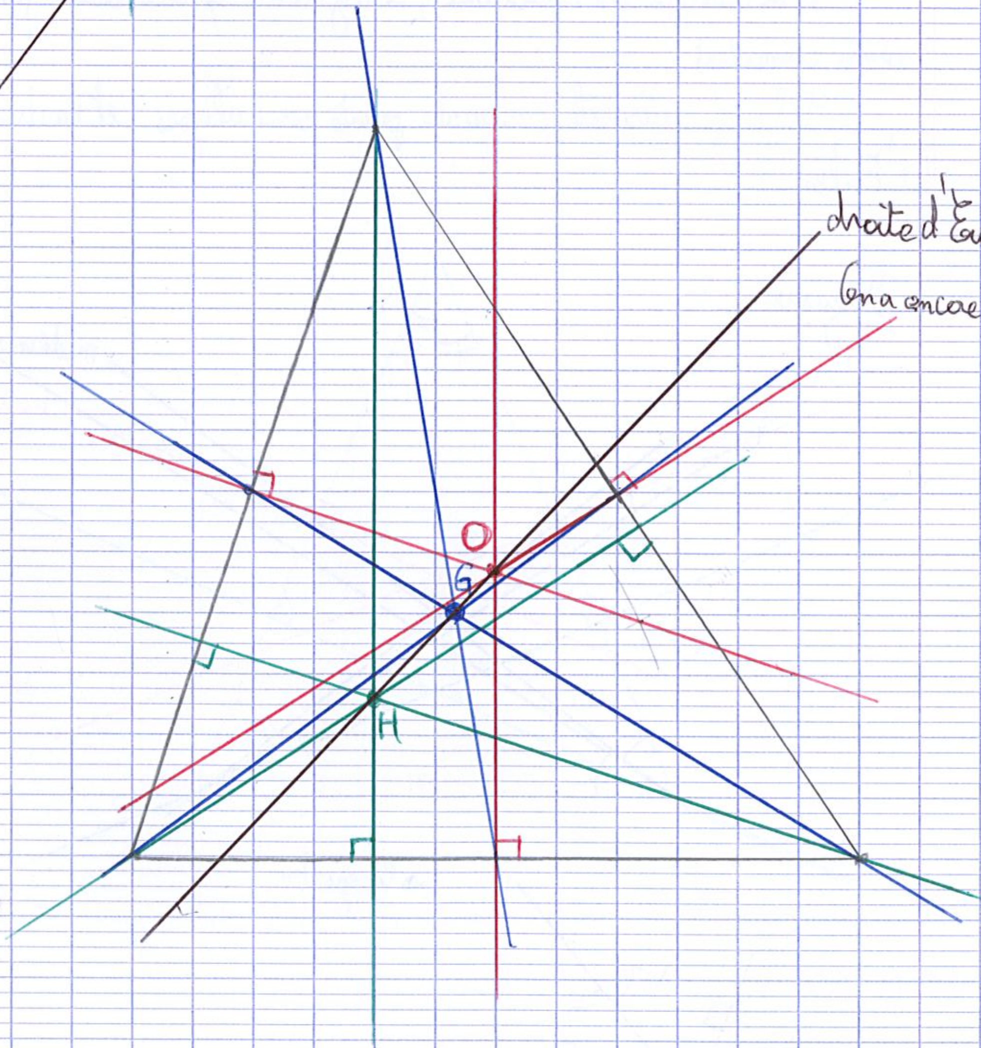
5) En page suivante, on donne deux figures : le cas où un angle est obtus et celui où ils sont tous aigus. Dans le premier cas, deux des points sont en-dehors du triangle ; dans le second, ils sont tous à l'intérieur.

droite d'Euler (OG) (ou (OH) ou (GH))
avec $OG \times 2 = GH$.

rouge : médiatrices et centre du cercle circonscrit
bleu : médianes et centre de gravité
vert : hauteurs et orthocentre



droite d'Euler.
On a encore $OG \times 2 = GH$.



III) Cas particuliers

1) Triangles isocèles ou équilatéraux

Théorème Dans un triangle ABC isocèle en A, les droites suivantes coïncident et forment un axe de symétrie du triangle :

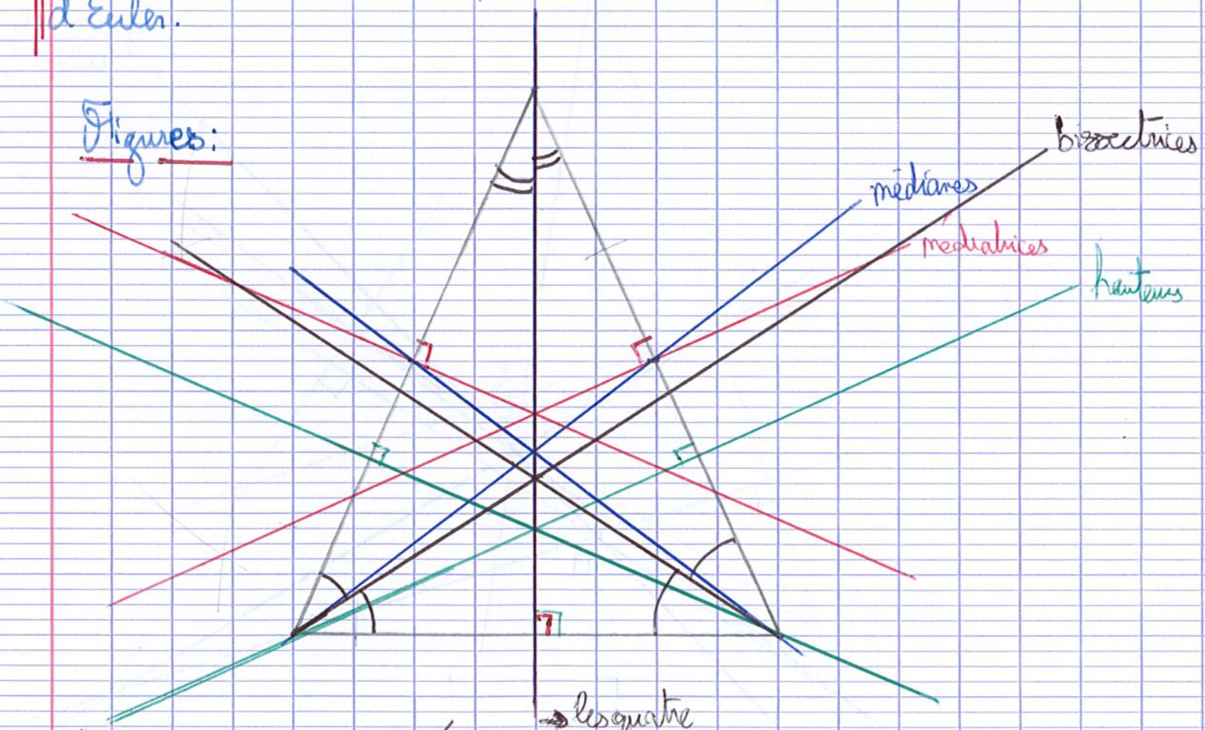
1) la hauteur issue de A,
2) la médiatrice de [BC],
3) la médiane issue de A
4) la bissectrice de $\widehat{BAC}$

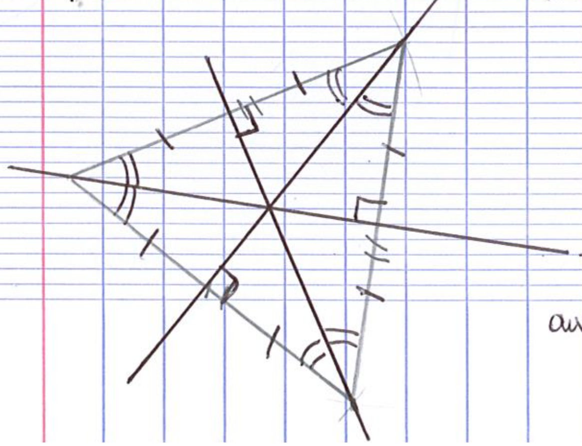
Par conséquent, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont sur cette droite.

Si le triangle est équilatéral, il n'y a donc qu'une seule famille de droite et les quatre points coïncident

S'il n'est qu'isocèle, ces quatre points sont alignés, et la droite ci-dessus est la droite d'Euler.

Figures :

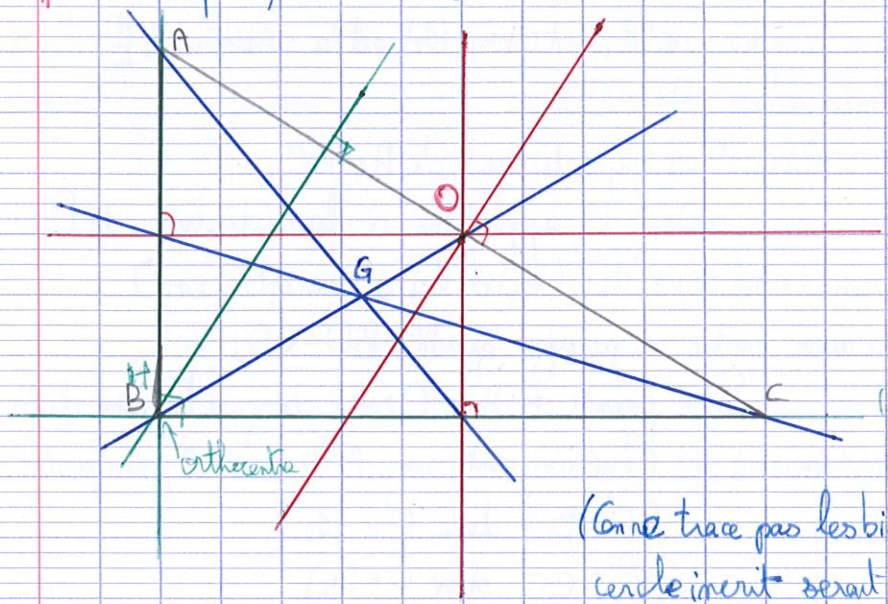




Pour le triangle équilatéral, chaque hauteur est aussi bissectrice, médiatrice et médiane, donc les quatre centres sont les mêmes

2) Triangles rectangles

Théorème Dans un triangle ABC rectangle en B :
1) le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [BC],
2) et l'orthocentre est le point B de l'angle droit.
Par conséquent, la droite d'Euler est la médiane issue de l'angle droit B.



(BC) est la hauteur issue de A.

(On ne trace pas les bissectrices ici, mais le centre du cercle inscrit serait hors de la droite d'Euler (OB) sauf à ce que le triangle soit isocèle.)

IV) Annexes : démonstrations

1) Concourance des médiatrices (II.1)

On démontre ici le théorème du II.1. Le plan est le suivant :
a) on montre que deux médiatrices se croisent
b) on montre que leur point d'intersection est sur la troisième
c) on montre que c'est le seul point à la même distance des trois sommets
d) on interprète cela en terme de cercles

Passons aux détails, et fixons un triangle (non plat) ABC.

a) Notons (d_1) et (d_2) les médiatrices de [AB] et [BC].
Si (d_1) et (d_2) ne se croisaient pas, elles seraient parallèles.
Comme de plus $(AB) \perp (d_1)$, on aurait $(AB) \perp (d_2)$.
Mais $(BC) \perp (d_2)$, donc si $(AB) \perp (d_2)$ alors $(AB) // (BC)$ ce qui est faux.

Donc (d_1) et (d_2) se croisent.

b) Notons O le point d'intersection de (d_1) et (d_2).

Montrer que les trois médiatrices sont concourantes revient à montrer que O est sur la médiatrice (d_3) de $[AC]$.

Or, (cf II.1), la médiatrice de $[AB]$ est formée des points à la même distance de A et de B.

Donc, comme $O \in (d_1)$, $AO = BO$.

De même, comme $O \in (d_2)$ et comme (d_2) est la médiatrice de $[BC]$, on a $BO = CO$.

Mais alors $AO = CO$.

Donc O est équidistant de A et de C.

Donc O appartient à la médiatrice de $[AC]$, c'est-à-dire $O \in (d_3)$.

On a bien montré que (d_1), (d_2) et (d_3) se rencontrent en O.

c) On a aussi montré au passage que $AO = BO = CO$.

Les points A, B et C sont donc à la même distance de O.

Inversement si O' est un point avec $AO' = BO' = CO'$, on peut dire que :

- $AO' = BO'$ donc $O' \in (d_1)$
- $BO' = CO'$ donc $O' \in (d_2)$
- $AO' = CO'$ donc $O' \in (d_3)$

Donc O' est le point de concours des médiatrices et $O' = O$.

O est donc le seul point à la même distance de A, B et C.

d) Le cercle de centre O passant par A contient donc également B et C.

Si un autre cercle contenait A, B et C, son centre serait à la même distance des trois points, donc serait O. Le rayon serait alors OA.

On a donc montré qu'il y a un seul cercle passant par A, B et C et que son centre est O.

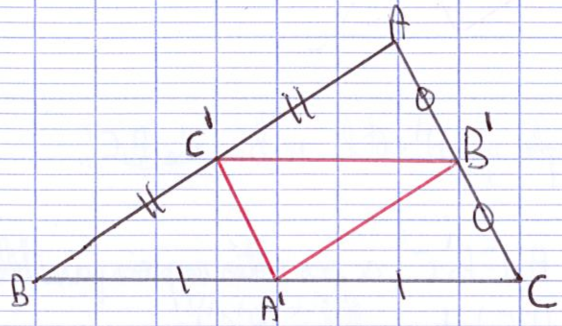
2) Concourance des hauteurs

C'est le résultat le plus difficile. Il nécessite d'abord de démontrer le résultat intermédiaire suivant. On va d'abord l'énoncer et l'utiliser pour montrer que les hauteurs sont concourantes, la démonstration en est technique.

Voici donc ledit résultat (c'est aussi un cas particulier du théorème de Thalès vu en 4^e) :

Théorème (triangle médian)

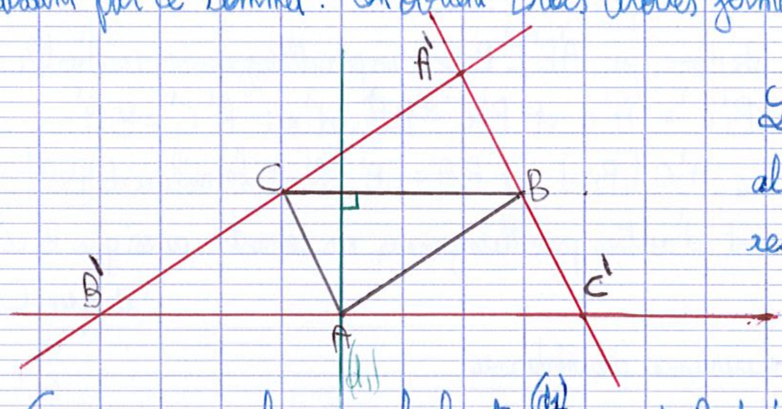
Étant donné un triangle ABC, notons A', B' et C' **des points pris sur** [BC], [AC] et [AB].
Si $(B'C')//(BC)$, $(A'B')//(AB)$ et $(A'C')//(AC)$, alors A', B' et C' sont les milieux des côtés.



Les côtés du petit triangle sont parallèles à ceux du grand.

Démontrons maintenant la concourance des hauteurs :

Fixons un triangle ABC, et traçons, pour chaque sommet, la parallèle au côté opposé passant par ce sommet. On obtient trois droites formant un triangle A'B'C' ainsi :



Le théorème ci-dessus entraîne alors que A, B et C sont les milieux respectifs de [B'C'], [A'C'] et [A'B'].

On remarque alors que la hauteur issue de A du triangle ABC passe par le milieu de (B'C'). De plus, $(d_1) \perp (BC)$ et $(B'C')//(BC)$, donc $(d_1) \perp (B'C')$.

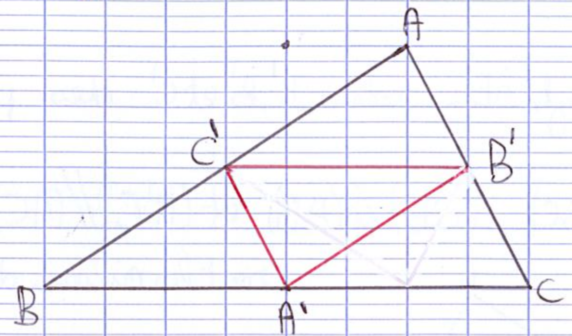
Autrement dit (d_1) est la médiatrice de [B'C'].

On voit donc que les hauteurs de ABC sont les médiatrices des côtés de A'B'C'. D'après le résultat de II.1, ces trois droites sont donc concourantes.

Remarques : · On a aussi démontré que l'orthocentre du triangle ABC est le centre du cercle circonscrit du triangle A'B'C'.

· Cette construction serait la première étape pour démontrer le résultat d'alignement d'Euler en II.5.

Il reste à démontrer le théorème utilisé. Reprenons la figure:



On sait que : $(AB)//(A'B')$
$\cdot (AC)//(A'C')$
$\cdot (BC)//(B'C')$.

Montrons par exemple que A' est le milieu de $[BC]$.

Le quadrilatère $A'CB'C'$ a ses côtés opposés parallèles car :
$\cdot (A'C)=(BC)$ et parallèle à $(B'C')$
$\cdot (B'C)=(AC)$ est parallèle à $(A'C')$.

C'est donc un parallélogramme, donc ses côtés opposés ont la même longueur.

On a donc en particulier $B'C'=A'C$.

On montre de même que $A'B'C'B$ est un parallélogramme, d'où l'on tire que $B'C'=BA'$.

Donc $B'C'=A'C$ et $B'C'=BA'$, d'où $A'C=BA'$.

Comme $A'\in[BC]$ et $BA'=CA'$, A' est le milieu de $[BC]$.

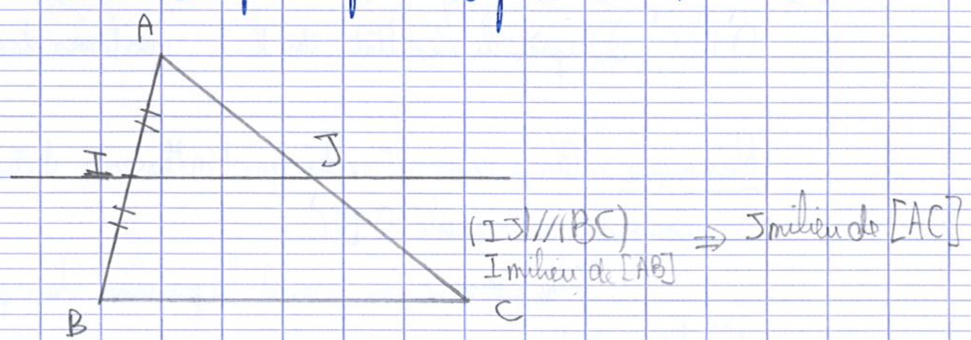
En utilisant d'autres parallélogrammes, on démontre aussi que B' est le milieu de $[AC]$ et que C' est le milieu de $[AB]$.

3) Concourance des médianes

Pour montrer le résultat du II.3, on va devoir utiliser le résultat suivant.

Lemme — un lemme est un résultat utile pour en montrer un autre

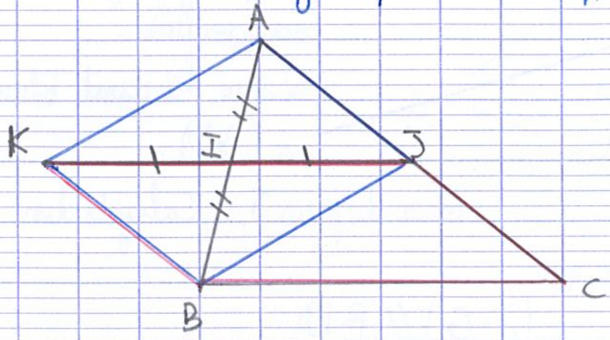
Dans un triangle ABC, notons I le milieu de $[AB]$.
La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en son milieu.



Remarque : C'est encore un cas particulier du théorème de Thalès (4e).

démonstration du lemme :

Notons K le symétrique de J par rapport à I, comme sur cette figure.



idée : on montre que les quadrilatères bleu, puis rouge sont des parallélogrammes. On en tire que AJ et JC sont égaux à KB.

démo du lemme

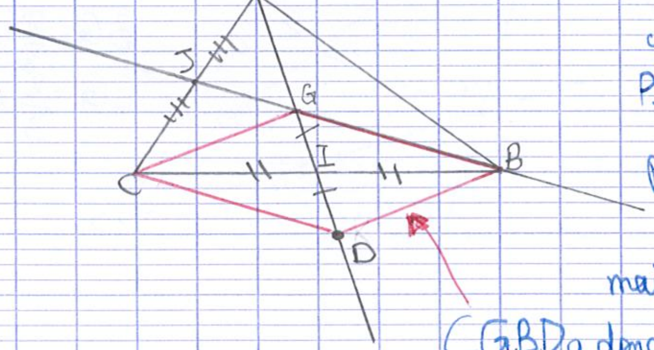
Par définition de la symétrie centrale, I est le milieu de [JK].
Comme I est aussi le milieu de [AB], [AB] et [JK] se croisent en leur milieu.
Donc AJBK est un parallélogramme (car ses diagonales ont le même milieu).

Par conséquent (propriétés du parallélogramme) :
- AJ = BK et (AJ) // (BK)
- AK = BJ et (AK) // (BJ).

Comme A, J et C sont alignés, (JC) = (AJ), donc on a (JC) // (BK).
D'autre part, on sait que (JK) = (IJ) // (BC).
Donc JKBC a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme.
En particulier, les côtés opposés [KB] et [JC] ont donc la même longueur.
À ce stade, on a montré que :
- AJ = BK
- JC = BK

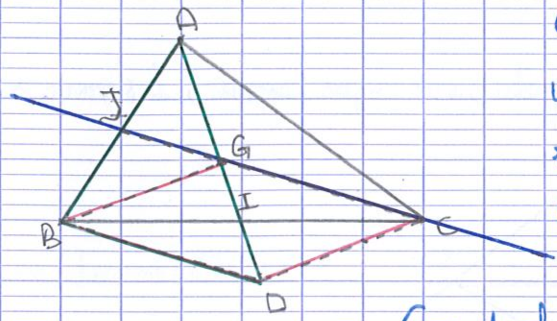
Donc AJ = JC, et, comme J ∈ [AC], J est le milieu de [AC].

Montrons enfin la concourance des médianes. Prenons un triangle ABC et traçons la médiane issue de A, et celle issue de B, en notant G leur intersection.



⚠ On montre d'abord que G est aux deux tiers de [AI] !

Notons aussi I le milieu de [BC], et J celui de [AC].
Plaçons le point D symétrique de G par rapport à I.
I est donc le milieu de [GD], mais aussi de [BC].
CGBD a donc des diagonales sécantes en leurs milieux, donc est un parallélogramme.



Comme le quadrilatère BGCD est un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles.
Donc la droite bleue (GC) est parallèle à (BD).
On a de plus J, G, C alignés donc (GC) = (JG).

On sait donc que :
- (JG) // (BD)
- J est le milieu de [AB].

On applique le lemme au triangle ABD.

Le lemme en début de partie montre donc que G est le milieu de [AD].

On a $GI = ID = GD \div 2$

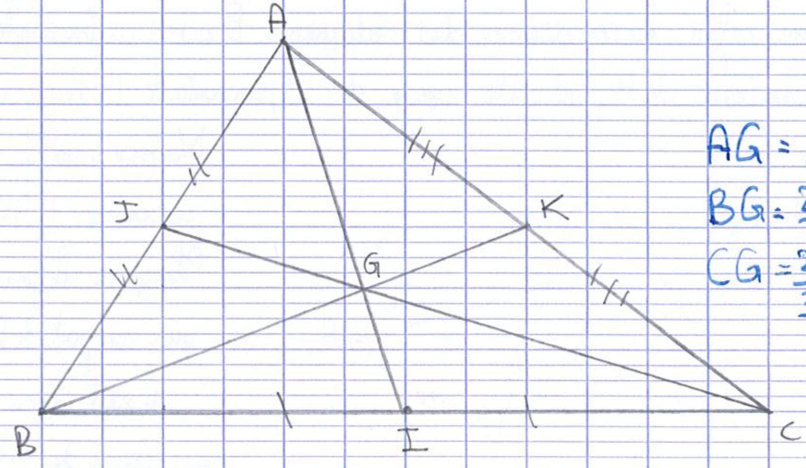
et $AG = GD$ Donc $AG = 2 \times IG$

et $AI = AG + GI = 3 \times IG$.

D'où $AG = \frac{2}{3} \times AI$.

On a montré que la médiane issue de B coupe [AI] aux deux tiers de sa longueur. Le même raisonnement fonctionne avec la médiane issue de C, donc elle coupe [AI] au même point G, situé aux deux tiers de [AI].

On en conclut que les trois médianes se coupent en un point situé aux deux tiers de chaque médiane :



$AG = \frac{2}{3} \times AI$

$BG = \frac{2}{3} \times BK$

$CG = \frac{2}{3} \times CJ$

4) Concourance des bissectrices

Dans cette partie, on utilise pricipalement le résultat suivant.

Lemme : 1) La longueur de l'hypoténuse et un angle adjacent à celle-ci suffisent à construire un triangle rectangle : autrement dit, si deux triangles rectangles ont la même longueur d'hypoténuse et deux angles égaux, ils sont identiques.

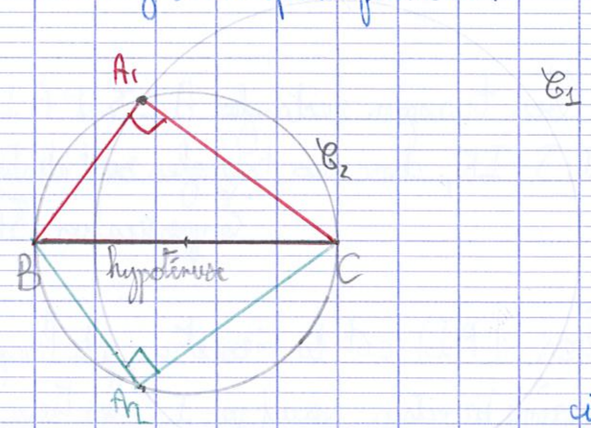
2) La longueur de l'hypoténuse et d'un autre côté suffit à déterminer un triangle rectangle.

démonstration : 1)

Si on veut placer A de telle sorte que BAC soit un triangle rectangle, A est le point d'intersection de [Bx) et de la perpendiculaire à [Bx) passant par C.

Il n'y a donc qu'une possibilité.

2)



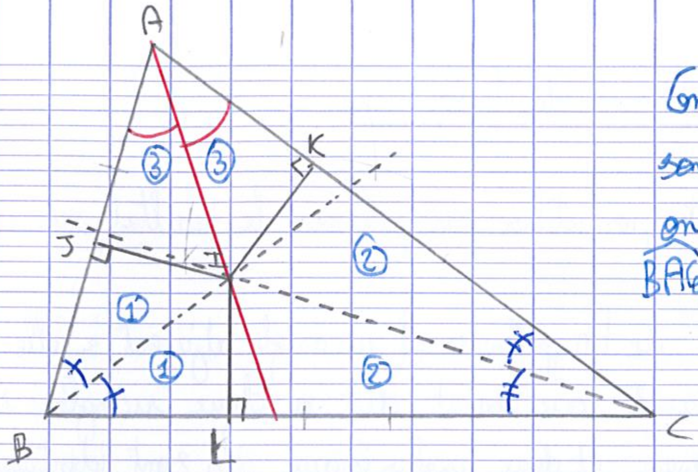
Fixer la longueur de [AC] impose $A \in \mathcal{C}_1$.
Mais si ABC est rectangle en A, on a vu que le centre de son cercle circonscrit était le milieu de [BC].

Donc $A \in \mathcal{C}_2$.

A doit donc être un des deux points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, mais les deux triangles obtenus sont symétriques par rapport à (BC) donc identiques.

démonstration du théorème sur les bissectrices

Traçons les bissectrices issues de B et de C, et notons I leur point d'intersection. Traçons depuis I les perpendiculaires à chaque côté comme sur la figure suivante et notons S, K et L les points obtenus (cf figure).



On sait que les angles en B et en C sont coupés en deux parts égales, et on veut donc montrer que [AI) coupe aussi $\widehat{BAC}$ en deux parts égales.

① Les triangles rectangles IBL et IBJ ont la même hypoténuse [IB] et on a $\widehat{IBJ} = \widehat{IBL}$ car [BI) est la bissectrice de l'angle en B.
D'après le 1) du lemme, ces deux triangles sont identiques donc IJ = IL.

② Les triangles rectangles ICL et ICK ont la même hypoténuse [IC] et on a ICK = ICL car [CI) est la bissectrice de l'angle en C.
D'après le 1) du lemme, ces deux triangles sont donc identiques et donc IK = IL.

On a donc IJ = IL = IK.

③ Les triangles rectangles AIJ et AIK ont la même hypoténuse et on a IJ = IK, donc ces triangles sont identiques.
En particulier $\widehat{JAI} = \widehat{KAI}$.

Donc [AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, ce qui montre bien que la troisième bissectrice passait par I : les trois bissectrices sont concourantes.

De plus, on a montré que le point I était à la même distance des trois côtés, ce qui revient bien à dire qu'il est le centre d'un cercle touchant chaque côté en un seul point (J, K ou L).

5e 2-3-4
2022.

Chapitre 8 : Statistique

I) Généralités

Une **statistique** consiste à étudier un certain caractère sur un échantillon donné.

exemples : • recenser la couleur de cheveux dans une ville
• mesurer les tailles chez les enfants de 8 ans
• les préférences de vote sur la population en âge de voter.

Le caractère étudié prend alors différentes **valeurs**.

(mêmes exemples) : • couleurs
• nombres (raisonnablement entre 50 et 200)
• candidats + blanc.

L'**effectif** d'une valeur est le nombre de fois qu'on l'obtient. L'**effectif total** est le nombre total de données recueillies.

II) Outils statistiques

1) Fréquences

La **fréquence** d'une valeur est le rapport entre son effectif et l'effectif total.

exemple : on joue dix fois à pile ou face et on obtient : P, F, P, F, P, P, F, P, F, P.

on construit le tableau :

valeur :	P	F	
effectif	6	4	→ effectif total : $6+4=10$
fréquence	$\frac{6}{10}=0{,}6=60\%$	$\frac{4}{10}=0{,}4=40\%$	→ somme $=1=100\%$

Remarques : • Les fréquences s'expriment sous forme de fractions, de nombres décimaux ou de pourcentages.
• La somme de toutes les fréquences est toujours 1 (ou 100%).

2) Moyenne

Quand le caractère étudié prend des valeurs numériques, on appelle **moyenne** la somme de toutes les valeurs (répétées autant de fois qu'elles sont mesurées) divisée par l'effectif total.

exemple: on lance 20 fois un dé et l'on obtient 2, 6, 5, 6, 5, 4, 4, 2, 4, 6, 3, 6, 2, 1, 3, 3, 2, 4, 4 et 1.

La moyenne est alors $\frac{2+6+5+6+5+4+4+2+4+6+3+6+2+1+3+3+2+4+4+1}{20} = \frac{73}{20} = 3,65$.

Propriété. La moyenne est aussi obtenue en ajoutant les valeurs possibles multipliées par leurs fréquences.

exemple: Dans l'exemple précédent, on a:

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	2	4	3	5	2	4
fréquence	0,1	0,2	0,15	0,25	0,1	0,2

Et $0,1\times1+0,2\times2+0,15\times3+0,25\times4+0,1\times5+0,2\times6$

$= 0,1+0,4+0,45+1+0,5+1,2$

$= 3,65$. (On retrouve – heureusement – la même moyenne.)

4e

3) Médiane (?)

Toujours quand le caractère étudié est un nombre, on définit la **médiane** ainsi:

1) on trie les résultats du plus petit au plus grand.

2) on compte le nombre de résultats. Si ce nombre est impair, la médiane est la valeur exactement au milieu de la liste; s'il est pair, on fait la moyenne des deux valeurs les plus au centre.

(toujours le même exemple): La liste triée des résultats est:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6

10 termes à gauche | 10 termes à droite

La médiane est alors $\frac{(4+4)}{2} = 4$

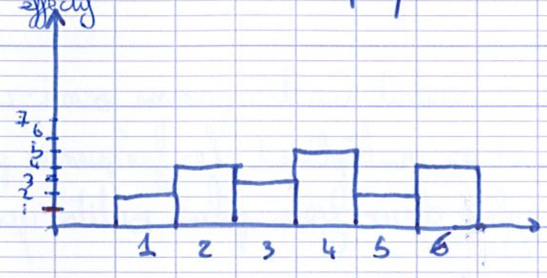
Propriété Par construction, la moitié des résultats sont plus petits (ou égaux) que la médiane et la moitié plus grands.

III) Représentations.

1) Diagrammes en bâtons.

On peut représenter les données d'une statistique en traçant un rectangle pour chaque valeur de hauteur proportionnelle à l'effectif / la fréquence de celle-ci.

(même) exemple:



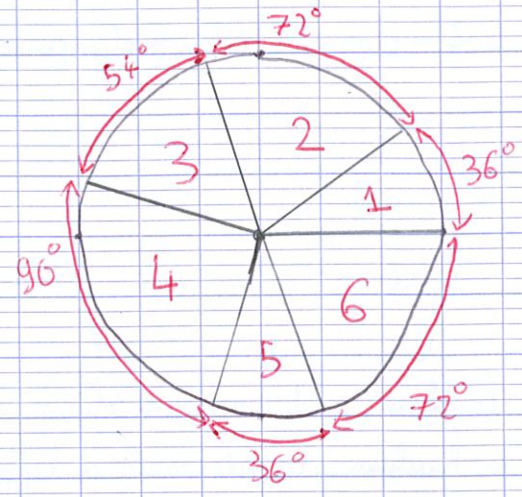
2) Diagramme circulaire

On peut également représenter les données par des secteurs d'un disque. On attribue pour cela à une valeur un secteur d'angle $360° \times f$ où f est la fréquence de la valeur considérée.

(même) exemple: On calcule les angles pour chaque valeur du dé des exemples précédents

- pour 1, on avait une fréquence $f = 0{,}1$ donc l'angle sera $360° \times 0{,}1 = 36°$;
- pour 2, on prend un angle de $0{,}2 \times 360° = 72°$;
- pour 3, on prend un angle de $0{,}15 \times 360° = 54°$;
- pour 4, on prend un angle de $0{,}25 \times 360° = 90°$;
- pour 5, on prend un angle de $0{,}1 \times 360° = 36°$;
- et pour 6, on prend un angle de $0{,}2 \times 360° = 72°$.

La somme des angles est alors bien $36 + 72 + 54 + 90 + 36 + 72 = 360°$, ce qui fait un cercle entier. On construit le diagramme en mesurant les angles:



<u>Remarque</u> : si l'on voulait un diagramme semi-circulaire, on tracerait un demi-disque et on multiplierait les fréquences par 180° (au lieu de 360°), ce qui donne des angles deux fois plus petits que pour un diagramme circulaire.