Exercices tirés du manuel de 3e de Pierre Chenevier, éd. Hachette[1]

1938

1. Vous pouvez me signaler les erreurs par courriel : lien de contact.

Première partie

Nombres entiers

Chapitre 1

Numération

1. Combien faut-il de mots différents pour nommer tous les nombres jusqu'à un million ?
2. On écrit les 237 premiers nombres. Combien, au total, a-t-on écrit de chiffres ? Même question pour les nombres entre 94 et 237.
3. On écrit tous les nombres de deux chiffres. Combien en écrit-on ? Combien de chiffres écrit-on au total ? Même question pour les nombres de trois chiffres.
4. Pour numéroter les pages d'un livre, on emploie 408 caractères d'imprimerie. Quel est le nombre de pages de ce livre ?
5. On écrit les 467 premiers nombres. Combien de fois écrit-on le chiffre 3 ? Combien de fois écrit-on le chiffre 5 ? Combien de fois écrit-on le chiffre 8 ?
6. Former tous les nombres de trois chiffres qui s'écrivent avec les chiffres 3, 5, 7. Classer ces nombres dans l'ordre croissant.
   Même question pour les nombres de quatre chiffres qui s'écrivent avec 3, 5, 7, 9.
7. Combien faut-il de dizaines, de centaines, de mille pour former un million, un milliard, 35 millions, 17 milliards ?
8. Dans un nombre de deux chiffres, le chiffre des dizaines est 7, on place un zéro entre les deux chiffres de ce nombre. De combien augmente-t-on ainsi sa valeur ?
   Soit le nombre 672. On intercale un zéro entre les chiffres 6 et 7 et un zéro entre les chiffres 7 et 2. De combien augmente-t-il ainsi ?
9. Quels sont les plus petit et le plus grand nombre de 4 chiffres ? Combien y a-t-il de nombres ayant moins de 4 chiffres ? moins de 5 chiffres ? En déduire combien il existe de nombres de 4 chiffres. Généraliser.
10. Écrire en chiffres romains les nombres suivants :

    349   654   1 794   2 497.

    Écrire en chiffres indo-arabes les nombres suivants :

    CXLIX   CDLXVII   MCCXLIV   MCDXCIV.

11. Dans un nombre de deux chiffres, le chiffre des dizaines est le double du chiffre des unités, et la somme de ces deux chiffres est 12. Trouver ce nombre.
12. Dans un nombre de trois chiffres, le chiffre des unités dépasse de 2 celui des dizaines et ce dernier est le triple du chiffre des centaines. La somme des trois chiffres est 16. Trouver ce nombre.
13. Une loterie comprend 5 000 billets numérotés de 1 à 5 000. Les frais d'organisation s'élèvent à $33,50$ F. Tous les billets ont été vendus 1 F l'un. Les billets se terminant par 27 gagnent 10 F. Tous les billets se terminant par 135 gagnent 200 F et le numéro 2 791 gagne le gros lot, soit 1 000 F. Quel est le bénéfice réalisé ?
14. On organise une loterie comprenant 1 000 billets numérotés de 1 à 1000 et qui sont tous vendus $0,50$ F chacun. Les frais d'organisation se montent à 50 F. Les billets terminés par 7 gagnent 1 F, les billets terminés par 35 gagnent 10 F et le gros lot est gagné par le numéro 794. Le bénéfice réalisé est de 150 F. Quel est le montant du gros lot ?

Chapitre 2

Sommes de nombres entiers

1. Effectuer les additions suivantes :

$$2\ 437 + 37\ 412 + 707 + 52\ 759;$$

$$3\ 127 + 25\ 742 + 790\ 395 + 42\ 759\ 375;$$

$$902\ 812 + 43 + 254 + 4\ 127 + 512\ 752.$$

2. De combien augmente une somme de trois nombres si on augmente le premier de 12 unités, le deuxième de 3 dizaines, et le troisième de 4 centaines ?
3. De combien augmente une somme de trois nombres si on augmente le premier de 7 dizaines, le deuxième de 25 centaines, le troisième de 9 mille ?
4. Calculer la somme des dix premiers nombres entiers. Calculer la somme des dix premiers nombres impairs.
5. Trouver trois nombres entiers consécutifs sachant que leur somme est 45.
6. Trouver quatre nombres entiers consécutifs sachant que leur somme est 498.
7. En effectuant une addition de nombres entiers sans faire de retenues, on trouve dans chaque colonne, de droite à gauche, les sommes suivantes : 14, 11, 9. Quel est le résultat de l'addition ?
8. Trois personnes se partagent une certaine somme. La première a 5 120 F, la deuxième a 270 F de plus que la première. La troisième a autant que les deux autres ensemble. Quelle est la part de chacune ? la somme à partager ?
9. Dans un jeu de dominos, chaque pièce est formée par l'association d'un des chiffres de 0 à 6 avec lui-même ou avec un autre.
   (a) Calculer le nombre de pièces différentes du jeu. Le comparer avec la somme des 7 premiers nombres entiers.
   (b) Combien de fois figure un chiffre donné dans l'ensemble du jeu ?
   (c) Calculer le nombre total de points inscrits sur tous les dominos du jeu.

10. Le carré ci-contre est dit « magique » car, en additionnant les nombres situés sur une même ligne horizontale, dans une même colonne verticale, ou bien sur une même diagonale, on obtient chaque fois le même résultat. Vérifiez-le.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

On ajoute 4 à chacun des nombres du carré magique. Montrer que l'on obtient encore un carré magique.

(b) Quel nombre faut-il ajouter pour que la somme par ligne, colonne ou diagonale, soit égale à 54 ? Former ce carré.

11. On considère les nombres de 1 à 12.

(a) De combien de manières peut-on les associer deux par deux de façon à obtenir une somme égale à 13 ?

(b) De combien de manières peut-on associer trois de ces nombres, distincts entre eux, de façon à obtenir une somme égale à 15 ?

12. (a) Dessiner un carré partagé en 100 petits carreaux disposés suivant 10 rangées horizontales de 10 carreaux chacune. Puis écrire sur la première rangée les nombres de 0 à 9, sur la deuxième, les nombres de 1 à 10, sur la troisième les nombres de 2 à 11, et ainsi de suite. On obtient une table d'addition.

(b) Vérifier que le nombre qui se trouve sur la ligne horizontale qui commence par 7 et dans la colonne verticale qui commence par 5 est égal à 7+5.

(c) Calculer la somme des nombres situés dans chacune des lignes, puis la somme de tous les nombres inscrits dans la table.

13. Une ménagère achète 4 articles dans un magasin. Le deuxième coûte 25 F de plus que le premier, le troisième 50 F de plus que le second et le quatrième 75 F de plus que le troisième. Elle paie avec deux billets de 500 F sur lesquels on lui rend un billet de 50 F, deux billets de 10 F, et un billet de 5 F. Calculer le prix de chaque article.

14.

15. Un particulier qui dispose de 27 000 F veut faire construire un pavillon. Il compte 7 000 F pour l'achat du terrain, 25 000 F pour la maçonnerie et la couverture, 8 000 F pour la menuiserie, 3 000 F pour l'eau, le gaz et l'électricité, 5 000 F pour le chauffage central, 2 500 F pour la peinture et 1 5000 F de frais accessoires.

(a) Trouver le prix de revient du pavillon.

(b) Le particulier sollicite un emprunt du Crédit foncier pour la somme qui lui manque. Il se libère en 5 ans en remboursant 1//5 de cet emprunt à la fin de chaque année. Trouver le montant exact de chacun de ces cinq versements, sachant qu'à la fin de chaque année il devra verser en même temps l'intérêt à 8% de la somme due au Crédit foncier pendant l'année écoulée.

16. Effectuer de deux manières différentes les additions suivantes :

$$37 + (43 + 25 + 12);$$

$$42 + 17 + (109 + 12) + (472 + 38);$$

$$375 + (515 + 127 + 39).$$

17. Exercices de calcul mental :

70 + 40	900 + 600	70 + 14	18+ 80
242 + 80	30 + 712	50 + 2 743	80 + 537
42 + 67	253 + 34	419 + 71	718 + 62
24 + 35	347 + 25	525 + 263	342 + 675

18. Découper trois segments dans une feuille de papier de longueurs respectives a, b et c. Vérifier que :
    (a) $a + (b + c) = a + b + c$.
    (b) $a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a$.
19. Au nombre entier a compris entre 0 et 10, on ajoute 5, soit b le nombre obtenu :
    (a) Établir le tableau de correspondance entre les nombres a et b.
    (b) Construire le graphique correspondant.

Chapitre 3

Différences de nombres entiers

1. Que devient la différence de deux nombres.
   — Si on augmente le premier terme de 12.
   — Si on augmente le second terme de 12.
   — Si on augmente le premier terme de 12 et le second de 10.
   — Si on augmente le premier terme de 10 et le second de 12.
2. Calculer de deux façons différentes le résultat des opérations suivantes :

2 315 - (37 + 452 + 17)	3 057 + (539 - 423)
2 715 - (377 + 12 + 57 + 425)	70 375 + (2 195 - 492).

3. Calculer de deux façons différentes le résultat des opérations suivantes :

4 039 - (3 215 - 2 237)	3 429 - (2 615 - 1 732)
5 127 - (5 725 - 4 350)	6 847 - (3 240 - 2 428).

4. Supprimer les parenthèses en utilisant les propriétés des sommes et des différences dans les expressions suivantes :

a + (b + c) + (d - e)	a + (b + c) - (d - e)
a - (b + c) + (d - e)	a - (b + c) - (d - e).

5. Qu'obtient-on en ajoutant la somme de deux nombres et leur différence ? Qu'obtient-on si, de la somme de deux nombres, on retranche leur différence ?
6. Trouver deux nombres, connaissant leur somme 342 et leur différence 88.
7. Trouver deux nombres, connaissant leur somme 61 975 et leur différence 2 047.
8. Si Pierre donne 16 billes à Jean, ils en ont le même nombre. Combien Jean a-t-il de billes de plus que Pierre ?
9. Dans la soustraction 712 - 84, on oublie de faire les retenues. Trouver l'erreur commise sans faire l'opération.

10. Trouver trois nombres dont la somme est 192, sachant que le deuxième surpasse le premier de 17 et que le troisième surpasse le deuxième de 23.
11. Deux nombres ont pour différence 18. Si on les augmente tous deux de 6, le premier devient le double du second. Trouver ces deux nombres.
12. Trouver trois nombres, sachant que la somme des deux premiers est 28, celle des deux derniers est 32, et celle du premier et du troisième est 30.
13. Remplir les chiffres manquants dans les additions suivantes :

$$\begin{array}{cccc} . & . & . & 2 \\ & 8 & 4 & . \\ & 9 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} . & 7 & 3 & . \\ & 7 & . & 2 \\ 2 & . & 5 & 4 \\ \hline 7 & 8 & 7 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 3 & . & 7 \\ & 4 & 5 & 6 & . \\ & . & . & 9 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 7 & 0 & 4 \end{array}$$

14. Remplir les chiffres manquants dans les soustractions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 7 & 9 & . \\ . & . & 2 \\ \hline 2 & 2 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} . & 7 & . & . \\ . & 7 & 9 & 8 \\ \hline 3 & 8 & 3 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} . & 8 & . & . \\ 8 & . & 3 & 5 \\ \hline 4 & 8 & 7 & 4 \end{array}$$

15. Deux segments de droite ont une longueur totale de 118 cm. Le plus grand a 12 cm de plus que l'autre. Quelle est la longueur de chaque segment ?
16. On veut partager une pièce d'étoffe de 60 m de long en 3 coupons de façon que le premier ait 5 m de plus que le second et 11 m de moins que le troisième. Trouver les longueurs des trois coupons.
17. Trois camarades font une excursion. Le premier paie le voyage : 3 billets à 2,25 F l'un. Le second paie les repas du midi : 3 déjeuners à 3 F l'un plus 10% de service. Le troisième paie 7,20 F pour les repas du soir. Comment règleront-ils leurs comptes pour que les dépenses soient également partagées ?
18. Plusieurs enfants se réunissent pour acheter un ballon de football. Chacun d'eux doit payer 1,30 F. Mais au moment de l'achat trois d'entre eux sont absents, si bien que chacun des présents doit payer 1,60 F. Trouver le nombre total d'enfants, ainsi que le prix du ballon.
19. Une ménagère décide d'utiliser ses économies du mois à l'achat de mouchoirs. Elle pourrait acheter 15 mouchoirs d'ordinaire et il lui resterait 2 F. Elle préfère dépenser 1 F de plus et faire l'acquisition d'une douzaine de beaux mouchoirs coûtant 0,70 F de plus chacun. De quelle somme disposait-elle, et quel prix a-t-elle payé chacun de ses mouchoirs ?
20. Un déjeuner à 8 F par personne réunit un certain nombre de convives. Trois de ces convives sont des invités et ne participent pas à la dépense, si bien que chacun des autres doit payer, y compris 10% pour le service, 11,20 F. Calculer le nombre total de convives.
21. Effectuer mentalement les soustractions suivantes :

237 - 187	871 - 791	4 783 - 4 573
217 - 29	712 - 89	7 813 - 59
701 - 439	802 - 547	1 003 - 719
2 754 - 781	3 232 - 2 192	7 833 - 5 935

22. Découper deux segments a et b dans une feuille de papier. Vérifier que leur différence ne change pas lorsqu'on leur ajoute ou retranche un même segment de longueur c.
23. Découper trois segments a, b, et c dans une feuille de papier tels que $b > c$ et $b + c < a$. Vérifier que :

$$a - (b + c) = a - b - c;$$

$$a + (b - c) = a + b - c;$$

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

24. Au nombre 12, on retranche le nombre entier a compris entre 0 et 10. Soient b les nombres obtenus.
    (a) Établir le tableau de correspondance entre a et b.
    (b) Construire le graphique correspondant.

Chapitre 4

Produits de deux nombres

1. Dans un nombre entier de deux chiffres, on appelle a le chiffre des dizaines, et b celui des unités. Montrer que la valeur de ce nombre est $10a + b$. Même exercice pou un nombre de trois chiffres en désignant par a le chiffre des centaines, b celui des dizaines, et c celui des unités.
2. Un libraire achète cinq douzaines de livres à 24 F la douzaine et les revend 3 F pièce. Trouver le bénéfice réalisé, sachant que l'éditeur donne 13 livres pour 12 au libraire.
3. La lumière parcourt 300 000 kilomètres par seconde. Évaluer la distance de la Terre au soleil, sachant que la lumière met 8 min 30 à parcourir cette distance.
4. Trouver un nombre de 2 chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 12, et qu'en retranchant de ce nombre le nombre écrit dans l'ordre inverse on trouve 18.
5. Écrire plus simplement les sommes suivantes :
$$(a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c).$$
$$(a - b) + (a - b) + (a - b) + (a - b).$$
6. Le périmètre d'un rectangle est 386 m ; la longueur a 23 m de plus que la largeur. Trouver la surface du rectangle.
7. Dans la multiplication de 243 par 405, on ne tient pas compte du O au multiplicateur. Trouver, sans faire la multiplication, l'erreur ainsi commise.
8. En multipliant un nombre par 207, on oublie de tenir compte du zéro du multiplicateur. On fait ainsi une erreur de 64 080. Retrouver le multiplicande [1] et le résultat correct de la multiplication.
9. On considère le produit 56×43. On augmente le multiplicateur de 8. Trouver sans effectuer les multiplications l'augmentation du produit.
10. Une mercière vend une première fois 52 mètres de drap à 36 francs le mètre, et une seconde fois 65 mètres de drap à 42 francs le mètre. Trouver, sans calculer les deux prix de vente, la différence entre ces deux prix.

1. Dans un produit $a \times b$, a est le *multiplicande* et b le *multiplicateur*.

11. Le produit de deux nombres est 109 450. Trouver ces deux nombres sachant que le multiplicateur a deux chiffres, que le chiffre de ses unités est 5 et que le premier produit partiel [2] de l'opération est 21 890.
12. On veut clore un jardin rectangulaire de 42 m de longueur et de 30 m de largeur à l'aide d'un grillage de 2 m de haut soutenu par des poteaux en ciment distants de 2 m. Le grillage pèse 4 kg au mètre carré et revient à 72 F le quintal. Calculer la dépense sachant qu'un poteau coûte 4,50 F et qu'il faut ajouter une dépense supplémentaire de 25 F pour le bâti de la porte d'entrée.
13. Une école de trois classes brûle par jour et par classez deux seaux de charbon contenant 8 kg de combustible. Calculer la dépense en une année sachant que l'on a chauffé pendant 25 semaines à raison de 5 jours par semaine et que le charbon utilisé revient à 180 F la tonne.
14. Une ruche produit en moyenne 10 kg de miel et 15 kg de cire. Le miel vaut 5,20 F le kg et la cire 3,60 F le kg. Calculer le rapport annuel d'un rucher de 18 ruches sachant que les frais d'entretien s'élèvent au quart du produit total.
15. La toiture d'un hangar est composée de deux trapèzes isocèles égaux dont les bases mesurent 10 m et 4 m et de deux triangles isocèles égaux de 6 m de base. La hauteur des trapèzes et des triangles est de 4,50 m. On recouvre la toiture de plaques de fibrociment qui revient à 8 F le mètre carré. Calculer la dépense. [3]
16. La façade d'un magasin a la forme d'un rectangle de 9 m de long et de 3,50 m de hauteur. Elle comprend trois baies vitrées. Chacune d'elles se compose d'un rectangle de 2 m de large et de 1,60 m de haut surmonté d'un demi-cercle de 2 m de diamètre.
    (a) Faire le croquis de la façade en prenant 1 cm pour 1 m, sachant qu'il y a un intervalle de 50 cm entre deux baies vitrées et que celle du milieu occupe le centre de la façade.
    (b) On fait recouvrir cette façade de plaques de marbre qui reviennent à 4,50 F le mètre carré. Calculer la dépense.
17. (a) Soit a l'un des nombres entiers de 0 à 10. Établir les tableaux de correspondance entre a et les nombres b, c et d tels que :
$$b = 3a; \qquad c = 3a + 2; \qquad d = 3a + 5$$
    (b) Construire les graphiques correspondants.
18. (a) Soit a l'un des nombres entiers de 5 à 15. Établir les tableaux de correspondance entre a et les nombres b, c et d tels que :
$$b = 2a; \qquad c = 2a + 4; \qquad d = 2a - 5$$
    (b) Construire les graphiques correspondants.

2. La première ligne lorsque vous posez le produit.
3. La surface d'un trapèze est donnée par la formule $\mathcal{A}$ = moyenne des bases × hauteur.

19. Compléter les multiplications suivantes :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 4 & . & 5 & 3 \\
 & & & & . & 7 \\
\hline
 & . & . & 2 & . & . \\
. & . & . & . & . & \\
\hline
. & . & . & . & 1 & .
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & 9 & 7 & . \\
 & & & . & . & 7 \\
\hline
 & & . & . & . & 2 \\
 & . & . & . & . & \\
. & . & . & . & & \\
\hline
. & . & 8 & 4 & 3 & .
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & . & 9 & 6 \\
 & & 2 & . & 8 \\
\hline
 & 3 & 1 & . & . \\
. & . & . & & \\
\hline
. & . & . & . & .
\end{array}
$$

Chapitre 5

Propriétés des produits de deux nombres

1. Que devient le produit de deux nombres entiers lorsqu'on augmente l'un des facteurs de 1. Lorsqu'on augmente l'un des facteurs de x ? (Exemple : 43×24.)
2. Que devient le produit de deux nombres lorsqu'on augmente chaque facteur de 1 ? On pourra faire une figure rectangulaire. Même question pour une augmentation de x. (Exemple : 92×23).
3. Que devient le produit de deux nombres lorsqu'on diminue l'un des facteurs de 1, et lorsqu'on diminue les deux facteurs de 1 ? Même question avec une diminution de x. (Exemple : 247×38.)
4. Trouver les dimensions d'un rectangle, sachant qu'en augmentant la longueur et la largeur de 1 m, la surface augmente de 170 mètres carré, et sachant d'autre part que la longueur a 84 m de plus que la largeur.
5. Le produit de deux nombres est 340. Si l'on ajoute 3 au multiplicateur, le produit devient 400. Quels sont ces deux nombres ?
6. Le produit de deux nombres est 575. Si l'on retranche 5 au multiplicateur le produit devient 450. Quels sont ces deux nombres ?
7. Que devient la surface d'un rectangle lorsqu'on augmente sa longueur de 1 m et qu'on diminue sa largeur de 1 m ? Que devient le produit de deux nombres lorsqu'on augmente l'un des facteurs de 1 et que l'on diminue l'autre de 1 ? (Exemple : 537×215.)
8. Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est 704 m sachant qu'en augmentant sa longueur de 1 m et en diminuant sa largeur de 1 m sa surface diminue de 73 mètres carré.
9. Développer :

   3(x + 7) + 5(x + 1) + 7(x + 2) 7(x + 5) - 3(x + 2)
   12(x + 5) + 4(x - 7) 17(x - 3) - 16(x - 4)
   12(x + y) + 7(x + 1) + 13(y + 2) 100(x + y) - 36(x - y).

10. Calculez de deux façons différentes les sommes ou différences suivantes :

    $(15 \times 13) + (15 \times 7) + (15 \times 20)$ $(7 \times 17) + (17 \times 13) + (17 \times 5)$
    $(75 \times 21) + (75 \times 19)$ $(43 \times 104) - (43 \times 100)$
    $(43 \times 75) - (75 \times 40)$ $(52 \times 17) - (52 \times 15)$.

11. Mettre x en facteur commun dans les sommes ou différences suivantes :

$$5x + 12x + 13x$$

$$19x - 15x$$

$$ax + bx + cx + dx$$

$$xy - xz$$

12. Trouver deux nombres dont la somme est 232 sachant que le premier est le triple du second.
13. Trouver deux nombres dont la différence est 432 sachant que le premier est égal au septuple du second.
14. Partager 125 billes entre 3 enfants de façon que la part du second dépasse de 15 billes le double de la part du premier et que la part du troisième soit inférieure de 10 billes au triple de la part du premier.
15. Calculer la somme des nombres contenus dans chacune des lignes de la table de Pythagore suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Est-il nécessaire d'effectuer toutes les additions ? Calculer la somme de tous les nombres de la table.

16. Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 11 et que lorsqu'on échange le chiffre des unités et celui des dizaines, le nombre augmente de 27.
17. Trouver les deux facteurs d'un produit tel que si on multiplie chaque facteur par 3 le produit augmente de 280
18. On multiplie un nombre de 3 chiffres par 7, le résultat par 11, puis le nouveau résultat par 13. On obtient finalement 843 843. Quel était le nombre initial ?
19. Un capitaine fait ranger ses hommes en carré, et il lui reste dix hommes non placés. Sachant d'autre part qu'il lui manque quinze hommes pour placer un homme de plus sur le côté du carré, trouver l'effectif de la compagnie du capitaine.
20. Montrer que pour multiplier entre eux deux nombres compris entre 10 et 20, il suffit d'ajouter à l'un les unités de l'autre, de multiplier le résultat par 10 et d'ajouter ensuite le produit des chiffres des unités. Vérifier pour 18×15.

21. Montrer que :

$$54 \times 26 = (6 \times 4) \text{ unités } + [(6 \times 5) + (2 \times 4)] \text{ dizaines } + (2 \times 5) \text{ centaines}$$

Trouver à partir de ce résultat un procédé pour écrire le chiffre des unités, puis celui des dizaines, et le nombre des centaines du produit de deux facteurs de deux chiffres.

22. Les murs d'une salle de manipulation de 4,80 m de longueur sur 2,10 m de largeur sont recouverts de carreaux de faïence sur une hauteur de 1,35 m. Il y a une porte de 0,90 m de large et les carreaux ont 15 cm de côté. Calculer le nombre de carreaux utilisés et leur prix de revient à raison de 75 F le cent.

23. Une personne a pris au cours d'un mois 24 repas tantôt dans un restaurant, tantôt dans un autre. Dans le premier, le repas coûte 4,20 F et dans le second 3,80 F. Sachant que la note dans le second restaurant dépasse de 19,20 F la note payée dans le premier, on demande combien cette personne a pris de repas dans chaque restaurant.

24. (a) Un tailleur a acheté 3 coupons de drap de 3,5 m chacun à raison de 25 F le mètre pour le premier, 28 F pour le deuxième et 32 F pour le troisième. Combien a-t-il payé ?
    (b) Le tailleur utilise chacun de ces coupons pour effectuer un costume sur mesures. Pour chacun il dépense 80 F de main-d'œuvre et 30 F de fournitures. Les costumes sont facturés 250 F, 270 F, et 300 F. Combien le tailleur a-t-il gagné ?

25. Découper et peser des plaques rectangulaires de dimensions, a et c, puis b et c, puis $a+b$ et c, $a-b$ et c. En déduire que

$$ac + bc = (a+b)c \text{ et } ac - bc = (a-b)c.$$

26. Construire un rectangle de dimensions $a+b$ et $c+d$. Montrer qu'on peut le découper en quatre rectangles de dimensions respectives a et c, b et c, a et d, b et d. En déduire que

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

27. Construire un rectangle de longueur a et de largeur c. Augmenter sa longueur de b et diminuer sa largeur de d. Évaluer la surface du rectangle de dimensions $a+b$ et $c-d$ ainsi formé par rapport à celle des rectangles de dimensions respectives a et c ; b et c ; a et d ; b et d. En déduire que

$$(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd$$

28. Construire un rectangle de longueur a, de largeur c. Retrancher b à sa longueur et d à sa largeur. Évaluer la surface du rectangle de dimensions $a-b$ et $c-d$ par rapport à celles des rectangles de dimensions respectives a et c ; a et d ; b et c ; b et d. En déduire que :

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$$

Chapitre 6

Produits de plusieurs facteurs

1. Que devient le produit de deux nombres lorsqu'on multiplie l'un des facteurs par 2 ; et lorsqu'on le multiplie plus généralement par un nombre x ?
2. Que devient le produit de deux nombres lorsqu'on multiplie les deux facteurs par 2 ; et lorsqu'on les multiplie plus généralement par un nombre x ?
3. Que devient la surface d'un carré lorsqu'on double son côté ? Même question pour la surface d'un disque lorsqu'on double son rayon.
4. Que devient le volume d'un cube quand on double son arête ? Que devient le volume d'une sphère lorsqu'on double son rayon ? Que devient le volume d'un cylindre quand on double le rayon du disque de base et qu'on triple la hauteur ?
5. Effectuer les produits suivants :
$$712 \times 43 \times 51 \times 19$$
$$725 \times 41 \times 25 \times 725$$
6. Effectuer les produits suivants :
$$(4 \times 7 \times 12) \times (7 \times 13) \times 9$$
$$13 \times (43 \times 17)$$
$$(25 \times 12 \times 13) \times 4$$
7. Réduire les opérations suivantes :
   (a) $7x \times 5y \times 3z$
   (b) $4(3x + 2y)$
   (c) $7(5x - 2y)$
   (d) $7(2x + 5y) + 12(3x + y) + 4(x + 5y)$
   (e) $2a(3b - c) + 3b(c - 2a) + c(2a - 3b)$

    (f) $5(3a + 2) + 3(5a - 2) - 2(a + 2) - 3(a - 1)$

8. Effectuer les opérations suivantes :
    (a) $10^5 \times 10^3$
    (b) $10^2 \times 10^3 \times 10^4$
    (c) $(5^4)^2$
    (d) $(7^4 \times 7^2) + (5^4 \times 5^2) + (3^4 \times 3)$
    (e) $a^3(a^2 + 3) + 3a^2(a^3 + 5) + 2a^2(2a^2 - 9)$
    (f) $5a^4(a^2 + 4) - 2a^2(2a^4 + 1) - a^3(a^3 - 7)$
    (g) $ab(a - b) + a(a^2 + b^2) - a^2$

9. (a) Calculer la somme des 7 premiers nombres impairs. Généraliser ce résultat.
    (b) En déduire que tout nombre impair est la différence des carrés de deux nombres consécutifs. Décomposer ainsi 37.

10. On écrit dans un tableau triangulaire la suite des nombres impairs comme suit : $\begin{array}{ccc} 1 & & \\ 3 & 5 & \\ 7 & 9 & 11 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$
    (a) Écrire les dix premières lignes de ce tableau.
    (b) Combien de nombres a-t-on écrit ? Trouver la somme de ces nombres (on utilisera l'exercice précédent).
    (c) Calculer la somme des nombres inscrits dans chaque ligne du tableau et en déduire la somme des cubes des dix premiers nombres entiers.

11. Calculer de deux manières la somme $a(a - b) + b(a - b)$ et en déduire que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Application : La différence des surfaces de deux jardins carrés est de 1 152m^2. Calculer les côtés de ces deux jardins sachant que leur différence est de 16 m.

12. Un bloc de pierre taillé a 80 cm de longueur, 42 cm de largeur et 35 cm de hauteur. Sachant que le poids volumique de la pierre est 2,7, calculer le poids de ce bloc de pierre.

13. Une colonne cylindrique en ciment armé a 0,80 m de diamètre et 3,50 m de hauteur.
    (a) Calculer la surface latérale de cette colonne et le prix de la peinture nécessaire pour la recouvrir à raison de 2,50 F le m^2.
    (b) Calculer le volume de la colonne et son poids sachant qu'un dm^3 de ciment armé pèse 2,9 kg.

14. Une borne en granit comprend une partie enterrée de 50 cm de largeur, 30 cm d'épaisseur et 60 cm de profondeur. La partie apparente a une épaisseur de 24 cm. Vue de face elle se compose d'un rectangle de 40 cm de base et 45 cm de hauteur surmonté d'un demi-cercle de 40 cm de diamètre.
    (a) Calculer la surface extérieure apparente de la borne.
    (b) Calculer son poids total, sachant que la densité du granit est de 2,7.

15. Un réservoir à mazout qui a la forme d'un cylindre horizontal de 3 m de long et de 1,60 m de diamètre a été fabriqué en tôle de 2 mm d'épaisseur.
    (a) Calculer le poids de la tôle utilisée sachant que sa densité est 7,8.
    (b) Calculer la capacité en litres de ce réservoir et la dépense lorsqu'on en fait le plein avec du mazout à 0,25 F le litre.
16. Un bassin circulaire a 5 m de diamètre et 0,80 m de profondeur. On le fait cimenter entièrement à raison de 5 F le m^2, et border à raison de 3 F le mètre.
    (a) Calculer la dépense.
    (b) Un robinet qui débite 20 litres à la minute alimente ce bassin. Combien de temps faudra-t-il pour le remplir jusqu'à 10 cm du bord supérieur ?
17. Calcul mental :

63×11	75×11	83×21	62×110
63×19	75×99	83×39	620×190
24×15	17×12	25×35	43×55

18. Soit x un nombre entier de 0 à 10. Établir les tableaux de correspondance entre x et les nombres y suivants. Construire ensuite le graphique correspondant.
    (a) $y = x^2$
    (b) $y = 2x^2$
    (c) $y = 3x^2$
    (d) $y = x^3$
    (e) $y = 2x^3$
    (f) $y = 3x^3$
19. En s'inspirant des derniers exercices du chapitre précédent, démontrer :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Chapitre 7

Division des nombres entiers

1. Trouver tous les nombres entiers dont le produit par 62 est inférieur à 685.
2. Montrer que le nombre des chiffres du quotient dans une division est égal au plus petit nombre de zéros qu'il faut écrire à la droite du diviseur pour obtenir un nombre supérieur au dividende.
3. Montrer que, dans une division, le dividende est supérieur au double du reste.
4. Dans une division, le diviseur est 9. Quels sont les restes possibles ?
5. Trouver les nombres qui, divisés par 13, donnent un quotient et un reste égaux entre eux.
6. Quels sont les nombres qui, divisés par 7, donnent un quotient égal à la moitié du reste ?
7. Quels sont les nombres qui, divisés par 5, donnent un quotient égal au triple du reste.
8. Trouver tous les couples de nombres entiers x et y qui satisfont à la relation suivante :

$$287 = 17x + y$$

9. Le quotient d'une division est 5 et le reste 32 Trouver la plus petite valeur du diviseur et du dividende. Le dividende étant inférieur à 225, quelles sont les valeurs possibles pour le dividende et le diviseur ?
10. Trouver un nombre terminé par deux zéros qui, divisé par 67, donne pour quotient 129.
11. Trouver deux nombres connaissant leur somme, 958 et sachant qu'en divisant le premier par le second on trouve 3 comme quotient et 98 comme reste.
12. Trouver deux nombres connaissant leur différence, 291, et en sachant qu'en divisant le premier par le second on trouve 13 pour quotient et 15 pour reste.
13. Effectuer la division de 272 par 57. De combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient ? De combien peut-on diminuer le dividende sans changer le quotient ? Généraliser lorsque le dividende et le diviseur sont deux nombres donnés a et b, et q et r le quotient et le reste de leur division.
14. Le quotient d'une division est 5, le reste 28. En additionnant le dividende, le diviseur, le quotient et le reste, on trouve 283. Trouver le dividende et le diviseur.

15. On considère la division de 272 par 57. Montrer que le quotient ne change pas lorsqu'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre. Que devient le reste ?
16. On considère la division de 236 par 36. Montrer que le quotient ne change pas lorsqu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre. Que devient le reste ?
17. Dans une division, le quotient est 21 et le reste est 8. Si on ajoute 27 au dividende sans changer le diviseur, le quotient est 22 et le reste est nul. Trouver le dividende et le diviseur initiaux.
18. On augmente le dividende d'une division de 35 et le diviseur de 5. Il se trouve que ni le quotient, ni le reste ne change. Quel est le quotient ?
19. On dispose d'un certain nombre de billes. En les rangeant par dizaines, il en reste 8. Mais il manque 5 billes pour pouvoir en ajouter une de plus par groupe. Trouver le nombre de billes.
20. On dispose de 225 g d'argent avec lequel on se propose de faire frapper des médailles au titre [1] de 0,900 et pesant 15 g chacune. Combien pourra-t-on en fabriquer ?
21. Une pièce de drap de 36 m de long et coûtant 23 F le mètre a été utilisée pour confectionner des costumes. On compte pour 3,20 m de tissu par costume et 85 F de frais de main-d'œuvre et de fournitures. Les costumes sont vendus 189 F. Calculer le bénéfice réalisé par le fabricant.
22. Une tente qui a pour base un rectangle de 6 m sur 2 m est fermée à ses extrémités par deux triangles isocèles verticaux de 2 m de base et de 1,15 m de hauteur. Latéralement, elle se compose de deux parties inclinées rectangulaires.
    (a) Faire un dessin à main levée.
    (b) Calculer le volume intérieur de cette tente.
    (c) Combien d'hommes pourra-t-on y abriter si l'on veut que chacun dispose de 0,7 m^3 ?
23. Un cultivateur a fait venir en gare un wagon d'engrais. Ce wagon mesure 6 m de long, 2,50 m de large et est chargé sur une hauteur de 80 cm. L'engrais pèse 130 kg à l'hectolitre. Le cultivateur dispose d'un tombereau qui peut supporter 2,4 tonnes.
    (a) Combien de voyages seront nécessaires pour enlever tout l'engrais ?
    (b) Afin de ménager son attelage, le cultivateur décide de faire un voyage de plus et de répartir la charge également sur les différents voyages. Quel masse charge-t-on à chaque voyage ?
24. Deux caisses contiennent chacune 145 oranges. On retire 25 oranges de la première caisse pour les mettre dans la deuxième.
    (a) Combien la deuxième caisse contient-elle alors d'oranges de plus que la première ?
    (b) On répartit les oranges de chacune des caisses dans des caissettes qui en contiennent chacune 25. Combien de caissettes pourra-t-on remplir avec chaque caisse ? Pourrait-on, en réunissant les oranges restant dans les deux caisses, remplir une caissette de plus ? Y aurait-il encore du reste ?
    (c) Quel est le plus petit nombre d'oranges qu'il eût suffi d'ajouter à chacune des caisses initiales pour que la répartition en caissettes, effectuée après l'opération du (a), se fasse sans reste ?
25. Compléter les divisions suivantes.

1. Cela signifie qu'il y a 0,9 gramme d'argent dans chaque gramme de la médaille.

Chapitre 8

Caractères de divisibilité

1. a désignant un nombre entier, montrer qu'un nombre pair peut s'écrire $2a$, qu'un nombre impair peut s'écrire $2a + 1$ ou $2a - 1$. Vérifier que la somme ou la différence de deux nombres impairs est un nombre pair.
2. Montrer que tout nombre qui n'est pas multiple de 3 peut s'écrire $3a + 1$ ou $3a - 1$, a désignant un nombre entier. Vérifier que le produit de trois nombres entiers consécutifs est toujours multiple de 3.
3. Montrer que tout nombre qui n'est pas multiple de 5 peut s'écrire $5a + 1$, $5a - 1$, $5a + 2$ ou $5a - 2$, a désignant un nombre entier. Que peut-on dire du produit de cinq nombres entiers consécutifs ?
4. Vérifier qu'un nombre entier est divisible par 11 lorsque la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est multiple de 11.
5. Déterminer les lettres x et y pour que le nombre qui s'écrit :
   (a) $5x9$ soit divisible par 9 ;
   (b) $7x6$ soit divisible par 3 ;
   (c) $1\ 3x4$ soit divisible par 9 ;
   (d) $6\ x5y$ soit divisible par 2 et par 9 ;
   (e) $7\ 5xy$ soit divisible par 5 et par 9.
6. Deux nombres sont composés des mêmes chiffres écrits dans un ordre différent. Montrer que leur différence est un multiple de 9. Exemple : 2 468 et 6 482.
7. On échange le chiffre des dizaines et celui des unités d'un nombre de deux chiffres. Montrer que la différence des deux nombres est le produit par 9 de la différence de leur deux chiffres.

   Application. Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 11 et que l'échange de ses deux chiffres le fait augmenter de 63.
8. Montrer que toute puissance de 1 000 est un multiple de 37 augmenté de 1. En déduire que le reste de la division de 254 438 906 par 37 est le même que celui de la division de $254 + 438 + 906$ par 37.

9. Déterminer le plus grand nombre de 3 chiffres, puis le plus grand nombre de 4 chiffres terminés par un 5 et divisibles par 9.
10. Dans les opérations suivantes une erreur a été commise. Expliquer pourquoi cette erreur n'est pas mise en évidence par la preuve par 9 de ces opérations.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 5 & 7 \\ & & 7 & 8 \\ \hline 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 9 & 9 \\ \hline 3 & 8 & 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 2 & 1 & 3 \\ & 3 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & \\ \hline 7 & 4 & 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|cc} 7 & 2 & 3 & 8 & 2 & 4 \\ & 1 & 2 & 8 & 3 & 5 \\ & & & 8 & & \end{array}$$

11. La somme des chiffres d'un nombre inconnu est égale à 23. La division de ce nombre par 9 donne 96 pour quotient. Trouver ce nombre.
12. On sait que les seuls nombres divisibles par 25 sont les nombres terminés par 00, 25, 50 ou 75.

    En déduire que tous les nombres de 3 chiffres divisibles à la fois par 9 et par 25. Les comparer au plus petit d'entre eux.
13. Un commerçant a vendu un certain nombre d'articles à 13 F et à 18 F pour une somme totale de 282 F. Montrer que le nombre d'articles vendus à 13 F est obligatoirement un multiple de 2 et un multiple de 3. En déduire le nombre d'articles de chaque sorte vendu.
14. Une somme de 5, 10 F est formée par des pièces de 50 centimes, et des pièces de 20 centimes :
    a) Trouver le nombre de pièces de chaque sorte sachant qu'il y en a 15 en tout.
    b) Y a-t-il d'autres façons de former une somme de 5, 10 F avec des pièces de 50 centimes et de 20 centimes ? Si oui, les déterminer.
15. Une somme de 1 382 F est formée par des billets de 50 F, 10 F, et 5 F, et des pièces de 1 F. Le nombre de billets de 5 F est le triple de celui des pièces de 1 F ; le nombre des billets de 10 F dépasse de 5 celui des pièces de 1 F ; le nombre de billets de 50 F dépasse de 2 celui des billets de 5 F. Calculer le nombre de billets ou de pièces de chaque sorte.
16. Établir la liste des diviseurs des deux nombres suivants, puis celle de leurs diviseurs communs :

63 et 171.	84 et 180.	60 et 105.
120 et 216.	126 et 210.	108 et 252.
100 et 140.	140 et 175.	132 et 198.
112 et 231.	95 et 225.	1 815 et 2 385.
45 ; 108 et 135.		55 ; 121 et 165.
252 ; 315 et 441.		378 ; 432 et 648.

17. Établir la liste des dix premiers multiples des nombres suivants, puis celle de leurs cinq premiers multiples communs.

36 et 54.	42 et 54.	66 et 110.
40 ; 45 et 72.		91 ; 117 et 273.

Deuxième partie

Nombres fractionnaires

Chapitre 9

Les fractions

1. Découper une ficelle AB en 2, 4, 8 et 16 segments égaux. Vérifier que :
$$AB \times \frac{1}{2} = AB \times \frac{2}{4} = AB \times \frac{4}{8} = AB \times \frac{8}{16}$$
puis que
$$AB \times \frac{5}{8} > AB \times \frac{3}{8}; \qquad AB \times \frac{3}{4} > AB \times \frac{3}{8}$$
2. Construire un angle, le partager en deux angles égaux, puis en 4 angles égaux, et en 8 angles égaux. Comparer les fractions correspondant à $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{8}$, puis celles correspondant à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, puis celles correspondant à $\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{4}$.
3. Partager un cercle en 16 secteurs égaux. En déduire la comparaison des fractions suivantes :
$$\frac{3}{8} \text{ et } \frac{6}{16}; \qquad \frac{5}{16} \text{ et } \frac{7}{16}; \qquad \frac{5}{8} \text{ et } \frac{5}{16}.$$
4. Une longueur mesure 360 m. Quels sont les produits de cette longueur par les fractions :
$$\frac{7}{12}, \qquad \frac{5}{18}, \qquad \frac{11}{9}, \qquad \frac{15}{8}, \qquad \frac{9}{10}$$
5. Une balle élastique rebondit aux $\frac{4}{9}$ de la hauteur où elle est tombée. On l'abandonne à une hauteur de 1, 80 m au-dessus du sol. À quelle hauteur s'élève-t-elle après avoir rebondi 3 fois ?
6. La largeur d'un rectangle mesure 147 m ; elle est les $\frac{7}{11}$ de la longueur. Trouver la surface du rectangle.
7. Un tonneau est plein de vin ; on tire les $\frac{7}{9}$ du tonneau et il reste encore 50 litres de vin. Quelle est la capacité du tonneau ?
8. Un alliage d'argent au titre de $\frac{875}{1\ 000}$ contient 1 750 g de métal fin. Quel est le poids total de cet alliage ?

9. Un capital placé à 4 pourcents produits un intérêt de 724 F. Quel est ce capital ?
10. Trouver une fraction égale à $\frac{5}{7}$ ayant pour dénominateur 40.
11. Trouver une fraction égale à $\frac{11}{9}$ ayant pour dénominateur 63.
12. Trouver une fraction égale à $\frac{3}{4}$ et telle que la somme de ses termes soit 21.
13. Trouver une fraction égale à $\frac{8}{5}$ et telle que la différence de ses termes soit 15.
14. Une longueur AB est mesurée par $\frac{13}{11}$ de mètre. Une longueur CD est mesurée par $\frac{5}{11}$ de mètre. Quelle fraction de AB représente CD ? Quelle fraction de CD représente AB ?
15. Quelle fraction de l'année représentent 5 jours ? 17 jours ? 265 jours ?
    Quelle fraction d'heure représentent 10 min ? 30 min ? 7 min 21 s ? 13 s ?
    Quelle fraction du jour s'est-il écoulé lorsqu'il est 8 h ? 7 h du soir ?
    Quelle fraction de la semaine reste-t-il après 3 jours ?
16. Quelle fraction [1] de degré représentent les angles suivants :
$$35', \qquad 11', \qquad 27', \qquad 50', \qquad 20'', \qquad 17'', \qquad 45'', \qquad 13''?$$
17. Un voyageur parcourt en chemin de fer 560 km. Quelle distance a-t-il parcourue lorsqu'il a accompli les $\frac{5}{8}$ du parcours ?
18. Les $\frac{15}{22}$ d'un nombre sont 855. Quel est ce nombre ?
19. Trouver deux longueurs dont la somme a pour mesure 6,5 cm en sachant que l'une est les $\frac{4}{9}$ de l'autre.
20. Trouver toutes les fractions égales à $\frac{7}{10}$ dont le numérateur soit compris entre 400 et 500.
21. Trouver toutes les fractions égales à $\frac{4}{11}$ dont le dénominateur soit compris entre 300 et 400.
22. Comparer les fractions $\frac{11}{20}$ et $\frac{13}{17}$ en les comparant à une fraction auxiliaire qui ait le même numérateur que la seconde fraction et le même dénominateur que la seconde.
23. Ranger les fractions suivantes dans l'ordre croissant (utiliser la méthode de l'exercice précédent)
$$\frac{73}{69} \qquad \frac{65}{72} \qquad \frac{67}{70} \qquad \frac{323}{75}$$
24. Un cycliste prépare un voyage pour le lendemain : il quittera la localité A pour aller à B où il s'arrêtera 2 h $\frac{1}{4}$, puis terminera son excursion en allant à C, où il désire arriver 25 minutes avant le passage du train de 17h 35 qu'il prendra pour le retour.
    (a) À quelle heure doit-il partir de A sachant que, sur sa carte routière à l'échelle de 1 pour 200 000, la distance de A à C mesure 40 cm $\frac{1}{2}$, et que sa vitesse moyenne sera de 12 km à l'heure ?
    (b) Calculer la distance BC sachant qu'elle est les $\frac{4}{5}$ de la distance AB.
25. Un commerçant vend les $\frac{5}{6}$ d'une pièce de toile et les $\frac{3}{4}$ d'une pièce de soie soit, au total, 96 m de tissu. On demande quelle est la longueur de chacune des deux pièces sachant que les longueurs des coupons restants sont égales. On recommande de s'aider d'une figure.

1. $1'$(une minute) est un soixantième de degré ; $1''$(une seconde) est un soixantième de minute.

Simplification des fractions

1. Simplifier les fractions
$$\frac{77}{121};\qquad \frac{156}{208};\qquad \frac{225}{375};\qquad \frac{125}{1\ 000};\qquad \frac{130}{273};\qquad \frac{2\ 352}{5\ 376};\qquad \frac{30\ 752}{37\ 800}.$$
2. Simplifier les fractions :
$$\frac{18\times 35\times 77}{66\times 21\times 9};\qquad \frac{45\times 38\times 34\times 100}{25\times 95\times 17};\qquad \frac{3\times 5^2\times 7^4}{3^2\times 5^4\times 7};\qquad \frac{2^5\times 3^2\times 11}{2^5\times 3^3\times 17}.$$
3. Réduire au même dénominateur les fractions :
$$\frac{17}{25} \text{ et } \frac{19}{45};\qquad \frac{5}{26} \text{ et } \frac{7}{39};\qquad \frac{1}{350} \text{ et } \frac{1}{420};\qquad \frac{13}{77} \text{ et } \frac{9}{66}.$$
4. Réduire au même dénominateur les fractions :
$$\frac{18}{36}, \frac{19}{38} \text{ et } \frac{17}{40};\qquad \frac{11}{20}, \frac{34}{60} \text{ et } \frac{128}{120};\qquad \frac{15}{17}, \frac{11}{60} et \frac{15}{66};\qquad \frac{5}{8}, \frac{7}{9}, \frac{3}{24} et \frac{5}{18}.$$
5. Comparer les fractions :
$$\frac{15}{16} \text{ et } \frac{14}{15};\qquad \frac{13}{21} \text{ et } \frac{15}{28};\qquad \frac{84}{115} \text{ et } \frac{36}{43}$$
6. Ranger par ordre de grandeur les fractions et les nombres :
$$\frac{7}{4}\qquad \frac{7}{8}\ 12\qquad \frac{23}{45}\qquad \frac{27}{50}\qquad 2\qquad \frac{39}{12}\qquad 3.$$
7. (a) Réduire au même dénominateur les fractions :
$$\frac{1}{2}\qquad \frac{2}{3}\qquad \frac{3}{4}\qquad \frac{4}{5}\qquad \frac{5}{6}\qquad \frac{6}{7}.$$
   (b) Les réduire au même numérateur ;
   (c) les comparer.

8. Trouver toutes les fractions égales à $\frac{60}{72}$ et dont les termes soient plus petits que ceux de cette fraction.
9. Montrer qu'en ajoutant aux deux termes de la fraction $\frac{4}{9}$ les produits de 4 et de 9 par un même nombre entier, on obtient un fraction égale à $\frac{4}{9}$. Généraliser.
10. Démontrer que les fractions $\frac{141}{329}$ et $\frac{111}{259}$ sont égales. Simplifier ces deux fractions, puis comparer la fraction irréductible trouvée à chacune des deux fractions :
$$\frac{141-111}{329-259} \text{ et } \frac{141+111}{329+259}.$$
11. Deux roues font, l'une 17 tours en 5 secondes et l'autre 7 tours en 2 secondes. Quelle est celle qui tourne le plus vite ?
12. La capacité d'un flacon est égale aux $\frac{3}{16}$ de la capacité d'un vase A et aux $\frac{4}{21}$ de celle d'un vase B. Comparer les capacités des deux vases. Quelle fraction de A représente B ?
13. Une pièce de toile a une longueur double de celle d'une pièce de soie. On vend le tiers de la pièce de toile et les $\frac{4}{7}$ de la pièce de soie. Comparer les longueurs des coupons vendus.
14. Deux réservoirs identiques sont emplis d'eau l'un aux $\frac{4}{7}$, l'autre aux $\frac{5}{9}$. Quel est celui qui contient le plus d'eau ? Sachant que l'un d'eux contient 5 litres d'eau de plus que l'autre, trouver la capacité de l'un de ces réservoirs et le contenu de chacun.
15. Deux angles A et B représentent, l'un les $\frac{3}{5}$, l'autre les $\frac{4}{7}$ d'un angle C.
    (a) Quelle fraction de l'angle A représente l'angle B ?
    (b) Sachant que la différence entre les angles A et B est égale à $3^o45'$ calculer les valeurs des trois angles A, B et C.
16. On considère les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b+1}$.
    Montrer que la seconde est supérieure à la première si $a < b$.
    Montrer que la seconde est supérieure à la première si $a > b$.
    Plus généralement, comparer les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+n}{b+n}$; puis $\frac{a}{b}$ et $\frac{a-n}{b-n}$ (n étant inférieur à a et b). En supposant : a inférieur à b, a supérieur à b.
17. On a vendu trois coupons d'une même pièce d'étoffe. Le premier représente le $\frac{1}{3}$ de la pièce, le second les $\frac{5}{18}$, et les $\frac{7}{24}$.
    (a) Classer les 3 coupons par ordre de grandeur.
    (b) Sachant que le 3^e coupon mesure 10,50 m, calculer la longueur de la pièce et celle de chacun des deux autres coupons.
18. Un marchand achète deux lots de marchandises qu'il paie 44 100 F chacun. Il revend le premier lot 56 920 F et il fait sur le second un bénéfice de 16% sur le prix de vente.
    (a) Quelle fraction d'un prix d'achat représente chacun des bénéfices réalisés ?
    (b) Calculer le prix de vente du deuxième lot et le bénéfice sur ce lot.

19. Un négociant calcule un prix de vente. Il hésite entre un bénéfice de 18% sur le prix d'achat et un bénéfice de 15% sur le prix de vente.
    (a) Quelles fractions du prix d'achat représentent chacun des bénéfices envisagés ? Quel est le plus important ?
    (b) Calculer la différence entre ces deux bénéfices sachant que le prix d'achat est de 76 000 F.
20. (a) On donne la fraction $\frac{2}{5}$. On ajoute 14 au numérateur et 35 au dénominateur. Comparer la fraction obtenue à la fraction donnée.
    (b) Quels nombres faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{2}{5}$ pour obtenir une fraction égale dont le dénominateur soit 150 ?

Chapitre 10

Addition et soustraction des fractions

1. Découper des bandes de papier AB de 225 mm de longueur.
   (a) Construire les fractions suivantes de AB :
   $$\frac{3}{5}; \qquad \frac{7}{5}; \qquad \frac{4}{9}; \qquad \frac{7}{9}; \qquad \frac{2}{3}.$$
   (b) Construire les fractions suivantes de AB :
   $$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}; \qquad \frac{7}{9}-\frac{5}{3}.$$
   $$\frac{3}{4}+\left(\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\right); \qquad \frac{7}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right); \qquad \frac{7}{5}-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right).$$
   (c) Vérifier que les fractions suivantes de AB sont égales :
   $$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}=\frac{4}{9}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}.$$
2. Calculer :
   $$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}; \qquad \frac{3}{4}+\frac{2}{5}; \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{2}; \qquad \frac{4}{5}-\frac{2}{3}.$$
3. Calculer :
   $$\left(4+\frac{2}{3}\right)+\left(2+\frac{5}{6}\right); \qquad \left(7+\frac{3}{4}\right)+\left(5+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right).$$
4. Calculer :
   $$17-\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{5}\right); \qquad \frac{15}{4}+\left(\frac{17}{9}-\frac{8}{5}\right); \qquad \frac{13}{11}-\left(\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\right)$$
5. Calculer et écrire sous la forme $a+\frac{b}{c}$ avec a, b, c entiers et $b<c$:
   (a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$.

(b) $\frac{8}{3} + \frac{11}{6} + \frac{15}{8}$.

(c) $\frac{11}{6} + \frac{3}{14} + \frac{8}{21}$.

(d) $\frac{16}{15} + \frac{25}{21} + \frac{6}{35}$.

(e) $\frac{22}{15} + \left(\frac{23}{42} + \frac{17}{35}\right)$.

(f) $\frac{50}{21} + \left(\frac{56}{33} + \frac{15}{77}\right)$.

(g) $\frac{31}{15} + \left(\frac{26}{35} - \frac{8}{21}\right)$.

(h) $\frac{91}{30} + \left(\frac{29}{42} - \frac{2}{35}\right)$.

(i) $\frac{76}{15} - \left(\frac{13}{24} + \frac{21}{40}\right)$.

(j) $\frac{125}{36} - \left(\frac{9}{20} - \frac{17}{45}\right)$.

(k) $11 - \left(5\frac{1}{4} - 1\frac{5}{8}\right)$.

(l) $51\frac{2}{7} - \left(4\frac{1}{5} + 14\frac{5}{8}\right)$.

6. Extraire les entiers des fractions suivantes :

$$\frac{57}{7} \qquad \frac{235}{19} \qquad \frac{4\ 372}{53} \qquad \frac{7\ 979}{31} \qquad \frac{42\ 714}{3\ 333}.$$

7. Un marchand achète à la fois 5 bœufs, 7 vaches et 9 veaux. Un bœuf vaut 400 F de plus qu'une vache et 10 veaux valent autant que 3 vaches. Le marchand a payé en toute 10 820 F. Trouver le prix d'un bœuf, d'une vache, d'un veau.

8. Trois personnes se partagent une certaine somme. La première reçoit les $\frac{2}{7}$ plus 600 F, la deuxième les $\frac{2}{5}$ plus 350 F, la 3e a 1 250 F. Quelle est la somme à partager ? Quelles sont les deux premiers parts ?

9. Un joueur perd le $\frac{1}{3}$, puis le $\frac{1}{4}$ de son avoir. Il lui reste alors le $\frac{1}{5}$ de son avoir primitif plus 260 F. Que possédait-il ?

10. Trois personnes se partagent une certaine somme. La première reçoit les $\frac{2}{5}$, la deuxième les $\frac{3}{7}$ et la troisième le reste. Quelles sont les 3 parts, sachant que la deuxième a 2 260F de plus que la première.

11. Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est 560 m, sachant que la largeur est le $\frac{7}{13}$ de la longueur.

12. Partager une somme de 20 230 F entre trois personnes de façon que la part de la deuxième soit les $\frac{7}{22}$ de celle de la première et celle de la troisième les $\frac{16}{33}$ de celle de la première.

13. Partager 5 597 F entre deux personnes de façon que la part de la première soit égale aux $\frac{4}{5}$ de celle de la seconde plus 125 F.

14. Une personne a dépensé dans un magasin les $\frac{5}{11}$ de ce qu'elle possédait. Il lui manque alors 3 F pour acheter 5 m d'étoffe à 9 F le mètre. Que possédait-elle primitivement ?

15. Un ouvrier ferait un ouvrage en 5 jours, un autre le ferait en 6 jours. Quelle fractions de l'ouvrage font-ils en un jour lorsqu'ils travaillent ensemble ?
16. Un robinet remplirait un bassin en 6 heures et un autre le viderait en 10 heures. Les deux robinets étant ouverts, quelle est la fraction du bassin remplie en une heure ?
17. Vénus et la Terre tournent autour du Soleil, la première en 225 jours, la seconde en 365 jours. Quelle est, de ces deux planètes, celle qui tourne la plus vite autour du soleil et quelle est la fraction de tour qu'elle fait de plus que l'autre en un jour ?
18. Mars tourne autour du Soleil en 687 jours. Déterminer en fraction de tour, l'avance prise par la Terre sur Mars, en un jour.
19. Un piéton marche pendant 3 heures : pendant la première, il parcourt 6 km $\frac{5}{8}$, pendant la deuxième, il fait 1 km $\frac{1}{4}$ de moins que pendant la première, et pendant la troisième, $\frac{4}{5}$ km de moins que pendant la seconde. Quel est le trajet parcouru par ce piéton ?
20. Après avoir vendu les $\frac{2}{5}$ puis les $\frac{3}{7}$ d'une pièce d'étoffe, il en reste 18 m. Quelle était la longueur de la pièce ?
21. Un héritage a été partagé entre 4 personnes. La première en a reçu le tiers, la seconde le quart, la troisième le cinquième, et la dernière a reçu 5 200 F. Quel est le montant de l'héritage ?
22. Une propriété de 149,6 hectares est constituée pour les $\frac{7}{11}$ de terres cultivables, pour les $\frac{4}{17}$ en bois, et le reste en prairies. Les terres valent 20 F l'are et rapportent 7,5 % ; les bois valent 24 F l'are et rapportent 6% ; les prairies valent 14 F l'are et rapportent 2,5%. Calculer le revenu de cette propriété.
23. D'une pièce de toile, on fait trois parts : la première est égale aux $\frac{2}{7}$ plus 6 m ; la seconde au tiers plus 7 m ; la dernière a pour longueur les 11 m restants. Calculer la longueur de chaque part.
24. Calculer les notes d'un candidat qui a obtenu dans un examen 42 points $\frac{3}{4}$. Sa note d'arithmétique surpasse de 1 point $\frac{1}{4}$ celle d'histoire ; dans cette matière, il a obtenu 2 points $\frac{3}{4}$ de plus qu'en orthographe. (Il n'y a pas d'autre discipline).
25. Trois robinets remplissent un bassin : le premier a débité 54 litres $\frac{1}{4}$, le deuxième 3 litres $\frac{5}{8}$ de moins que le premier et le troisième 10 litres $\frac{1}{3}$ de moins que les deux premiers réunis. Quelle est la capacité du bassin ?
26. On remplit jusqu'aux $\frac{3}{8}$ de sa hauteur un bassin ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, dont la largeur est la moitié de la longueur. Puis on fait monter le niveau de 0,38 m en ajoutant 7,6 hectolitres. Le bassin est alors rempli aux $\frac{5}{7}$ de sa hauteur. Calculer ses dimensions.
27. Une fermière a vendu les $\frac{2}{5}$ d'un panier d'œufs. Si elle ajoutait 46 à ce qui lui reste, le nombre des œufs qu'elle avait d'abord serait augmenté de son $\frac{1}{9}$. Calculer ce nombre.
28. Soit la fraction $\frac{5}{8}$ et la fraction $\frac{7}{10}$ obtenue en ajoutant 2 à chacun des termes. Comparer ces deux fractions en comparant leurs compléments à l'unité.

    Comparer de même les fractions $\frac{17}{35}$ et $\frac{17+n}{35+n}$ ainsi que les fractions $\frac{17}{35}$ et $\frac{17-n}{35-n}$, où n est entier et inférieur à 17.

Chapitre 11

Multiplication et division d'une fraction par un nombre entier

1. Découper des bandes de papier AB de 120 mm de long. Les partager en 12 parties égales. Vérifier que les fractions suivantes de AB sont égales :

$$\frac{5}{12} \times 3 = \frac{15}{12}; \qquad \frac{7}{12} \times 6 = \frac{7}{2}.$$

$$\frac{5}{3} \div 4 = \frac{5}{12}; \qquad \frac{4}{3} \div 2 = \frac{2}{3}.$$

2. Effectuer les opérations suivantes et simplifier les résultats :

$$\frac{5}{6} \times 8; \qquad \frac{7}{12} \times 6; \qquad \frac{15}{7} \times 21; \qquad \frac{27}{13} \times 39.$$

$$\frac{45}{28} \times 12; \qquad \frac{39}{25} \times 20; \qquad \frac{17}{40} \times 8; \qquad \frac{49}{25} \times 35.$$

$$\frac{48}{35} \div 30; \qquad \frac{33}{25} \div 15; \qquad \frac{108}{55} \div 27; \qquad 36 \div 54.$$

$$\frac{84}{39} \div 36; \qquad \frac{216}{35} \div 48; \qquad \frac{360}{77} \div 135; \qquad \frac{355}{113} \div 71.$$

3. Simplifier et calculer les expressions :

$$\frac{189 \times 22}{126}; \qquad \frac{154 \times 45}{525}; \qquad \frac{168 \times 63}{756}.$$

$$\frac{84 \times 78}{1\ 512} \qquad \frac{432 \times 168}{336}; \qquad \frac{684 \times 252}{11\ 340}.$$

4. Une personne dépense dans un magasin les $\frac{3}{4}$ de ce qu'elle possède, puis dans un autre le tiers du reste. Il lui reste encore 72 F. Que possédait-il primitivement.

5. Partager une somme de 133 000 F entre 3 personnes de façon que la part de la 2e soit les $\frac{5}{6}$ de celle de la première et celle de la troisième le tiers de celle de la deuxième.
6. Un joueur perd les $\frac{3}{7}$ de sa fortune, puis le $\frac{1}{3}$ de sa fortune. Il lui reste le $\frac{1}{10}$ de ce qu'il a perdu plus 850 F. Quelle était sa fortune primitive ?
7. Une balle élastique rebondit au tiers de la hauteur d'où elle est tombée. À quelle fraction de la hauteur primitive s'élève-t-elle après 4 bonds successifs ?
8. On soutire chaque jour 3 L $\frac{1}{4}$ d'une pièce de vin de 225 litres. Que reste-t-il après 60 jours ?
9. Quel est le poids de viande d'un bœuf de 450 kg contenant $\frac{1}{5}$ d'os.
10. Une personne exécute le cinquième d'un travail en 1 heure. Combien de temps lui faudra-t-il pour en faire les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{5}{6}$? Quelle fraction en fait-elle en deux heures et demi ?
11. On multiplie un nombre par $\frac{5}{8}$ puis ce même nombre par $\frac{7}{12}$; on fait la somme des deux produits. Calculer le nombre sachant que cette somme surpasse de 135 unités le nombre lui-même. Faire la vérification.
12. On partage les $\frac{4}{7}$ d'une somme d'argent entre 6 personnes et le reste entre 4 personnes. Quelle fraction de la somme chaque personne a-t-elle reçue ? Quelles sont les parts, la somme s'élevant à 84 000 F ?
13. Deux héritiers s'étant partagé une somme de 106 000 F ont dépensé, les premiers les $\frac{6}{7}$ de sa part et le second les $\frac{9}{11}$ de la sienne. Le premier possède alors trois fois de plus que le second. Calculer les parts.
14. Une ménagère a acheté une pièce de drap et une toile qui lui ont coûté ensemble 486 F. Elle a payé le drap 12 F le mètre et la toile 4,50 F le mètre. Elle emploie le $\frac{4}{5}$ et les $\frac{3}{7}$ de la pièce de toile et il se trouve que les restes des deux pièces ont des valeurs égales. Calculer combien chaque pièce contient de mètres.
15. Un cultivateur laisse à ses deux fils un pré et une vigne estimés chacun 4 000 F l'hectare. Les $\frac{5}{8}$ de la superficie du pré sont égaux aux $\frac{6}{7}$ de la surface de la vigne, et la différence des surfaces est de 27,95 ares.

    On demande :
    — Quelle somme l'un des frères devra donner à l'autre pour que les deux parts soient égales ?
    — Quelle est la surface du pré et quelle est la surface de la vigne ?
16. Soit la fraction $\frac{3}{5}$.
    (a) Trouver une fraction égale à cette fraction dont le dénominateur soit 20.
    (b) Trouver une fraction égale dont le numérateur soit 21.
    (c) Trouver une fraction qui soit égale à la moité de la fraction proposée et dont le dénominateur soit 50.

Chapitre 12

Multiplication des fractions

1. Découper une bande de papier de 20 cm de long. En prendre les $\frac{3}{5}$. Construire les $\frac{7}{8}$ de la bande obtenue. Vérifier que la longueur finale est les $\frac{21}{40}$ de la bande primitive.
2. Effectuer les produits suivants et simplifier les résultats :

$$\frac{4}{7}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{10};\qquad \frac{7}{4}\times 5\times\frac{8}{21};\qquad \frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}.$$

$$\frac{45}{64}\times\frac{24}{27};\qquad \frac{35}{36}\times\frac{48}{49};\qquad \frac{21}{36}\times\frac{24}{35}\times\frac{45}{42}.$$

$$\frac{27}{34}\times\frac{51}{84};\qquad \frac{76}{35}\times\frac{48}{49};\qquad \frac{38}{85}\times\frac{65}{133}\times\frac{119}{143}.$$

$$\left(\frac{19}{12}+\frac{5}{21}+\frac{13}{28}\right)\times\frac{21}{32};\qquad \left(\frac{43}{28}-\frac{13}{21}\right)\times\frac{16}{33}$$

$$\left(\frac{51}{56}+\frac{8}{21}+\frac{16}{48}\right)\times\frac{32}{65};\qquad \left(\frac{31}{20}-\frac{26}{45}\right)\times\frac{36}{49}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^3;\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right);\qquad \left[\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^2$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2\times\left(\frac{2}{7}\right)^4\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right);\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right).$$

3. Effectuer mentalement :

$$62\times 5;\qquad 126\times 50;\qquad 42\times 15;$$

$$38\times 5;\qquad 257\times 50;\qquad 72\times 150;$$

$$47\times 5;\qquad 184\times 500;\qquad 232\times 15;$$

$$121\times 5;\qquad 365\times 50;\qquad 125\times 150.$$

4. Un champ est partagé en trois parties. La première est égale aux $\frac{2}{7}$ de la surface totale, la seconde aux $\frac{5}{13}$ de la première. La différence entre les deux premières parties est 1 200 mètres carrés. Calculer la surface totale.
5. Un travail est exécuté par 3 ouvriers, le premier en a fait les $\frac{2}{5}$, le second les $\frac{5}{6}$ du travail effectué par le premier et le troisième le reste. Ce dernier a touché 2 100 F de moins que les autres ensemble. Calculer le prix total de ce travail.
6. Les $\frac{3}{4}$ des $\frac{4}{5}$ d'un nombre valent 108. Quel est ce nombre ?
7. En ajoutant à un nombre donné les $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de ce nombre, on trouve 322. Quel est ce nombre ?
8. On considère une suite de 4 nombres tels que chacun d'eux soit égal à la moitié du précédent. Trouver ces nombres, sachant que leur somme est 105.
9. Une personne perd les $\frac{3}{5}$ de sa fortune ; elle regagne ensuite les $\frac{4}{7}$ de ce qu'elle avait perdu et possède alors 39 000 F. Que possédait-elle primitivement ?
10. Une personne doit une certaine somme. Elle verse d'abord le quart de sa dette, puis les $\frac{3}{7}$ de ce qui reste à payer, et se libère enfin en versant 63 000 F. Quelle était la dette de cette personne ?
11. Deux ouvriers ont travaillé le premier 18 jours, le second 20 jours ; le salaire journalier du premier est les $\frac{4}{5}$ de celui du deuxième. Sachant que ces deux ouvriers ont reçu ensemble 1 032 F, quel est le salaire journalier de chacun ?
12. Le bénéfice d'un commerçant est le $\frac{32}{100}$ du prix de vente. Ce bénéfice augmenterait de 3 600 F s'il était la moitié du prix d'achat. Déterminer le prix d'achat.
13. On retire d'une cuve les $\frac{2}{3}$ de sa contenance moins 40 litres. On retire ensuite les $\frac{2}{5}$ du reste ; il reste encore 84 litres. Quelle est la capacité de la cuve ?
14. Par quelle fraction faut-il multiplier un nombre pour l'augmenter de ses $\frac{2}{5}$, de ses $\frac{3}{4}$, de ses $\frac{2}{3}$?
15. Les $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ d'un nombre donné surpassent de 38 unités les $\frac{2}{3}$ des $\frac{7}{10}$ de ce nombre.
16. On retranche d'un nombre ses $\frac{2}{5}$, puis les $\frac{5}{7}$ du reste. Quelle fraction du nombre reste-t-il ?
17. Les $\frac{2}{5}$ des candidats à un concours ont été admissibles aux épreuves orales et un candidat sur huit a échoué à ses épreuves. Quel est le pourcentage des candidats définitivement reçus au concours ? Application : le nombre des candidats s'élève à 520. Trouver le nombre des admis.
18. Partager une somme de 84 000 F entre cinq personnes de façon que la première reçoive les $\frac{3}{4}$ de la part de la deuxième, que la deuxième reçoive la moitié de la part de la troisième, que celle-ci reçoive les $\frac{2}{3}$ de la part de la quatrième et enfin que celle-ci reçoive les $\frac{4}{5}$ de la part de la cinquième.
19. Un joueur perd les $\frac{2}{7}$ de la somme qu'il possède, puis regagne les $\frac{5}{8}$ de ce qu'il a perdu et se retire du jeu avec 125 F. Quel était son avoir primitif ?
20. Soient deux nombres dont l'un est $\frac{3}{4}$ de l'autre. On multiplie le premier par $\frac{2}{3}$ et le second par $\frac{7}{8}$ et en faisant le produit des deux résultats, on obtient 28. Quels sont ces deux nombres ?
21. Une personne dépense les $\frac{2}{3}$ de son argent, puis elle gagne une somme égale aux $\frac{3}{7}$ de ce qui lui restait. Avec la somme qu'elle possède alors elle peut payer les $\frac{2}{5}$ d'une pièce de drap de 31, 25 m valant 12 F le mètre. Combien avait-elle tout d'abord ?

22. Un ouvrier fait le quart d'un ouvrage en cinq jours ; un deuxième ouvrier fait les $\frac{2}{5}$ du reste en douze jours. Combien les deux ouvriers travaillant ensemble mettront-ils de jour pour achever l'ouvrage ? Le premier ouvrier a touché 132 F pour son travail ; quelle somme touchera le second ouvrier sachant que pour chacun d'eux, le prix de la journée est le même ?

Chapitre 13

Division d'une fraction par une fraction

1.
$$3 \div \frac{5}{7}; \qquad 12 \div \frac{7}{4}; \qquad \frac{36}{55} \div \frac{9}{22}; \qquad \frac{49}{81} \div \frac{21}{54}.$$

2.
$$21 \div \frac{7}{5}; \qquad 36 \div \frac{54}{5}; \qquad \frac{48}{25} \div \frac{16}{15}; \qquad \frac{15}{32} \div \frac{25}{24}.$$

3.
$$\frac{52}{45} \div \frac{78}{81}; \qquad \frac{55}{126} \div \frac{44}{189}; \qquad \frac{51}{91} \div \frac{85}{156}; \qquad \frac{63}{92} \div \frac{84}{115}.$$

4.
$$\left(\frac{10}{21} + \frac{11}{28} + \frac{5}{12}\right) \div \frac{18}{35}; \qquad \left(\frac{32}{39} - \frac{21}{52}\right) \div \frac{15}{8}.$$

5.
$$\left(\frac{23}{44} + \frac{34}{77} + \frac{11}{28}\right) \div \frac{38}{49}; \qquad \left(\frac{19}{28} - \frac{23}{70}\right) \div \frac{14}{45}.$$

6.
$$\frac{\frac{6}{35} + \frac{19}{21} + \frac{16}{15}}{\frac{11}{21} + \frac{3}{14} + \frac{11}{6}}; \qquad \frac{\frac{8}{21} + \left(\frac{11}{15} - \frac{4}{35}\right)}{\frac{17}{36} - \left(\frac{9}{20} - \frac{17}{45}\right)}.$$

7.
$$\left(\frac{5}{9}\right)^{10} \div \left(\frac{5}{9}\right)^{7}; \qquad \left(\frac{7}{15}\right)^{43} \div \left(\frac{7}{15}\right)^{47}; \qquad \left(\frac{2}{13}\right)^{13} \div \left(\frac{2}{13}\right)^{23}.$$

8.
$$\left[\left(\frac{3}{8}\right)^{5} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{4}\right] \div \left(\frac{3}{8}\right)^{7}; \qquad \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{5}\right] \div \left(\frac{5}{6}\right)^{6}.$$

9. Simplifier :
$$\frac{a}{b} \div a; \qquad a \div \frac{a}{b}; \qquad \frac{1}{a} \div \frac{1}{b}; \qquad \frac{3a}{b} \div \frac{2a}{3b}.$$

10. Simplifier :

$$\left(2+\frac{1}{a}\right)\div(2a+1); \qquad \left(\frac{a}{b}+1\right)\div\left(\frac{a}{b}-1\right).$$

11. Simplifier :

$$\frac{a^{12}}{a^7}; \qquad \frac{a^3\times a^5}{a^2}; \qquad \frac{(a+b)^5}{a+b}; \qquad \frac{(a-b)^4}{(a-b)^2}.$$

12. Simplifier :

$$\frac{5a^3b^2}{15a^2b}; \qquad \frac{108a^5b^3c^2}{36a^2b^2c}; \qquad \frac{105xy^4z^3}{49x^2y^4z}.$$

13. Simplifier :

$$\frac{a^2}{a^5}; \qquad \frac{4a^2b^3}{8a^6b^2}; \qquad \frac{121a^2b^3c}{77a^4b^4c}.$$

14. En divisant $\frac{4}{7}$ par une certaine fraction, le quotient est égal à $\frac{3}{14}$. Quelle est la fraction diviseur ?
15. Les $\frac{7}{12}$ d'une fraction sont égaux à $\frac{8}{15}$. Quelle est cette fraction ?
16. Par quel nombre entier ou fractionnaire faut-il multiplier $\frac{5}{7}$ pour obtenir les $\frac{3}{4}$ de $\frac{11}{9}$?
17. Que devient un produit de facteurs lorsqu'on divise l'un des facteurs par $\frac{4}{9}$?
18. Trouver deux fractions dont la somme est $\frac{390}{187}$ et le quotient $\frac{119}{11}$.
19. Trouver deux fractions dont la différence est $\frac{5}{21}$ et le quotient $\frac{12}{7}$.
20. Un cycliste parcourt la distance AB à la vitesse de 30 km à l'heure et la distance BA à la vitesse de 20 km à l'heure. Quelle est sa vitesse moyenne pour le trajet aller et retour ?
21. Un cycliste se rend de A à B à la vitesse de 27 km à l'heure. Il revient de B à A à la vitesse de 24 km à l'heure. Trouver la distance AB, sachant que la durée totale du voyage aller et retour est de 10 h 37 min 30 sec. (Indication : Réduire ce temps en une fraction d'heure.)
22. Une équipe d'ouvriers ferait un travail en 5 jours et demi ; une seconde équipe le ferait en 4 jours $\frac{2}{3}$. Combien les deux équipes, travaillant ensemble, mettront-elles de temps pour faire ce travail ?
23. Une somme de 21 700 F est partagée entre 2 personnes. La première ayant dépensé les $\frac{5}{7}$ de sa part et la seconde les $\frac{2}{5}$ de la sienne, il leur reste la même somme. Trouver les deux parts.
24. Les $\frac{4}{5}$ d'un nombre valent les $\frac{5}{9}$ d'un autre nombre. Trouver ces deux nombres, sachant que leur différence est 33.
25. Un robinet remplit les $\frac{2}{7}$ d'un bassin en 2h $\frac{3}{4}$; combien de temps faut-il laisser couler le robinet pour que le bassin soit plein aux $\frac{4}{5}$?
26. Une équipe d'ouvriers ferait un travail en 7 jours, une autre équipe le ferait en 9 jours. On fait travailler ensemble les $\frac{2}{3}$ de la première équipe et la moitié de la seconde. Combien de temps faudra-t-il pour effectuer ce travail ?
27. Deux sommes égales sont placées, l'une à 5 %, l'autre à 6 % pendant 42 mois. La seconde rapporte 1 890 F de plus que la première. Quelle est la valeur commune de ces deux sommes ?

28. La durée de la révolution de la Terre autour du Soleil est 365 jours. En combien de temps la Terre effectue-t-elle les $\frac{3}{5}$ de cette révolution ?

29. Les durées des révolutions de la Terre et de Vénus autour du Soleil sont respectivement 365 jours et 225 jours. Calculer l'intervalle des temps qui, pour un observateur terrestre, séparent deux passages successifs de Vénus devant le Soleil.

30. La durée de la révolution de Jupiter autour du Soleil est environ 142 mois. Quel est l'intervalle des temps qui séparent deux oppositions successives du Soleil et de Jupiter (instants où le Soleil et Jupiter sont des directions opposées par rapport à la Terre).

31. Pour effectuer un parcours de 100 km, un train à mis 1h 20. Quelle est sa vitesse horaire ?

32. Une vis avance de $\frac{7}{10}$ mm en 5 tours. Calculer le nombre de tours nécessaire pour avancer de 12 mm $\frac{1}{4}$.

33. Une personne exécute les $\frac{3}{11}$ d'un travail en 3h $\frac{5}{8}$. Quel sera le temps nécessaire pour en exécuter les $\frac{8}{11}$?

34. Un pré et une vigne ont une superficie totale de 51 ha. Les $\frac{4}{7}$ de la superficie du pré sont égaux aux $\frac{2}{5}$ de celle de la vigne. Calculer la superficie du pré et de la vigne.

35. Trouver un nombre dont le quotient par $\frac{7}{11}$ surpasse ce nombre de 64.

36. En divisant $\frac{4}{7}$ par une fraction on obtient un quotient qui est les $\frac{2}{3}$ du dividende. Quel est le diviseur ?

37. Par quel nombre a-t-on divisé le nombre 36 lorsqu'on l'a augmenté de ses $\frac{3}{4}$?

38. Par quel nombre multiplie-t-on la fraction $\frac{4}{11}$ en augmentant de 2 son numérateur et en diminuant de 4 son dénominateur ?

39. Soient les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Montrer qu'on ne change pas le quotient de ces deux fractions en les multipliant ou en les divisant toutes deux par un même nombre entier ou plus généralement par une même fraction. Vérifier sur des exemples.

Chapitre 14

Fractions décimales, nombres décimaux

1. Écrire sous forme décimale :

   $\frac{75}{10}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{12}{1\ 000}$; $\frac{25}{10\ 000}$; $\frac{23\ 752}{1\ 000}$; $\frac{47}{10\ 000}$.

2. Écrire sous forme de fractions les nombres suivants :

   $$7,24; \quad 3,572; \quad 0,0417; \quad 5,00178; \quad 0,0072.$$

3. Combien peut-on écrire de nombres à 3 décimales compris entre 5,32 et 5,33 ? Combien peut-on écrire de nombres à 4 décimales compris entre 12,347 et 12,348 ?
4. Comparer les nombres 12,7 et 12,07. De façon générale, comment se modifie un nombre à une décimale lorsqu'on place un zéro entre la virgule et le chiffre décimal ?
5. Quel est le nombre décimal de mètres contenus dans une longueur de 7 dam, 5 m, 3 dm et 8 cm ?
6. Effectuer de deux manières différentes les additions suivantes :

   $$37,7 + (42 + 0,75 + 7,12);$$

   $$13 + 10,5 + (43,75 + 5,725) + (7 + 2,57);$$

   $$372,5 + (5,703 + 12,7 + 3,9).$$

7. Calculer de deux façons différentes le résultat des opérations suivantes :

   $$53 - (3,7 + 4,52 + 0,17);$$

   $$271,5 - (37,7 + 12 + 0,57 + 43,5).$$

8. Calculer de deux façons différentes le résultat des opérations suivantes :

   $$703,75 + (219,5 - 49,2);$$

   $$1\ 000 + (2,712 - 0,47).$$

9. Calculer de deux façons différentes le résultat des opérations suivantes :

$$512,7 - (57,25 - 43,5);$$
$$47 - (4,509 - 3,7).$$

10. Calculer de deux façons :

$$(0,75 \times 27) + (0,75 \times 13);$$
$$(0,52 \times 19) - (0,52 \times 17).$$

11. Calculer :

$$(0,25)^2; \qquad (2,15)^3; \qquad (2,45)^3 \times (2,45)^2; \qquad \frac{(9,81)^7}{(9,81)^5}.$$

12. Une vis avance de $\frac{7}{10}$ de millimètre en 13 tours. Combien doit-elle faire de tours pour avancer de 3,5 mm ?
13. Prendre le plus simplement possible les 0,9 ; les 0,99 ; les 0,999 du nombre 17,8.
14. Transformer en fractions décimales les fractions suivantes :

$$\frac{3}{2}; \qquad \frac{5}{4}; \qquad \frac{4}{5}; \qquad \frac{21}{25}; \qquad \frac{7}{8}; \qquad \frac{11}{250}.$$

15. La fraction $\frac{8}{19}$ peut-elle se convertir en fraction décimale ?
16. Par quel nombre décimal faut-il diviser un nombre pour réduire ce nombre aux $\frac{8}{15}$ de sa valeur ?
17. Par quelle fraction décimale faut-il multiplier un nombre pour le diminuer des $\frac{6}{100}$ de sa valeur ?
18. En déplaçant de deux rangs vers la gauche la virgule d'un nombre décimal, il diminue de 5 749,326. Quel est ce nombre ?
19. Un alliage d'argent et de cuivre provenant de la fonte de deux lingots pèse 3 800 grammes et a pour titre $\frac{775}{1\ 000}$. Quel est le titre du premier lingot sachant que le second lingot avait pour poids 2 kg et pour titre $\frac{650}{1\ 000}$?
20. (a) Quelle est la distance de Paris à Dijon sachant que sur une carte dont l'échelle est un millionième, elle est représentée par une longueur de 31,5 cm ?
    (b) Par quelle longueur est-elle représentée sur une carte dont l'échelle est 4 dix-millionièmes ?
    (c) Quelle est l'échelle d'une carte sur laquelle la distance Paris-Dijon est représentée par 25,2 cm ?
21. Effectuer mentalement :

$$54,45 + 3,95; \qquad 12,55 + 5,75 + 4,70; \qquad 8,72 + 15,9 + 5,6.$$
$$30 - 22,85; \qquad 75,7 - 13,45; \qquad 134,4 - 12,18.$$
$$19,8 \times 0,5; \qquad 15,60 \times 0,25; \qquad 17,12 \times 0,75; \qquad 14,32 \times 0,125.$$
$$7,3 \times 11; \qquad 3,15 \times 9; \qquad 5,1 \times 19; \qquad 3,4 \times 99; \qquad 7 \times 5,95.$$
$$24,7 \div 0,5; \qquad 58 \div 0,25; \qquad 51,351 \div 0,75; \qquad 0,52 \div 0,125.$$

22. Le nombre x varie de dixième en dixième entre 2 et 5. Dresser le tableau de correspondance entre x et les nombres y suivants, puis construire le graphique qui en résulte :

$$y = 3x; \qquad y = 3x + 4; \qquad y = 3x - 1.$$

$$y = \frac{3x}{5}; \qquad y = \frac{3x}{5} + 2; \qquad y = \frac{3x}{5} - \frac{1}{2}.$$

$$y = x^2; \qquad y = x^3; \qquad y = \frac{4}{5}x^2.$$

$$y = 2x^2 - \frac{1}{5}; \qquad y = x^3 + 1; \qquad y = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Chapitre 15

Quotient de deux nombres à une approximation décimale donnée

1. Calculer le quotient entier, le quotient à 0,1 près, le quotient à 0,01 près, et le quotient à 0,001 près de :
   — 39 par 7 ;
   — 293,72 par 43 ;
   — 735,7 par 40,1.
2. Le diviseur d'une division est 7,5 et le quotient à 0,001 près est 2,357. Que peut-être le dividende ?
3. Calculer à 1 décimètre près la largeur d'un rectangle dont la surface est 212 ares 7 centiares, sachant que sa longueur mesure 183, 7 mètres.
4. Calculer à 1 millimètre près les deux bases d'un trapèze dont la surface est 430 centimètres carrés, dont la hauteur mesure 147 millimètres, et sachant d'autre part que la différence des bases est 18 cm.
5. Couper par une corde de 27,55 m en 3 morceaux tels que le premier ait 2,50 m de plus que le second, et 1,25 de moins que le troisième.
6. Un litre d'huile pèse 0,025 kg. Combien de bouteilles ayant une capacité de 0,83 litres pourra-t-on remplir avec 52 kg d'huile ?
7. Calculer le rayon du méridien terrestre sachant que sa longueur est de 20 004 kilomètres. De combien augmenterait ce rayon si la longueur du méridien terrestre augmentait de 1 kilomètre ?
8. Calculer le quotient à un millième, près de :
   — $\frac{7}{11}$ par $\frac{3}{5}$;
   — 12 par $\frac{5}{7}$;
   — $4,5$ par $\frac{7}{9}$.
9. Calculer à 0,0001 près les quotients de 22 par 7 et de 355 par 113.
10. Diviser 2 par 1,414, puis 3 par 1,732.

11. Calculer à 0,00001 près le quotient de 1 par 3,1416. Le nombre 3,1416 étant une valeur approchée par excès de π, obtient-on ainsi une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ par défaut ou par excès ?
12. Calculer à un millionième près les quotients de 1 par 6, et de 1 par 3. Faire la somme des nombres obtenus, et la comparer à la somme des deux fractions $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$.
13. Calculer à un millionième près les quotients de 2 par 3 et de 1 par 6. Faire la différence des nombres obtenus, et la comparer à la différence des deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{6}$.
14. Dans une division, on a interverti les rôles du dividende et du diviseur et l'on a trouvé 0,857 comme quotient approché à 0,001 près par défaut. Calculer une valeur approchée par excès et une valeur approchée par défaut du quotient initial. Donner le quotient initial avec la meilleure approximation possible.
15. Trouver tous les nombres entiers qui, divisés par 658 donnent 0,87 comme quotient approché à $\frac{1}{100}$ près par défaut.
16. Calculer à $\frac{1}{1\ 000}$ près les densités de l'oxygène et de l'azote sachant qu'un litre d'air pesant $1,293$ gramme contient $0,209$ litre d'oxygène et $0,791$ litre d'azote et que dans un gramme d'air il y a 231 milligrammes d'oxygène et 769 milligrammes d'azote.
17. Dans une installation de lumière électrique on a utilisé 678 mètres de fil de cuivre recouvert de caoutchouc. Quand on observe un morceau bien tendu de ce fil, on voit la surface extérieure d'un cylindre de caoutchouc dont le rayon est de 2 mm. Le fil de cuivre a un diamètre de 12 dixièmes de mm. On demande :
    — La masse exprimée en kg du cuivre contenu dans le fil employé.
    — Le volume exprimé en cm^3 du caoutchouc qui recouvre ce cuivre.
18. Avec 51 kg de cuivre, on fabrique du fil électrique de deux diamètres différents : 12 et 16 dixièmes de mm. La longueur du fil fin est double de celle du fil qui est le plus gros. Quelles longueurs de chaque fil pourra-t-on obtenir ? La densité du cuivre est 8,8. On prendra $\frac{355}{113}$ comme valeur approchée de π.

Troisième partie

Arithmétique littérale

Chapitre 16

Somme généralisées

1. Supprimer les parenthèses dans les sommes suivantes sans effectuer les opérations :

$$12+(11-7+3); \qquad 15-(13-5+2).$$

$$14-(5-3+7); \qquad 19+(12-8-1).$$

$$17+(8-5+4)-(13-3); \qquad 14+(9-4)-(11+2-7).$$

$$(9+4-5)+(7-2-3); \qquad 13-(6+3-4)+(8-5)$$

$$12+(x-7+5); \qquad m-(n-4)+(p-9).$$

$$a-(b+c-8); \qquad 25+(a-7)-(b+5).$$

$$12-(x-5)+(x-9); \qquad 17-(x+3)+(y-10).$$

2. Réduire les sommes suivantes :

$$(x+13)+(x-9)-(x-6); \qquad (a+10)-(a-5)+(a-9).$$

$$x-(x-7)+(x-9); \qquad a+(a-b+7)-(a+b).$$

$$x+13-(x+y+10)+(x-y); \qquad m-n-(7-m)+(n-9).$$

3. Mettre sous forme de produits les expressions suivantes :

$$15x-10a+25; \qquad 32a-12b+16; \qquad 14a+7b-21.$$

$$3ax-2bx+5x; \qquad ax+ay-3a; \qquad 5ax-15bx-10x.$$

$$9ax+6bx-15x; \qquad 6ax-9ay-15a; \qquad \frac{5}{2}ax-\frac{15}{2}bx+\frac{25}{2}x.$$

4. Réduire les sommes suivantes :

$$25x - 13x + 4x - 7x; \qquad 13ab - 11ab + 3ab.$$

$$7x - 3 + 4x + 7 - 6x; \qquad 5x + 7 - 6x - 3 - 2x + 5.$$

$$17ax - 5ax - 9ax + 4ax; \qquad 8,4x + 6 - 5,2x + 5,6 - 2.$$

5. Réduire les expressions suivantes :

$$(6x - 8) + (7x - 5) - (4x + 10); \qquad (3x - 7) - (7x - 15) + (2x + 3).$$

$$(3x + 2a) - (4x + 6a) + (2x + 5a); \qquad (2x - y) - (x - 5z) - (4z - 2y).$$

$$x + (6z - 2y) - (x - 3y + 5z); \qquad (3x - y - z) - (x - 3y + z) - (x + y - 3z).$$

$$4(2x - 3) - 2(3x - 7); \qquad 3(4x - 2) - 5(3x - 2) - 2(x - 1).$$

$$2(3x + 4y - 5) - 3(x + 2y - 3); \qquad 2x(a + 3) - a(2x + 5) + 3(2x - a).$$

$$7(x - 2y + 8) - 5(x + 4y + 5); \qquad 8(3a + 5b - 9) - 5(4a + 7b - 12).$$

6. Effectuer :

$$(5 + 7) \times (8 + 3); \qquad (12 + 3 + 7) \times (6 + 3).$$

$$(9 - 5) \times (7 + 2); \qquad (14 - 9) \times (9 - 2).$$

$$(12 - 5 + 7) \times (17 - 9 + 1); \qquad (15 - 7 + 3 - 9) \times (21 + 4 - 8).$$

$$(2a + 3b - 5) \times (x + 3); \qquad (4x - 5y + 8) \times (3a - 1).$$

$$(12a - 5b + 4c) \times (3x + 2y - z).$$

7. Effectuer et réduire s'il y a lieu :

$$(a + 3) \times (b - 5) + (x + 2) \times (y + 6) - (a + 4) \times b - xy - 2y.$$

$$(7a - 5) \times (x - 2) - (8 - a) \times (4 - x).$$

$$(3x + 5y) \times 6 - (4 - x)(9 - y) + xy + 20.$$

$$(2a + 3)(a - 3) + (a + 5)(a - 2) - 3(a + 1)(a - 1).$$

Chapitre 17

Résolution littérale de problèmes

1. Trouver un nombre dont le produit par 11 surpasse de 108 le produit de ce même nombre par 8.
2. Le produit d'un nombre par 9 diminué de 23 surpasse de 19 le produit de ce même nombre par 6. Quel est ce nombre ?
3. Un père a 30 ans, son fils a 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge de son fils ?
4. Un père âgé de 37 ans a trois enfants âgés respectivement de 3, 7 et 11 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?
5. Deux trains séparés par une distance de 310 km marchent à la rencontre l'un de l'autre. Le premier fait 90 km à l'heure et le deuxième 65 km à l'heure. Dans combien de temps se fera la rencontre ?
6. Un cycliste qui roule à la vitesse de 30 km a 60 km d'avance sur un motocycliste qui le suit à la vitesse de 50 km à l'heure. On demande combien de temps il faudra à ce dernier pour rejoindre le cycliste.
7. Un épicier achète de l'huile 2,10 F le litre. Il la revend 2,70 F le litre et fait ainsi un bénéfice de 138 F. Quelle quantité d'huile avait-il achetée ?
8. Deux pièces de la même étoffe valent l'une 2 340 F, l'autre 5 040 F. Sachant que la première mesure 3 mètres de moins que la seconde, trouver le prix du mètre de cette étoffe.
9. Un marchand a acheté 5 pièces de vin pour 575 F. En revendant ce vin 805 F, il fait un bénéfice de 0,20 F par litre. Trouver la contenance de chaque pièce.
10. Un libraire achète des casiers 8 F la douzaine. Il les vend 1 F pièce et gagne ainsi 480 F. Combien de douzaines de cahiers a-t-il vendues ?
11. Un chemisier achète des chemises 108 F la douzaine, mais il en reçoit une treizième par douzaine achetée. Il les revend 12 F la pièce et fait ainsi un bénéfice de 192 F. Combien de douzaines de chemises a-t-il acheté ?
12. Une pièce d'étoffe vaut 675 F. On la diminue de 7 mètres. Elle ne vaut plus alors que 486 F. Quelle est la valeur du mètre de cette étoffe ?

13. La somme de deux nombres impairs consécutifs est égale à 124. Quels sont ces deux nombres ?
14. Trouver deux nombres sachant que le premier surpasse de 8 le deuxième et que, si on l'augmente de 14, il est égal au triple du second.
15. La somme de trois nombres est égale à 388. Trouver ces trois nombres sachant que le premier surpasse de 11 le second et est inférieur de 15 au troisième.

Chapitre 18

Égalités et équations

1. Vérifier en calculant séparément la valeur de chacun des deux membres les égalités suivantes :

$$7(8-5)-4(13-8)=18\left(4-\frac{7}{2}\right)-2(7-3).$$

$$15-[13-(9-5)]=3[7-(8-3)].$$

$$6(2\times 7-5)+49=105-10(7-4)+7(9-5).$$

$$11(3\times 5-4)+7(8-5)=9(13-7)+10(8+5)-42.$$

$$45-7(13-8)+5\times 3=(13-9+1)(19-14).$$

2. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées si l'on donne à la lettre a la valeur 4. (Remplacer a par 4 et calculer la valeur des deux membres.)

$$231-12a-81+56a=31a+242-10a.$$

$$4(a+3)-3(a+5)=2(a-2)-3(a-3).$$

$$\frac{5a}{4}+\frac{7}{2}-\frac{7a}{8}=\frac{a}{4}+4.$$

$$\frac{3a-2}{2}-\frac{2a-4}{3}=\frac{4a-1}{3}-\frac{a+4}{6}.$$

3. Vérifier pour $a=5$ et $b=3$, les égalités suivantes :

$$2a+3b-6=4ab-7a-4b.$$

$$5(8a-5b)+8=7(11b-4a+6).$$

$$9(a+6)-4(11-2b)=5(3a+4)-8(3b-7).$$

$$\frac{2(2a+b)}{13}+\frac{a+3}{2}+\frac{b+2}{5}=\frac{ab}{5}-(a-5)+4.$$

4. Réduire et simplifier les égalités suivantes :

$$9a - 5b - 5 = 6a - 8b + 1.$$

$$6(2a + b) - 5(a - 4) = 7(a + b) + 15.$$

$$\frac{a-3}{4} + \frac{3(b-5)}{2} - 3a = 4 - \frac{3a-4}{2} + \frac{b-7}{4}.$$

$$\frac{3a+2b}{2} - \frac{5a+4b}{8} = \frac{7a+b}{4} + 3(a - 2b) + 4.$$

5. Résoudre les équations suivantes :

$5x + 4x - 7x = 14 - 11 + 5$
$19x - 11x - 5x = 57 - 29 + 11$
$24x - 11x + 7x - 8x = 472 - 57 - 42 - 25$
$9x - 5 - 6x = 14 + 8$
$11x - 25 = 5x + 59$
$2x + 7x + 23 = 12x - 22$
$37x - 160 + 24x = 44x - 41$
$3x + 1 - 2,4x = 11,6 - 3,7x - 2$

$9x - 5x + 2x = 33 - 13 + 22$
$6x - x + 4x = 454 - 147 - 181$
$152x - 73x - 56x + 86x = 336 + 76 - 187 + 102$
$10x + 14 - 6x = 23 + 11$
$13x - 52 = 43 - 6x$
$42x + 41 - 17x + 23 = 182 + 13x$
$235 - 23x - 87 + 112x = 67x + 242 - 25x$
$13,5 + 3 - 4x = 13,8 + 2,5x - 5,2$

$28{,}8x - 2{,}45 + 18{,}3x = 34{,}4 - 19{,}9x$
$2(x-1) + 7 = 5(x-3) - 4$
$8(2x+3) - 7 = 3(7x-5) + 17$
$4(x+3) - 2(x-2) = 3(x+5) - (3x-9)$
$3(2x+5) + 5(x+3) = 4(4x+7) - (x+6)$
$17(x-7) - 3(x+10) = 5(2x+3) - 8(x+4)$
$\frac{5}{2}x + 3 - \frac{7x}{4} = x + \frac{9}{4}$
$\frac{x}{4} + \frac{3}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} - 1$
$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + 2 = \frac{x}{6} + \frac{10}{3} - \frac{x}{4}$
$\frac{2x}{3} + 4 - \frac{2x}{5} = \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{11}{2}$
$\frac{x}{2} + \frac{5}{2} - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{5}{6}$
$\frac{x+2}{2} - \frac{x}{4} = 3$
$\frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3}$
$\frac{3x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = 8$
$\frac{3x-7}{2} + \frac{x-1}{3} = 20$
$\frac{5x-3}{4} - \frac{3x-5}{8} = 6$
$\frac{5x+3}{4} - \frac{7x+4}{8} = \frac{x}{2}$
$\frac{7x-3}{2} - \frac{3x+4}{4} = \frac{8x-5}{3}$
$\frac{2x+7}{5} - \frac{11-x}{2} = 4$
$\frac{5x+1}{2} - \frac{3x+1}{4} = \frac{8x+5}{5}$
$\frac{8x+9}{5} + \frac{3x-1}{4} = \frac{5x+1}{2}$
$(x-2) - \frac{x-5}{6} = 16 - \frac{2x-7}{9}$
$\frac{2x+1}{3} + \frac{3x+1}{4} = 28 - \frac{5x-2}{7}$
$\frac{7x+2}{2} - \frac{3x+10}{4} = \frac{8x+5}{3} - \frac{5}{2}$
$\frac{x+6}{2} - \frac{x}{3} = \frac{2x+7}{3} - \frac{x+4}{6}$
$\frac{7-3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x-2) + \frac{5(5-2x)}{6}$
$\frac{8x+2}{5} - 2 = \frac{5x-3}{2} + \frac{3x-1}{4}$
$\frac{5x+7}{4} - \frac{3x+5}{8} = \frac{4x+9}{5}$
$\frac{4(2x+3)}{5} - \frac{3x+2}{7} = \frac{7x-11}{4} - \frac{3}{2}$
$\frac{5x+3}{7} - \frac{4x-3}{9} = \frac{3x+8}{11}$
$\frac{4x-1}{3} - \frac{7x-3}{11} = \frac{5x-2}{7}$

$27{,}6x - 17{,}2 - 14{,}83x = 90 - 30{,}23x - 5{,}29$
$3(x+1) + 6 = 2(4x-7) - 12$
$16 - 2(x+5) = 3(3x+1) - 31$
$5(5x+7) - 3(3x+5) = 2(4x+9) + 7(x+1)$
$9(x+4) - 4(12-x) = 5(3x-2) - 8(x-5)$
$13(x-8) + 7(2x-19) = 8(x+5) - 5(19-x)$
$\frac{7x}{4} - 2 - \frac{x}{2} = \frac{2x}{3} + 12$
$x + \frac{1}{2} - \frac{x}{6} = 16 - \frac{2x}{6} - \frac{1}{3}$
$\frac{5x}{2} - \frac{18}{5} - \frac{3x}{4} = \frac{8}{5}x + \frac{9}{4}$
$\frac{3x}{7} - \frac{2x}{15} + 3 = \frac{x}{3} + \frac{11}{5}$
$\frac{5x}{4} - \frac{1}{2} - \frac{7x}{8} = \frac{x}{2} - 1$
$\frac{x+5}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + \frac{25}{12}$
$x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x+1}{5}$
$\frac{2x+3}{5} - \frac{13-x}{2} = 4$
$\frac{x+3}{4} - \frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{6}$
$\frac{3x+5}{2} + \frac{x+3}{3} = 9$
$\frac{5x-7}{4} = \frac{7x-10}{8} + \frac{x-2}{2}$
$\frac{7x+2}{2} - \frac{8x+2}{3} = \frac{3x+2}{4}$
$(x+1) - \frac{x+2}{3} = \frac{2x+3}{5}$
$\frac{15x+7}{4} - \frac{9x+5}{8} = \frac{3(4x+3)}{5}$
$\frac{2x+3}{3} - \frac{x-3}{6} = \frac{x+13}{4}$
$\frac{5x-3}{2} - \frac{3x-1}{4} = \frac{2(4x+1)}{5}$
$\frac{5x+1}{8} - \frac{x-1}{3} = \frac{4(2x-3)}{9}$
$\frac{7x-5}{2} - \frac{8x-6}{3} = \frac{3x+7}{4} - 2$
$\frac{5x-4}{2} + \frac{7x-16}{4} = \frac{3(x+12)}{4} - 1$
$\frac{3(x+3)}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5x+9}{3} - \frac{7x-9}{4}$
$\frac{4x+7}{5} - \frac{5(x-1)}{6} = \frac{14}{3} - \frac{2x-7}{9}$
$\frac{5x-1}{8} - \frac{2x+7}{11} = \frac{4x-7}{9}$
$\frac{7x-1}{8} + \frac{2x+9}{3} = \frac{2(6x+1)}{7}$
$\frac{3(x+2)}{13} + \frac{2x-3}{5} = \frac{5(x-3)}{7}$
$\frac{5x-7}{8} + \frac{2(x+2)}{7} = \frac{4x+9}{5}$

Chapitre 19

Application aux problèmes

1. Trouver un nombre dont la somme des quotients par 4 et par 7 soit égale à 55.
2. Trouver un nombre dont la somme des quotients par 4, 6 et 8 soit égale à 78.
3. Les trois quarts d'un nombre surpassent les deux tiers de ce nombre de 17. Trouve ce nombre.
4. Trouver un nombre dont les $\frac{4}{5}$ surpassent de 14 les $\frac{2}{3}$ de ce même nombre.
5. En retranchant 18 aux $\frac{3}{4}$ d'un nombre on trouve le même résultat que si l'on avait ajouté 7 au $\frac{1}{3}$ de ce nombre. Trouver ce nombre.
6. Trouver un nombre tel que si on en ajoute les $\frac{9}{14}$ aux $\frac{2}{3}$ le résultat surpasse de 50 les $\frac{5}{6}$ de ce même nombre.
7. Un marchand a acheté deux tonneaux de vin de même contenance pour 270 F. Lors de la mise en bouteille, il en perd 15 litres du premier tonneau qu'il revend 0,80 F le litre et 25 litres du second qu'il revend 0,90 F le litre. Il fait ainsi un bénéfice de 78 G. Trouver la capacité de chacun des tonneaux.
8. Une libraire fait éditer trois livres à un même nombre d'exemplaires chacun ; le premier est vendu 3,60 F, le deuxième 3 F et le troisième 4,50 F. Il reste 1 300 exemplaires invendus du premier, 980 du deuxième, et 640 du troisième. Sachant que la vente a rapporté 45 000 F, on demande à combien d'exemplaires chacun de ces livres a été édité.
9. Un marchand achète deux pièces du même drap, l'une de 64 mètres, l'autre de 50 mètres. Il fait un bénéfice de 96 F par mètre sur la première et de 105 F par mètre sur la seconde et retire ainsi de sa vente 51 750 F. Combien a-t-il payé le mètre de drap ?
10. Si un vigneron vend son vin 68 F l'hectolitre, il lui restera 320 F après avoir acheté un champ. Mais s'il ne le vend que 60 F l'hectolitre, il lui manquera 48 F. Combien d'hectolitres de vin a-t-il récoltés ?
11. Un ouvrier calculer qu'il dépense par mois les $\frac{2}{3}$ de son salaire plus 48 F. Sachant qu'il économise ainsi 102 F, trouver son salaire mensuel.

12. Un fermier espère payer son propriétaire avec le prix de sa récolte de blé. S'il la vend 26,50 F le quintal, il lui restera 195 F. S'il ne la vend que 25 F, il lui manquera 225 F. Combien de quintaux de blé a-t-il récoltés ?
13. Un marchand a acheté des moutons 93 F l'un et les revend 105 F au marché de la Villette à Paris. Le transport lui revient à 97,50 F et l'un des moutons est mort en route ; il gagne malgré tout 241,50 F. Combien de moutons avait-il acheté ?
14. Un litre de lait pur pèse 1,033 kg. Une laitière a acheté 50 litres de lait et trouve qu'ils ne pèsent que 51,485 kg. Quelle quantité d'eau contient ce lait ?
15. On a acheté une pièce d'étoffe à raison de 20 F les 3 mètres. On la revend à raison de 60 F les 7 mètres. On fait un bénéfice de 100 F. Quelle est la longueur de la pièce ?
16. On veut placer des élèves dans une salle de projection. En mettant dix élèves par banc, il y en a 11 qui ne sont pas placés. En mettant 11 élèves par banc, il reste alors 7 places disponibles. Quel est le nombre d'élèves ?
17. Un groupe d'enfants doit faire une excursion qui revient à 150 F chacun. Au moment du départ, trois d'entre eux sont absents et chacun des autres doit payer 15 F en plus. Quel était le prix de revient total de l'excursion.
18. Un enfant veut placer ses billes en tas égaux contenant chacun 12 billes. Il lui reste alors 16 billes. En mettant 3 billes de plus par tas, il lui manque 5 billes. Combien de billes possède-t-il ?
19. Un chemisier a acheté des chemises à 9 F la pièce. Il en vend la moitié à 12 F pièce, le tiers à 11,40 F et le reste à 9,60 F. Il fait ainsi un bénéfice de 115,20 F. Combien de chemises a-t-il vendues ?
20. Un marchand a acheté une pièce d'étoffe à 7,20 F le mètre. Il en revend 13 mètres à 9 F puis les $\frac{3}{5}$ du reste à 9,60 F le mètre et le nouveau reste à 7,50 F le mètre. Il fait ainsi un bénéfice de 109,20 F. Trouver la longueur de cette pièce.
21. On mélange du café à 7,20 F le kg avec du café à 8,40 F le kg. Quelle quantité du premier doit-on prendre pour 10 kg du second, si l'on veut obtenir un mélange qui revienne à 8 F le kg.
22. Deux trains partent en même temps, le premier de Paris, le second de Tours, se dirigeant l'un vers l'autre. Le premier marche à 90 km à l'heure, et le deuxième à 80 km à l'heure. Sachant que la distance Paris-Tours est de 238 km, on demande à quelle distance de Paris ils vont se croiser.
23. Un express part de Paris à 8h30 et se dirige vers le Mans à la vitesse de 75 km à l'heure. À 9h01, un rapide part du Mans vers Paris et marche à 84 km à l'heure. La distance Paris-Le Mans étant de 211 km, trouver l'heure de la rencontre.
24. Deux nombres ont pour différence 25 et leur somme est égale à 109. Quels sont ces deux nombres ?
25. La différence de deux nombres est 14, et le double du plus grand surpasse de 5 le triple du plus petit. Quels sont ces deux nombres ?
26. Trouver trois nombres impairs consécutifs, sachant que leur somme est égale à 141.
27. Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que le périmètre est égal à 272 mètres et que la longueur est les $\frac{5}{3}$ de la largeur.

28. La longueur d'un champ rectangulaire est inférieure de 15 mètres au double de la largeur. Trouver sa surface sachant que le demi-périmètre est égal à 186 mètres.
29. Trois enfants ont ensemble 33 ans. L'âge du premier dépasse de 2 ans l'âge du deuxième et est le double de l'âge du troisième. Trouver l'âge de chacun d'eux.
30. La somme de deux nombres est 496. En les divisant l'un par l'autre, on trouve 6 pour quotient entier et 48 pour le reste. Trouver ces deux nombres.
31. La différence de deux nombres est 516. Le quotient entier de ces deux nombres est 13 et le reste de leur division est 24. Trouver ces deux nombres.
32. Deux enfants ont ensemble 105 billes. Si le premier en avait 15 de plus, il en aurait trois fois plus que le second. Combien de billes ont-ils chacun ?
33. On écrit 3 nombres à la suite l'un de l'autre. Chacun d'eux surpasse de 5 le double de celui qui le précède. Sachant que leur somme est égale à 160, trouver ces trois nombres.
34. La somme de deux nombres est 162. En ajoutant 13 à chacun d'eux, l'un d'eux devient le triple de l'autre. Trouver ces deux nombres.
35. Partager une somme de 1 850 F entre 3 personnes, sachant que la première reçoit 250 F de moins que la deuxième et deux fois moins que la troisième.
36. Un cultivateur vend pour 994 F du blé à 26 F le quintal et de l'avoine à 15 F le quintal. Sachant que le poids de l'avoine est le triple de celui du blé, combien de quintaux de chaque sorte a-t-il vendus ?
37. Un cycliste qui fait 30 km à l'heure rejoint au bout de 1 h 20 min un piéton qui marche à 6 km à l'heure. Quelle était l'avance du piéton au moment du départ du cycliste ?
38. Une usine emploie 171 ouvriers. Le nombre de femmes est le tiers de celui des hommes et celui des enfants[1] la moitié de celui des femmes. Trouver le nombre d'hommes, de femmes, et d'enfants employés à l'usine.
39. Un mètre de drap coûte 7,20 F de plus qu'un mètre de toile. Sachant que 10 m de drap et 12 m de toile coûtent ensemble 256,80 F, trouver le prix du mètre de chacune des deux étoffes.
40. Un épicier vend 1 kg de café et 3 kg de sucre pour 13,20 F, puis une autre fois 9 kg de café et 13 kg de sucre pour 102 F. Quel est le prix du kg de café et celui du kg de sucre ?
41. Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 75 F. Sachant qu'un canard et un poulet valent 21 F, trouver le prix d'un canard et celui d'un poulet.
42. Deux ouvriers gagnent à eux deux 30 F par jour. En un mois le premier a travaillé 24 jours et le deuxième 20 jours et ils ont reçu à eux deux 656 F. Quel est le salaire journalier de chacun d'eux ?
43. Un fabricant a vendu 5 mètres de toile et 10 mètres de drap pour 210 F ; puis une autre fois 27 mètres de toile et 23 mètres de drap pour 631,80 F. Trouver le prix d'un mètre de toile et celui d'un mètre de drap.

1. Ahem.

44. Un épicier vend 15 litres de liqueurs pour 96 F. L'une de ces liqueurs est vendue 5,40 F le litre, et l'autre 6,90 F le litre. Combien de litres de chaque sorte a-t-il vendus ?
45. Pour payer une somme de 890 F, on a donné 46 pièces, les unes de 20 F, les autres de 10 F. Combien de pièces de chaque sorte a-t-on données ?
46. Un négociant a vendu 37 quintaux de blé, les uns à 25 F, les autres à 27 F. Il a retiré 975 F de sa vente. Calculer le nombre de quintaux de chaque sorte. Une somme de 329 000 F doit être partagée entre trois personnes. La part de la deuxième est les $\frac{4}{3}$ de celle de la première et celle de la troisième est la moitié de celle de la première plus 23 000 F. Calculer les trois parts.
47. Une salle de cinéma comprend des places à 3 F, à 2,40 F, et à 2 F. Il y a deux fois plus de places à 2,40 F que de places à 3 F et le nombre de places à 2 F est les $\frac{5}{11}$ du nombre total. La salle complète fournit une recette de 1 792 F. Trouver le nombre total de places.

Chapitre 20

Problèmes de révision

1. En vendant son blé 27 F le quintal, un paysan peut acheter une maison et il reste 675 F. En vendant le quintal de blé 24,75 F, il achète la maison et il lui reste 78,75 F. Quel est le prix de la maison ?
2. Deux ouvriers travaillent dans le même atelier. Le premier gagne 0,90 F par jour de plus que le second : il a travaillé 25 jours et le second 23 jours. Le premier a gagné 47,70 F de plus que le second. Quel est le salaire journalier de chacun ?
3. On a, pour 60,20 F, acheté 4 kg de café, 5 kg de sucre, et 3 kg de chocolat. Trouver le prix au kilogramme des trois denrées, sachant qu'un kilogramme de chocolat coûte 1,20 F de moins qu'un kilogramme de café et 6,20 F de plus qu'un kilogramme de sucre.
4. Un cycliste roule à 32 km à l'heure et part 2 minutes avant un second cycliste lancé à sa poursuite et dont la vitesse est 36 km à l'heure. Au bout de combien de temps le second cycliste rejoindra-t-il le premier ?
5. Un père a trois enfants âgés respectivement de 12, 10 et 8 ans. Le père a 36 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses trois enfants ?
6. Un marchand achète du vin qu'il revend avec un bénéfice égal aux $\frac{25}{100}$ du prix de vente. En gagnant 120 F de moins, il réaliserait un bénéfice égal au $\frac{1}{5}$ du prix d'achat. Quel est son bénéfice ?
7. Une somme de 1 420 F est composée de 34 billets, les uns de 50 F, les autres de 10 F. Quel est le nombre de billets de chaque sorte ?
8. La distance de deux villes est de 840 km. Une automobile parcourt cette distance en 13 h. Une partie du trajet est faite à la vitesse moyenne de 60 km à l'heure, l'autre à la vitesse moyenne de 80 km à l'heure. Quelles sont les deux parties de ce trajet ?
9. On achète une première fois 4 kg de café et 3 kg de sucre pour 33,25 F et une seconde fois 3 kg de café et 2 kg de sucre pour 24,70 F. Quel est le prix du kilogramme de café et celui du kilogramme de sucre ?
10. Deux cyclistes roulent sur une piste circulaire de 480 m de tour. Quand ils roulent dans le même sens, le premier dépasse le second toutes les 3 minutes. Quand ils roulent en sens contraire, ils se croisent à intervalles réguliers de 24 secondes. Trouver la vitesse de chaque cycliste.

11. Un train a mis 36 secondes à passer devant un observateur immobile. Sa longueur est 300 m. Quelle est sa vitesse ? Un second train met 24 secondes pour croiser le premier et passe devant l'observateur immobile en 18 secondes. Trouver la longueur et la vitesse de ce second train.
12. Un capital est placé à 6% pendant 18 mois. S'il était placé à 5% pendant 2 ans, les intérêts augmenteraient de 2 500 F. Quel est ce capital ?
13. Un cycliste et un piéton partent en même temps et dans le même sens de deux points A et B distants de 36 km. La vitesse du cycliste vaut 5 fois celle du piéton. À quelle distance de A le cycliste attendra-t-il le piéton ? À quelle distance de A était le cycliste lorsqu'il avait sur le piéton un retard de 10 km ?
14. Deux capitaux dont l'un est les $\frac{3}{4}$ de l'autre sont placés pendant 18 mois au même taux 5 %. La somme totale ainsi obtenue (capitaux et intérêts réunis) est 451 500 F. Quels sont ces deux capitaux ?
15. 15 litres de lait coupé d'au pèsent 15,150 kg. La densité du lait pur étant 1,03, combien ce lait contient-il de litres d'eau ?
16. Deux cyclistes partent en même temps de deux villes A et B distantes de 100 km et vont à la rencontre l'un de l'autre. Ils se rencontrent au bout de 2 h. Si le cycliste qui part de A était parti 20 minutes avant l'autre, la rencontre aurait eu lieu $\frac{46}{25}$ d'heure après le départ du second cycliste. Trouver la vitesse de chacun d'eux.
17. Un bassin contient de l'eau jusqu'au $\frac{6}{11}$ de sa hauteur. On y verse encore de l'eau jusqu'à ce que le niveau atteigne les $\frac{7}{8}$ de la hauteur. Calculer la hauteur du bassin sachant que le niveau s'est élevé de 58 cm.
18. Un terrain a été partagé en trois parties : les $\frac{2}{5}$ ont été plantés en vigne, le $\frac{1}{3}$ a été ensemencé en blé et le reste en luzerne. Sachant qu'il y a 18 ares de différence entre la vigne et la luzerne, trouver la surface totale du terrain et la surface de chacune des parties.
19. Un travail a été exécuté par trois ouvrières. La première en fait les $\frac{4}{13}$, la deuxième les $\frac{5}{6}$ de ce qu'a fait la première, et la troisième fait le reste. Sachant que cette dernière a touché 75 F de moins que les deux autres réunies, on demande de calculer le prix du travail.
20. Un champ est partagé en trois parties : la première est égale aux $\frac{3}{8}$ du total, la deuxième aux $\frac{9}{11}$ de la première. Sachant que la dernière partie surpasse de 17 centiares la seconde, trouver la surface de chacune de ces trois parties.
21. Une propriété comprend des bois, de la vigne et des prairies. La surface de la vigne est égale aux $\frac{3}{4}$ de celle des bois, et celle des prairies est les $\frac{6}{13}$ du total. Trouver la surface des bois, celle de la vigne et celle des prairies, sachant que la surface des prairies dépasse de 3,14 ha celle des bois.
22. Une personne dépense le $\frac{1}{5}$ de son argent dans un magasin, les $\frac{3}{7}$ du reste dans un autre. Dans un troisième elle voudrait bien acheter 22 m de toile à 30 F le mètre, mais il lui manque 52 F. Quelle somme avait-elle emportée ?
23. Un marchand a vendu à un premier client $\frac{1}{5}$ d'une pièce d'étoffe, puis à un deuxième $\frac{1}{3}$ du reste, et à un troisième le quart du nouveau reste. Il lui reste 36 m d'étoffe. Quelle était la longueur de la pièce initiale ?

24. Trois enfants se partagent des fraises de la manière suivante. Le premier en prend le $\frac{1}{3}$, le deuxième le $\frac{1}{3}$ du reste, et le troisième le $\frac{1}{3}$ du nouveau reste. Le reste final est enfin partagé également entre eux et chacun reçoit alors 40 fraises. Trouver le nombre de fraises total.
25. Un marchand vend une pièce d'étoffe. La première fois, il en vend les $\frac{2}{7}$ plus 3 mètres à 32 F le mètre ; la seconde fois, il en vend les $\frac{2}{5}$ moins 8 mètres à 30 F le mètre. Il reçoit ainsi 1 336 F. Quelle était la longueur de la pièce et combien de mètres lui reste-t-il ?
26. Dans un théâtre il y a $\frac{1}{6}$ des places à 4 F, $\frac{1}{4}$ à 3 F, 450 places à 2,40 F et le reste à 1,60 F. La recette maximum possible est 3 180 F. La recette maximum possible est 3 180F. Trouver le nombre total de places.
27. Un marchand vend un lot de chemises. Il en vend $\frac{1}{4}$ plus 2 avec un bénéfice de 7 F par chemise, puis les $\frac{2}{5}$ moins 3 avec un bénéfice de 5 F, et le reste avec un bénéfice de 6 F. Son bénéfice total est de 356 F. Trouver le nombre de chemises vendues.
28. Dans une classe, le $\frac{1}{3}$ des élèves est âgé de 11 ans, la moitié plus 3 est âgée de 12 ans et le reste est âgé de 13 ans. Sachant que les élèves ont à eux tous 352 ans, trouver le nombre des élèves de la classe.
29. Une certaine somme est partagée entre 3 personnes. La première en reçoit le tiers, la seconde les $\frac{4}{9}$ moins 1 360 F et la troisième les $\frac{2}{7}$ moins 2 120 F. Trouver la somme partagée et la part de chacune.
30. Partager un somme de 41 450 F entre 3 personnes de façon que la première reçoive 2 500 F de plus que la deuxième et 1 350 F de moins que la troisième.
31. Deux cyclistes partent de deux villes distantes de 72 km et se dirigent l'un vers l'autre. Le premier fait 24 km à l'heure et le deuxième 30 km à l'heure. Quelle sera la distance parcourue par chacun d'eux au moment de la rencontre ?
32. Un express part de Paris à 8 h 30 et se dirige vers Le Havre à 80 km à l'heure. À 8 h 48 un rapide part du Havre pour Paris et marche à 90 km à l'heure. Sachant que la distance Paris-Le Havre est égale à 228 km, trouver à quelle heure et à quelle distance de Paris aura lieu la rencontre.
33. Une personne veut consacrer 3 heures à une promenade. Elle part en automobile à la vitesse de 70 km à l'heure et revient à pied à 5 km à l'heure. À quelle distance du point de départ devra-t-elle descendre de l'automobile ?
34. Un cycliste roule pendant 1 h 40 min, puis prend pendant 20 minutes un train dont la vitesse est les $\frac{5}{3}$ de la sienne. Il a parcouru au total 60 km. Quelle est la vitesse du cycliste ?
35. Un premier cycliste part à 9 h du matin et fait 24 km à l'heure. Un second cycliste part à sa poursuite à 9 h 48 et fait d'abord 36 km à l'heure. Mais il s'arrête 9 minutes et ne fait ensuite que 30 km à l'heure. Il rejoint le premier cycliste à 12 h 15. Pendant combien de temps le second cycliste a-t-il roulé à 36 km à l'heure ?
36. Un train part d'une ville A à 7 h. Il arrive en B à 11 h 30. Il fait les $\frac{3}{5}$ du trajet à une vitesse de 84 km à l'heure. Dans la seconde partie du trajet, sa vitesse est réduite à 70 km à l'heure. Trouver la distance entre A et B.

37. Un cycliste met 4 h 30 pour faire le trajet aller et retour d'une ville A à une ville B distante de 60 km. Il fait 30 km à l'heure en terrain plat, 36 km à l'heure en descente et 20 km à l'heure en montée. Trouver la longueur du terrain plat entre A et B. Sachant qu'il met 12 minutes de plus à l'aller qu'au retour, trouver la longueur des montées et descentes de A vers B.
38. Un piéton marche pendant 3 h 40. Il monte alors dans une automobile qui a une vitesse égale aux $\frac{40}{3}$ de la sienne et qui le dépose au bout de 10 minutes à 26,5 km de son point de départ initial. Trouver la vitesse du piéton.
39. Deux capitaux égaux, placés le premier à 4,5% pendant 16 mois, le second à 4% pendant 18 mois ont rapporté 1 800 F d'intérêt total. Trouver leur valeur commune initiale.
40. Deux sommes égales sont placées l'une à 4%, l'autre à 5% pendant 2 ans et 8 mois. La seconde a rapporté 800 F de plus que la première. Quelle est le montant de chacune des sommes placées ?
41. On place le $\frac{1}{3}$ d'un capital à 3%, les $\frac{2}{5}$ à 3,5% et le reste à 4%. Au bout de 15 mois, on a touché 2 600 F d'intérêt. Trouver la valeur de ce capital.
42. Un capital est partagé en trois parts. La première est les $\frac{4}{5}$ de la deuxième, et les $\frac{2}{3}$ de la troisième. La première part est placée à 4 %, la deuxième à 5%, la troisième à 5,5%. L'intérêt annuel est de 11 100 F. Quel est ce capital ?
43. Une personne place les $\frac{2}{3}$ de son capital à 3,5 %, les $\frac{2}{5}$ du reste à 4% et le reste à 4,5%. Ce dernier placement lui est remboursé au bout de huit mois et reste 4 mois improductif. Le revenu total au bout de l'année est 78 F. Trouver le capital.
44. Un certain capital est placé à 6% pendant 10 mois. Un autre égal aux $\frac{2}{3}$ du précédent est placé à 5% pendant huit mois. Trouver les deux capitaux, sachant que la différence des intérêts est de 2 500 F.
45. Une personne avait placé les $\frac{5}{6}$ de son capital à 4 % et le reste à 5 %. Elle prélève 60 000 F sur ce capital et place le reste à 4,5 %. Son revenu diminue de 1 200 F par an. Quel était son capital primitif ?
46. Une personne possède 45 00 F. Elle emploie une partie de ce capital à l'achat d'une propriété. Elle place les $\frac{2}{3}$ du reste à 4% et le tiers restant à 5%. Ces deux placements lui assurent un revenu de 780 F. Trouver le prix de la propriété.
47. Un propriétaire veut construire une usine. Il emploie les $\frac{3}{10}$ de sa fortune à l'achat du terrain qui lui revient à 7,20 F le mètre carré. Il consacre les $\frac{4}{7}$ du reste à la construction des bâtiments. Il place alors les $\frac{2}{3}$ de l'argent disponible à 4% et le reste à 4,5%, ce qui lui procure un revenu annuel de 450 F. On demande la fortune totale du propriétaire et la surface du terrain acheté.
48. Une personne a placé une certaine somme à 6 % à intérêts simples. Au bout de 5 ans et 4 mois, elle retire, capital et intérêts réunis, une somme de 409 200 F. Quelle était la somme placée ?
49. Une personne place son argent à intérêts simples ; les $\frac{2}{5}$ sont placés à 4 %, le $\frac{1}{3}$ à 5 %, et le reste à 4,5 %. Elle retire son argent au bout de 2 ans et 7 mois et achète une propriété de 429 mètres carré à raison de 4,30 F le mètre carré. Il lui reste alors 163 F. Trouver son avoir primitif.

50. On place les $\frac{2}{5}$ d'un capital de 150 000 F à un certain taux et le reste à un taux supérieur de 1 %. L'intérêt annuel étant 6 150 F, trouver les taux des deux placements.

51. Un capital de 924 000 F est placé à un certain taux pendant 21 mois. Un autre capital de 660 000 F est placé à un taux inférieur de 1 % au précédent, pendant 15 mois. La différence des intérêts étant 47 850 F, trouver les taux des deux placements.

52. On a placé au même taux 240 000 F pendant 2 ans et 250 000 F pendant 2 ans et demi. Le second capital a rapporté 5 800 F d'intérêts de plus que le premier. Calculer le taux de ces deux placements.

53. Une personne avait placé deux capitaux, l'un de 320 F, l'autre de 480 F au même taux de 3 %. Elle retire capitaux et intérêts réunis 834 F. Sachant que le premier capital de 320 F est resté placé 20 mois, on demande la durée du second placement.

54. Une personne place 210 F à 3% et 18 mois plus tard 560 F à 4,5%. Au bout de combien de temps les deux placements auront-ils rapportés des intérêts égaux ?

55. Une personne place 240 F à 4%. 18 mois plus tard elle place une seconde somme d'argent à 6%. Calculer le montant de cette somme placée sachant que 6 mois après les deux placements ont rapporté le même intérêt.

56. Les $\frac{3}{5}$ d'un capital ont été placés à 4% et le reste à 5 %. Au bout de deux ans et demi, les intérêts se sont élevés à 77 F. Calculer ce capital.

57. Une personne avait placé les $\frac{3}{5}$ de son capital à 3 % et le reste à 4 % ; elle retire les deux parts, prélève 105 000 F et replace le reste à 5% ; son revenu annuel se trouve ainsi augmenté de 6 830 F. Quel était le capital primitivement placé ?

58. Une personne place les $\frac{3}{7}$ de son capital à 3%, et le reste est placé à un taux différent mais rapporte annuellement le même intérêt que le premier placement. Calculer ce taux. Calculer ensuite le capital, sachant que la personne perçoit annuellement 12 F d'intérêt de plus que si elle avait placé tout son capital à 5 %.

59. Calculer le montant d'un capital placé à 4% pendant 219 jours, sachant que si l'on comptait l'année de 365 jours dans le calcul de l'intérêt, on trouverait 200 F de moins que si l'on compte l'année de 360 jours que l'on utilise habituellement.

60. Calculer les montants de deux capitaux ayant pour différence 200 F sachant que le moins élevé, placé pendant un an à 4,5% et l'autre placé pendant 2 ans à 3,75 % ont rapporté ensemble 63 F.

61. Un cycliste effectue une promenade de 3 heures. Il parcourt la moitié du trajet à 18 km à l'heure, le tiers à 20 km à l'heure, et le reste à 15 km à l'heure. Trouver la distance parcourue par le cycliste.

62. Un express part à 9 h 15 d'une ville A et arrive à 16 h 25 en B. Il a parcouru la moitié de son parcours à la vitesse de 75 km à l'heure, les $\frac{2}{5}$ du trajet à la vitesse de 72 km à l'heure, et le reste à la vitesse de 80 km à l'heure. La durée totale des arrêts a été de 42 minutes. Calculer la distance AB.

63. Un alliage d'argent et de cuivre au titre de 0,720 pèse 500 grammes. Combien faudrait-il ajouter d'argent pour élever le titre à 0,800 ?

64. On a un lingot d'or de 1 200 grammes au titre de $\frac{11}{12}$. Quelle quantité de cuivre faudrait-il y rajouter pour avoir un alliage au titre de 0,880 ?
65. Un alliage de cuivre et d'argent pesant 4,75 kg est constitué par des volumes égaux de ces deux métaux. Trouver le poids de cuivre et le poids d'argent que contient cet alliage en admettant que leurs poids spécifiques sont respectivement 9 et 10.
66. On a fondu ensemble deux lingots d'argent de titres différents contenant respectivement 250 grammes et 175 grammes d'argent fin et l'on a obtenu un alliage ayant pour titre 0,85. Quels étaient les titres de ces lingots sachant que le second a apporté 2 fois plus de cuivre que l'autre ?
67. Un épicier mélange du café à 8,40 F le kg et à 9,60 F le kg ; Combien doit-il en prendre de chaque sorte sachant qu'il veut obtenir 30 kg de mélange revenant à 8,80 F le kg ?
68. Un négociant mélange trois sortes de café qu'il veut vendre 9,36 F le kg. Ce mélange comprend 64 kg de café, acheté 8,64 F le kg, et deux autres sortes achetées 7,56 F et 6,30 F le kg. Quel poids faut-il prendre de ces deux dernières sortes, sachant que le poids du café à 7,56 F doit être les $\frac{3}{4}$ du poids du café à 6,30 F et que le négociant veut gagner 20% sur le prix de revient.
69. Deux cyclistes éloignés de 66 km vont à la rencontre l'un de l'autre. Le premier qui fait 12 km à l'heure part une heure plus tôt que le second qui fait 15 km à l'heure. On demande au bout de combien de temps ils se rencontreront et quels trajets ils auront parcourus.
70. Un piéton marchant à 5km à l'heure et un cycliste roulant à 15 km à l'heure partent d'une ville A en même temps et vont dans la même direction. Arrivé dans une ville B située à 12 km de A, le cycliste y reste 20 minutes puis revient en A. On demande à quelle distance de A il croisera le piéton.
71. Un cycliste part de Paris à 7 h et va à Fontainebleau où il reste deux heures puis revient à Paris où il arrive à 18 heures. Calculer la distance Paris-Fontainebleau sachant qu'il a fait 15 km à l'heure à l'aller et 12 km à l'heure au retour.
72. Un cycliste monte une côte à la vitesse de 8 km à l'heure et la descend à 15 km à l'heure. Trouver la longueur de cette côte sachant qu'il met 35 minutes de plus pour monter que pour descendre.
73. La route allant d'une ville A à une ville B, distante de 60 km, comprend d'abord une montée, puis une partie horizontale de 20 km et enfin une descente. Un cycliste dont la vitesse en montée est de 8 km à l'heure, et en descente de 15 km à l'heure va de A à B et revient en A. On demande combien il y a de km de montée, et combien de km de descente de A vers B, sachant que le cycliste a mis 1 h 10 de plus pour aller que pour revenir.
74. Deux bassins contiennent déjà l'un 210 litres d'eau, et l'autre 100 litres. Pour les remplir, on ouvre 2 robinets, qui versent l'un 7 litres par minute dans le premier bassin, l'autre 8 litres par minute dans le second. Au bout de combien de temps le contenu du second bassin sera-t-il les $\frac{4}{7}$ du contenu du premier ?
75. Un paysan doit labourer deux champs de même superficie. Il laboure le premier à raison de 8 ares par heure, et le second à raison de 10 ares par heure. Calculer la superficie de chaque champ sachant que pour labourer le second, il met 8 heures de moins que pour labourer le premier.

Chapitre 21

Notions préliminaires

1. Vérification de la règle.
2. Marquer deux points A et B sur une feuille de papier. Déterminer la droite (AB) par pliage.
3. Marquer trois points A, B, C sur une feuille de papier. Déterminer les droites qui joignent deux de ces points. Même exercice avec quatre points A, B, C et D. Combien de droites obtient-on dans ce cas ? Construire leurs points d'intersection ?
4. Construire dans un plan 4 droites se coupant deux à deux en des points distincts. Montrer que l'on obtient ainsi 6 points d'intersection. Combien de droites nouvelles obtient-on en joignant ces points deux à deux ?
5. On donne dans un plan 6 points tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés et on les joint deux à deux. Combien de droites obtient-on ? Montrer que le nombre de ces droites est égal à la somme des 5 premiers nombres entiers ou au demi-produit de 6 par 5. Généraliser pour n points.
6. On considère deux droites (Ox) et (Oy) concourantes en O, situées dans un plan P. On joint par une droite un point A de (Ox) et un point B de (Oy). Montrer que tout point M de la droite AB est situé dans le plan P.
   En déduire que si A et B se déplacent simultanément sur (Ox) et (Oy) la droite (AB) engendre le point P.
7. On considère trois points A, B, C d'une même droite et 3 points A', B', C' d'une seconde droite, distincte de la première. Les droites (AB') et $(A'B)$ se coupent en M, les droites (AC') et $(A'C)$ se coupent en N et les droites (BC') et $(B'C)$ se coupent en P. Vérifier que les trois points M, N, P sont alignés.
8. Construire trois droites issues d'un même point I. Puis d'un point O mener à ces trois droites deux sécantes. Soient A, B, C les intersections des trois droites avec la première sécante ; A', B', C' leurs intersections avec la seconde. Les droites (AB') et $(A'B)$ se coupent en M, les droites (AC') et $(A'C)$ en N et les droites (BC') et $(B'C)$ en P. Vérifier que les 4 points M, N, O et P sont alignés.

Chapitre 22

Segments de droite

1. Construire quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur une même droite (xy) sachant que $AB = CD = 3$ **cm** et $BC = 5$ **cm**. Comparer ensuite les segments $[AC]$ et $[BD]$.
2. Quatre points A, B, C, D sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). Construite ces quatre points sachant que $AC = BD = 9$ **cm** et $BC = 7$ **cm**. Comparer les segments $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que $[AD]$ et $[BC]$ ont milieu O.
3. Quatre points A, B, C, D sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). Construire ces quatre points sachant que $AD = 14$ **cm**, $BC = 10$ **cm** et que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu O. Démontrer les égalités $AB = CD$ et $AC = BD$.
4. On porte bout à bout des segments avec $AB = 10$ **cm**, $BC = 3$ **cm**, $CD = 7$ **cm**. Écrire les inégalités que vérifient AB et BC, AB et CD, CD et BC. Quelle est la mesure de $[AD]$ en prenant AB pour unité, puis BC pour unité, puis CD pour unité ?
5. Trois points O, A, B sont situés dans cet ordre sur une droite (xy) et M est le milieu de $[AB]$.
   (a) On donne $OA = 4$ **cm** et $OB = 10$ **cm**. Quelle est la longueur OM ?
   (b) On donne $OA = a$, et $OB = b$. Démontrer les égalités :
   $$OM = OA + AM; \qquad OM = OB - AM; \qquad OM = \frac{a+b}{2}.$$
6. Trois points A, O, B sont situés dans cet ordre sur une droite (xy) et M désigne le milieu de $[AB]$.
   (a) On donne $OA = 5$ **cm** et $OB = 11$ **cm**. Quelle est la longueur de $[OM]$?
   (b) On donne $OA = a$, et $OB = b$ $(b > a)$. Démontrer les égalités :
   $$OM = AM - OA; \qquad OM = OB - AM; \qquad OM = \frac{b-a}{2}.$$
7. Trois points B, A, C sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

(a) On donne $AB = 7$ **cm** et $AC = 5$ **cm**. Quelle est la longueur de $[IJ]$? Comparer la longueur trouvée à celle de $[BC]$?

(b) Calculer les longueurs BC et IJ connaissant $AB = a$ et $AC = b$.

8. Trois points A, B, C sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

   (a) On donne $AB = 9$ **cm** et $AC = 13$ **cm**. Quelle est la longueur de $[IJ]$? Comparer la longueur trouvée à celle de $[BC]$.

   (b) Calculer les longueurs BC et IJ connaissant $AB = a$ et $AC = b$.

Chapitre 23

Angles

1. Transformer en grades les angles suivants et les construire :
   (a) 45^o ; 30^o ; 60^o.
   (b) 120^o ; 150^o ; 135^o.
   (c) $40^o15'$; $36^o30'$.
   (d) $50^o17'$; $112^o17'$.
2. Transformer en degrés les angles suivants et les construire :
   (a) 30 gr ; 50 gr ; 90 gr.
   (b) 120 gr ; 160 gr ; 190 gr.
   (c) $20,5$ gr ; $37,7$ gr ; $68,9$ gr.
   (d) $42,25$ gr ; $112,6$ gr ; $148,4$ gr.
3. Montrer sur des exemples que la différence de deux angles ne change pas si on leur ajoute (ou retranche) un même angle.
4. Découper dans une feuille de papier deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ mesurant respectivement 68^o et 42^o. Construire par pliage leurs bissectrices $[OM)$ et $[ON)$. Mesurer l'angle $\widehat{MON}$ et le comparer à l'angle $\widehat{AOC}$.
5. On considère dans cet ordre 4 demi-droites $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ et $[OD)$.
   (a) Sachant que $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 35^o$ et $\widehat{BOC} = 48^o$, construire les quatre demi-droites. Calculer et comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$.
   (b) Soit $[OM)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$. Montrer que $[OM)$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{AOD}$.
6. Deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.
   (a) Construire la figure sachant que $\widehat{AOB} = 60^o$ et $\widehat{AOC} = 110^o$. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.

(b) Si $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

7. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont adjacents et $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.
   (a) Effectuer la construction de ces angles en prenant $\widehat{AOB} = 52^o$ et $\widehat{AOC} = 108^o$. Mener $[OM)$ et calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
   (b) On suppose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$ avec $\beta > \alpha$. Montrer que $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.
8. Soient $[OM)$ et $[ON)$ les bissectrices des angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
   (a) Construire la figure pour $\widehat{AOB} = 72^o$ et $\widehat{AOC} = 48^o$. Calculer les mesures des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. Comparer ces mesures.
   (b) Si $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{BOC} = \alpha + \beta$ et $\widehat{MON} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.
9. On considère deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$. Soient $[OM)$ et $[ON)$ les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
   (a) On donne $\widehat{AOB} = 60^o$ et $\widehat{AOC} = 108^o$. Construire la figure et calculer les mesures des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. Comparer ces deux mesures.
   (b) On suppose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.
10. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ des angles non-adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ font un angle de 36^o et l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 64^o.
    (a) Construire la figure et calculer les angles $\widehat{AOM}$, $\widehat{AON}$ et $\widehat{AOC}$.
    (b) Comparer les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. En est-il toujours ainsi ?
11. On considère deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ dont les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ font un angle de 84^o.
    (a) Sachant que l'angle $\widehat{AOC}$ vaut 118^o, construire la figure et calculer les mesures des angles $\widehat{AON}$, $\widehat{AOM}$ et $\widehat{AOB}$.
    (b) Comparer les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{BOC}$. Généraliser.
12. Autour d'un point O sont construits cinq angles successivement adjacents $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, et $\widehat{EOA}$ recouvrant tout le plan. Ces angles vérifient les relations :

    $$\widehat{BOC} = 2\widehat{AOB}; \qquad \widehat{COD} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}; \qquad \widehat{DOE} = 2\widehat{BOC}; \qquad ;\widehat{EOA} = \widehat{BOC} + \widehat{COD}.$$

    (a) Calculer la mesure en degrés de chacun de ces angles.
    (b) Calculer l'angle des bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOE}$.
13. (a) Construire trois angles successivement adjacents : $\widehat{AOB} = 32^o$, $\widehat{BOC} = 72^o$, et $\widehat{COD} = 48^o$, puis les bissectrices $[OM)$, $[ON)$, $[OP)$ et $[OQ)$ des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COD}$.
    (b) Calculer les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{POQ}$. Comparer ces angles à l'angle $\widehat{BOC}$.

(c) Montrer que les angles $\widehat{MOQ}$ et $\widehat{NOP}$ ont la même bissectrice.

14. (a) Construire un angle $\widehat{AOB}$ de 60^o, sa bissectrice $[Ox)$, puis les angles droits $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ adjacents à l'angle $\widehat{AOB}$ et enfin les bissectrices $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ou)$ des angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$, et $\widehat{COD}$.

(b) Calculer la valeur des angles $\widehat{COD}$, $\widehat{xOy}$, et $\widehat{xOz}$. Montrer que $[Ox)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{yOz}$.

(c) Calculer les mesures des angles $\widehat{yOu}$, $\widehat{zOu}$, et $\widehat{xOu}$. Que peut-on dire des demi-droites $[Ox)$ et $[Ou]$?

Chapitre 24

Le cercle

1. Calculer en degrés la mesures des arcs égaux à $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ d'un cercle et construire ces arcs.
2. Effectuer en grades les calculs précédents.
3. Construire sur un cercle de 3 **cm** de rayon les arcs successifs AB, BC, CD et DE mesurant respectivement : 27^o, 53^o, 75^o et 108^o. Calculer la mesure de l'arc EA qui reste sur le cercle.
4. Démontrer le théorème suivant : *La bissectrice d'un angle au centre $\widehat{AOB}$ passe par le milieu M de l'arc intercepté par cet angle.*
   Énoncer et démontrer la réciproque de ce théorème.
5. Énoncer et démontrer la réciproque de chacune des propositions :
   (a) *Si un point est intérieur à un cercle, sa distance au centre est inférieure au rayon.*
   (b) *Si un point est extérieur à un cercle, sa distance au centre est supérieure au rayon.*
6. On donne deux points A et B distants de 5 **cm**. Construire un point C tel que $AC = 6$ **cm** et $BC = 4$ **cm**. Combien y a-t-il de solutions ?
7. Quelle est la figure formée par l'ensemble des centres des cercles de 5 **cm** de rayon passant par un point donné A ?
   Construire un cercle de 5 **cm** de rayon passant par deux points donné A et B tels que $AB = 4$ **cm**.
8. On donne un cercle de centre O, de rayon 4 **cm** et un point A de ce cercle. Construire les cordes issues de A ayant $2,5$ **cm** de longueur.
9. Construire les milieux M et N des deux arcs d'extrémités A et B d'un cercle donné de centre O. Que représentent OM et ON pour les angles saillant et rentrant $\widehat{AOB}$? Comment sont disposés les 3 points M, O et N ?
10. Quatre points A, B, C, D sont disposés dans cet ordre sur un demi-cercle.
    (a) Sachant que $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, comparer les arcs $\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$.
    (b) Dans ce cas montrer que les arcs $\widehat{AD}$ et $\widehat{BC}$ ont même milieu M.

11. Trois points A, B et C sont situés dans cet ordre sur un cercle. Les arcs AB et AC mesurent respectivement 88^o et 154^o. Soit M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$.
    (a) Montrer que $\widehat{AM} = \widehat{AB} + \widehat{BM} = \widehat{AC} - \widehat{BM} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{AC})$.
    (b) Évaluer l'angle $\widehat{AOM}$. Comparer sa valeur à la somme des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
12. On considère sur un cercle deux arcs consécutifs $\widehat{BA} = 78^o$ et $\widehat{AC} = 54^o$.
    (a) Construire les milieux M et N de ces deux arcs.
    (b) Calculer la mesure de l'arc $\widehat{MAN}$ et la comparer à la mesure de l'arc $\widehat{BAC}$. Généraliser.
13. Soient sur un cercle deux arcs de même sens : $\widehat{AB} = 42^o$ et $\widehat{AC} = 108^o$.
    (a) Construire les milieux M et N de ces deux arcs et calculer la mesure de l'arc $\widehat{MBN}$.
    (b) Comparer cette mesure à celle de l'arc $\widehat{BNC}$. Généraliser.

Chapitre 25

Angles associés

1. Construire et calculer le supplément des angles suivants :
   (a) 30^o ; 45^o ; 60^o.
   (b) $67^o35'$; $113^o43'23"$.
   (c) 25 gr ; 50 gr ; 75 gr.
   (d) $56,327$ gr ; $141,943$ gr.
2. Construire et calculer le complément des angles suivants :
   (a) 24^o ; 36^o ; 63^o.
   (b) $23^o37'$; $67^o26'30"$.
   (c) 30 gr ; 48 gr ; 65 gr.
   (d) $31,09$ gr ; $58,542$ gr.
3. Construire à l'aide du rapporteur, deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ de 54^o et 96^o. Calculer l'angle $\widehat{MON}$ de leurs bissectrices. Le comparer à l'angle $\widehat{BOC}$.
4. Deux angles adjacents ont pour somme 102^o. Quel est l'angle de leurs bissectrices ? Calculer et construire ces deux angles sachant que leur différence vaut 36^o.
5. Construire deux angles adjacents supplémentaires dont la différence vaut 54^o.
6. Deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont complémentaires et l'un est les $\frac{2}{3}$ de l'autre. Calculer et construire ces deux angles. Construire les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$. Calculer leur angle $\widehat{MON}$.
7. Les bissectrices de deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ font un angle droit $\widehat{MON}$. Démontrer que ces deux angles sont supplémentaires.
8. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ de deux angles égaux sont dont le prolongement l'une de l'autre. Démontrer que ces deux angles sont opposés par le sommet.
9. Deux angles non adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ ont pour différence un angle droit.
   (a) Calculer l'angle de leurs bissectrices.

(b) Construire ces deux angles sachant que $\widehat{AOB} = \frac{3}{8}\widehat{AOC}$.

10. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ de deux angles non adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ font un angle de 36^o.

    (a) Calculer l'angle $\widehat{BOC}$, lorsque $\widehat{AOB} = 84^o$. Comparer la valeur trouvée à celle de l'angle $\widehat{MON}$.

    (b) Généraliser pour des valeurs quelconques des angles donnés.

11. Quatre angles consécutifs de même sommet $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOA}$ sont tels que :

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \qquad \text{et} \qquad \widehat{BOC} = \widehat{DOA}.$$

    Démontrer que leurs côtés sont deux à deux dans le prolongement de l'autre.

12. Démontrer que lorsque deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ ont même sommet et un côté commun, l'angle $\widehat{MON}$ de leurs bissectrices et la moitié de l'angle de leurs côtés non communs, que ces angles soient adjacents ou non.

13. On construit un angle $\widehat{AOB}$ de 48^o puis les angles droits $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$ non adjacents au premier.

    (a) Comparer les angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$. Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont supplémentaires.

    (b) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ ont même bissectrice $[OP)$. Calculer l'angle $\widehat{MON}$ des bissectrices des angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.

14. Construire l'angle $\widehat{AOB} = 108^o$ puis les angles droits $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$ adjacents à celui-ci.

    (a) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont supplémentaires. Comparer les angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.

    (b) Démontrer que les bissectrices $[OP)$ et $[OQ)$ des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont en ligne droite et calculer l'angle $\widehat{MON}$ des bissectrices des angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.

15. Calculer la valeur et construire deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sachant que leurs bissectrices font un angle de 40^o et que le premier est égal aux $\frac{3}{5}$ de l'autre.

    (a) Dans le cas où les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents.

    (b) Dans le cas où ces angles ne sont pas adjacents.

Chapitre 26

Droites perpendiculaires

1. Vérification de l'angle droit d'une équerre.
2. Construire le complément d'un angle aigu :
   (a) Par pliage ;
   (b) à l'aide d'un rapporteur ;
   (c) à l'aide de l'équerre.
3. Déterminer la projection H et la distance d'un point extérieur O à une droite (xy).
   (a) Par pliage ;
   (b) à l'aide de l'équerre.
4. Construire la médiatrice d'un segment donné $[AB]$.
   (a) Par pliage ;
   (b) à l'aide d'un double décimètre et du rapporteur ou de l'équerre.
5. Soient I et J deux points d'une droite (xy) et un point extérieur O. On trace les cercles de centres I et J passant par O.
   (a) Montrer que les deux cercles passent également par le point O' qui coïncide avec O lorsqu'on plie la figure suivant (xy).
   (b) En déduire une construction de la perpendiculaire menée de O à (xy) et de la projection H du point O sur (xy).
6. On prend trois points A, B, C sur un même cercle. Mener d'un point M de ce cercle les perpendiculaires (MP), (MQ) et (MR) aux trois droites (BC), (CA) et (AB). Si la construction est précise, les trois points P, Q, R sont alignés. Vérifiez-le.
7. Soient trois points A, B, C non alignés. Mener de chacun d'eux, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à la droite déterminée par les deux autres. Que constate-t-on ? On envisagera le cas où les trois angles sont aigus, et le cas où l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.
8. On considère un angle aigu $\widehat{AOB}$.

(a) Construire un angle aigu $\widehat{COD}$ tel que $[OC)$ soit perpendiculaire à $[OA)$ et $[OD)$ perpendiculaire à $[OB)$.

(b) Comparer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ et énoncer le théorème correspondant.

(c) Que peut-on dire des angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ ainsi que de leurs bissectrices ?

9. Reprendre le problème précédent avec des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ obtus.

10. On considère un angle obtus $\widehat{AOB}$ et on construit à l'intérieur de cet angle $[OC)$ perpendiculaire à $[OA)$ et $[OD)$ perpendiculaire à $[OB)$.

(a) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

(b) Comment sont disposées les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$?

(c) Calculer l'angle $\widehat{MON}$ des bissectrices des angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$.

11. Soit une droite (AB) et un point O de cette droite. On construit d'un même côté de cette droite deux angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOC}$ complémentaires ainsi que la perpendiculaire $[OE)$ à (AB) en O.

(a) Démontrer que (OC) et (OD) sont perpendiculaires.

(b) Comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{EOD}$ puis les angles $\widehat{BOD}$ et $\widehat{EOC}$.

(c) Que peut-on dire des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{DOE}$?

12. Deux droites perpendiculaires (xx') et (yy') se coupent en O. Deux autres droites perpendiculaires (uu') et (vv') se coupent en O de façon que $[Ou)$ soit dans l'angle $\widehat{xOy}$ et $[Ov)$ dans l'angle $\widehat{x'Oy}$.

(a) Trouver dans la figure les angles égaux à $\widehat{xOu}$.

(b) Déterminer les angles complémentaires, puis les angles supplémentaires de $\widehat{xOu}$.

13. Quatre angles consécutifs $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOE}$ valent chacun 45^o.

(a) Que peut-on dire des demi-droites $[OA)$ et $[OE)$, $[OB)$ et $[OD)$?

(b) On construit les bissectrices des quatre angles initiaux. Montrer qu'elle sont deux à deux[1] perpendiculaires.

14. On considère une feuille de papier $ABCD$ dont les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont droits. Par le milieu O de $[AB]$, on trace une demi-droite $[Ox)$.

(a) Plier la feuille de façon à amener les segments $[OA]$ et $[OB]$ sur $[Ox)$. Montrer que A et B viennent alors coïncider en P.

(b) L'un des plis coupe $[AD]$ en M, l'autre coupe $[BC]$ en N. Montrer que (Om) et (ON) sont perpendiculaires.

(c) Démontrer que les trois points M, P et N sont alignés sur la perpendiculaire en P à $[Ox)$.

1. Deux sont perpendiculaires à deux autres ; non deux quelconques.

Chapitre 27

Polygones. Triangles

1. Construire les médianes, les hauteurs, les bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle. Que remarquez-vous ?
2. Construire un triangle rectangle et isocèle dont les côtés de l'angle droit valent 32 mm.
3. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse 58 mm et un côté de l'angle droit 42 mm.
4. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse 44 mm et un angle 32^o.
5. Construire un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit 37 mm et un angle adjacent à ce côté 53^o.
6. Construire un triangle isocèle dont les deux côtés égaux mesurent 54 mm et le troisième côté 60 mm.
7. Construire un triangle équilatéral de 29 mm de côté.
8. Construire un triangle ABC connaissant $\widehat{A} = 52^o$, $AB = 27$ mm, $AC = 38$ mm.
9. Construire un triangle ABC connaissant $BC = 57$ mm, $\widehat{B} = 63^o$, $\widehat{C} = 51^o$.
10. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 18$ mm, $AB = 25$ mm, et $BC = 50$ mm (on supposera H entre B et C).
11. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 18$ mm, $AB = 25$ mm, et $AC = 30$ mm.
12. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 22$ mm, $AB = 29$ mm, et $\widehat{A} = 37^o$.
13. Construire un triangle ABC connaissant $AH = 30$ mm, $BH = 12$ mm, et $AC = 40$ mm.
14. Construire un triangle ABC connaissant $AB = 38$ mm, la médiane $AM = 23$ mm, et $BM = 23$ mm. Mesurer les angles de ce triangle.
15. Construire un triangle ABC connaissant $AB = 41$ mm, $\widehat{BAC} = 54^o$ et la bissectrice intérieure $AD = 45$ mm.
16. Construire un triangle ABC connaissant : $\widehat{A} = 120^o$, $AB = 30$ mm, et $BC = 57$ mm.
17. Construire un triangle isocèle ABC sachant que $AB = AC = 32$ mm, et que $\widehat{B} = 65^o$.

18. Découper dans une feuille de bristol ou de léger carton une fausse équerre triangulaire ABC telle que $BC = 10$ cm, $\widehat{B} = 60^o$ et $\widehat{C} = 72^o$. Vérifier que l'angle $\widehat{A}$ mesure 48^o.
19. Utiliser la fausse équerre de l'exercice précédent pour mener par un point extérieur A une oblique $[AM)$ faisant un angle de 60^o avec une droite donnée (xy). Nombre de solutions ?
20. Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 40$ mm et $\widehat{C} = 72^o$. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
21. Construire un triangle ABC tel que $AB = 32$ mm, $\widehat{B} = 65^o$, et $\widehat{C} = 47^o$. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
22. Construire un triangle isocèle ABC tel que $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^o$ avec une hauteur $AH = 48$ mm. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
23. Construire un triangle ABC sachant la hauteur $AH = 45$ mm et que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux à 60^o et 72^o. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
24. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 36$ mm, l'angle $\widehat{B} = 120^o$ et l'angle $\widehat{C} = 48^o$.
25. Construire un quadrilatère convexe $ABCD$ sachant que $AB = AC = BC = 5$ **cm**, $AD = 3$ **cm** et $CD = 4$ **cm**. Mesurer au rapporteur les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère obtenu.
26. Construire un quadrilatère convexe $ABCD$ connaissant $\widehat{A} = 120^o$, $AB = 3$ **cm**, $AD = 2$ **cm**, $BC = 3,5$ **cm**, et $CD = 4$ **cm**. Mesurer au rapporteur les angles $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère obtenu.

Chapitre 28

Les deux premiers cas d'égalité des triangles

1. Démontrer que dans deux triangles égaux ABC et $A'B'C'$, les médianes AM et $A'M'$ sont égales. (Comparer ABM et $A'B'M'$.). Vérification graphique.
2. Même problème pour les bissectrices intérieures AD et $A'D'$.
3. On porte sur les cotés d'un angle $\widehat{xOy}$ respectivement deux longueurs égales OA et OB et on joint A et B à un point quelconque M de la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.
   (a) Comparer les triangles AOM et BOM. Conséquences ?
   (b) Démontrer que $AM = BM$ et que $[OM)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.
4. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel la droite (AC) est bissectrice intérieure des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
   (a) Comparer les triangles ABC et ADC. Conséquences ?
   (b) On plie la figure suivant la droite (AC). Que se passe-t-il ? En déduire que (AC) est médiatrice du segment $[BD]$.
5. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux diamètres pris dans deux cercles de même centre O.
   (a) Comparer les triangles AOC et BOD puis les triangles AOD et BOC.
   (b) Comparer les côtés opposés et les angles opposés du quadrilatère $ACDB$.
6. On considère dans un cercle deux angles au centre égaux $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOC}$ tous deux adjacents à l'angle $\widehat{BOD}$.
   (a) Comparer les triangles AOB et COD. Conséquences ?
   (b) Comparer les triangles AOD et COB. Conséquences ? Montrer que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.
7. Deux points A et B situés d'un même côté de la droite (xy) se projettent en H et K sur cette droite et on a $AH = BK$.
   (a) Comparer les triangles AHK et BHK. Conséquences ?

(b) Comparer les triangles ABK et BAH puis les angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{HBA}$.

8. Une droite (xy) passe entre les points A et B et les distances AH et BK à cette droite sont égales. Soit O le milieu de $[HK]$.
   (a) Comparer les triangles OAH et OBK. Conséquences ?
   (b) Démontrer que les points A, O et B sont alignés et que O est le milieu de $[AB]$.
9. Dans un quadrilatère convexe la diagonale $[AC]$ fait des angles égaux avec $[AD]$ et $[BC]$ d'une part et avec $[AB]$ et $[CD]$ d'autre part. Soit O le milieu de $[AC]$.
   (a) Comparer les triangles ABC et CDA. En déduire une propriété des angles opposés et des côtés opposés du quadrilatère.
   (b) Comparer les triangles OAB et OCD et montrer que O est aussi milieu de $[BD]$.
10. Deux segments inégaux $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu O.
   (a) Comparer les triangles OAC et OBD puis les triangles AOD et BOC. Conséquences pour les côtés et les angles du quadrilatère $ACBD$.
   (b) Une droite (Ox) est perpendiculaire en H à (AC). Montrer qu'elle est également perpendiculaire en K à (BD) et que O est le milieu de $[HK]$.
11. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que $AB = CD$ et $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. Soit O le milieu de la diagonale $[AC]$.
   (a) Comparer les triangles OAB et OCD. Conséquences ? Que représente le point O pour le segment $[BD]$?
   (b) Une droite (xOy) coupe (AB) en M et (DC) en N. Comparer les triangles OAM et OCN. En déduire que $AM = CN$ et que O est le milieu de $[MN]$. Comparer les angles $\widehat{OMA} = \widehat{ONC}$.
12. On prolonge la médiane $[AM]$ du triangle ABC d'une longueur MD égale à AM.
   (a) Comparer les triangles MAC et MDB. Conséquences pour AC et BD ainsi que pour les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MDB}$?
   (b) Construire la figure sachant que $AM = 3$ **cm**, $AB = 5$ **cm** et $AC = 4$ **cm**.
13. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour construire un triangle ABC connaissant la médiane $AM = 36$ mm, $\widehat{MAB} = 72^o$, et $\widehat{MAC} = 54^o$.
14. On considère deux angles égaux $\widehat{BAx}$ et $\widehat{ABy}$ situés de part et d'autre de la droite (AB). Une sécante issue du milieu O de $[AB]$ coupe $[Ax)$ en M et $[By)$ en N.
   (a) Comparer les triangles AOM et BON. Conséquences ?
   (b) Comparer les triangles AON et BOM puis les segments $[AN]$ et $[BM]$. Montrer que le milieu de $[AN]$ et le milieu de $[BM]$ sont sur une droite issue de O.
15. (a) Construire un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 42^o$, $AB = 48$ mm, et $AC = 36$ mm, puis, extérieurement au triangle, les triangles isocèles en A ACD et ABE tels que $\widehat{CAD} = \widehat{BAE} = 58^o$.

(b) Comparer les triangles ABD et AEC puis les segments $[BD]$ et $[EC]$. Ces segments se coupent en I : mesurer l'angle $\widehat{CID}$.

16. (a) Construire un triangle ABC tel que $BC = 34$ mm, $\widehat{B} = 82^o$ et $\widehat{C} = 68^o$, puis extérieurement au triangle ABC construire les triangles ABD et ACE tels que $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^o$, $BD = BA$ et $CE = CA$. ainsi que le triangle ICB égal au triangle ABC ($IC = AB$, $IB = AC$).

    (b) Comparer les triangles BDI et CIE puis les segments $[ID]$ et $[IE]$. Mesurer l'angle $\widehat{DIE}$.

17. On donne un triangle ABC et on prolonge le côté $[AB]$ d'une longueur $BD = AB$, le côté $[AC]$ d'une longueur $CF = AC$ et la médiane $[AM]$ d'une longueur $MI = AM$.

    (a) Comparer les triangles MAB et MIC puis MAC et MIB. Montrer que le quadrilatère $BACI$ a ses côtés opposés égaux et ses angles opposés égaux.

    (b) Comparer les triangles BDI et CIF puis les segments $[ID]$ et $[IF]$. Mesurer l'angle $\widehat{DIF}$. Que déduit-on pour les 3 points I, D et F ?

18. On considère un quadrilatère concave $ABCD$ dans lequel la droite (AC) est bissectrice de l'angle saillant $\widehat{BAD}$ et aussi de l'angle rentrant $\widehat{BCD}$.

    (a) Comparer les triangles ABC et ADC. Conséquences ?

    (b) Le segment $[BD]$ coupe en H le prolongement de $[AC]$. Comparer les triangles HBC et HDC. Conséquences ?

    (c) Montrer que la droite (AC) est la médiatrice de $[BD]$.

Chapitre 29

Symétrie par rapport à une droite

1. Soient deux points A et A' symétriques par rapport à une droite (xy) et deux points quelconques I et J de la droite (xy). Montrer que les cercles de centres I et J passant par A se recoupent au point A' En déduire une construction au compas du symétrique d'un point par rapport à la droite (xy).
2. (a) Construire le symétrique d'un polygone $ABCDEF$ par rapport à une droite (xy) en utilisant l'exercice précédent.
   (b) Vérifier que (BD) et son symétrique $(B'D')$ se coupent en O sur (xy) et que l'angle $\widehat{BOB'}$ admet (xy) pour bissectrice.
3. (a) Construire le symétrique $\widehat{B'A'C'}$ d'un angle $\widehat{BAC}$ par rapport à la droite (xy).
   (b) Dans quel cas la droite (AB) est-elle confondue avec sa symétrique $(A'B')$?
4. Dans un triangle ABC on mène la bissectrice intérieure de l'angle A coupant en D le côté $[BC]$. (On suppose $AB < AC$).
   (a) Construire le point E symétrique de B par rapport à (AD). Que représente (CE) pour les segments $[AB]$ et $[AC]$?
   (b) Que représente la droite (DA) pour l'angle D du triangle CDE ?
5. Reprendre l'exercice précédent avec (AD) bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$.
6. (a) Construire le symétrique $A'B'C'$ du triangle ABC par rapport à la droite (xy).
   (b) Les médianes $[BM]$ et $[CN]$ du triangle ABC se coupent en G, les médianes $[B'M']$ et $[C'N']$ du triangle $A'B'C'$ se coupent en G'. Que représente (xy) pour le segment $[GG']$?
7. On considère un angle $\widehat{BAD}$ tel que $AB = AD$. On construit à l'intérieur de cet angle deux angles égaux $\widehat{ABx}$ et $\widehat{ADy}$.
   (a) Montrer que $[Bx)$ et $[Dy)$ sont symétriques par rapport à la bissectrice $[Ou)$ de l'angle $\widehat{BAD}$. Où se trouve le point d'intersection C de ces deux demi-droites ?
   (b) Comparer les segments $[BC]$ et $[DC]$ et les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ACD}$.

8. On prend les symétriques B et C d'un point A intérieur à l'angle droit $\widehat{xOy}$ par rapport aux droites $[Ox)$ et $[Oy)$.
   (a) Montrer que le point O est le milieu du segment $[BC]$ et que le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A.
   (b) Comparer l'angle $\widehat{BAC}$ à la somme des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC.
9. Les deux points A et B sont d'un même côté de la droite (xy). On construit le symétrique A' de A par rapport à (xy). La droite $(A'B)$ coupe (xy) en M.
   (a) Montrer que (MA) et (MB) dont des angles égaux avec la droite (xy).
   (b) Existe-t-il un autre point N de la droite (xy) tel que (xy) soit bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ANB}$?
10. On considère deux points A et B de part et d'autre de la droite (xy) et on désigne par A' le symétrique de A par rapport à la droite (xy). La droite (BA') coupe (xy) en M.
    (a) Montrer que (MA) et (MB) dont des angles égaux avec la droite (xy).
    (b) Existe-t-il un autre point N de la droite (xy) tel que (xy) soit bissectrice de l'angle $\widehat{ANB}$?
11. Soit un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. On construit deux arcs égaux $\widehat{AC}$ et $\widehat{AD}$.
    (a) Montrer que (AB) est la médiatrice de $[CD]$.
    (b) Démontrer que $AC = AD$, $BC = BD$ et que la droite (AB) est bissectrice des angles $\widehat{COD}$, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$.
12. On construit d'un même côté d'un segment $[AB]$ deux angles égaux $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABD}$ tels que $AC = BD$.
    (a) Montrer que la figure obtenue admet un axe de symétrie. En déduire l'égalité de AD et de BC et l'égalité entre les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.
    (b) Retrouver ces propriétés en comparant les triangles ABC et BAD puis montrer que (AD) et (BC) se coupent sur la médiatrice de $[AB]$.
13. Un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O est tel que $OA = OB$ et $OC = OD$.
    (a) Montrer que ce quadrilatère admet pour axe de symétrie la droite (Ox) bissectrice des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$.
    (b) Montrer que (AD) et (BC) se coupent sur cet axe et démontrer $AD = BC$.
14. On considère un angle $\widehat{xOy}$ et un point A intérieur tel que $\widehat{AOx} = 38^o$ et $\widehat{AOy} = 16^o$.
    (a) Construire les symétriques B et C du point A par rapport à (Ox) et (Oy), puis la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$ sur laquelle on porte $OD = OA$.
    (b) Montrer que l'angle $\widehat{BOC}$ est le double de l'angle $\widehat{xOy}$ et que les quatre points A, B, C et D sont sur un cercle de centre O.
    (c) Montrer que B et C sont symétriques par rapport à (OD) et que A et D sont symétriques par rapport à la droite (Ou) bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Chapitre 30

Triangle isocèle

1. Démontrer que lorsque la hauteur $[AH]$ d'un triangle ABC est en même temps médiane, le triangle est isocèle.
2. Dans un triangle ABC, la hauteur $[AH]$ est en même temps bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. Démontrer que le triangle est isocèle.
3. On considère un triangle ABC dans lequel la médiane $[AM]$ est en même temps bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. On prolonge $[AM]$ d'une longueur $MD = AM$.
   (a) Comparer les triangles AMD et DMC, puis les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MDC}$.
   (b) En déduire que le triangle ACD est isocèle, et qu'il en est de même du triangle ABC.
4. Démontrer que dans un triangle isocèle ABC en A :
   (a) Les médianes $[BM]$ et $[CN]$ sont égales.
   (b) Les bissectrices intérieures $[BD]$ et $[CE]$ sont égales.
5. Dans un triangle isocèle OAB de sommet O, on prend un point C sur $[OA]$ et un point D sur $[OB]$ tels que $OC = OD$.
   (a) Comparer les triangles OAD, OBC puis les triangles ABC et BAD. Conséquences ?
   (b) Montrer que le point d'intersection I de $[AD]$ et $[BC]$ appartient à l'axe de symétrie du triangle OAB.
6. Reprendre l'exercice précédent avec l'hypothèse $\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$.
7. Dans le quadrilatère $ABCD$, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires et $AD = BC$. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
   (a) Comparer les triangles ACD et EBC. Nature du triangle ACE ?
   (b) Démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux.
8. On construit extérieurement à l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC le segment $[BD]$ perpendiculaire à (BA) et égal à $[AC]$, puis le segments $[CE]$ perpendiculaire à (CA) et égal à $[AB]$.
   (a) Comparer les triangles ABD et ECA. Conséquences ?

(b) Démontrer l'égalité des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{AED}$.

9. Sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle équilatéral ABC, on prend respectivement A', B' et C' tels que $BA' = CB' = AC'$.
   (a) Comparer les triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$.
   (b) Montrer que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

10. On considère un triangle isocèle OAB de sommet O et un point C du côté $[OA]$. On prolonge $[OB]$ dune longueur $BD = AC$. Le segment $[CD]$ coupe $[AB]$ en M. On prolonge $[BA]$ d'une longueur $AP = BM$.
    (a) Comparer les triangles APC et BMD. Conséquence pour CP et MD et pour les angles $\widehat{CPA}$ et $\widehat{DMB}$?
    (b) Nature du triangle CMP ? Que représente M pour le segment $[CD]$?

11. (a) Dans un triangle rectangle ABC, l'hypoténuse $[BC]$ est le double du côté de l'angle droit $[AB]$. Montrer que l'angle $\widehat{B}$ du triangle est le double de l'angle $\widehat{C}$.
    (b) Énoncer et démontrer la réciproque. On prolongera $[BA]$ d'une longueur $AD = AB$.

12. Construire un triangle isocèle OAB tel que $\widehat{A} = \widehat{B} = 68^o$. Le cercle de centre A passant par B recoupe $[OB]$ en C. On prolonge $[OA]$ d'une longueur $AD = OC$.
    (a) Comparer les angles $\widehat{ACO}$ et $\widehat{BAD}$ puis les triangles ACO et BAD.
    (b) Nature du triangle OBD. Calculer la somme des angles $\widehat{OBD}$ et $\widehat{BAC}$.

    (a) Démontrer que si un diamètre d'un cercle de centre O est perpendiculaire à la corde $[AB]$ il passe par le milieu H de cette corde et par les milieux M et N des arcs qu'elle sous-tend.
    (b) Comparer les triangles MAH et MHB, puis NHA et NHB et montrer que (MN) est la bissectrice des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

13. On construit extérieurement au triangle isocèle ABC de sommet A deux triangles égaux ABD et ACE.
    (a) Comparer les triangles ABE et ACD puis les triangles BCD et CBE. En déduire l'égalité de BE et CD.
    (b) Montrer que $[BD]$ et $[CE]$ ainsi que $[CD]$ et $[BE]$ se coupent en I et J sur la hauteur $[AH]$ du triangle ABC.

14. Soit un triangle isocèle ABC tel que l'angle au sommet $\widehat{BAC} = 56^o$. On construit un segment $[AD]$ perpendiculaire à $[AB]$ et du même côté de (AB) que $[AC]$, puis le segment $[AE]$ égal à $[AD]$, perpendiculaire à (AC) de telle sorte que l'angle droit $\widehat{CAE}$ soit adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
    (a) Comparer les triangles ABD et ACE, les segments $[BD]$ et $[CE]$ et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$.
    (b) On mène les hauteurs $[AH]$ et $[AK]$ des triangles ABC et ADE. Évaluer l'angle HAK. Les droites (BD) et (CE) se coupent en I : mesurer l'angle $\widehat{BIC}$.

15. Construire un quadrilatère $ABCD$ tel que $AD = 52$ mm, $AB = CD = 24$ mm et que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ soient égaux à 48^o. Les droites (AB) et (CD) se coupent en O.
    (a) Montrer que les triangles AOD et BOC sont isocèles et que la bissectrice de l'angle $\widehat{AOD}$ est aussi médiatrice de $[AD]$ et de $[BC]$.
    (b) Comparer les triangles OAC et OBD. Que peut-on dire du point d'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$?
16. Dans le quadrilatère $ABCD$ l'angle $\widehat{A}$ mesure 40^o, les côtés $[AB]$ et $[AD]$ mesurent 3 cm, et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont égaux à 52^o.
    (a) Construire le quadrilatère. Montrer que le triangle BAD est isocèle puis, qu'il en est de même du triangle BCD.
    (b) Que représente la droite (AC) pour le segment $[BD]$ et les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ du quadrilatère.
17. Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du quadrilatère convexe $ABCD$ sont égaux et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires. On prolonge $[CB]$ d'une longueur $BE = CD$.
    (a) Comparer les triangles ABE et ADC. Nature du triangle ACE ?
    (b) Comparer les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BAD}$ puis les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ACD}$. Que représente la diagonale (CA) pour l'angle $\widehat{BCD}$?

Chapitre 31

Médiatrice d'un segment. Constructions géométriques

1. Partager géométriquement un segment $[AB]$ en huit parties égales.
2. Partager géométriquement un angle donné $\widehat{xOy}$ en 4 angles égaux. Même problème pour un arc donné.
3. Diviser géométriquement un cercle en 16 arcs égaux.
4. On se donne quatre points $ABCD$ tels que (AB) soit perpendiculaire à (CD) et (AC) à (BD). Construire les quatre cercles passant par trois de ces points. Que remarque-t-on au sujet de leurs rayons ?
5. Trois cercles égaux de 3 cm de rayon passent par un même point A et se recoupent deux à deux en B, C et D. Construire le cercle BCD et mesurer son rayon.
6. (a) Construire géométriquement le cercle circonscrit à un triangle ABC.
   (b) Tracer sur la même figure les trois médianes du triangle. Que remarquez-vous ?
7. Construire géométriquement les trois hauteurs d'un triangle, dans le cas où les trois angles sont aigus, puis où un angle est obtus. Que remarquez-vous ?
8. Construire les trois bissectrices intérieures et les trois bissectrices extérieures du triangle ABC. Y a-t-il des points communs à trois de ces droites ?
9. Trois cercles égaux de centres donnés A, B, C se coupent deux à deux. Démontrer que les cordes communes à deux de ces cercles concourent en un point O. Que représente ce point pour le triangle ABC ?
10. (a) Construire sur une droite donnée (Δ) (ou sur un cercle C) un point équidistant de deux points donnés A et B.
    (b) Construire un cercle passant par A et B sachant que son centre est sur (Δ) (ou sur C).
11. On mène d'un point O la perpendiculaire OH et deux obliques OA et OB de part et d'autre de OH à une droite donnée (xy).

(a) Montrer que l'une des égalités $OA = OB$ et $HA = HB$ entraîne l'autre.

(b) Montrer que chacune des égalités précédentes est aussi équivalente à $\widehat{OAH} = \widehat{OBH}$ et à $\widehat{HOA} = \widehat{HOB}$.

12. Soit un triangle isocèle ABC de base $[BC]$ et soit (xy) la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$. On porte sur (xy) deux segments égaux $[AD]$ et $[AE]$ (D du côté de B et E du côté de C).

(a) Que représente la hauteur $[AH]$ du triangle ABC pour le segment $[DE]$? Comparer HD et HE.

(b) Comparer les triangles ABD et ACE puis ABE et ACD. Conséquences pour BD et CE ainsi que pour BE et CD ?

13. On considère un triangle isocèle AOB de sommet O. On prend un point A' sur le côté $[OA]$ et un point B' sur le côté $[OB]$ tels que les angles $\widehat{ABA'}$ et $\widehat{BAB'}$ soient égaux. $[AB']$ et $[AB]$ se coupent en I.

(a) Montrer que le triangle IAB est isocèle. Préciser la position du point I par rapport à la hauteur $[OH]$ du triangle OAB.

(b) Réciproquement,montrer que lorsque I appartient au segment $[OH]$, les angles $\widehat{ABA'}$ et $\widehat{BAB'}$ sont égaux. Comparer AA' et BB'.

14. On prolonge la base $[AB]$ du triangle isocèle $[OAB]$ de deux longueurs égales AC et BD.

(a) Montrer que la hauteur $[OH]$ du triangle OAB est la médiatrice de $[CD]$.

(b) Démontrer que le triangle OCD est isocèle puis que les triangles OAC et OBD sont égaux ainsi que les triangles OAD et OBC.

15. Soient D, E, F les symétriques d'un point M intérieur à un triangle ABC par rapport aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

(a) Que représente A pour le cercle MEF ? Propriété analogue des points B et C ? En déduire une construction au compas des points D, E, F.

(b) Les médiatrices du triangle DEF se coupent en P. Montrer que $[AP]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{EAF}$. Sachant que $\widehat{BAM} = 16^o$ et $\widehat{CAM} = 45^o$ trouver la valeur de l'angle $\widehat{CAP}$ et la comparer à celle de l'angle $\widehat{BAM}$.

16. Dans un triangle ABC les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en un point O de $[BC]$. On désigne par M et N les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

(a) Montrer que O est le milieu de $[BC]$ et que le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A.

(b) Quelle est la nature du triangle MON ? Montrer que l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC est égal à la somme des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de ce triangle.

17. Les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC se coupent en O à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$. Comparer la somme des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle à la somme des angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{ACO}$ puis à l'angle $\widehat{A}$ du triangle suivant que le point O est :

(a) intérieur au triangle;

(b) sur le côté $[BC]$;

(c) extérieur au triangle.

18. Dans un quadrilatère $ABCD$ les médiatrices des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ se coupent en un même point O.

    (a) Montrer que les points A, B, C, D sont sur un même cercle.

    (b) Montrer que les médiatrices du triangle BDC se coupent en O.

19. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel la médiatrice de $[AB]$ est également la médiatrice de $[CD]$. Soit O le point où cette médiatrice coupe la médiatrice de $[BC]$.

    (a) Montrer que les quatre points A, B, C et D sont situés sur un même cercle de centre O.

    (b) Démontrer que les médiatrices de $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$ passent également par O.

20. (a) Construire un triangle isocèle ABC tel que $BC = 5$ cm et $\widehat{B} = \widehat{C} = 53^o$; le point D de $[BC]$ tel que $DA = DB$ et enfin le point E du segment $[AD]$ tel que $AE = CD$.

    (b) Comparer les triangles ABE et CAD. Nature du triangle BDE.

Chapitre 32

Le troisième cas d'égalité des triangles

1. Démontrer que lorsque deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont deux côtés respectivement égaux $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$ ainsi que la médiane relative à l'un d'eux $AM = A'M'$, ces deux triangles sont égaux.
2. Démontrer que lorsque deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont deux côtés respectivement égaux $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$ ainsi que la médiane relative au troisième $AM = A'M'$ ces deux triangles sont égaux (on prolongera $[AM]$ et $[A'M']$ d'une longueur égale $MD = M'D' = AM$ et on comparera d'abord ABD et $A'B'D'$).
3. Construire le centre O du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC.
   (a) Comparer les angles $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOB}$ puis calculer leurs valeurs.
   (b) Montrer que les distances de O aux trois côtés du triangle ABC sont égales.
4. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux. Que peut-on dire des triangles obtenus en joignant dans chacun d'eux les pieds des hauteurs,des bissectrices, des médianes ?
5. Deux triangles équilatéraux ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$. Comparer ces triangles ainsi que les rayons de leurs cercles circonscrits.
6. Démontrer que dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :
   (a) Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.
   (b) Deux cordes égales sous-tendent des arcs (inférieurs à un demi-cercle) égaux.
7. Dans un quadrilatère $ABCD$, on a $AB = AD$ et $BC = DC$.
   (a) Montrer que (AC) est médiatrice du segment $[BD]$ et bissectrice des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
   (b) Soit M le milieu de $[AC]$. Comparer MB et MD ainsi que $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AMD}$.
8. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $AB = CD$ et $AD = BC$.
   (a) Comparer les triangles ABC et CDA, puis ABD et DBC. Montrer qu'une diagonale forme des angles égaux avec deux côtés opposés.
   (b) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. Que représente ce point pour chacune d'elles ?

9. Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, on a $AD = BC$ et $AC = BD$.
   (a) Comparer les triangles ABC et BAD puis BCD et ADC. Montrer que l'un des côtés $[AB]$ ou $[CD]$ forme des angles égaux avec les deux diagonales.
   (b) Les diagonales se coupent en I. Nature des triangles IAB et ICD ? comparer les triangles IAD et IBC.
10. Deux cercles de centre O coupent une droite donnée (xy) le premier en A et B le second en C et D. Soit H la projection de O sur (xy).
   (a) Nature des triangles OAB et OCD ? Que représente H pour chacun des segments $[AB]$ et $[CD]$?
   (b) Comparer AC et BD puis AD et BC et enfin les triangles OAC et OBD et les triangles OAD et OBC.
11. (a) Démontrer que deux triangles qui ont deux côtés respectivement égaux et même périmètre sont égaux.
   (b) Démontrer que deux triangles isocèles qui ont même base et même périmètre sont égaux.
12. On donne un triangle ABC tel que $AB < AC$. On prend sur le côté $[AC]$ le point D tel que $AD = AB$. Le cercle de centre A et de rayon AC et le cercle de centre D et de rayon BC se coupent en E et F.
   (a) Montrer que l'un de ces points, E, par exemple, est sur la droite (AB).
   (b) Comment sont placés E et F par rapport à $[AC]$? Que représente (AC) pour les angles $\widehat{BAF}$, $\widehat{ECF}$ et $\widehat{EDF}$?
13. On considère trois points A, B, C dans cet ordre sur un cercle de centre O. La médiatrice de $[BC]$ coupe $[AC]$ en M.
   (a) Comparer les triangles OMB et OMC. Conséquence ?
   (b) Démontrer que les angles $\widehat{OAM}$ et $\widehat{OBM}$ sont égaux. Que représente la droite (MO) pour l'angle $\widehat{M}$ du triangle MAB ?
14. Démontrer que lorsque deux triangles AOB et $OA'B'$ sont superposables par retournement, les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ sont confondues.
15. On considère deux segments égaux $[AB]$ et $[A'B']$. Construire le point Q commun aux médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ et comparer les triangles AOB et $OA'B'$. Montrer que ces deux triangles se superposent par glissement et comparer les angles AOA' et BOB'.

Chapitre 33

Cas d'égalité des triangles rectangles

1. (a) Dans un triangle ABC le pied de la hauteur $[AH]$ se trouve entre B et C. Montrer que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus.
   (b) Lorsque H est sur le prolongement $[Bx)$ de $[CB]$, montrer que l'angle $\widehat{B}$ est obtus et les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{A}$ aigus. Combien y a-t-il au moins d'angles aigus dans un triangle ?
2. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux. Comparer les hauteurs homologues AH et $A'H'$.
3. Démontrer que dans un triangle isocèle ABC de sommet A les hauteurs $[BH]$ et $[CK]$ sont égales. Énoncer et démontrer la réciproque. (Utiliser les triangles ABH et ACK ou BCH et CBK.)
4. Montrer que dans un triangle isocèle les hauteurs issues des sommets de la base se coupent sur l'axe de symétrie du triangle.
5. Démontrer que les sommets B et C du triangle ABC sont équidistants de la médiane $[AM]$. La propriété subsiste-t-elle pour toute droite (xy) passant par M ?
6. Dans un cercle donné ou dans deux cercles égaux deux cordes égales sont équidistantes du centre. Énoncer et démontrer la réciproque.
7. On mène d'un point O la perpendiculaire (OH) et les obliques (OA) et (OB) à une droite (xy). Démontrer que l'égalité $OA = OB$ entraîne $HA = HB$ et réciproquement.
8. Les deux segments concourants $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu O.
   (a) Comparer les triangles OAC et OBD ainsi que les hauteurs OH et OK de ces deux triangles.
   (b) Montrer que le point O est le milieu de $[HK]$.
9. Dans un quadrilatère $ABCD$ on a $AD = BC$ et $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} < 90^o$. On mène les perpendiculaires (DH) et (CK) à (AB).
   (a) Comparer les triangles ADH et BCK puis DH et CK.
   (b) Montrer que AB et HK ont le même milieu I et que $HC = KD$.
10. Construire un triangle isocèle ABC sachant que $AB = AC = 5$ cm et que la hauteur $AH = 4$ cm. Mesurer $[BC]$.

11. On connaît en position l'hypoténuse $BC = 40$ mm d'un triangle rectangle ABC et la longueur $AB = 24$ mm.
    (a) Construire le point D du prolongement de $[BA]$ tel que $AD = AB$ puis le point A. Mesurer AC.
    (b) Généraliser.
12. Construire un triangle ABC tel que $BC = 60$ mm, la hauteur $AH = 32$ mm et la médiane $AM = 35$ mm.
13. Dans le triangle ABC la hauteur AH mesure 38 mm et la bissectrice AD 42 mm. Effectuer la construction du triangle AHD puis celle du triangle ABC sachant que :
    (a) $\widehat{BAC} = 64^o$;
    (b) $AB = 45$ mm.
14. On considère un triangle ABC rectangle en A et on construit le segment $[BD]$ perpendiculaire à (BC) et égal à BC, puis la perpendiculaire (Bx) à (AB). On mène de D la perpendiculaire (DE) à (Bx).
    (a) Comparer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBD}$ puis les triangles ABC et EBD.
    (b) Démontrer que $AC = DE$ et $AB = BE$.
15. Deux points A et B situés de part et d'autre de (xy) sont tels que leurs distances AH et BK soient égales. Démontrer que (xy) passe par le milieu O de $[AB]$.
16. Comparer deux triangles isocèles ayant :
    (a) Des bases égales et des angles au sommet égaux.
    (b) Les hauteurs relatives à la base égales et des angles à la base égaux.
17. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont $AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. On mène les hauteurs $[AH]$ et $[A'H']$.
    (a) Comparer les triangles ABH et $A'B'H'$, puis les triangles AHC et $A'H'C'$.
    (b) En déduire l'égalité des triangles ABC et $A'B'C'$ et énoncer le cas d'égalité correspondant.
18. La médiatrice du côté $[AB]$ du triangle isocèle ABC coupe la base $[BC]$ en D. Le cercle de centre B passant par D recoupe $[AD]$ en E.
    (a) Nature des triangles DAB et BDE. Comparer les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAE}$.
    (b) Démontrer, en utilisant le résultat de l'exercice précédent, l'égalité des triangles ACD et BAE puis que $CD = AE$.
19. (a) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont $AB = A'B'$, $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180^o$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Montrer que les hauteurs AH et $A'H'$ sont égales, puis que les côtés $[AC]$ et $[A'C']$ sont égaux.
    (b) Montrer que réciproquement si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180^o$, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
    (On pourra amener $[A'B']$ sur $[AB]$ et C' sur le prolongement de $[CB]$.)

(c) Dans un triangle isocèle OAB, on prend un point C du côté $[OA]$ et on prolonge $[OB]$ d'une longueur $BD = AC$. Le segment $[CD]$ coupe $[AB]$ en M.

   i. Comparer les hauteurs CH et DK des triangles MAC et MBD.

   ii. Montrer que M est le milieu de $[HK]$ et de $[CD]$.

Chapitre 34

Bissectrice d'un angle

1. Construire sur une droite donnée (D) un point M équidistant de deux droites (xx') et (yy').
2. Construire un point M équidistant de deux droites (xx') et (yy') connaissant en outre sa distance à un point donné O.
3. Construire un point M équidistant de deux points donnés A et B et équidistant de deux droites données (xx') et (yy').
4. Un quadrilatère convexe $ABCD$ a deux angles opposés $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ droits et les côtés $[AB]$ et $[AD]$ égaux. Montrer que $CD = CB$ et que (AC) est bissectrice des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
5. Construire un triangle ABC dont les bissectrices intérieures se coupent en I sachant que $\widehat{BIC} = 124^o$, $IB = 3$ cm et $IC = 4$ cm.
6. Démontrer qu'il y a quatre points I, J, K et L équidistants des trois droites (BC), (CA) et (AB). Que représentent (IJ), (IK) et (IL) pour le triangle JKL ?
7. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ du quadrilatère convexe $ABCD$ sont supplémentaires et $BC = CD$. Le point C se projette en H sur $[AB]$ et en K sur $[AD]$.
   (a) Comparer les triangles BCH et CDK puis les longueurs CH et CK.
   (b) Montrer que (AC) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAD}$.
8. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ on a $DB = DC$ et $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. Le point D se projette en H sur $[AB]$ et en K sur $[AC]$.
   (a) Comparer les triangles BDH et DCK puis les longueurs DH et DK.
   (b) Déterminer la somme des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DAC}$.
9. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ d'un triangle ABC se coupent en I. On mène les perpendiculaires en B à (IB) et en C à (IC). Elles se coupent en J.
   (a) Que représentent (BJ) et (CJ) pour les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ?
   (b) Montrer que les points A, I et J sont alignés.

10. Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.
    (a) Démontrer que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles intérieurs du losange.
    (b) Montrer que leur point commun O est équidistant des quatre côtés.
11. Soient D, E, F les projections, sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, du point de concours I des bissectrices intérieures du triangle ABC.
    (a) Montrer que $BD = BF$, $CE = CD$ et $AF = AE$. Que représente la somme $AE + BC$ pour le périmètre du triangle ?
    (b) $BC = 48$ mm, $CA = 40$ mm, et $AB = 28$ mm. Calculer AF, BD et CE.
12. Dans un triangle ABC tel que $AB > AC$ la médiatrice de $[BC]$ coupe en M la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. Le point M se projette en H sur $[AB]$ et en K sur $[AC]$.
    (a) Comparer AH et AK puis BH et CK.
    (b) Démontrer que $AH = \frac{1}{2}(AB + AC)$ et $BH = \frac{1}{2}(AB - AC)$.
13. Dans le même triangle ABC qu'à l'exercice précédent, la médiatrice de $[BC]$ coupe en M' la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$. Le point M' se projette en H' sur (AB) et en K' sur (AC).
    (a) Comparer AH' et AK' puis BH' et CK'.
    (b) Démontrer que $AH' = \frac{1}{2}(AB - AC)$ et $BH' = \frac{1}{2}(AB + AC)$ puis que $HH' = AC$.
14. On prolonge la base $[BC]$ du triangle ABC de deux longueurs $BM = BA$ et $CN = CA$. Les bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de ce triangle se coupent en J.
    (a) Montrer que M et N sont les symétriques de A par rapport à (BJ) et (CJ). Comparer JA, JN et JM. Nature du triangle JMN.
    (b) Comparer les angles $\widehat{BAJ}$ et $\widehat{CAJ}$. Démontrer ainsi que *dans un triangle les bissectrices extérieures de deux angles et la bissectrice intérieure du troisième sont concourantes.*
15. Un quadrilatère convexe $BICJ$ a ses angles opposés $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ droits. On construit les symétriques $(x'x)$ et $(y'y)$ de la droite (BC) par rapport à chacune des droites (IB) et (IC).
    (a) Montrer que I et J sont équidistants des trois droites (BC), $(x'x)$ et $(y'y)$.
    (b) Démontrer que les trois droites (IJ), $(x'x)$ et $(y'y)$ sont en générales concourantes en un même point A.
16. On considère un triangle ABC tel que $AB < AC$. La médiatrice de $[BC]$ coupe en D le côté $[AC]$ et en I et J respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.
    (a) Que représente (IJ) pour l'angle $\widehat{ADB}$? Montrer que les points I et J sont équidistants des cotés du triangle aBD et que (BI) et (BJ) sont les bissectrices extérieure et intérieure de l'angle $\widehat{ABD}$.
    (b) Quelle est la valeur des angles $\widehat{IBJ}$ et $\widehat{ICJ}$? Démontrer que les angles $\widehat{ABJ}$ et $\widehat{ACJ}$ sont égaux et que les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{ACI}$ sont supplémentaires.

Problèmes de révision

1. On donne un angle $\widehat{xOy}$ et un point A. Construire un triangle isocèle dont l'angle au sommet soit l'angle $\widehat{xOy}$ et tel que le côté opposé passe par A.
2. (a) Soit un triangle ABC et M le milieu de $[BC]$. La perpendiculaire au côté $[AB]$ issue de M coupe ce côté en H. On prolonge $[HM]$ d'un segment $MK = HM$ et on joint $[KC]$. Comparer les triangles MBH et MCK. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{MKC}$.
   (b) On donne un angle $\widehat{xAy}$ et un point M intérieur à cet angle. Construire une droite passant par M coupant (Ax) en B et (Ay) en C de façon que M soit le milieu de $[BC]$.
3. (a) Construire deux droites (D_1) et (D_2) respectivement perpendiculaires en A et B au segment $[AB]$. Une droite (xy) issue du milieu O de $[AB]$ coupe (D_1) en P et (D_2) en Q. Comparer les triangles OAP et OBQ.
   (b) Comparer les angles $\widehat{APO}$ et $\widehat{OQB}$. Que peut-on dire des angles que forme (PQ) avec les droites (D_1) et (D_2) ?
4. On donne un triangle isocèle ABC de base $[BC]$. On construit les angles droits $\widehat{BAx}$ et $\widehat{CAy}$ adjacents à l'angle $\widehat{BAC}$. Puis on porte sur (Ax) et (Ay) les segments $[AE]$ et $[AF]$ égaux à $[AB]$. Soit M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[EF]$.
   (a) Comparer les triangles MAE et MAF.
   (b) Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
5. Soit un triangle ABC rectangle en A, et $[AD]$ la hauteur relative à l'hypoténuse. On construit les symétriques E et F de D par rapport aux droites (AB) et (AC).
   (a) Montrer que D, E, F, appartiennent à un même cercle de centre A.
   (b) Montrer que les points E, A, F sont alignés. Que représente A pour le segment $[EF]$?
6. D'un même côté d'un segment $[AB]$, on mène deux segments égaux $[AD]$ et $[BC]$ respectivement perpendiculaires à $[AB]$ en A et en B.
   (a) Comparer les segments $[AC]$ et $[BD]$.
   (b) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. Démontrer que la médiatrice de $[AB]$ passe par O et qu'elle est aussi médiatrice de $[CD]$.
7. Deux segments $[AC]$ et $[DB]$ sont perpendiculaires et leur point commun O est le milieu de chacun d'eux.

(a) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ a ses quatre côtés égaux et comparer les quatre triangles OAB, OCB, OCD et OAD.

(b) On mène OP perpendiculaire à $[AD]$ en P. La droite (PO) coupe (BC) en R. Comparer les triangles ODP et OBR. En déduire que (OR) est perpendiculaire à (BC) et que $OP = OR$.

(c) Montrer de même que la droite (OQ) perpendiculaire en Q à (AB) est perpendiculaire en S à (CD) et que $OP = OQ = OR = OS$.

8. Construire un angle $\widehat{AOB} = 30^o$ puis deux angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ adjacents à $\widehat{AOB}$ et valant 60^o chacun.

(a) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ont même bissectrice.

(b) Montrer que les bissectrices (ON) et (OP) des angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ dont un angle droit.

9. On donne un angle $\widehat{xOy} = 45^o$ et un point A intérieur à cet angle. Construire les points B et C symétriques de A par rapport aux droites (Ox) et (Oy).

(a) Évaluer l'angle $\widehat{BOC}$. Nature du triangle BOC.

(b) Démontrer que la médiatrice du segment $[BC]$ passe par O. Comparer l'angle formé par cette médiatrice et (Oy) à l'angle $\widehat{AOx}$.

10. Trois segments OA, OB, OC sont égaux et tels que les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, et $\widehat{COA}$ soient égaux :

(a) Quelle est la valeur commune de ces trois angles ?

(b) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

(c) Montrer que O est équidistant des trois côtés du triangle ABC et que le triangle ayant pour sommets les pieds des perpendiculaires menées de O aux côtés du triangle ABC est lui-même équilatéral.

11. Construire un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ cm et tel que l'angle $\widehat{BAC} = 40^o$. La médiatrice de $[AC]$ coupe la droite (BC) en D. On joint $[DA]$ et on le prolonge de $AE = BD$.

(a) Montrer que DAC est isocèle, puis établir l'égalité des angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ABD}$.

(b) Comparer les triangles CAE et ABD. En déduire que le triangle CDE est isocèle.

12. Soit un triangle ABC et la bissectrice intérieure (Ax) de l'angle $\widehat{A}$. sur la demi-droite $[Ax)$, on construit les points B' et C' tels que $AB' = AB$ et $AC' = AC$. Les droites (BC') et $(B'C)$ se coupent en D.

(a) Comparer les triangles ABC' et ACB' puis les segments $[BC']$ et $[B'C]$.

(b) On mène (AE) perpendiculaire en E à (BC') et (AF) perpendiculaire en F à $(B'C)$. Demontrer que $AE = AF$ puis que (DA) est une bissectrice du triangle BCD.

13. On donne un triangle ABC. Sur le côté $[AB]$ on porte $AC' = AC$ et sur le côté $[AC]$ on porte $AB' = AB$. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe $[BC]$ en D.

(a) Comparer les segments $[DC']$ et $[DC]$ puis les segments $[DB']$ et $[DB]$.

(b) Démontrer que les points C', D et B' sont alignés.

14. Soit I le point commun aux bissectrices intérieures du triangle ABC. On construit les segments $[IA']$, $[IB']$ et $[IC']$ respectivement perpendiculaires en A', B' et C' aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
    (a) Démontrer que (IA), (IB) et (IC) sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$ et les bissectrices des angles $\widehat{B'IC'}$, $\widehat{C'IA'}$ et $\widehat{A'IB'}$.
    (b) Montrer que les angles $\widehat{AIB'}$ et $\widehat{BIC}$ sont supplémentaires.
15. On considère deux triangles isocèles OAB et OCD de sommet O tels que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ aient même bissectrice (Ox).
    (a) Comparer les triangles OAC et OBD.
    (b) Soit M un point quelconque de (Ox). Comparer les triangles MAC et MBD.
16. (a) Construire un triangle ABC connaissant $AB = 8$ cm ; $BC = 5$ cm et sachant que l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 30^o. Nombre de solutions ?
    (b) Déduire de cette construction que deux triangles qui ont deux côtés respectivement égaux et un angle égal opposé à l'un de ces côtés ne sont pas nécessairement égaux.
17. On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ soient supplémentaires, $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$. On prolonge $[CA]$ d'une longueur AD égale à $A'C'$.
    (a) Comparer les triangles $A'B'C'$ et ABD. Nature du triangle BCD ?
    (b) Démontrer que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{A'C'B'}$ sont égaux.
18. Un angle $\widehat{xOy}$ vaut 120^o. D'un point A de sa bissectrice on mène les perpendiculaires (AM) à (Ox) et (AN) à (Oy). La droite (AM) coupe (Oy) en B, et la droite (AN) coupe (Ox) en C.
    (a) Comparer les triangles OAM et OBM ainsi que les triangles OAN et OCN.
    (b) Démontrer que $OA = OB = OC$ puis que le triangle ABC est équilatéral.
    Que représente le point O pour le triangle ABC ?
19. Soit un cercle de diamètre $[AB]$ de centre O. La médiatrice de $[OA]$ coupe le cercle en C et D : la médiatrice de $[OB]$ coupe le cercle en E et F (C et E sont du même côté de $[AB]$).
    (a) Montrer que les triangles OAC, OAD, OBE et OBF sont équilatéraux et égaux.
    (b) Montrer que les points C, O, F d'une part et D, O, E sont alignés.
    (c) Montrer que le diamètre du cercle O perpendiculaire à $[AB]$ est médiatrice des segments $[CE]$ et $[DF]$.
20. Construire la hauteur $[AH]$ et la médiane $[AM]$ du triangle ABC, puis prolonger $[AH]$ d'un segment $HD = AH$ et $[AM]$ d'un segment $ME = AM$. Les droites (BD) et (CE) se coupent en P.
    (a) Comparer les triangles ABH et DBH, puis les triangles MAB et MEC.
    (b) Démontrer que le triangle PBC est isocèle et que (PM) est médiatrice des segments $[BC]$ et $[BE]$.

(c) On suppose de plus que $MA = MB$. Montrer que dans ce cas les cinq points $ABCDE$ sont sur un même cercle.

21. Dans un quadrilatère $ABCD$ les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux et la diagonale $[AC]$ est bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. On mène les perpendiculaires (CH) et (CK) à (AB) et à (AD).
   (a) Comparer les triangles AHC et AKC, puis les triangles BHC et DKC.
   (b) Démontrer que $BC = CD$, $AB = AD$ et que (AC) est bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.
22. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel la diagonale $[AC]$ fait des angles aigus égaux avec les côtés $[AB]$ et $[CD]$. On suppose en outre que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère sont aigus et égaux. On mène les perpendiculaires (AH) à (CD) et (CK) à (AB).
   (a) Comaprer les triangles rectangles AKC et CHA, puis les triangles BKC et DHA.
   (b) Démontrer que $[AC]$ fait des angles égaux avec (AD) et (BC), que $AB = CD$ et que $AD = BC$.
23. Construire un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel $BC = 3$ cm, $\widehat{ABD} = 80^o$, $\widehat{BDC} = 100^o$ et $AD = BC = 4$ cm. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
   (a) Comparer les triangles DBC et DBE. Conséquences ?
   (b) Nature du triangle DAE ? Démontrer que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.
24. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont égales et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
   (a) Comparer les triangles BCD et CBE. Nature du triangle CAE ?
   (b) Démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux.
25. Soit un triangle ABC tel que $AB > AC$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe en D la médiatrice de $[BC]$. On construit le point E de $[AB]$ tel que $AE = AC$.
   (a) Que représente le point D pour le triangle BCE ? Nature du triangle DBE ?
   (b) Comparer les triangles ACD et AED et montrer que les angles ABD et ACD sont supplémentaires.
26. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ les côtés $[BC]$ et $[CD]$ sont égaux et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires. Soient H et K les projections du point C sur les droites (AB) et (AD).
   (a) Comparer les triangles BCH et DCK. Conséquences ?
   (b) Montrer que (AC) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Comparer AH et AK à la demi-somme de AB et AD.
27. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de $[BC]$ coupe en I le côté $[AB]$ et en J la droite (AC).
   (a) Comparer les triangles IOB et IOC et démontrer que les angles $\widehat{IAO}$ et $\widehat{ICO}$ sont égaux.
   (b) Comparer les triangles JOB et JOC et démontrer que les angles $\widehat{JAO}$ et $\widehat{JBO}$ sont supplémentaires.

28. La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC coupe en M la médiatrice de $[BC]$. On prolonge $[BA]$ d'une longueur $AD = AC$.
   (a) Comparer MB et MC, puis les triangles MAC et MAD.
   (b) Nature du triangle MBD ? Démontrer l'égalité des angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ACM}$.
29. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ on a $AB > CD$, $AD = BC$ et d'autre part la diagonale $[AC]$ fait des angles aigus égaux avec $[AB]$ et $[CD]$.
   (a) Construire le point E de $[AB]$ tel que $AE = CD$ et comparer les triangles ACD et CAE. Nature du triangle BCE ?
   (b) Démontrer que les angles ABC et ADC sont supplémentaires ?
30. Dans le triangle ABC, on considère un point intérieur D tel que $AD = BC$ et tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ soient supplémentaires. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
   (a) Comparer les triangles ADC et CBE. Nature du triangle CAE ?
   (b) La droite (CD) coupe (AB) en M. Démontrer que $MA = MC$ et en déduire une construction géométrique du point D en connaissant le triangle ABC.
31. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ d'un quadrilatère convexe $ABCD$ sont égaux. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en un point O de telle sorte que $OA = OC$ et $OB > OD$. Les droites (AB) et (CD) se coupent en I.
   (a) Construire le point E du segment $[OB]$ tel que $OE = OD$ et comparer les triangles OAE et OCD. Nature du triangle ABE ?
   (b) Comparer les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{CDO}$, puis les segments $[IB]$ et $[ID]$.
32. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que $AB = CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O tel que : $OA > OD$ et $OB = OC$.
   (a) Soit E le point du segment $[OA]$ tel que $OE = OD$. Comparer les triangles OBE et OCD.
   (b) Nature du triangle BAE ? Comparer les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$.
   (c) Les droites (BE) et (CD) se coupent en I. Comparer IB et IC, ainsi que ID et IE et montrer que (IO) est bissectrice de l'angle $\widehat{BIC}$.
33. Soit un triangle isocèle OAB de base $AB < AO$. Le cercle de centre A passant par O recoupe la droite (OB) en E. On prend un point C sur le segment $[BE]$ et le point D du segment $[OA]$ tel que $OD = EC$.
   (a) Nature du triangle AOE ? Comparer les triangles AEC et BOD.
   (b) Comparer les segments $[AC]$ et $[BD]$ ainsi que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.
34. On désigne par D et E les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC et par G, H et K les projections sur la droite (DE) des points A, B et C.
   (a) Comparer les triangles AGD et BHD ainsi que les triangles AGE et CKE. En déduire que $BH = CK$ et que $HK = 2DE$.

(b) Soit M le milieu de $[BC]$ et I le milieu de $[HK]$. Comparer les triangles IBH et ICK. Nature du triangle BIC ? Montrer que (IM) est médiatrice de $[BC]$ et de $[HK]$.

35. Un *trapèze isocèle* est un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les *bases* AB et CD admettent la même médiatrice (xy). Démontrer que :

(a) Les angles adjacents à une même base sont égaux.

(b) Les côtés obliques $[AD]$ et $[BC]$ sont égaux et leurs prolongements se coupent en I sur la droite (xy) formant deux triangles IAB et ICD isocèles.

(c) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont égales et se coupent en J sur (xy) formant deux triangles JAB et JCD isocèles.

36. Démontrer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ est un trapèze isocèle (cf. exercice précédent), lorsque :

(a) les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$.

(b) Lorsque les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.

(c) Lorsque les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont égaux ainsi que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

37. Le quadrilatère convexe $ABCD$ admet pour axe de symétrie la droite (xy) médiatrice commune de $[AB]$ et $[CD]$ (trapèze isocèle).

(a) Démontrer que les médiatrices des côtés $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en un point O de (xy), centre d'un cercle circonscrit au trapèze.

(b) Comparer sur ce cercle les arcs de même sens $\widehat{DA}$ et $\widehat{BC}$ ainsi que les arcs $\widehat{DB}$ et $\widehat{AC}$.

38. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les sommets sont sur un cercle de centre O de telle sorte que les côtés $[AD]$ et $[BC]$ soient égaux.

(a) Compare les angles au centre $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$.

(b) Démontrer que la bissectrice (Ox) de l'angle $\widehat{AOB}$ est également bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ est également bissectrice de l'angle $\widehat{COD}$ et médiatrice des deux côtés $[AB]$ et $[CE]$ du quadrilatère $ABCD$.

39. On désigne par M et N les milieux des côtés obliques $[AD]$ et $[BC]$ du trapèze isocèle $ABCD$ dont les bases $[AB]$ et $[CD]$ admettent pour médiatrice commune la droite (xy). Le segment $[MN]$ coupe les diagonales $[AC]$ en P et $[BD]$ en Q.

(a) Démontrer que $AM = CN$ et que les angles $\widehat{DMN}$ et $\widehat{CNM}$ sont égaux.

(b) On prolonge $[MP]$ d'une longueur ME égale à NP. Comparer les triangles AME et CNP. Nature du triangle APE ? En déduire que les points P et Q sont les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

40. Construire un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 4$ cm, puis le point D du côté $[AB]$ et le point E du prolongement de $[CA]$ tels que $AD = AE = 1$ cm. La droite (DE) coupe (BC) en M.

(a) Comparer les segments $[BD]$ et $[CE]$ ainsi que les angles $\widehat{BDM}$ et $\widehat{CEM}$.

(b) On prolonge $[DM]$ d'une longueur $MP = DE$. Comparer les triangles BDP et CEM. Nature du triangle BMP ? Démontrer que M est le milieu de $[BC]$.

41. Soient quatre points A, B,C, D disposés dans cet ordre sur un cercle de centre O et tels que $AC = BD$. On désigne par E le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, par I le milieu de $[AC]$ et par J le milieu de $[BD]$. La droite (IJ) coupe (AB) en M.

    (a) Comparer les triangles OAI et OBJ, puis les triangles OEI et OEJ. Nature du triangle EIJ ?

    (b) On prolonge $[JI]$ d'une longueur $IN = JM$. Comparer les triangles AIN et BJM. Nature du triangle AMN ? En déduire que M est le milieu de $[AB]$.

42. On considère un angle aigu $\widehat{BAC}$. Le point B se projette en E sur $[AC]$ et le point C se projette en F sur $[AB]$. Les segments $[BE]$ et $[CF]$ se coupent en H. Les symétriques de la droite (EF) par rapport à (BE) et par rapport à (CF) se coupent en D.

    (a) Montrer que les quatre points A, B, C et H sont équidistants des trois droites (EF), (FD) et (DE).

    (b) En déduire que (AH) et (BC) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{D}$ du triangle DEF et qu'elles sont perpendiculaires. Démontrer ainsi que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H.