Interrogation chapitre 1

Exercice 1

a)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & 4 & 7 & 6 & 5 \\
\cline{5-5}
-5 & \downarrow & & & 1095 \\
\cline{1-1}
0 & 4 & & & \\
-0 & & & & \\
\cline{1-2}
& 4 & 7 & & \\
& -4 & 5 & & \\
\cline{2-3}
& & 2 & 6 & \\
& & -2 & 5 & \\
\cline{3-4}
& & & 1 &
\end{array}
$$

$5476 \div 5 = 1095$ reste 1

b)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 3 & 6 & 4 & 7 \\
\cline{5-5}
-7 & & & & 194 \\
\cline{1-2}
6 & 6 & & & \\
-6 & 3 & & & \\
\cline{1-3}
& 3 & 4 & & \\
& -2 & 8 & & \\
\cline{2-3}
& & 6 & &
\end{array}
$$

$1364 \div 7 = 194$ reste 6

c)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 11 \\
\cline{6-6}
-1 & 1 & \downarrow & & & 1113 \\
\cline{1-2}
& 1 & 2 & & & \\
& -1 & 1 & & & \\
\cline{2-3}
& & 1 & 4 & & \\
& & -1 & 1 & & \\
\cline{3-4}
& & & 3 & 6 & \\
& & & -3 & 3 & \\
\cline{4-5}
& & & & 3 &
\end{array}
$$

$12246 \div 11 = 1113$ reste 3

Exercice 2

a) 544 finit par 4 donc est pair. Il n'est donc pas premier.

b) 43 est premier car il n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5. Le prochain diviseur à essayer serait 7 et $7\times7=49>43$ (donc $\sqrt{43}<7$) donc 43 n'a pas d'autre diviseur que 1 et 43.

c) $69=3\times23$ n'est pas premier.

d) 61 n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5, ni par 7 et $8\times8=64>61$, donc 61 est premier.

e) 221 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

$221\div7=31$ reste 4

$221\div11=20$ reste 1

$221\div13=17$ reste 0. Donc $221=13\times17$ n'est pas premier.

Exercice 3

a)

91	7
13	13
1	

$91=7\times13$

b)

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$\rightarrow 64=2^6$

c)

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

$\rightarrow 420=2^2\times3\times5\times7$

d)

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$\rightarrow 252=2^2\times3^2\times7$

e)

2640	2
1320	2
660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$\Rightarrow 2640 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 11$

Exercice 4

a) $70 = 1 \times 70$
$= 2 \times 35$
$= 5 \times 14$
$= 7 \times 10$

donc 70 a huit diviseurs : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 et 70.

cohérent avec $70 = 2^1 \times 5^1 \times 7^1 \Rightarrow (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

b) $200 = 1 \times 200$
$= 2 \times 100$
$= 4 \times 50$
$= 5 \times 40$
$= 8 \times 25$
$= 10 \times 20$

donc 200 a douze diviseurs : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 et 200.

cohérent avec $200 = 2^3 \times 5^2 \Rightarrow (3+1) \times (2+1) = 4 \times 3 = 12$.

c) 83 n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5 ni par 7 et $10 \times 10 > 83$, donc 83 est premier.
Ses diviseurs sont 1 et 83.

d) $1\,500 = 1 \times 1500$
$= 2 \times 750$
$= 3 \times 500$
$= 4 \times 375$
$= 5 \times 300$
$= 6 \times 250$
$= 10 \times 150$
$= 12 \times 125$
$= 15 \times 100$
$= 20 \times 75$
$= 25 \times 60$
$= 30 \times 50$

d'où les 24 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 125, 150, 250, 300, 375, 500, 750, 1500.

Cela est cohérent avec $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$
$\Rightarrow (2+1) \times (1+1) \times (3+1)$
$= 3 \times 2 \times 4 = 24$ diviseurs.

Exercice 5

Un multiple de 21 contient dans sa décomposition au moins $3^1 \times 7^1$.

Il est donc de la forme $3^a \times 7^b \times p^c \times \cdots$ où l'on rajoute certains facteurs.

Le nombre de diviseurs est alors $(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\cdots$.

S'il y a au moins quatre facteurs premiers, le nombre de diviseurs est le produit d'au moins quatre nombres supérieurs ou égaux à 2, donc est au moins $2\times2\times2\times2=16$.

S'il y a trois diviseurs premiers, le nombre de diviseurs est $(a+1)\times(b+1)\times(c+1)$ et les trois termes de ce produit sont au moins 2 ; pour que leur produit soit 8, il faut qu'ils valent tous 2. Dans ce cas, $a=b=c=1$ et le nombre est $3\times7\times p = 21p$ avec p premier autre que 3 ou 7.

S'il y a seulement deux diviseurs, le nombre est $3^a \times 7^b$, et on a $(a+1)\times(b+1)=8$, avec $a,b \geq 1$.

Cela donne les possibilités :

$$a+1=2,\ b+1=4 \rightarrow 3^1\times7^3 = 1029$$
$$a+1=4,\ b+1=2 \rightarrow 3^3\times7^1 = 189.$$

Les solutions sont donc 189, 1029, et tous les produits $21\times p$ avec p premier autre que 3 ou 7.
Il y en a une infinité. Le plus petit est $21\times2=42$.

Interrogation 1

Exercice 1

a)

```
 5746 | 5
-5    |----
 07   | 1149
 -5
  24
 -20
   46
  -45
    1
```

$5746 \div 5 = 1149$ reste 1

b)

```
 1634 | 7
-14   |----
  23  | 233
 -21
   24
  -21
    3
```

$1634 \div 7 = 233$ reste 3

c)

```
 12264 | 11
-11    |-----
  12   | 1114
 -11
   16
  -11
    54
   -44
    10
```

$12264 \div 11 = 1114$ reste 10

Exercice 2

a) 654 n'est pas premier car il est pair.

b) $\sqrt{41} \simeq 6,\ldots$ 41 n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5 : il est premier.

c) $69 = 3 \times 23$ n'est pas premier.

d) $\sqrt{61} \simeq 7,\ldots$ 61 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 donc est premier.

e) $187 = 11 \times 17$ n'est pas premier.

Exercice 3

a)

$$\begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

donc $91 = 7 \times 13$.

b)

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

donc $128 = 2^7$.

c)

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

donc $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.

d)

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

donc $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

e)

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

donc $3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$.

Exercice 4

a) $30 = 1\times30$
$= 2\times15$
$= 3\times10$
$= 5\times6$ donc 30 a huit diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Cela est cohérent avec $30 = 2^1\times3^1\times5^1 \rightarrow (1+1)(1+1)(1+1) = 2\times2\times2 = 8$.

b) $120 = 1\times120$
$= 2\times60$
$= 3\times40$ donc 120 a seize diviseurs : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.
$= 4\times30$
$= 5\times24$ Cela est cohérent avec $120 = 2^3\times3^1\times5^1 \rightarrow (3+1)(1+1)(1+1) = 4\times2\times2 = 16$
$= 6\times20$
$= 8\times15$
$= 10\times12$

c) 71 est premier : il a deux diviseurs 1 et 71.

d) $1000 = 1\times1000$ $= 10\times100$
$= 2\times500$ $= 20\times50$
$= 4\times250$ $= 25\times40$ donc 1000 a seize diviseurs : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500 et 1000.
$= 5\times200$
$= 8\times125$

Cela est cohérent avec $1000 = 2^3\times5^3 \rightarrow (3+1)(3+1) = 4\times4 = 16$.

Exercice 5

2 autre sujet : $5^3\times7 = 875$, $5\times7^3 = 1715$ et tous les nombres de la forme $5\times7\times p = 35p$ avec p premier autre que 5 ou 7.