Chapitre 4 - Géométrie au compas : cercles, triangles, périmètres

Exercice 1

1) Tracer un segment $[OA]$ de longueur 3 cm, et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O passant par A.

2) Quel est le rayon de $(\mathcal{C})$? Justifier [1] la réponse.

3) Soit [2] B un point de $(\mathcal{C})$. Quel est la nature du triangle AOB ? Justifier la réponse.

Exercice 2

1) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 4 cm et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$.

2) Soit O le centre de $(\mathcal{C})$. Justifier que O est le milieu de $[AB]$.

3) a. Placer un point C sur le cercle $(\mathcal{C})$ et tracer le triangle ABC.

b. Que remarque-t-on sur la figure à propos des droites (AC) et (BC) ?

c. Quelle est donc la nature du triangle ABC ?

4) Recommencer la question 3 deux fois en remplaçant le point C par d'autres points (D puis E) du cercle.

5) Compléter la conjecture [3] suivante : « Si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$, le triangle AMB est .... »

Exercice 3

1) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, et les cercles $(\mathcal{C}_1)$ de centre A passant par B et $(\mathcal{C}_2)$ de centre B passant par A.

2) Placer les points d'intersection C et D de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

3) Que dire des triangles ABC et ABD ? Justifier la réponse.

4) Que dire du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

Exercice 4

1) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, et le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

2) Tracer un autre diamètre $[CD]$ du cercle $\mathcal{C}$.

3) Qu'observe-t-on à propos du quadrilatère $ACBD$?

Exercice 5

1) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, et le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$.

2) Tracer la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par son milieu.

---

1. En géométrie, *justifier* est distinct de *mesurer* et d'*observer* (ou *constater*) : on *observe* un résultat sur une figure, on *mesure* une longueur ou un angle, mais on *justifie* un résultat en utilisant des hypothèses de l'énoncé et des propriétés du cours. En particulier, une justification peut s'aider d'une figure, mais n'a jamais **besoin** de celle-ci.

2. « être », au subjonctif : « soit » est équivalent à dire « on se donne ». Ainsi, la phrase « Soit B un point de $(\mathcal{C})$ » a deux effets : elle introduit un nouveau point B dans les données de l'exercice et ajoute aux hypothèses que celui-ci appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

3. Une conjecture est une propriété dont l'on prédit qu'elle est vraie par l'observation mais que l'on ne démontre (=justifie) pas.

3) Placer les points d'intersection C et D de la droite (Δ) et du cercle $(\mathcal{C})$.

4) Qu'observe-t-on à propos du quadrilatère $ACBD$?

Exercice 6 - Médiatrice

1) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 4 cm.

2) Avec le compas, tracer deux cercles de même rayon respectivement centrés en A et en B. Placer leurs points d'intersection C et D, et tracer la droite (CD).

3) Que dire des droites (CD) et (AB) ? Que représente leur point d'intersection pour $[AB]$?

4) Pour un point quelconque M de cette droite, mesurer les distances AM et BM.

Remarque : On observe donc que tout point équidistant de A et B est sur la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par son milieu. Réciproquement, tout point de cette droite est équidistant de A et B. Cette droite est appelée la *médiatrice* du segment $[AB]$.

Exercice 7 - Cercle circonscrit à un triangle

1) Tracer un triangle ABC.

2) Tracer les médiatrices (voir remarque précédente) (d_1), (d_2) et (d_3). des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

3) On observe que ces trois droites sont concourantes [4]. On va le démontrer.

4)[Difficile] On montre d'abord que (d_1) et (d_2) sont sécantes. Si elles étaient parallèles, montrer que (d_1) serait perpendiculaire à (BC). En déduire que (AB) et (BC) seraient parallèles. Ceci étant faux, on en déduit bien que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.

5) Soit O le point d'intersection de (d_1) et (d_2). Justifier (revoir la remarque précédente) que O est à la même distance de A, B et C.

6) En déduire que O appartient à (d_3). On a donc montré que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

7) a. Justifier que A, B et C sont sur le même cercle de centre O.

b. Si O' est un point tel que A, B et C soient sur un même cercle centré en O', montrer que O' est le point O. (On pourra démontrer qu'il appartient à chacune des trois médiatrices précédentes.)

Conclusion : On a démontré que tout triangle est inscrit [5] dans un unique cercle, dont le centre est le point d'intersection des médiatrices des trois sommets. Ce cercle est appelé le *cercle circonscrit au triangle ABC*.

4. Trois droites sont *concourantes* si elles se rencontrent en un unique point commun.

5. Un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque tous ses sommets sont sur le cercle. On dit alors que le cercle est *circonscrit* au polygone.

Exercice 8 - Non-existence d'un cercle circonscrit pour les quadrilatères

Dans cet exercice, on vérifie que certains quadrilatères ne sont inscrits dans aucun cercle.

1) Tracer un triangle ABC tel que $AB = BC = 5$ cm et $AC = 3$ cm.

2) Placer le point D de telle sorte que $ABCD$ soit un losange.

3) Tracer les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ et vérifier que (AC) est la médiatrice de $[BD]$, et (BD) celle de $[AC]$.

4) Supposons qu'il existe un cercle contenant A, B, C, et D, et notons O son centre.

a. Justifier que O appartient à la médiatrice de tout segment dont les extrémités sont choisies parmi les quatre points A, B, C et D.

b. En déduire que O est l'intersection des deux diagonales. (Utiliser 3.)

c. Mesurer OA et OB, et en déduire que A et B ne peuvent donc pas être sur le même cercle de centre O.

Conclusion : On a donc vérifié que si un cercle contenait les quatre sommets de notre losange, il ne pouvait pas contenir A et B à la fois, ce qui est contradictoire. La seule possibilité est donc qu'aucun tel cercle n'existe : le losange $ABCD$ ne peut être inscrit dans aucun cercle. Généralement, un parallélogramme ne s'inscrit dans un cercle que si c'est un rectangle. Pour un losange, la seule possibilité est donc d'être un carré.