1 Rappels

Définition. On rappelle que la *bissectrice* d'un angle est la demi-droite issue de son sommet et le partageant en deux angles égaux.

Exercice 1. Construire un angle $\widehat{AOB}$ de mesure 103^o et un angle $\widehat{AOC}$ de mesure 69^o à l'intérieur de celui-ci.

Construire un angle $\widehat{AOD}$ adjacent à $\widehat{AOB}$ de mesure 34^o.

Comparer la différence entre $\widehat{DOB}$ et $\widehat{DOC}$ et celle entre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$. Ce résultat dépend-il des mesures choisies ?

Exercice 2. Construire deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ mesurant respectivement 68^o et 42^o.

Construire leurs bissectrices $[OM)$ et $[ON)$.

Mesurer l'angle $\widehat{MON}$ et le comparer à l'angle $\widehat{AOC}$.

Exercice 3. Deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.

1. Construire la figure sachant que $\widehat{AOB} = 60^o$ et $\widehat{AOC} = 110^o$. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
2. Si $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Exercice 4. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont adjacents et $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.

1. Effectuer la construction de ces angles en prenant $\widehat{AOB} = 52^o$ et $\widehat{AOC} = 108^o$. Mener $[OM)$ et calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
2. On suppose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$ avec $\beta > \alpha$. Montrer que $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Exercice 5. Soient $[OM)$ et $[ON)$ les bissectrices des angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.

1. Construire la figure pour $\widehat{AOB} = 72^o$ et $\widehat{AOC} = 48^o$. Calculer les mesures des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. Comparer ces mesures.
2. Si $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{BOC} = \alpha + \beta$ et $\widehat{MON} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Exercice 6. On considère deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$. Soient $[OM)$ et $[ON)$ les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.

1. On donne $\widehat{AOB} = 60^o$ et $\widehat{AOC} = 108^o$. Construire la figure et calculer les mesures des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. Comparer ces deux mesures.

2. On suppose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Exercice 7. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ des angles non-adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ font un angle de 36^o et l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 64^o.

1. Construire la figure et calculer les angles $\widehat{AOM}$, $\widehat{AON}$ et $\widehat{AOC}$.
2. Comparer les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. En est-il toujours ainsi ?

Exercice 8. On considère deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ dont les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ font un angle de 84^o.

1. Sachant que l'angle $\widehat{AOC}$ vaut 118^o, construire la figure et calculer les mesures des angles $\widehat{AON}$, $\widehat{AOM}$ et $\widehat{AOB}$.
2. Comparer les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{BOC}$. Généraliser.

Exercice 9.

1. Construire trois angles successivement adjacents : $\widehat{AOB} = 32^o$, $\widehat{BOC} = 72^o$, et $\widehat{COD} = 48^o$, puis les bissectrices $[OM)$, $[ON)$, $[OP)$ et $[OQ)$ des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COD}$.
2. Calculer les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{POQ}$. Comparer ces angles à l'angle $\widehat{BOC}$.
3. Montrer que les angles $\widehat{MOQ}$ et $\widehat{NOP}$ ont la même bissectrice.

Exercice 10.

1. Construire un angle $\widehat{AOB}$ de 60^o, sa bissectrice $[Ox)$, puis les angles droits $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ adjacents à l'angle $\widehat{AOB}$ et enfin les bissectrices $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ou)$ des angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$, et $\widehat{COD}$.
2. Calculer la valeur des angles $\widehat{COD}$, $\widehat{xOy}$, et $\widehat{xOz}$. Montrer que $[Ox)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{yOz}$.
3. Calculer les mesures des angles $\widehat{yOu}$, $\widehat{zOu}$, et $\widehat{xOu}$. Que peut-on dire des demi-droites $[Ox)$ et $[Ou]$?

2 Angles opposés par le sommet

Exercice 11. On considère dans cet ordre 4 demi-droites $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ et $[OD)$.

1. Sachant que $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 35^o$ et $\widehat{BOC} = 48^o$, construire les quatre demi-droites. Calculer et comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$.
2. Soit $[OM)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$. Montrer que $[OM)$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{AOD}$.

Exercice 12. Autour d'un point O sont construits cinq angles successivement adjacents $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, et $\widehat{EOA}$ recouvrant tout le plan. Ces angles vérifient les relations :

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{AOB}; \widehat{COD} = \widehat{AOB}+\widehat{BOC}; \quad \widehat{DOE} = 2\widehat{BOC}; \quad \widehat{EOA} = \widehat{BOC}+\widehat{COD}.$$

1. Calculer la mesure en degrés de chacun de ces angles.
2. Calculer l'angle des bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOE}$.

3 Angles alternes-internes

Définition. Étant données deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une troisième droite (Δ), on dit que deux angles sont *correspondants* si :
- Ils sont situés du même côté de la droite (Δ)
- Ils ont pour sommet chacun un des deux points d'intersection de (Δ) avec (d_1) et (d_2).
- Exactement un des deux angles est entre (d_1) et (d_2).

Exercice 13. Faire une figure illustrant la définition précédente.

Montrer que si deux angles sont correspondants, alors le premier angle est alterne-interne avec l'angle opposé par le sommet au second angle.

En déduire que deux angles correspondants sont de même mesure si, et seulement si, les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Exercice 14. On considère un quadrilatère $ABCD$ tel que les angles de deux sommets consécutifs soient toujours supplémentaires.

1. Faire une figure avec $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 60^o$, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 120^o$, $AB = 4$ cm, et $AC = 5$ cm. Que constate-t-on ?
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 15. On considère un quadrilatère $ABCD$ dont on trace la diagonale $[AC]$. On suppose que cette diagonale forme des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ égaux. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

4 Angles du triangle

Exercice 16. On considère un triangle ABC isocèle en A avec $\widehat{BAC} = 124^o$.

1. Faire une figure
2. Calculer les trois angles du triangle.
3. Vérifier sur la figure.

Exercice 17. On considère un triangle ABC isocèle en B avec $\widehat{BAC} = 124^o$.

1. Faire une figure
2. Calculer les trois angles du triangle.
3. Vérifier sur la figure.

Exercice 18. On considère un triangle ABC rectangle en A avec $\widehat{ABC} = 37^o$.

1. Faire une figure
2. Calculer les trois angles du triangle.
3. Vérifier sur la figure.

Exercice 19. On considère un quadrilatère $ABCD$ avec $\widehat{ABD} = 37^o$,$\widehat{BDC} = 57^o$ $\widehat{DAB} = 50^o$ et $\widehat{ABC} = 80^o$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les trois angles du triangle ABD, puis du triangle CBD.
3. Vérifier sur la figure. Que peut-on dire des quatre angles du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 20. On considère un quadrilatère $ABCD$ avec $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 40^o$, $\widehat{DAB} = 90^o$ et $\widehat{ABC} = 90^o$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les trois angles du triangle ABD, puis du triangle CBD.
3. Vérifier sur la figure. Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 21. On considère un pentagone régulier $ABCDE$. On admet qu'il existe un point O situé à la même distance de tous les sommets de cet hexagone.

1. Que dire des angles $\widehat{AOB}$,$\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, et $\widehat{EOA}$?
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. En déduire la valeur des autres angles du triangle AOB.
4. Compléter : « Les angles d'un pentagone régulier mesurent tous $\ldots^o$. »

Exercice 22. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$. On admet qu'il existe un point O situé à la même distance de tous les sommets de cet hexagone.

1. Que dire des angles $\widehat{AOB}$,$\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ et $\widehat{FOA}$?

2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. En déduire la valeur des autres angles du triangle AOB.
4. Compléter : « Les angles d'un hexagone régulier mesurent tous $\ldots^o$. »
5. Que dire des six triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOF et FOA ? En déduire une construction facile de l'hexagone régulier à la règle et au compas.