Exercices tirés du manuel de 3e de Pierre Chenevier, éd. Hachette[1]

1938

1. Vous pouvez me signaler les erreurs par courriel : lien de contact.

Première partie

Géométrie

Chapitre 1

Notions préliminaires

1. Vérification de la règle.
2. Marquer deux points A et B sur une feuille de papier. Déterminer la droite (AB) par pliage.
3. Marquer trois points A, B, C sur une feuille de papier. Déterminer les droites qui joignent deux de ces points. Même exercice avec quatre points A, B, C et D. Combien de droites obtient-on dans ce cas ? Construire leurs points d'intersection ?
4. Construire dans un plan 4 droites se coupant deux à deux en des points distincts. Montrer que l'on obtient ainsi 6 points d'intersection. Combien de droites nouvelles obtient-on en joignant ces points deux à deux ?
5. On donne dans un plan 6 points tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés et on les joint deux à deux. Combien de droites obtient-on ? Montrer que le nombre de ces droites est égal à la somme des 5 premiers nombres entiers ou au demi-produit de 6 par 5. Généraliser pour n points.
6. On considère deux droites (Ox) et (Oy) concourantes en O, situées dans un plan P. On joint par une droite un point A de (Ox) et un point B de (Oy). Montrer que tout point M de la droite AB est situé dans le plan P.
   En déduire que si A et B se déplacent simultanément sur (Ox) et (Oy) la droite (AB) engendre le point P.
7. On considère trois points A, B, C d'une même droite et 3 points A', B', C' d'une seconde droite, distincte de la première. Les droites (AB') et $(A'B)$ se coupent en M, les droites (AC') et $(A'C)$ se coupent en N et les droites (BC') et $(B'C)$ se coupent en P. Vérifier que les trois points M, N, P sont alignés.
8. Construire trois droites issues d'un même point I. Puis d'un point O mener à ces trois droites deux sécantes. Soient A, B, C les intersections des trois droites avec la première sécante ; A', B', C' leurs intersections avec la seconde. Les droites (AB') et $(A'B)$ se coupent en M, les droites (AC') et $(A'C)$ en N et les droites (BC') et $(B'C)$ en P. Vérifier que les 4 points M, N, O et P sont alignés.

Chapitre 2

Segments de droite

1. Construire quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur une même droite (xy) sachant que $AB = CD = 3$ **cm** et $BC = 5$ **cm**. Comparer ensuite les segments $[AC]$ et $[BD]$.
2. Quatre points A, B, C, D sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). Construite ces quatre points sachant que $AC = BD = 9$ **cm** et $BC = 7$ **cm**. Comparer les segments $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que $[AD]$ et $[BC]$ ont milieu O.
3. Quatre points A, B, C, D sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). Construire ces quatre points sachant que $AD = 14$ **cm**, $BC = 10$ **cm** et que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu O. Démontrer les égalités $AB = CD$ et $AC = BD$.
4. On porte bout à bout des segments avec $AB = 10$ **cm**, $BC = 3$ **cm**, $CD = 7$ **cm**. Écrire les inégalités que vérifient AB et BC, AB et CD, CD et BC. Quelle est la mesure de $[AD]$ en prenant AB pour unité, puis BC pour unité, puis CD pour unité ?
5. Trois points O, A, B sont situés dans cet ordre sur une droite (xy) et M est le milieu de $[AB]$.
   (a) On donne $OA = 4$ **cm** et $OB = 10$ **cm**. Quelle est la longueur OM ?
   (b) On donne $OA = a$, et $OB = b$. Démontrer les égalités :
   $$OM = OA + AM; \qquad OM = OB - AM; \qquad OM = \frac{a+b}{2}.$$
6. Trois points A, O, B sont situés dans cet ordre sur une droite (xy) et M désigne le milieu de $[AB]$.
   (a) On donne $OA = 5$ **cm** et $OB = 11$ **cm**. Quelle est la longueur de $[OM]$?
   (b) On donne $OA = a$, et $OB = b$ $(b > a)$. Démontrer les égalités :
   $$OM = AM - OA; \qquad OM = OB - AM; \qquad OM = \frac{b-a}{2}.$$
7. Trois points B, A, C sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

(a) On donne $AB = 7$ **cm** et $AC = 5$ **cm**. Quelle est la longueur de $[IJ]$? Comparer la longueur trouvée à celle de $[BC]$?

(b) Calculer les longueurs BC et IJ connaissant $AB = a$ et $AC = b$.

8. Trois points A, B, C sont situés dans cet ordre sur une droite (xy). On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

(a) On donne $AB = 9$ **cm** et $AC = 13$ **cm**. Quelle est la longueur de $[IJ]$? Comparer la longueur trouvée à celle de $[BC]$.

(b) Calculer les longueurs BC et IJ connaissant $AB = a$ et $AC = b$.

Chapitre 3

Angles

1. Transformer en grades les angles suivants et les construire :
   (a) 45^o ; 30^o ; 60^o.
   (b) 120^o ; 150^o ; 135^o.
   (c) $40^o15'$; $36^o30'$.
   (d) $50^o17'$; $112^o17'$.
2. Transformer en degrés les angles suivants et les construire :
   (a) 30 gr ; 50 gr ; 90 gr.
   (b) 120 gr ; 160 gr ; 190 gr.
   (c) $20,5$ gr ; $37,7$ gr ; $68,9$ gr.
   (d) $42,25$ gr ; $112,6$ gr ; $148,4$ gr.
3. Montrer sur des exemples que la différence de deux angles ne change pas si on leur ajoute (ou retranche) un même angle.
4. Découper dans une feuille de papier deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ mesurant respectivement 68^o et 42^o. Construire par pliage leurs bissectrices $[OM)$ et $[ON)$. Mesurer l'angle $\widehat{MON}$ et le comparer à l'angle $\widehat{AOC}$.
5. On considère dans cet ordre 4 demi-droites $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ et $[OD)$.
   (a) Sachant que $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 35^o$ et $\widehat{BOC} = 48^o$, construire les quatre demi-droites. Calculer et comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$.
   (b) Soit $[OM)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$. Montrer que $[OM)$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{AOD}$.
6. Deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.
   (a) Construire la figure sachant que $\widehat{AOB} = 60^o$ et $\widehat{AOC} = 110^o$. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.

(b) Si $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

7. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont adjacents et $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.
   (a) Effectuer la construction de ces angles en prenant $\widehat{AOB} = 52^o$ et $\widehat{AOC} = 108^o$. Mener $[OM)$ et calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
   (b) On suppose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$ avec $\beta > \alpha$. Montrer que $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.
8. Soient $[OM)$ et $[ON)$ les bissectrices des angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
   (a) Construire la figure pour $\widehat{AOB} = 72^o$ et $\widehat{AOC} = 48^o$. Calculer les mesures des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. Comparer ces mesures.
   (b) Si $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{BOC} = \alpha + \beta$ et $\widehat{MON} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.
9. On considère deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$. Soient $[OM)$ et $[ON)$ les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
   (a) On donne $\widehat{AOB} = 60^o$ et $\widehat{AOC} = 108^o$. Construire la figure et calculer les mesures des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. Comparer ces deux mesures.
   (b) On suppose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AOC} = \beta$, montrer que $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.
10. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ des angles non-adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ font un angle de 36^o et l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 64^o.
   (a) Construire la figure et calculer les angles $\widehat{AOM}$, $\widehat{AON}$ et $\widehat{AOC}$.
   (b) Comparer les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{MON}$. En est-il toujours ainsi ?
11. On considère deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ dont les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ font un angle de 84^o.
   (a) Sachant que l'angle $\widehat{AOC}$ vaut 118^o, construire la figure et calculer les mesures des angles $\widehat{AON}$, $\widehat{AOM}$ et $\widehat{AOB}$.
   (b) Comparer les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{BOC}$. Généraliser.
12. Autour d'un point O sont construits cinq angles successivement adjacents $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, et $\widehat{EOA}$ recouvrant tout le plan. Ces angles vérifient les relations :

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{AOB}; \qquad \widehat{COD} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}; \qquad \widehat{DOE} = 2\widehat{BOC}; \qquad ;\widehat{EOA} = \widehat{BOC} + \widehat{COD}.$$

   (a) Calculer la mesure en degrés de chacun de ces angles.
   (b) Calculer l'angle des bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOE}$.
13. (a) Construire trois angles successivement adjacents : $\widehat{AOB} = 32^o$, $\widehat{BOC} = 72^o$, et $\widehat{COD} = 48^o$, puis les bissectrices $[OM)$, $[ON)$, $[OP)$ et $[OQ)$ des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COD}$.
   (b) Calculer les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{POQ}$. Comparer ces angles à l'angle $\widehat{BOC}$.

(c) Montrer que les angles $\widehat{MOQ}$ et $\widehat{NOP}$ ont la même bissectrice.

14. (a) Construire un angle $\widehat{AOB}$ de 60^o, sa bissectrice $[Ox)$, puis les angles droits $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ adjacents à l'angle $\widehat{AOB}$ et enfin les bissectrices $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ou)$ des angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$, et $\widehat{COD}$.

    (b) Calculer la valeur des angles $\widehat{COD}$, $\widehat{xOy}$, et $\widehat{xOz}$. Montrer que $[Ox)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{yOz}$.

    (c) Calculer les mesures des angles $\widehat{yOu}$, $\widehat{zOu}$, et $\widehat{xOu}$. Que peut-on dire des demi-droites $[Ox)$ et $[Ou]$?

Chapitre 4

Le cercle

1. Calculer en degrés la mesures des arcs égaux à $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ d'un cercle et construire ces arcs.
2. Effectuer en grades les calculs précédents.
3. Construire sur un cercle de 3 **cm** de rayon les arcs successifs AB, BC, CD et DE mesurant respectivement : 27^o, 53^o, 75^o et 108^o. Calculer la mesure de l'arc EA qui reste sur le cercle.
4. Démontrer le théorème suivant : *La bissectrice d'un angle au centre $\widehat{AOB}$ passe par le milieu M de l'arc intercepté par cet angle.*
   Énoncer et démontrer la réciproque de ce théorème.
5. Énoncer et démontrer la réciproque de chacune des propositions :
   (a) *Si un point est intérieur à un cercle, sa distance au centre est inférieure au rayon.*
   (b) *Si un point est extérieur à un cercle, sa distance au centre est supérieure au rayon.*
6. On donne deux points A et B distants de 5 **cm**. Construire un point C tel que $AC = 6$ **cm** et $BC = 4$ **cm**. Combien y a-t-il de solutions ?
7. Quelle est la figure formée par l'ensemble des centres des cercles de 5 **cm** de rayon passant par un point donné A ?
   Construire un cercle de 5 **cm** de rayon passant par deux points donné A et B tels que $AB = 4$ **cm**.
8. On donne un cercle de centre O, de rayon 4 **cm** et un point A de ce cercle. Construire les cordes issues de A ayant $2,5$ **cm** de longueur.
9. Construire les milieux M et N des deux arcs d'extrémités A et B d'un cercle donné de centre O. Que représentent OM et ON pour les angles saillant et rentrant $\widehat{AOB}$? Comment sont disposés les 3 points M, O et N ?
10. Quatre points A, B, C, D sont disposés dans cet ordre sur un demi-cercle.
    (a) Sachant que $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, comparer les arcs $\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$.
    (b) Dans ce cas montrer que les arcs $\widehat{AD}$ et $\widehat{BC}$ ont même milieu M.

11. Trois points A, B et C sont situés dans cet ordre sur un cercle. Les arcs AB et AC mesurent respectivement 88^o et 154^o. Soit M le milieu de l'arc $\widehat{BC}$.
    (a) Montrer que $\widehat{AM} = \widehat{AB} + \widehat{BM} = \widehat{AC} - \widehat{BM} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{AC})$.
    (b) Évaluer l'angle $\widehat{AOM}$. Comparer sa valeur à la somme des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
12. On considère sur un cercle deux arcs consécutifs $\widehat{BA} = 78^o$ et $\widehat{AC} = 54^o$.
    (a) Construire les milieux M et N de ces deux arcs.
    (b) Calculer la mesure de l'arc $\widehat{MAN}$ et la comparer à la mesure de l'arc $\widehat{BAC}$. Généraliser.
13. Soient sur un cercle deux arcs de même sens : $\widehat{AB} = 42^o$ et $\widehat{AC} = 108^o$.
    (a) Construire les milieux M et N de ces deux arcs et calculer la mesure de l'arc $\widehat{MBN}$.
    (b) Comparer cette mesure à celle de l'arc $\widehat{BNC}$. Généraliser.

Chapitre 5

Angles associés

1. Construire et calculer le supplément des angles suivants :
   (a) 30^o ; 45^o ; 60^o.
   (b) $67^o35'$; $113^o43'23"$.
   (c) 25 gr ; 50 gr ; 75 gr.
   (d) $56,327$ gr ; $141,943$ gr.
2. Construire et calculer le complément des angles suivants :
   (a) 24^o ; 36^o ; 63^o.
   (b) $23^o37'$; $67^o26'30"$.
   (c) 30 gr ; 48 gr ; 65 gr.
   (d) $31,09$ gr ; $58,542$ gr.
3. Construire à l'aide du rapporteur, deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ de 54^o et 96^o. Calculer l'angle $\widehat{MON}$ de leurs bissectrices. Le comparer à l'angle $\widehat{BOC}$.
4. Deux angles adjacents ont pour somme 102^o. Quel est l'angle de leurs bissectrices ? Calculer et construire ces deux angles sachant que leur différence vaut 36^o.
5. Construire deux angles adjacents supplémentaires dont la différence vaut 54^o.
6. Deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont complémentaires et l'un est les $\frac{2}{3}$ de l'autre. Calculer et construire ces deux angles. Construire les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$. Calculer leur angle $\widehat{MON}$.
7. Les bissectrices de deux angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ font un angle droit $\widehat{MON}$. Démontrer que ces deux angles sont supplémentaires.
8. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ de deux angles égaux sont dont le prolongement l'une de l'autre. Démontrer que ces deux angles sont opposés par le sommet.
9. Deux angles non adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ ont pour différence un angle droit.
   (a) Calculer l'angle de leurs bissectrices.

(b) Construire ces deux angles sachant que $\widehat{AOB} = \frac{3}{8}\widehat{AOC}$.

10. Les bissectrices $[OM)$ et $[ON)$ de deux angles non adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ font un angle de 36^o.
    (a) Calculer l'angle $\widehat{BOC}$, lorsque $\widehat{AOB} = 84^o$. Comparer la valeur trouvée à celle de l'angle $\widehat{MON}$.
    (b) Généraliser pour des valeurs quelconques des angles donnés.
11. Quatre angles consécutifs de même sommet $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOA}$ sont tels que :
$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \qquad \text{et} \qquad \widehat{BOC} = \widehat{DOA}.$$
    Démontrer que leurs côtés sont deux à deux dans le prolongement de l'autre.
12. Démontrer que lorsque deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ ont même sommet et un côté commun, l'angle $\widehat{MON}$ de leurs bissectrices et la moitié de l'angle de leurs côtés non communs, que ces angles soient adjacents ou non.
13. On construit un angle $\widehat{AOB}$ de 48^o puis les angles droits $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$ non adjacents au premier.
    (a) Comparer les angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$. Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont supplémentaires.
    (b) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ ont même bissectrice $[OP)$. Calculer l'angle $\widehat{MON}$ des bissectrices des angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.
14. Construire l'angle $\widehat{AOB} = 108^o$ puis les angles droits $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$ adjacents à celui-ci.
    (a) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont supplémentaires. Comparer les angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.
    (b) Démontrer que les bissectrices $[OP)$ et $[OQ)$ des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont en ligne droite et calculer l'angle $\widehat{MON}$ des bissectrices des angles $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$.
15. Calculer la valeur et construire deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sachant que leurs bissectrices font un angle de 40^o et que le premier est égal aux $\frac{3}{5}$ de l'autre.
    (a) Dans le cas où les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents.
    (b) Dans le cas où ces angles ne sont pas adjacents.

Chapitre 6

Droites perpendiculaires

1. Vérification de l'angle droit d'une équerre.
2. Construire le complément d'un angle aigu :
   (a) Par pliage ;
   (b) à l'aide d'un rapporteur ;
   (c) à l'aide de l'équerre.
3. Déterminer la projection H et la distance d'un point extérieur O à une droite (xy).
   (a) Par pliage ;
   (b) à l'aide de l'équerre.
4. Construire la médiatrice d'un segment donné $[AB]$.
   (a) Par pliage ;
   (b) à l'aide d'un double décimètre et du rapporteur ou de l'équerre.
5. Soient I et J deux points d'une droite (xy) et un point extérieur O. On trace les cercles de centres I et J passant par O.
   (a) Montrer que les deux cercles passent également par le point O' qui coïncide avec O lorsqu'on plie la figure suivant (xy).
   (b) En déduire une construction de la perpendiculaire menée de O à (xy) et de la projection H du point O sur (xy).
6. On prend trois points A, B, C sur un même cercle. Mener d'un point M de ce cercle les perpendiculaires (MP), (MQ) et (MR) aux trois droites (BC), (CA) et (AB). Si la construction est précise, les trois points P, Q, R sont alignés. Vérifiez-le.
7. Soient trois points A, B, C non alignés. Mener de chacun d'eux, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à la droite déterminée par les deux autres. Que constate-t-on ? On envisagera le cas où les trois angles sont aigus, et le cas où l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.
8. On considère un angle aigu $\widehat{AOB}$.

(a) Construire un angle aigu $\widehat{COD}$ tel que $[OC)$ soit perpendiculaire à $[OA)$ et $[OD)$ perpendiculaire à $[OB)$.

(b) Comparer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ et énoncer le théorème correspondant.

(c) Que peut-on dire des angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ ainsi que de leurs bissectrices ?

9. Reprendre le problème précédent avec des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ obtus.

10. On considère un angle obtus $\widehat{AOB}$ et on construit à l'intérieur de cet angle $[OC)$ perpendiculaire à $[OA)$ et $[OD)$ perpendiculaire à $[OB)$.

    (a) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

    (b) Comment sont disposées les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$?

    (c) Calculer l'angle $\widehat{MON}$ des bissectrices des angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$.

11. Soit une droite (AB) et un point O de cette droite. On construit d'un même côté de cette droite deux angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOC}$ complémentaires ainsi que la perpendiculaire $[OE)$ à (AB) en O.

    (a) Démontrer que (OC) et (OD) sont perpendiculaires.

    (b) Comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{EOD}$ puis les angles $\widehat{BOD}$ et $\widehat{EOC}$.

    (c) Que peut-on dire des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{DOE}$?

12. Deux droites perpendiculaires (xx') et (yy') se coupent en O. Deux autres droites perpendiculaires (uu') et (vv') se coupent en O de façon que $[Ou)$ soit dans l'angle $\widehat{xOy}$ et $[Ov)$ dans l'angle $\widehat{x'Oy}$.

    (a) Trouver dans la figure les angles égaux à $\widehat{xOu}$.

    (b) Déterminer les angles complémentaires, puis les angles supplémentaires de $\widehat{xOu}$.

13. Quatre angles consécutifs $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOE}$ valent chacun 45^o.

    (a) Que peut-on dire des demi-droites $[OA)$ et $[OE)$, $[OB)$ et $[OD)$?

    (b) On construit les bissectrices des quatre angles initiaux. Montrer qu'elle sont deux à deux [1] perpendiculaires.

14. On considère une feuille de papier $ABCD$ dont les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont droits. Par le milieu O de $[AB]$, on trace une demi-droite $[Ox)$.

    (a) Plier la feuille de façon à amener les segments $[OA]$ et $[OB]$ sur $[Ox)$. Montrer que A et B viennent alors coïncider en P.

    (b) L'un des plis coupe $[AD]$ en M, l'autre coupe $[BC]$ en N. Montrer que (Om) et (ON) sont perpendiculaires.

    (c) Démontrer que les trois points M, P et N sont alignés sur la perpendiculaire en P à $[Ox)$.

1. Deux sont perpendiculaires à deux autres ; non deux quelconques.

Chapitre 7

Polygones. Triangles

1. Construire les médianes, les hauteurs, les bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle. Que remarquez-vous ?
2. Construire un triangle rectangle et isocèle dont les côtés de l'angle droit valent 32 mm.
3. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse 58 mm et un côté de l'angle droit 42 mm.
4. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse 44 mm et un angle 32^o.
5. Construire un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit 37 mm et un angle adjacent à ce côté 53^o.
6. Construire un triangle isocèle dont les deux côtés égaux mesurent 54 mm et le troisième côté 60 mm.
7. Construire un triangle équilatéral de 29 mm de côté.
8. Construire un triangle ABC connaissant $\widehat{A} = 52^o$, $AB = 27$ mm, $AC = 38$ mm.
9. Construire un triangle ABC connaissant $BC = 57$ mm, $\widehat{B} = 63^o$, $\widehat{C} = 51^o$.
10. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 18$ mm, $AB = 25$ mm, et $BC = 50$ mm (on supposera H entre B et C).
11. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 18$ mm, $AB = 25$ mm, et $AC = 30$ mm.
12. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 22$ mm, $AB = 29$ mm, et $\widehat{A} = 37^o$.
13. Construire un triangle ABC connaissant $AH = 30$ mm, $BH = 12$ mm, et $AC = 40$ mm.
14. Construire un triangle ABC connaissant $AB = 38$ mm, la médiane $AM = 23$ mm, et $BM = 23$ mm. Mesurer les angles de ce triangle.
15. Construire un triangle ABC connaissant $AB = 41$ mm, $\widehat{BAC} = 54^o$ et la bissectrice intérieure $AD = 45$ mm.
16. Construire un triangle ABC connaissant : $\widehat{A} = 120^o$, $AB = 30$ mm, et $BC = 57$ mm.
17. Construire un triangle isocèle ABC sachant que $AB = AC = 32$ mm, et que $\widehat{B} = 65^o$.

18. Découper dans une feuille de bristol ou de léger carton une fausse équerre triangulaire ABC telle que $BC = 10$ cm, $\widehat{B} = 60^o$ et $\widehat{C} = 72^o$. Vérifier que l'angle $\widehat{A}$ mesure 48^o.
19. Utiliser la fausse équerre de l'exercice précédent pour mener par un point extérieur A une oblique $[AM)$ faisant un angle de 60^o avec une droite donnée (xy). Nombre de solutions ?
20. Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 40$ mm et $\widehat{C} = 72^o$. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
21. Construire un triangle ABC tel que $AB = 32$ mm, $\widehat{B} = 65^o$, et $\widehat{C} = 47^o$. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
22. Construire un triangle isocèle ABC tel que $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^o$ avec une hauteur $AH = 48$ mm. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
23. Construire un triangle ABC sachant la hauteur $AH = 45$ mm et que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux à 60^o et 72^o. (Utiliser la fausse équerre précédente.)
24. Construire un triangle ABC connaissant la hauteur $AH = 36$ mm, l'angle $\widehat{B} = 120^o$ et l'angle $\widehat{C} = 48^o$.
25. Construire un quadrilatère convexe $ABCD$ sachant que $AB = AC = BC = 5$ **cm**, $AD = 3$ **cm** et $CD = 4$ **cm**. Mesurer au rapporteur les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère obtenu.
26. Construire un quadrilatère convexe $ABCD$ connaissant $\widehat{A} = 120^o$, $AB = 3$ **cm**, $AD = 2$ **cm**, $BC = 3,5$ **cm**, et $CD = 4$ **cm**. Mesurer au rapporteur les angles $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère obtenu.

Chapitre 8

Les deux premiers cas d'égalité des triangles

1. Démontrer que dans deux triangles égaux ABC et $A'B'C'$, les médianes AM et $A'M'$ sont égales. (Comparer ABM et $A'B'M'$.). Vérification graphique.
2. Même problème pour les bissectrices intérieures AD et $A'D'$.
3. On porte sur les cotés d'un angle $\widehat{xOy}$ respectivement deux longueurs égales OA et OB et on joint A et B à un point quelconque M de la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.
   (a) Comparer les triangles AOM et BOM. Conséquences ?
   (b) Démontrer que $AM = BM$ et que $[OM)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.
4. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel la droite (AC) est bissectrice intérieure des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
   (a) Comparer les triangles ABC et ADC. Conséquences ?
   (b) On plie la figure suivant la droite (AC). Que se passe-t-il ? En déduire que (AC) est médiatrice du segment $[BD]$.
5. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux diamètres pris dans deux cercles de même centre O.
   (a) Comparer les triangles AOC et BOD puis les triangles AOD et BOC.
   (b) Comparer les côtés opposés et les angles opposés du quadrilatère $ACDB$.
6. On considère dans un cercle deux angles au centre égaux $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOC}$ tous deux adjacents à l'angle $\widehat{BOD}$.
   (a) Comparer les triangles AOB et COD. Conséquences ?
   (b) Comparer les triangles AOD et COB. Conséquences ? Montrer que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.
7. Deux points A et B situés d'un même côté de la droite (xy) se projettent en H et K sur cette droite et on a $AH = BK$.
   (a) Comparer les triangles AHK et BHK. Conséquences ?

(b) Comparer les triangles ABK et BAH puis les angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{HBA}$.

8. Une droite (xy) passe entre les points A et B et les distances AH et BK à cette droite sont égales. Soit O le milieu de $[HK]$.
   (a) Comparer les triangles OAH et OBK. Conséquences ?
   (b) Démontrer que les points A, O et B sont alignés et que O est le milieu de $[AB]$.

9. Dans un quadrilatère convexe la diagonale $[AC]$ fait des angles égaux avec $[AD]$ et $[BC]$ d'une part et avec $[AB]$ et $[CD]$ d'autre part. Soit O le milieu de $[AC]$.
   (a) Comparer les triangles ABC et CDA. En déduire une propriété des angles opposés et des côtés opposés du quadrilatère.
   (b) Comparer les triangles OAB et OCD et montrer que O est aussi milieu de $[BD]$.

10. Deux segments inégaux $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu O.
   (a) Comparer les triangles OAC et OBD puis les triangles AOD et BOC. Conséquences pour les côtés et les angles du quadrilatère $ACBD$.
   (b) Une droite (Ox) est perpendiculaire en H à (AC). Montrer qu'elle est également perpendiculaire en K à (BD) et que O est le milieu de $[HK]$.

11. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que $AB = CD$ et $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. Soit O le milieu de la diagonale $[AC]$.
   (a) Comparer les triangles OAB et OCD. Conséquences ? Que représente le point O pour le segment $[BD]$?
   (b) Une droite (xOy) coupe (AB) en M et (DC) en N. Comparer les triangles OAM et OCN. En déduire que $AM = CN$ et que O est le milieu de $[MN]$. Comparer les angles $\widehat{OMA} = \widehat{ONC}$.

12. On prolonge la médiane $[AM]$ du triangle ABC d'une longueur MD égale à AM.
   (a) Comparer les triangles MAC et MDB. Conséquences pour AC et BD ainsi que pour les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MDB}$?
   (b) Construire la figure sachant que $AM = 3$ **cm**, $AB = 5$ **cm** et $AC = 4$ **cm**.

13. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour construire un triangle ABC connaissant la médiane $AM = 36$ mm, $\widehat{MAB} = 72^o$, et $\widehat{MAC} = 54^o$.

14. On considère deux angles égaux $\widehat{BAx}$ et $\widehat{ABy}$ situés de part et d'autre de la droite (AB). Une sécante issue du milieu O de $[AB]$ coupe $[Ax)$ en M et $[By)$ en N.
   (a) Comparer les triangles AOM et BON. Conséquences ?
   (b) Comparer les triangles AON et BOM puis les segments $[AN]$ et $[BM]$. Montrer que le milieu de $[AN]$ et le milieu de $[BM]$ sont sur une droite issue de O.

15. (a) Construire un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 42^o$, $AB = 48$ mm, et $AC = 36$ mm, puis, extérieurement au triangle, les triangles isocèles en A ACD et ABE tels que $\widehat{CAD} = \widehat{BAE} = 58^o$.

(b) Comparer les triangles ABD et AEC puis les segments $[BD]$ et $[EC]$. Ces segments se coupent en I : mesurer l'angle $\widehat{CID}$.

16. (a) Construire un triangle ABC tel que $BC = 34$ mm, $\widehat{B} = 82^o$ et $\widehat{C} = 68^o$, puis extérieurement au triangle ABC construire les triangles ABD et ACE tels que $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^o$, $BD = BA$ et $CE = CA$. ainsi que le triangle ICB égal au triangle ABC ($IC = AB$, $IB = AC$).

    (b) Comparer les triangles BDI et CIE puis les segments $[ID]$ et $[IE]$. Mesurer l'angle $\widehat{DIE}$.

17. On donne un triangle ABC et on prolonge le côté $[AB]$ d'une longueur $BD = AB$, le côté $[AC]$ d'une longueur $CF = AC$ et la médiane $[AM]$ d'une longueur $MI = AM$.

    (a) Comparer les triangles MAB et MIC puis MAC et MIB. Montrer que le quadrilatère $BACI$ a ses côtés opposés égaux et ses angles opposés égaux.

    (b) Comparer les triangles BDI et CIF puis les segments $[ID]$ et $[IF]$. Mesurer l'angle $\widehat{DIF}$. Que déduit-on pour les 3 points I, D et F ?

18. On considère un quadrilatère concave $ABCD$ dans lequel la droite (AC) est bissectrice de l'angle saillant $\widehat{BAD}$ et aussi de l'angle rentrant $\widehat{BCD}$.

    (a) Comparer les triangles ABC et ADC. Conséquences ?

    (b) Le segment $[BD]$ coupe en H le prolongement de $[AC]$. Comparer les triangles HBC et HDC. Conséquences ?

    (c) Montrer que la droite (AC) est la médiatrice de $[BD]$.

Chapitre 9

Symétrie par rapport à une droite

1. Soient deux points A et A' symétriques par rapport à une droite (xy) et deux points quelconques I et J de la droite (xy). Montrer que les cercles de centres I et J passant par A se recoupent au point A' En déduire une construction au compas du symétrique d'un point par rapport à la droite (xy).
2. (a) Construire le symétrique d'un polygone $ABCDEF$ par rapport à une droite (xy) en utilisant l'exercice précédent.
   (b) Vérifier que (BD) et son symétrique $(B'D')$ se coupent en O sur (xy) et que l'angle $\widehat{BOB'}$ admet (xy) pour bissectrice.
3. (a) Construire le symétrique $\widehat{B'A'C'}$ d'un angle $\widehat{BAC}$ par rapport à la droite (xy).
   (b) Dans quel cas la droite (AB) est-elle confondue avec sa symétrique $(A'B')$?
4. Dans un triangle ABC on mène la bissectrice intérieure de l'angle A coupant en D le côté $[BC]$. (On suppose $AB < AC$).
   (a) Construire le point E symétrique de B par rapport à (AD). Que représente (CE) pour les segments $[AB]$ et $[AC]$?
   (b) Que représente la droite (DA) pour l'angle D du triangle CDE ?
5. Reprendre l'exercice précédent avec (AD) bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$.
6. (a) Construire le symétrique $A'B'C'$ du triangle ABC par rapport à la droite (xy).
   (b) Les médianes $[BM]$ et $[CN]$ du triangle ABC se coupent en G, les médianes $[B'M']$ et $[C'N']$ du triangle $A'B'C'$ se coupent en G'. Que représente (xy) pour le segment $[GG']$?
7. On considère un angle $\widehat{BAD}$ tel que $AB = AD$. On construit à l'intérieur de cet angle deux angles égaux $\widehat{ABx}$ et $\widehat{ADy}$.
   (a) Montrer que $[Bx)$ et $[Dy)$ sont symétriques par rapport à la bissectrice $[Ou)$ de l'angle $\widehat{BAD}$. Où se trouve le point d'intersection C de ces deux demi-droites ?
   (b) Comparer les segments $[BC]$ et $[DC]$ et les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ACD}$.

8. On prend les symétriques B et C d'un point A intérieur à l'angle droit $\widehat{xOy}$ par rapport aux droites $[Ox)$ et $[Oy)$.
   (a) Montrer que le point O est le milieu du segment $[BC]$ et que le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A.
   (b) Comparer l'angle $\widehat{BAC}$ à la somme des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC.
9. Les deux points A et B sont d'un même côté de la droite (xy). On construit le symétrique A' de A par rapport à (xy). La droite $(A'B)$ coupe (xy) en M.
   (a) Montrer que (MA) et (MB) dont des angles égaux avec la droite (xy).
   (b) Existe-t-il un autre point N de la droite (xy) tel que (xy) soit bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ANB}$?
10. On considère deux points A et B de part et d'autre de la droite (xy) et on désigne par A' le symétrique de A par rapport à la droite (xy). La droite (BA') coupe (xy) en M.
   (a) Montrer que (MA) et (MB) dont des angles égaux avec la droite (xy).
   (b) Existe-t-il un autre point N de la droite (xy) tel que (xy) soit bissectrice de l'angle $\widehat{ANB}$?
11. Soit un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. On construit deux arcs égaux $\widehat{AC}$ et $\widehat{AD}$.
   (a) Montrer que (AB) est la médiatrice de $[CD]$.
   (b) Démontrer que $AC = AD$, $BC = BD$ et que la droite (AB) est bissectrice des angles $\widehat{COD}$, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$.
12. On construit d'un même côté d'un segment $[AB]$ deux angles égaux $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABD}$ tels que $AC = BD$.
   (a) Montrer que la figure obtenue admet un axe de symétrie. En déduire l'égalité de AD et de BC et l'égalité entre les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.
   (b) Retrouver ces propriétés en comparant les triangles ABC et BAD puis montrer que (AD) et (BC) se coupent sur la médiatrice de $[AB]$.
13. Un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O est tel que $OA = OB$ et $OC = OD$.
   (a) Montrer que ce quadrilatère admet pour axe de symétrie la droite (Ox) bissectrice des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$.
   (b) Montrer que (AD) et (BC) se coupent sur cet axe et démontrer $AD = BC$.
14. On considère un angle $\widehat{xOy}$ et un point A intérieur tel que $\widehat{AOx} = 38^o$ et $\widehat{AOy} = 16^o$.
   (a) Construire les symétriques B et C du point A par rapport à (Ox) et (Oy), puis la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$ sur laquelle on porte $OD = OA$.
   (b) Montrer que l'angle $\widehat{BOC}$ est le double de l'angle $\widehat{xOy}$ et que les quatre points A, B, C et D sont sur un cercle de centre O.
   (c) Montrer que B et C sont symétriques par rapport à (OD) et que A et D sont symétriques par rapport à la droite (Ou) bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Chapitre 10

Triangle isocèle

1. Démontrer que lorsque la hauteur $[AH]$ d'un triangle ABC est en même temps médiane, le triangle est isocèle.
2. Dans un triangle ABC, la hauteur $[AH]$ est en même temps bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. Démontrer que le triangle est isocèle.
3. On considère un triangle ABC dans lequel la médiane $[AM]$ est en même temps bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. On prolonge $[AM]$ d'une longueur $MD = AM$.
   (a) Comparer les triangles AMD et DMC, puis les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MDC}$.
   (b) En déduire que le triangle ACD est isocèle, et qu'il en est de même du triangle ABC.
4. Démontrer que dans un triangle isocèle ABC en A :
   (a) Les médianes $[BM]$ et $[CN]$ sont égales.
   (b) Les bissectrices intérieures $[BD]$ et $[CE]$ sont égales.
5. Dans un triangle isocèle OAB de sommet O, on prend un point C sur $[OA]$ et un point D sur $[OB]$ tels que $OC = OD$.
   (a) Comparer les triangles OAD, OBC puis les triangles ABC et BAD. Conséquences ?
   (b) Montrer que le point d'intersection I de $[AD]$ et $[BC]$ appartient à l'axe de symétrie du triangle OAB.
6. Reprendre l'exercice précédent avec l'hypothèse $\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$.
7. Dans le quadrilatère $ABCD$, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires et $AD = BC$. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
   (a) Comparer les triangles ACD et EBC. Nature du triangle ACE ?
   (b) Démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux.
8. On construit extérieurement à l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC le segment $[BD]$ perpendiculaire à (BA) et égal à $[AC]$, puis le segments $[CE]$ perpendiculaire à (CA) et égal à $[AB]$.
   (a) Comparer les triangles ABD et ECA. Conséquences ?

(b) Démontrer l'égalité des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{AED}$.

9. Sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle équilatéral ABC, on prend respectivement A', B' et C' tels que $BA' = CB' = AC'$.
   (a) Comparer les triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$.
   (b) Montrer que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.
10. On considère un triangle isocèle OAB de sommet O et un point C du côté $[OA]$. On prolonge $[OB]$ dune longueur $BD = AC$. Le segment $[CD]$ coupe $[AB]$ en M. On prolonge $[BA]$ d'une longueur $AP = BM$.
    (a) Comparer les triangles APC et BMD. Conséquence pour CP et MD et pour les angles $\widehat{CPA}$ et $\widehat{DMB}$?
    (b) Nature du triangle CMP ? Que représente M pour le segment $[CD]$?
11. (a) Dans un triangle rectangle ABC, l'hypoténuse $[BC]$ est le double du côté de l'angle droit $[AB]$. Montrer que l'angle $\widehat{B}$ du triangle est le double de l'angle $\widehat{C}$.
    (b) Énoncer et démontrer la réciproque. On prolongera $[BA]$ d'une longueur $AD = AB$.
12. Construire un triangle isocèle OAB tel que $\widehat{A} = \widehat{B} = 68^o$. Le cercle de centre A passant par B recoupe $[OB]$ en C. On prolonge $[OA]$ d'une longueur $AD = OC$.
    (a) Comparer les angles $\widehat{ACO}$ et $\widehat{BAD}$ puis les triangles ACO et BAD.
    (b) Nature du triangle OBD. Calculer la somme des angles $\widehat{OBD}$ et $\widehat{BAC}$.

    (a) Démontrer que si un diamètre d'un cercle de centre O est perpendiculaire à la corde $[AB]$ il passe par le milieu H de cette corde et par les milieux M et N des arcs qu'elle sous-tend.
    (b) Comparer les triangles MAH et MHB, puis NHA et NHB et montrer que (MN) est la bissectrice des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.
13. On construit extérieurement au triangle isocèle ABC de sommet A deux triangles égaux ABD et ACE.
    (a) Comparer les triangles ABE et ACD puis les triangles BCD et CBE. En déduire l'égalité de BE et CD.
    (b) Montrer que $[BD]$ et $[CE]$ ainsi que $[CD]$ et $[BE]$ se coupent en I et J sur la hauteur $[AH]$ du triangle ABC.
14. Soit un triangle isocèle ABC tel que l'angle au sommet $\widehat{BAC} = 56^o$. On construit un segment $[AD]$ perpendiculaire à $[AB]$ et du même côté de (AB) que $[AC]$, puis le segment $[AE]$ égal à $[AD]$, perpendiculaire à (AC) de telle sorte que l'angle droit $\widehat{CAE}$ soit adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
    (a) Comparer les triangles ABD et ACE, les segments $[BD]$ et $[CE]$ et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$.
    (b) On mène les hauteurs $[AH]$ et $[AK]$ des triangles ABC et ADE. Évaluer l'angle HAK. Les droites (BD) et (CE) se coupent en I : mesurer l'angle $\widehat{BIC}$.

15. Construire un quadrilatère $ABCD$ tel que $AD = 52$ mm, $AB = CD = 24$ mm et que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ soient égaux à 48^o. Les droites (AB) et (CD) se coupent en O.

    (a) Montrer que les triangles AOD et BOC sont isocèles et que la bissectrice de l'angle $\widehat{AOD}$ est aussi médiatrice de $[AD]$ et de $[BC]$.

    (b) Comparer les triangles OAC et OBD. Que peut-on dire du point d'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$?

16. Dans le quadrilatère $ABCD$ l'angle $\widehat{A}$ mesure 40^o, les côtés $[AB]$ et $[AD]$ mesurent 3 cm, et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont égaux à 52^o.

    (a) Construire le quadrilatère. Montrer que le triangle BAD est isocèle puis, qu'il en est de même du triangle BCD.

    (b) Que représente la droite (AC) pour le segment $[BD]$ et les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ du quadrilatère.

17. Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du quadrilatère convexe $ABCD$ sont égaux et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires. On prolonge $[CB]$ d'une longueur $BE = CD$.

    (a) Comparer les triangles ABE et ADC. Nature du triangle ACE ?

    (b) Comparer les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BAD}$ puis les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ACD}$. Que représente la diagonale (CA) pour l'angle $\widehat{BCD}$?

Chapitre 11

Médiatrice d'un segment. Constructions géométriques

1. Partager géométriquement un segment $[AB]$ en huit parties égales.
2. Partager géométriquement un angle donné $\widehat{xOy}$ en 4 angles égaux. Même problème pour un arc donné.
3. Diviser géométriquement un cercle en 16 arcs égaux.
4. On se donne quatre points $ABCD$ tels que (AB) soit perpendiculaire à (CD) et (AC) à (BD). Construire les quatre cercles passant par trois de ces points. Que remarque-t-on au sujet de leurs rayons ?
5. Trois cercles égaux de 3 cm de rayon passent par un même point A et se recoupent deux à deux en B, C et D. Construire le cercle BCD et mesurer son rayon.
6. (a) Construire géométriquement le cercle circonscrit à un triangle ABC.
   (b) Tracer sur la même figure les trois médianes du triangle. Que remarquez-vous ?
7. Construire géométriquement les trois hauteurs d'un triangle, dans le cas où les trois angles sont aigus, puis où un angle est obtus. Que remarquez-vous ?
8. Construire les trois bissectrices intérieures et les trois bissectrices extérieures du triangle ABC. Y a-t-il des points communs à trois de ces droites ?
9. Trois cercles égaux de centres donnés A, B, C se coupent deux à deux. Démontrer que les cordes communes à deux de ces cercles concourent en un point O. Que représente ce point pour le triangle ABC ?
10. (a) Construire sur une droite donnée (Δ) (ou sur un cercle C) un point équidistant de deux points donnés A et B.
    (b) Construire un cercle passant par A et B sachant que son centre est sur (Δ) (ou sur C).
11. On mène d'un point O la perpendiculaire OH et deux obliques OA et OB de part et d'autre de OH à une droite donnée (xy).

(a) Montrer que l'une des égalités $OA = OB$ et $HA = HB$ entraîne l'autre.

(b) Montrer que chacune des égalités précédentes est aussi équivalente à $\widehat{OAH} = \widehat{OBH}$ et à $\widehat{HOA} = \widehat{HOB}$.

12. Soit un triangle isocèle ABC de base $[BC]$ et soit (xy) la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$. On porte sur (xy) deux segments égaux $[AD]$ et $[AE]$ (D du côté de B et E du côté de C).

 (a) Que représente la hauteur $[AH]$ du triangle ABC pour le segment $[DE]$? Comparer HD et HE.

 (b) Comparer les triangles ABD et ACE puis ABE et ACD. Conséquences pour BD et CE ainsi que pour BE et CD ?

13. On considère un triangle isocèle AOB de sommet O. On prend un point A' sur le côté $[OA]$ et un point B' sur le côté $[OB]$ tels que les angles $\widehat{ABA'}$ et $\widehat{BAB'}$ soient égaux. $[AB']$ et $[AB]$ se coupent en I.

 (a) Montrer que le triangle IAB est isocèle. Préciser la position du point I par rapport à la hauteur $[OH]$ du triangle OAB.

 (b) Réciproquement,montrer que lorsque I appartient au segment $[OH]$, les angles $\widehat{ABA'}$ et $\widehat{BAB'}$ sont égaux. Comparer AA' et BB'.

14. On prolonge la base $[AB]$ du triangle isocèle $[OAB]$ de deux longueurs égales AC et BD.

 (a) Montrer que la hauteur $[OH]$ du triangle OAB est la médiatrice de $[CD]$.

 (b) Démontrer que le triangle OCD est isocèle puis que les triangles OAC et OBD sont égaux ainsi que les triangles OAD et OBC.

15. Soient D, E, F les symétriques d'un point M intérieur à un triangle ABC par rapport aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

 (a) Que représente A pour le cercle MEF ? Propriété analogue des points B et C ? En déduire une construction au compas des points D, E, F.

 (b) Les médiatrices du triangle DEF se coupent en P. Montrer que $[AP]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{EAF}$. Sachant que $\widehat{BAM} = 16^o$ et $\widehat{CAM} = 45^o$ trouver la valeur de l'angle $\widehat{CAP}$ et la comparer à celle de l'angle $\widehat{BAM}$.

16. Dans un triangle ABC les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en un point O de $[BC]$. On désigne par M et N les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

 (a) Montrer que O est le milieu de $[BC]$ et que le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A.

 (b) Quelle est la nature du triangle MON ? Montrer que l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC est égal à la somme des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de ce triangle.

17. Les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC se coupent en O à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$. Comparer la somme des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle à la somme des angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{ACO}$ puis à l'angle $\widehat{A}$ du triangle suivant que le point O est :

 (a) intérieur au triangle ;

(b) sur le côté $[BC]$;

(c) extérieur au triangle.

18. Dans un quadrilatère $ABCD$ les médiatrices des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ se coupent en un même point O.

    (a) Montrer que les points A, B, C, D sont sur un même cercle.

    (b) Montrer que les médiatrices du triangle BDC se coupent en O.

19. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel la médiatrice de $[AB]$ est également la médiatrice de $[CD]$. Soit O le point où cette médiatrice coupe la médiatrice de $[BC]$.

    (a) Montrer que les quatre points A, B, C et D sont situés sur un même cercle de centre O.

    (b) Démontrer que les médiatrices de $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$ passent également par O.

20. (a) Construire un triangle isocèle ABC tel que $BC = 5$ cm et $\widehat{B} = \widehat{C} = 53^o$; le point D de $[BC]$ tel que $DA = DB$ et enfin le point E du segment $[AD]$ tel que $AE = CD$.

    (b) Comparer les triangles ABE et CAD. Nature du triangle BDE.

Chapitre 12

Le troisième cas d'égalité des triangles

1. Démontrer que lorsque deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont deux côtés respectivement égaux $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$ ainsi que la médiane relative à l'un d'eux $AM = A'M'$, ces deux triangles sont égaux.
2. Démontrer que lorsque deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont deux côtés respectivement égaux $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$ ainsi que la médiane relative au troisième $AM = A'M'$ ces deux triangles sont égaux (on prolongera $[AM]$ et $[A'M']$ d'une longueur égale $MD = M'D' = AM$ et on comparera d'abord ABD et $A'B'D'$).
3. Construire le centre O du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC.
   (a) Comparer les angles $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOB}$ puis calculer leurs valeurs.
   (b) Montrer que les distances de O aux trois côtés du triangle ABC sont égales.
4. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux. Que peut-on dire des triangles obtenus en joignant dans chacun d'eux les pieds des hauteurs,des bissectrices, des médianes ?
5. Deux triangles équilatéraux ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$. Comparer ces triangles ainsi que les rayons de leurs cercles circonscrits.
6. Démontrer que dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :
   (a) Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.
   (b) Deux cordes égales sous-tendent des arcs (inférieurs à un demi-cercle) égaux.
7. Dans un quadrilatère $ABCD$, on a $AB = AD$ et $BC = DC$.
   (a) Montrer que (AC) est médiatrice du segment $[BD]$ et bissectrice des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
   (b) Soit M le milieu de $[AC]$. Comparer MB et MD ainsi que $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AMD}$.
8. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $AB = CD$ et $AD = BC$.
   (a) Comparer les triangles ABC et CDA, puis ABD et DBC. Montrer qu'une diagonale forme des angles égaux avec deux côtés opposés.
   (b) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. Que représente ce point pour chacune d'elles ?

9. Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, on a $AD = BC$ et $AC = BD$.
   (a) Comparer les triangles ABC et BAD puis BCD et ADC. Montrer que l'un des côtés $[AB]$ ou $[CD]$ forme des angles égaux avec les deux diagonales.
   (b) Les diagonales se coupent en I. Nature des triangles IAB et ICD ? comparer les triangles IAD et IBC.
10. Deux cercles de centre O coupent une droite donnée (xy) le premier en A et B le second en C et D. Soit H la projection de O sur (xy).
    (a) Nature des triangles OAB et OCD ? Que représente H pour chacun des segments $[AB]$ et $[CD]$?
    (b) Comparer AC et BD puis AD et BC et enfin les triangles OAC et OBD et les triangles OAD et OBC.
11. (a) Démontrer que deux triangles qui ont deux côtés respectivement égaux et même périmètre sont égaux.
    (b) Démontrer que deux triangles isocèles qui ont même base et même périmètre sont égaux.
12. On donne un triangle ABC tel que $AB < AC$. On prend sur le côté $[AC]$ le point D tel que $AD = AB$. Le cercle de centre A et de rayon AC et le cercle de centre D et de rayon BC se coupent en E et F.
    (a) Montrer que l'un de ces points, E, par exemple, est sur la droite (AB).
    (b) Comment sont placés E et F par rapport à $[AC]$? Que représente (AC) pour les angles $\widehat{BAF}$, $\widehat{ECF}$ et $\widehat{EDF}$?
13. On considère trois points A, B, C dans cet ordre sur un cercle de centre O. La médiatrice de $[BC]$ coupe $[AC]$ en M.
    (a) Comparer les triangles OMB et OMC. Conséquence ?
    (b) Démontrer que les angles $\widehat{OAM}$ et $\widehat{OBM}$ sont égaux. Que représente la droite (MO) pour l'angle $\widehat{M}$ du triangle MAB ?
14. Démontrer que lorsque deux triangles AOB et $OA'B'$ sont superposables par retournement, les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ sont confondues.
15. On considère deux segments égaux $[AB]$ et $[A'B']$. Construire le point Q commun aux médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ et comparer les triangles AOB et $OA'B'$. Montrer que ces deux triangles se superposent par glissement et comparer les angles AOA' et BOB'.

Chapitre 13

Cas d'égalité des triangles rectangles

1. (a) Dans un triangle ABC le pied de la hauteur $[AH]$ se trouve entre B et C. Montrer que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus.

   (b) Lorsque H est sur le prolongement $[Bx)$ de $[CB]$, montrer que l'angle $\widehat{B}$ est obtus et les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{A}$ aigus. Combien y a-t-il au moins d'angles aigus dans un triangle ?

2. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux. Comparer les hauteurs homologues AH et $A'H'$.
3. Démontrer que dans un triangle isocèle ABC de sommet A les hauteurs $[BH]$ et $[CK]$ sont égales. Énoncer et démontrer la réciproque. (Utiliser les triangles ABH et ACK ou BCH et CBK.)
4. Montrer que dans un triangle isocèle les hauteurs issues des sommets de la base se coupent sur l'axe de symétrie du triangle.
5. Démontrer que les sommets B et C du triangle ABC sont équidistants de la médiane $[AM]$. La propriété subsiste-t-elle pour toute droite (xy) passant par M ?
6. Dans un cercle donné ou dans deux cercles égaux deux cordes égales sont équidistantes du centre. Énoncer et démontrer la réciproque.
7. On mène d'un point O la perpendiculaire (OH) et les obliques (OA) et (OB) à une droite (xy). Démontrer que l'égalité $OA = OB$ entraîne $HA = HB$ et réciproquement.
8. Les deux segments concourants $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu O.

   (a) Comparer les triangles OAC et OBD ainsi que les hauteurs OH et OK de ces deux triangles.

   (b) Montrer que le point O est le milieu de $[HK]$.

9. Dans un quadrilatère $ABCD$ on a $AD = BC$ et $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} < 90^o$. On mène les perpendiculaires (DH) et (CK) à (AB).

   (a) Comparer les triangles ADH et BCK puis DH et CK.

   (b) Montrer que AB et HK ont le même milieu I et que $HC = KD$.

10. Construire un triangle isocèle ABC sachant que $AB = AC = 5$ cm et que la hauteur $AH = 4$ cm. Mesurer $[BC]$.

11. On connaît en position l'hypoténuse $BC = 40$ mm d'un triangle rectangle ABC et la longueur $AB = 24$ mm.
    (a) Construire le point D du prolongement de $[BA]$ tel que $AD = AB$ puis le point A. Mesurer AC.
    (b) Généraliser.
12. Construire un triangle ABC tel que $BC = 60$ mm, la hauteur $AH = 32$ mm et la médiane $AM = 35$ mm.
13. Dans le triangle ABC la hauteur AH mesure 38 mm et la bissectrice AD 42 mm. Effectuer la construction du triangle AHD puis celle du triangle ABC sachant que :
    (a) $\widehat{BAC} = 64^o$;
    (b) $AB = 45$ mm.
14. On considère un triangle ABC rectangle en A et on construit le segment $[BD]$ perpendiculaire à (BC) et égal à BC, puis la perpendiculaire (Bx) à (AB). On mène de D la perpendiculaire (DE) à (Bx).
    (a) Comparer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBD}$ puis les triangles ABC et EBD.
    (b) Démontrer que $AC = DE$ et $AB = BE$.
15. Deux points A et B situés de part et d'autre de (xy) sont tels que leurs distances AH et BK soient égales. Démontrer que (xy) passe par le milieu O de $[AB]$.
16. Comparer deux triangles isocèles ayant :
    (a) Des bases égales et des angles au sommet égaux.
    (b) Les hauteurs relatives à la base égales et des angles à la base égaux.
17. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont $AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. On mène les hauteurs $[AH]$ et $[A'H']$.
    (a) Comparer les triangles ABH et $A'B'H'$, puis les triangles AHC et $A'H'C'$.
    (b) En déduire l'égalité des triangles ABC et $A'B'C'$ et énoncer le cas d'égalité correspondant.
18. La médiatrice du côté $[AB]$ du triangle isocèle ABC coupe la base $[BC]$ en D. Le cercle de centre B passant par D recoupe $[AD]$ en E.
    (a) Nature des triangles DAB et BDE. Comparer les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAE}$.
    (b) Démontrer, en utilisant le résultat de l'exercice précédent, l'égalité des triangles ACD et BAE puis que $CD = AE$.
19. (a) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont $AB = A'B'$, $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180^o$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Montrer que les hauteurs AH et $A'H'$ sont égales, puis que les côtés $[AC]$ et $[A'C']$ sont égaux.
    (b) Montrer que réciproquement si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180^o$, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
    (On pourra amener $[A'B']$ sur $[AB]$ et C' sur le prolongement de $[CB]$.)

(c) Dans un triangle isocèle OAB, on prend un point C du côté $[OA]$ et on prolonge $[OB]$ d'une longueur $BD = AC$. Le segment $[CD]$ coupe $[AB]$ en M.

   i. Comparer les hauteurs CH et DK des triangles MAC et MBD.

   ii. Montrer que M est le milieu de $[HK]$ et de $[CD]$.

Chapitre 14

Bissectrice d'un angle

1. Construire sur une droite donnée (D) un point M équidistant de deux droites (xx') et (yy').
2. Construire un point M équidistant de deux droites (xx') et (yy') connaissant en outre sa distance à un point donné O.
3. Construire un point M équidistant de deux points donnés A et B et équidistant de deux droites données (xx') et (yy').
4. Un quadrilatère convexe $ABCD$ a deux angles opposés $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ droits et les côtés $[AB]$ et $[AD]$ égaux. Montrer que $CD = CB$ et que (AC) est bissectrice des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
5. Construire un triangle ABC dont les bissectrices intérieures se coupent en I sachant que $\widehat{BIC} = 124^o$, $IB = 3$ cm et $IC = 4$ cm.
6. Démontrer qu'il y a quatre points I, J, K et L équidistants des trois droites (BC), (CA) et (AB). Que représentent (IJ), (IK) et (IL) pour le triangle JKL ?
7. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ du quadrilatère convexe $ABCD$ sont supplémentaires et $BC = CD$. Le point C se projette en H sur $[AB]$ et en K sur $[AD]$.
   (a) Comparer les triangles BCH et CDK puis les longueurs CH et CK.
   (b) Montrer que (AC) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAD}$.
8. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ on a $DB = DC$ et $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. Le point D se projette en H sur $[AB]$ et en K sur $[AC]$.
   (a) Comparer les triangles BDH et DCK puis les longueurs DH et DK.
   (b) Déterminer la somme des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DAC}$.
9. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ d'un triangle ABC se coupent en I. On mène les perpendiculaires en B à (IB) et en C à (IC). Elles se coupent en J.
   (a) Que représentent (BJ) et (CJ) pour les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ?
   (b) Montrer que les points A, I et J sont alignés.

10. Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.
   (a) Démontrer que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles intérieurs du losange.
   (b) Montrer que leur point commun O est équidistant des quatre côtés.
11. Soient D, E, F les projections, sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, du point de concours I des bissectrices intérieures du triangle ABC.
   (a) Montrer que $BD = BF$, $CE = CD$ et $AF = AE$. Que représente la somme $AE + BC$ pour le périmètre du triangle ?
   (b) $BC = 48$ mm, $CA = 40$ mm, et $AB = 28$ mm. Calculer AF, BD et CE.
12. Dans un triangle ABC tel que $AB > AC$ la médiatrice de $[BC]$ coupe en M la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. Le point M se projette en H sur $[AB]$ et en K sur $[AC]$.
   (a) Comparer AH et AK puis BH et CK.
   (b) Démontrer que $AH = \frac{1}{2}(AB + AC)$ et $BH = \frac{1}{2}(AB - AC)$.
13. Dans le même triangle ABC qu'à l'exercice précédent, la médiatrice de $[BC]$ coupe en M' la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$. Le point M' se projette en H' sur (AB) et en K' sur (AC).
   (a) Comparer AH' et AK' puis BH' et CK'.
   (b) Démontrer que $AH' = \frac{1}{2}(AB - AC)$ et $BH' = \frac{1}{2}(AB + AC)$ puis que $HH' = AC$.
14. On prolonge la base $[BC]$ du triangle ABC de deux longueurs $BM = BA$ et $CN = CA$. Les bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de ce triangle se coupent en J.
   (a) Montrer que M et N sont les symétriques de A par rapport à (BJ) et (CJ). Comparer JA, JN et JM. Nature du triangle JMN.
   (b) Comparer les angles $\widehat{BAJ}$ et $\widehat{CAJ}$. Démontrer ainsi que *dans un triangle les bissectrices extérieures de deux angles et la bissectrice intérieure du troisième sont concourantes.*
15. Un quadrilatère convexe $BICJ$ a ses angles opposés $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ droits. On construit les symétriques $(x'x)$ et $(y'y)$ de la droite (BC) par rapport à chacune des droites (IB) et (IC).
   (a) Montrer que I et J sont équidistants des trois droites (BC), $(x'x)$ et $(y'y)$.
   (b) Démontrer que les trois droites (IJ), $(x'x)$ et $(y'y)$ sont en générales concourantes en un même point A.
16. On considère un triangle ABC tel que $AB < AC$. La médiatrice de $[BC]$ coupe en D le côté $[AC]$ et en I et J respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (a) Que représente (IJ) pour l'angle $\widehat{ADB}$? Montrer que les points I et J sont équidistants des cotés du triangle aBD et que (BI) et (BJ) sont les bissectrices extérieure et intérieure de l'angle $\widehat{ABD}$.
   (b) Quelle est la valeur des angles $\widehat{IBJ}$ et $\widehat{ICJ}$? Démontrer que les angles $\widehat{ABJ}$ et $\widehat{ACJ}$ sont égaux et que les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{ACI}$ sont supplémentaires.

Problèmes de révision

1. On donne un angle $\widehat{xOy}$ et un point A. Construire un triangle isocèle dont l'angle au sommet soit l'angle $\widehat{xOy}$ et tel que le côté opposé passe par A.
2. (a) Soit un triangle ABC et M le milieu de $[BC]$. La perpendiculaire au côté $[AB]$ issue de M coupe ce côté en H. On prolonge $[HM]$ d'un segment $MK = HM$ et on joint $[KC]$. Comparer les triangles MBH et MCK. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{MKC}$.
   (b) On donne un angle $\widehat{xAy}$ et un point M intérieur à cet angle. Construire une droite passant par M coupant (Ax) en B et (Ay) en C de façon que M soit le milieu de $[BC]$.
3. (a) Construire deux droites (D_1) et (D_2) respectivement perpendiculaires en A et B au segment $[AB]$. Une droite (xy) issue du milieu O de $[AB]$ coupe (D_1) en P et (D_2) en Q. Comparer les triangles OAP et OBQ.
   (b) Comparer les angles $\widehat{APO}$ et $\widehat{OQB}$. Que peut-on dire des angles que forme (PQ) avec les droites (D_1) et (D_2) ?
4. On donne un triangle isocèle ABC de base $[BC]$. On construit les angles droits $\widehat{BAx}$ et $\widehat{CAy}$ adjacents à l'angle $\widehat{BAC}$. Puis on porte sur (Ax) et (Ay) les segments $[AE]$ et $[AF]$ égaux à $[AB]$. Soit M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[EF]$.
   (a) Comparer les triangles MAE et MAF.
   (b) Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
5. Soit un triangle ABC rectangle en A, et $[AD]$ la hauteur relative à l'hypoténuse. On construit les symétriques E et F de D par rapport aux droites (AB) et (AC).
   (a) Montrer que D, E, F, appartiennent à un même cercle de centre A.
   (b) Montrer que les points E, A, F sont alignés. Que représente A pour le segment $[EF]$?
6. D'un même côté d'un segment $[AB]$, on mène deux segments égaux $[AD]$ et $[BC]$ respectivement perpendiculaires à $[AB]$ en A et en B.
   (a) Comparer les segments $[AC]$ et $[BD]$.
   (b) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. Démontrer que la médiatrice de $[AB]$ passe par O et qu'elle est aussi médiatrice de $[CD]$.
7. Deux segments $[AC]$ et $[DB]$ sont perpendiculaires et leur point commun O est le milieu de chacun d'eux.

(a) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ a ses quatre côtés égaux et comparer les quatre triangles OAB, OCB, OCD et OAD.

(b) On mène OP perpendiculaire à $[AD]$ en P. La droite (PO) coupe (BC) en R. Comparer les triangles ODP et OBR. En déduire que (OR) est perpendiculaire à (BC) et que $OP = OR$.

(c) Montrer de même que la droite (OQ) perpendiculaire en Q à (AB) est perpendiculaire en S à (CD) et que $OP = OQ = OR = OS$.

8. Construire un angle $\widehat{AOB} = 30^o$ puis deux angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ adjacents à $\widehat{AOB}$ et valant 60^o chacun.

   (a) Montrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ont même bissectrice.

   (b) Montrer que les bissectrices (ON) et (OP) des angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ dont un angle droit.

9. On donne un angle $\widehat{xOy} = 45^o$ et un point A intérieur à cet angle. Construire les points B et C symétriques de A par rapport aux droites (Ox) et (Oy).

   (a) Évaluer l'angle $\widehat{BOC}$. Nature du triangle BOC.

   (b) Démontrer que la médiatrice du segment $[BC]$ passe par O. Comparer l'angle formé par cette médiatrice et (Oy) à l'angle $\widehat{AOx}$.

10. Trois segments OA, OB, OC sont égaux et tels que les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, et $\widehat{COA}$ soient égaux :

    (a) Quelle est la valeur commune de ces trois angles ?

    (b) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

    (c) Montrer que O est équidistant des trois côtés du triangle ABC et que le triangle ayant pour sommets les pieds des perpendiculaires menées de O aux côtés du triangle ABC est lui-même équilatéral.

11. Construire un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ cm et tel que l'angle $\widehat{BAC} = 40^o$. La médiatrice de $[AC]$ coupe la droite (BC) en D. On joint $[DA]$ et on le prolonge de $AE = BD$.

    (a) Montrer que DAC est isocèle, puis établir l'égalité des angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ABD}$.

    (b) Comparer les triangles CAE et ABD. En déduire que le triangle CDE est isocèle.

12. Soit un triangle ABC et la bissectrice intérieure (Ax) de l'angle $\widehat{A}$. sur la demi-droite $[Ax)$, on construit les points B' et C' tels que $AB' = AB$ et $AC' = AC$. Les droites (BC') et $(B'C)$ se coupent en D.

    (a) Comparer les triangles ABC' et ACB' puis les segments $[BC']$ et $[B'C]$.

    (b) On mène (AE) perpendiculaire en E à (BC') et (AF) perpendiculaire en F à $(B'C)$. Demontrer que $AE = AF$ puis que (DA) est une bissectrice du triangle BCD.

13. On donne un triangle ABC. Sur le côté $[AB]$ on porte $AC' = AC$ et sur le côté $[AC]$ on porte $AB' = AB$. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe $[BC]$ en D.

    (a) Comparer les segments $[DC']$ et $[DC]$ puis les segments $[DB']$ et $[DB]$.

(b) Démontrer que les points C', D et B' sont alignés.

14. Soit I le point commun aux bissectrices intérieures du triangle ABC. On construit les segments $[IA']$, $[IB']$ et $[IC']$ respectivement perpendiculaires en A', B' et C' aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
    (a) Démontrer que (IA), (IB) et (IC) sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$ et les bissectrices des angles $\widehat{B'IC'}$, $\widehat{C'IA'}$ et $\widehat{A'IB'}$.
    (b) Montrer que les angles $\widehat{AIB'}$ et $\widehat{BIC}$ sont supplémentaires.
15. On considère deux triangles isocèles OAB et OCD de sommet O tels que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ aient même bissectrice (Ox).
    (a) Comparer les triangles OAC et OBD.
    (b) Soit M un point quelconque de (Ox). Comparer les triangles MAC et MBD.
16. (a) Construire un triangle ABC connaissant $AB = 8$ cm ; $BC = 5$ cm et sachant que l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 30^o. Nombre de solutions ?
    (b) Déduire de cette construction que deux triangles qui ont deux côtés respectivement égaux et un angle égal opposé à l'un de ces côtés ne sont pas nécessairement égaux.
17. On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ soient supplémentaires, $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$. On prolonge $[CA]$ d'une longueur AD égale à $A'C'$.
    (a) Comparer les triangles $A'B'C'$ et ABD. Nature du triangle BCD ?
    (b) Démontrer que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{A'C'B'}$ sont égaux.
18. Un angle $\widehat{xOy}$ vaut 120^o. D'un point A de sa bissectrice on mène les perpendiculaires (AM) à (Ox) et (AN) à (Oy). La droite (AM) coupe (Oy) en B, et la droite (AN) coupe (Ox) en C.
    (a) Comparer les triangles OAM et OBM ainsi que les triangles OAN et OCN.
    (b) Démontrer que $OA = OB = OC$ puis que le triangle ABC est équilatéral.
    Que représente le point O pour le triangle ABC ?
19. Soit un cercle de diamètre $[AB]$ de centre O. La médiatrice de $[OA]$ coupe le cercle en C et D : la médiatrice de $[OB]$ coupe le cercle en E et F (C et E sont du même côté de $[AB]$).
    (a) Montrer que les triangles OAC, OAD, OBE et OBF sont équilatéraux et égaux.
    (b) Montrer que les points C, O, F d'une part et D, O, E sont alignés.
    (c) Montrer que le diamètre du cercle O perpendiculaire à $[AB]$ est médiatrice des segments $[CE]$ et $[DF]$.
20. Construire la hauteur $[AH]$ et la médiane $[AM]$ du triangle ABC, puis prolonger $[AH]$ d'un segment $HD = AH$ et $[AM]$ d'un segment $ME = AM$. Les droites (BD) et (CE) se coupent en P.
    (a) Comparer les triangles ABH et DBH, puis les triangles MAB et MEC.
    (b) Démontrer que le triangle PBC est isocèle et que (PM) est médiatrice des segments $[BC]$ et $[BE]$.

(c) On suppose de plus que $MA = MB$. Montrer que dans ce cas les cinq points $ABCDE$ sont sur un même cercle.

21. Dans un quadrilatère $ABCD$ les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux et la diagonale $[AC]$ est bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. On mène les perpendiculaires (CH) et (CK) à (AB) et à (AD).
    (a) Comparer les triangles AHC et AKC, puis les triangles BHC et DKC.
    (b) Démontrer que $BC = CD$, $AB = AD$ et que (AC) est bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.
22. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel la diagonale $[AC]$ fait des angles aigus égaux avec les côtés $[AB]$ et $[CD]$. On suppose en outre que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère sont aigus et égaux. On mène les perpendiculaires (AH) à (CD) et (CK) à (AB).
    (a) Comaprer les triangles rectangles AKC et CHA, puis les triangles BKC et DHA.
    (b) Démontrer que $[AC]$ fait des angles égaux avec (AD) et (BC), que $AB = CD$ et que $AD = BC$.
23. Construire un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel $BC = 3$ cm, $\widehat{ABD} = 80^o$, $\widehat{BDC} = 100^o$ et $AD = BC = 4$ cm. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
    (a) Comparer les triangles DBC et DBE. Conséquences ?
    (b) Nature du triangle DAE ? Démontrer que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.
24. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont égales et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
    (a) Comparer les triangles BCD et CBE. Nature du triangle CAE ?
    (b) Démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux.
25. Soit un triangle ABC tel que $AB > AC$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe en D la médiatrice de $[BC]$. On construit le point E de $[AB]$ tel que $AE = AC$.
    (a) Que représente le point D pour le triangle BCE ? Nature du triangle DBE ?
    (b) Comparer les triangles ACD et AED et montrer que les angles ABD et ACD sont supplémentaires.
26. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ les côtés $[BC]$ et $[CD]$ sont égaux et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires. Soient H et K les projections du point C sur les droites (AB) et (AD).
    (a) Comparer les triangles BCH et DCK. Conséquences ?
    (b) Montrer que (AC) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Comparer AH et AK à la demi-somme de AB et AD.
27. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de $[BC]$ coupe en I le côté $[AB]$ et en J la droite (AC).
    (a) Comparer les triangles IOB et IOC et démontrer que les angles $\widehat{IAO}$ et $\widehat{ICO}$ sont égaux.
    (b) Comparer les triangles JOB et JOC et démontrer que les angles $\widehat{JAO}$ et $\widehat{JBO}$ sont supplémentaires.

28. La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC coupe en M la médiatrice de $[BC]$. On prolonge $[BA]$ d'une longueur $AD = AC$.
    (a) Comparer MB et MC, puis les triangles MAC et MAD.
    (b) Nature du triangle MBD ? Démontrer l'égalité des angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ACM}$.
29. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$ on a $AB > CD$, $AD = BC$ et d'autre part la diagonale $[AC]$ fait des angles aigus égaux avec $[AB]$ et $[CD]$.
    (a) Construire le point E de $[AB]$ tel que $AE = CD$ et comparer les triangles ACD et CAE. Nature du triangle BCE ?
    (b) Démontrer que les angles ABC et ADC sont supplémentaires ?
30. Dans le triangle ABC, on considère un point intérieur D tel que $AD = BC$ et tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ soient supplémentaires. On prolonge $[AB]$ d'une longueur $BE = CD$.
    (a) Comparer les triangles ADC et CBE. Nature du triangle CAE ?
    (b) La droite (CD) coupe (AB) en M. Démontrer que $MA = MC$ et en déduire une construction géométrique du point D en connaissant le triangle ABC.
31. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ d'un quadrilatère convexe $ABCD$ sont égaux. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en un point O de telle sorte que $OA = OC$ et $OB > OD$. Les droites (AB) et (CD) se coupent en I.
    (a) Construire le point E du segment $[OB]$ tel que $OE = OD$ et comparer les triangles OAE et OCD. Nature du triangle ABE ?
    (b) Comparer les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{CDO}$, puis les segments $[IB]$ et $[ID]$.
32. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que $AB = CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O tel que : $OA > OD$ et $OB = OC$.
    (a) Soit E le point du segment $[OA]$ tel que $OE = OD$. Comparer les triangles OBE et OCD.
    (b) Nature du triangle BAE ? Comparer les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$.
    (c) Les droites (BE) et (CD) se coupent en I. Comparer IB et IC, ainsi que ID et IE et montrer que (IO) est bissectrice de l'angle $\widehat{BIC}$.
33. Soit un triangle isocèle OAB de base $AB < AO$. Le cercle de centre A passant par O recoupe la droite (OB) en E. On prend un point C sur le segment $[BE]$ et le point D du segment $[OA]$ tel que $OD = EC$.
    (a) Nature du triangle AOE ? Comparer les triangles AEC et BOD.
    (b) Comparer les segments $[AC]$ et $[BD]$ ainsi que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.
34. On désigne par D et E les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC et par G, H et K les projections sur la droite (DE) des points A, B et C.
    (a) Comparer les triangles AGD et BHD ainsi que les triangles AGE et CKE. En déduire que $BH = CK$ et que $HK = 2DE$.

(b) Soit M le milieu de $[BC]$ et I le milieu de $[HK]$. Comparer les triangles IBH et ICK. Nature du triangle BIC ? Montrer que (IM) est médiatrice de $[BC]$ et de $[HK]$.

35. Un *trapèze isocèle* est un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les *bases* AB et CD admettent la même médiatrice (xy). Démontrer que :

(a) Les angles adjacents à une même base sont égaux.

(b) Les côtés obliques $[AD]$ et $[BC]$ sont égaux et leurs prolongements se coupent en I sur la droite (xy) formant deux triangles IAB et ICD isocèles.

(c) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont égales et se coupent en J sur (xy) formant deux triangles JAB et JCD isocèles.

36. Démontrer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ est un trapèze isocèle (cf. exercice précédent), lorsque :

(a) les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$.

(b) Lorsque les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.

(c) Lorsque les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont égaux ainsi que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

37. Le quadrilatère convexe $ABCD$ admet pour axe de symétrie la droite (xy) médiatrice commune de $[AB]$ et $[CD]$ (trapèze isocèle).

(a) Démontrer que les médiatrices des côtés $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en un point O de (xy), centre d'un cercle circonscrit au trapèze.

(b) Comparer sur ce cercle les arcs de même sens $\widehat{DA}$ et $\widehat{BC}$ ainsi que les arcs $\widehat{DB}$ et $\widehat{AC}$.

38. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les sommets sont sur un cercle de centre O de telle sorte que les côtés $[AD]$ et $[BC]$ soient égaux.

(a) Compare les angles au centre $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$.

(b) Démontrer que la bissectrice (Ox) de l'angle $\widehat{AOB}$ est également bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ est également bissectrice de l'angle $\widehat{COD}$ et médiatrice des deux côtés $[AB]$ et $[CE]$ du quadrilatère $ABCD$.

39. On désigne par M et N les milieux des côtés obliques $[AD]$ et $[BC]$ du trapèze isocèle $ABCD$ dont les bases $[AB]$ et $[CD]$ admettent pour médiatrice commune la droite (xy). Le segment $[MN]$ coupe les diagonales $[AC]$ en P et $[BD]$ en Q.

(a) Démontrer que $AM = CN$ et que les angles $\widehat{DMN}$ et $\widehat{CNM}$ sont égaux.

(b) On prolonge $[MP]$ d'une longueur ME égale à NP. Comparer les triangles AME et CNP. Nature du triangle APE ? En déduire que les points P et Q sont les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

40. Construire un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 4$ cm, puis le point D du côté $[AB]$ et le point E du prolongement de $[CA]$ tels que $AD = AE = 1$ cm. La droite (DE) coupe (BC) en M.

(a) Comparer les segments $[BD]$ et $[CE]$ ainsi que les angles $\widehat{BDM}$ et $\widehat{CEM}$.

(b) On prolonge $[DM]$ d'une longueur $MP = DE$. Comparer les triangles BDP et CEM. Nature du triangle BMP ? Démontrer que M est le milieu de $[BC]$.

41. Soient quatre points A, B,C, D disposés dans cet ordre sur un cercle de centre O et tels que $AC = BD$. On désigne par E le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, par I le milieu de $[AC]$ et par J le milieu de $[BD]$. La droite (IJ) coupe (AB) en M.

    (a) Comparer les triangles OAI et OBJ, puis les triangles OEI et OEJ. Nature du triangle EIJ ?

    (b) On prolonge $[JI]$ d'une longueur $IN = JM$. Comparer les triangles AIN et BJM. Nature du triangle AMN ? En déduire que M est le milieu de $[AB]$.

42. On considère un angle aigu $\widehat{BAC}$. Le point B se projette en E sur $[AC]$ et le point C se projette en F sur $[AB]$. Les segments $[BE]$ et $[CF]$ se coupent en H. Les symétriques de la droite (EF) par rapport à (BE) et par rapport à (CF) se coupent en D.

    (a) Montrer que les quatre points A, B, C et H sont équidistants des trois droites (EF), (FD) et (DE).

    (b) En déduire que (AH) et (BC) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{D}$ du triangle DEF et qu'elles sont perpendiculaires. Démontrer ainsi que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H.