

Chapitre 1: Nombres décimaux et fractionnaires

I) Numération (entière)

1) Nombres entiers naturels : historique

Un nombre entier naturel représente une quantité d'objets.

exemples:

•
•••
:: etc.

On note les premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Les symboles sont appelés chiffres (arabo-indiens)

Brahmi: - = ≡ F T 6 7 4 ?

Gavalior:) 2 3 8 4 C 7 T 0 •

Anatocidial: 1 2 ≈ L 5 6 7 8 9

Apices(XI^e): I T F P Q U A S 9

XVI^e: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Daien XVI^e: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Les chiffres ont permis progressivement de noter des grands nombres:

- 1 dizaine et 3 unités
- 1 millier, 3 centaines et 5 unités

La numération sino-japonaise garde ce premier système où la taille des paquets est spécifiée.

exemple: 二千五百四十三
2 mille 5 cent 4 diz 3

= deux mille cinq cent quarante-trois

Remarque: Sans le zéro, la possibilité de noter un nombre par ses chiffres est ambiguë:

une dizaine et une unité ≠ une centaine et une unité

La numération décimale positionnelle consiste à remplacer les mille, cent, diz, etc par la position du nombre, en utilisant le 0 pour marquer l'absence:

1 0 4 3 : 1 million 4 dizaines et 3 unités

1 4 3 : 1 centaine 4 dizaines et 3 unités

Elle est popularisée par Fibonacci en 1202 dans le Liber Abaci, et permet de calculer sans utiliser de boulion.

Remarque: La base dix s'est imposée peu à peu et l'on compte donc en dix, cent, mille ...

Les babyloniens comptait en soixantaines, soixantaine de soixantaines, etc. (ce qui nécessitait soixante chiffres).

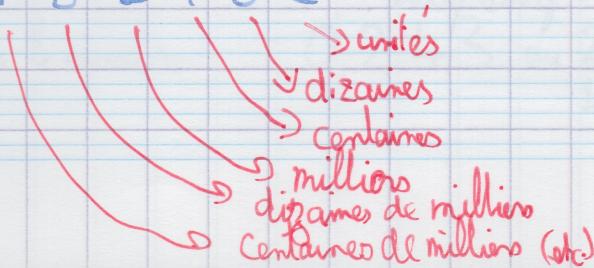
Cela a survécu dans la mesure des angles en degrés, minutes, secondes ou du temps en heures, minutes, secondes...

Les mayas comptait en vingtaines, vingtaines de vingtaines, etc. On attribue parfois la même idée aux Gaulois pour justifier le nom des nombres 70, 80, 90 en français (soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix)

Définition

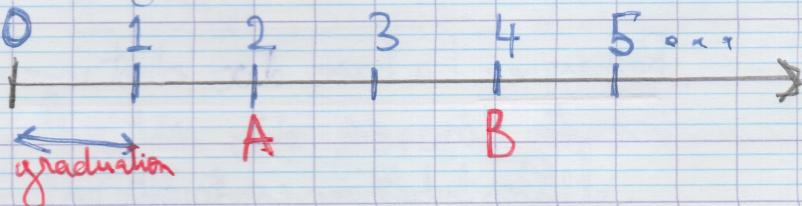
On représente un nombre par une suite de chiffres. Chaque chiffre représente des paquets dix fois plus gros que celui à sa droite:

7 9 1 4 3 2



2) Représentation géométrique

On représente les nombres entiers sur une demi-droite graduée en reproduisant la même longueur, appelée graduation.



On appelle abscisse le nombre correspondant à un point de la demi-droite.

exemple: au-dessus, l'abscisse de A est 2, et le point d'abscisse 4 est B.

Remarque: Quelle est alors l'abscisse d'un point situé entre deux graduations?

C'est ce qui amène à introduire les fractions.

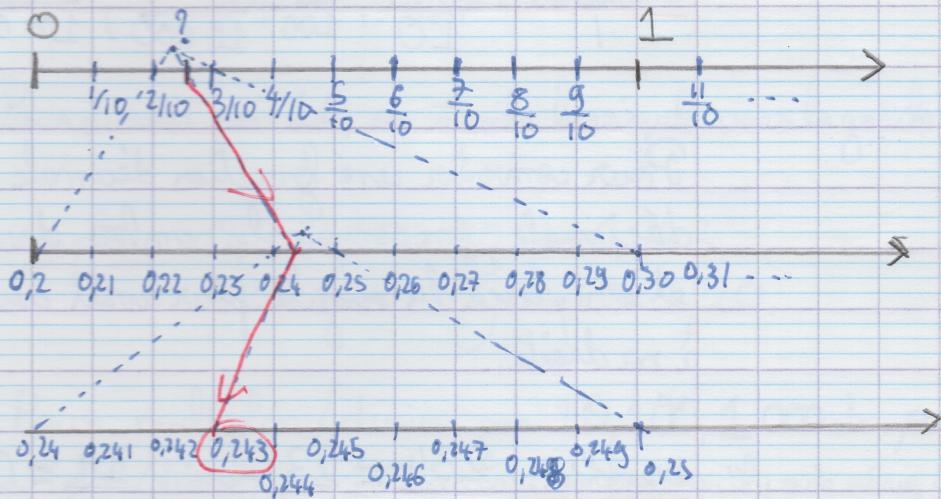
Quand on ne peut exprimer une quantité en fonction d'une autre, on exprime ces deux-ci en fonction d'une plus petite.

II) Nombres décimaux

1) Définition

Pour noter des quantités non entières, on les approche de mieux en mieux en les exprimant en fonction de dixièmes, centièmes, etc. d'unité.

exemple :



On a dû utiliser 3 graduations d'un millième, 4 d'un centième, et 2 d'un dixième.

On note le nombre : $0,243$ ou $\frac{243}{1000}$ ou $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000}$

II) Fractions décimales

1) Définition

Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 10, 100, ou tout autre nombre formé d'un 1 et d'une suite de 0.

exemples: $\frac{234}{10}$, $\frac{14}{100}$, $\frac{1}{10\ 000}$, $\frac{719}{100\ 000}$.

Pour convertir une fraction décimale en écriture décimale, on compte le nombre de 0 au dénominateur et on place la virgule pour avoir autant de chiffres à sa droite.

exemples: $\frac{234}{10} = 23,4$ $\frac{14}{100} = 0,14$

$\frac{1}{10\ 000} = 0,000\ 1$ $\frac{719}{100\ 000} = 0,007\ 19$.

2) Effets d'une division/multiplication par 10, 100, etc.

Propriété Pour multiplier un nombre décimal par 10, on lui ajoute éventuellement une virgule et un 0 et on décale la virgule d'un rang vers la droite.

exemples: $0,7 \times 10 = 0,7\downarrow \times 10 = 7,0 = 7$
 $14 \times 10 = 14,0 \times 10 = 140$

Propriété Pour diviser par 10, on décale la virgule vers la gauche.

exemples: $0,43 \div 10 = 0,0\downarrow 43 = 0,043$
 $12 \div 10 = 12,0 \div 10 = 1,20.$

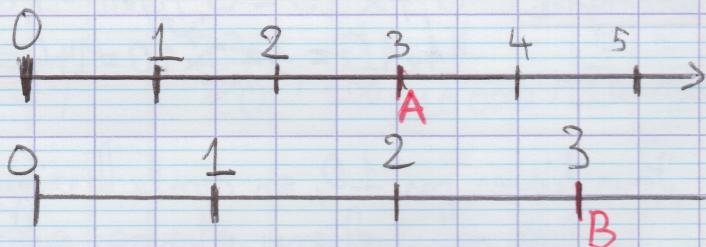
Propriété Pour multiplier/diviser par 10, 100, 1 000 etc., on multiplie/divise par 10 autant de fois qu'il y a de zéros; au lieu de décaler d'un rang la virgule une fois, on la décale autant de fois qu'il y a de zéros.

exemples: $120 \div 1000 = 0,120\downarrow \div 1000 = 0,12$.
 $12,34 \times 10000 = 12,34\downarrow 0000 = 123400,0$.

III. Repérage sur une demi-droite graduée

1) Définition

Une demi-droite est graduée lorsque l'on reporte une même longueur représentant l'unité à partir de l'origine. Cette longueur est la graduation.



Étant donné un nombre, on peut lui associer un point de la demi-droite. Ce nombre est alors l'abscisse du point.

exemple: Dans le premier dessin supra, l'abscisse de A est 3. Dans le second dessin, l'abscisse de B est 3.

2) Repérage des décimaux sur une demi-droite graduée

Pour repérer des nombres décimaux, on utilise une droite dont la graduation vaut plutôt une certaine fraction de l'unité.

$$5 \text{ graduation} = 1 \Rightarrow 1 \text{ graduation} = 1 : 5 = 0,2$$

