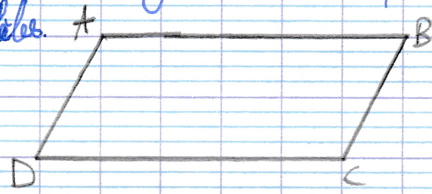
Chapitre 8 : Parallélogramme

I. Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



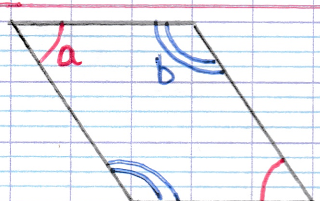
(AB)//(CD)
(BC)//(AD)

II. Propriétés caractéristiques

1. Sur les angles

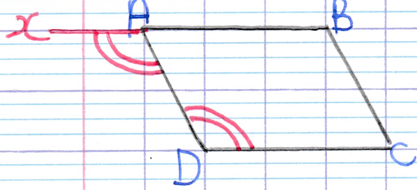
Théorème : Dans un parallélogramme :
- les angles voisins sont supplémentaires (leur somme est de 180°)
- les angles opposés sont égaux.

Figure :



$a + b = 180°$.

démonstration : Prenons ABCD un parallélogramme et posons les notations suivantes:



- $\widehat{xAD}$ et $\widehat{ADC}$ sont alternes-internes
- $(AB)//(CD)$

D'après le théorème des angles alternes-internes, les angles $\widehat{xAD}$ et $\widehat{ADC}$ sont donc égaux.

D'autre part, $\widehat{xAD}+\widehat{DAB}=\widehat{xAB}=180°$.

Donc $\widehat{ADC}+\widehat{DAB}=180°$.

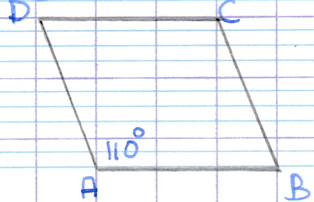
De même, on montrerait que deux sommets voisins ont toujours des angles supplémentaires.

On a donc : $\begin{cases} \widehat{ADC}+\widehat{DAB}=180° \\ \widehat{ABC}+\widehat{DAB}=180° \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \widehat{ADC}=180°-\widehat{DAB} \\ \widehat{ABC}=180°-\widehat{DAB} \end{cases}$

et $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$.

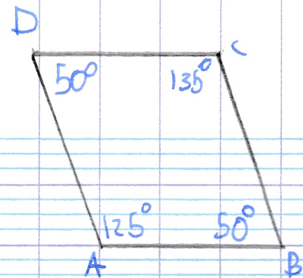
De même, on montrerait que $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}$: deux sommets opposés ont des angles de même mesure.

exemple :



Si ABCD est un parallélogramme, alors $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=180°-110°$
$=70°$

et $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}=110°$.



contre-exemple

$\widehat{BAD} \neq \widehat{BCD}$

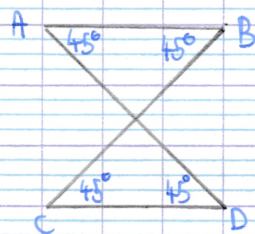
donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

Théorème

Si un quadrilatère non croisé a ses angles opposés de même mesure, alors c'est un parallélogramme.

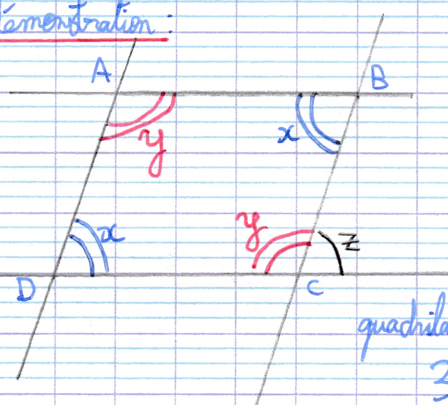
~~exemple~~ :

contre-exemple :



ABCD a ses angles opposés égaux, mais n'est pas un parallélogramme car il est croisé.

démonstration :



On suppose $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = x \\ \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = y \\ \text{ABCD non croisé.} \end{cases}$

Plan : 1°) x et y sont supplémentaires
2°) $z = x$
3°) $(AB) // (CD)$
4°) ABCD parallélogramme.

1°) La somme des angles d'un quadrilatère non croisé est 360°, donc :

$$360° = x + y + x + y.$$

D'où, en divisant par 2 : $180° = x + y$.

2°) Les angles z et y sont supplémentaires donc $y + z = 180°$.

On a donc $x = 180° - y$ et $z = 180° - y$, d'où $x = z$.

3°) Les angles $\widehat{ABC}$ et z sont donc alternes-internes et de même mesure.

D'après la réciproque du théorème des angles alternes-internes, les droites (AB) et (CD) sont parallèles

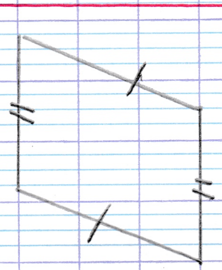
4°) De la même manière, on montrerait que $(BC)//(AD)$. ABCD est donc un parallélogramme.

2. Sur les côtés

Théorème

$\boxed{\text{Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.}}$

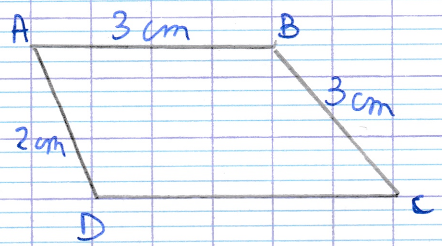
Figure:



Exemple:

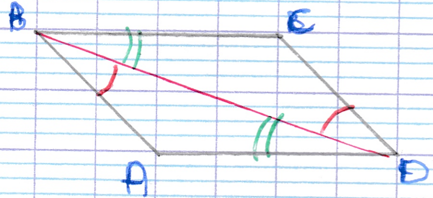
Si ABCD est un parallélogramme avec $AB = 3$ cm et $BC = 4$ cm, alors $CD = AB = 3$ cm et $DA = BC = 4$ cm.

contre-exemple:



[AD] et [BC] sont deux côtés opposés mais $AD \neq BC$.
Or, un parallélogramme a ses côtés opposés égaux, donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

démonstration : Soit ABCD un parallélogramme :



1re égalité d'angles

Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$ sont alternes-internes et les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème des angles alternes-internes $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$.

2e égalité d'angles

De même, comme $(AB)//(CD)$, on a $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.

Égalité des triangles

Les triangles BDC et DBA sont construits avec un côté de même mesure dont les deux angles adjacents se correspondent :

- $BD = DB$
- $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$
- $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.

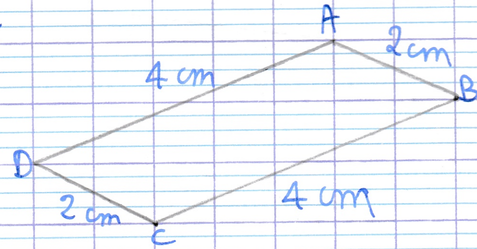
Conclusion

Ces triangles sont donc identiques et ont en particulier les mêmes longueurs, d'où : $BC = DA$ et $AB = CD$.

Théorème

Dans un quadrilatère non croisé, si les côtés opposés sont de même longueur, on a un parallélogramme.

exemple :

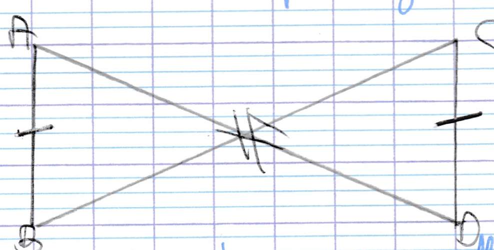


On sait que :

- ABCD est non croisé
- AB = CD
- BC = DA

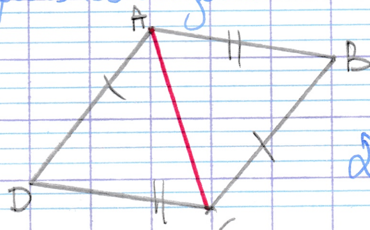
Or, un quadrilatère non croisé dont les cotés opposés sont égaux est un parallélogramme, donc ABCD est un parallélogramme.

contre - exemple



Ici, $\begin{cases} AB = CD \\ BC = AD, \end{cases}$ mais on n'a pas un parallélogramme car ABCD est croisé.

démonstration Soit ABCD un quadrilatère non croisé dont les cotés opposés sont égaux :



- AB = CD
- BC = AD.

De plus : AC = CA.

Donc ABC et CDA sont deux triangles formés avec les mêmes mesures de côtés : ils se superposent donc et ont ainsi les mêmes angles :

- $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$
- $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$
- $\widehat{CDA} = \widehat{ABC}$

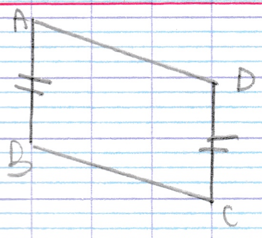
Les angles alternes-internes $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont de même mesure, donc, d'après la réciproque du théorème des angles alternes-internes, $(DA) // (BC)$.
De même, comme $\widehat{DCA} = \widehat{BCA}$, $(AB) // (CD)$. ABCD est bien un parallélogramme.

3) Sur une seule paire de côtés

Théorème

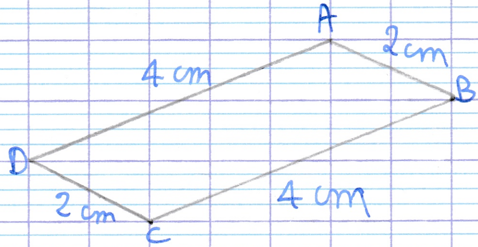
> Si un quadrilatère non croisé a une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme.

exemple :



Si $(AB) // (CD)$ et $AB = CD$, ABCD a deux côtés opposés parallèles et de même longueur. C'est donc un parallélogramme.

exemple :

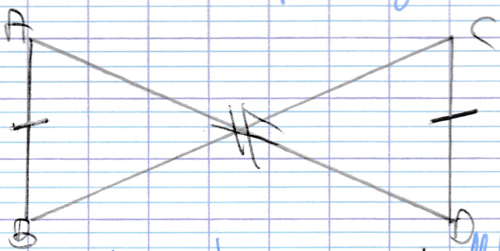


On sait que :

- ABCD est non croisé
- AB = CD
- BC = DA

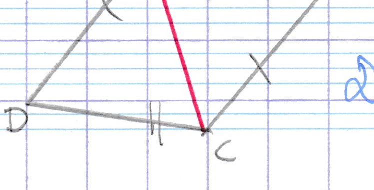
Or, un quadrilatère non croisé dont les cotés opposés sont égaux est un parallélogramme, donc ABCD est un parallélogramme.

contre-exemple



Ici, $\begin{cases} AB = CD \\ BC = AD, \end{cases}$ mais on n'a pas un parallélogramme car ABCD est croisé.

démonstration Soit ABCD un quadrilatère non croisé dont les côtés opposés sont égaux :



- AB = CD
- BC = AD.

De plus : AC = CA.

Donc ABC et CDA sont deux triangles formés avec les mêmes mesures de côtés : ils se superposent donc et ont ainsi les mêmes angles :

- $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$
- $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$
- $\widehat{CDA} = \widehat{ABC}$

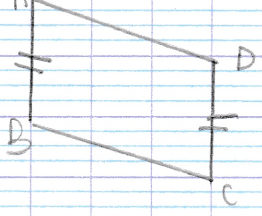
Les angles alternes-internes $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont de même mesure, donc, d'après la réciproque du théorème des angles alternes-internes, $(DA)//(BC)$.
De même, comme $\widehat{DCA} = \widehat{BCA}$, $(AB)//(CD)$. ABCD est bien un parallélogramme.

3) Sur une seule paire de côtés

Théorème

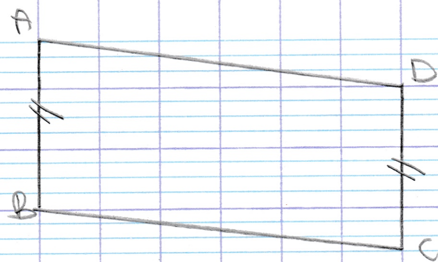
> Si un quadrilatère non croisé a une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme.

exemple :



Si $(AB)//(CD)$ et $AB = CD$, ABCD a deux côtés opposés parallèles et de même longueur. C'est donc un parallélogramme.

Démonstration :



Supposons $\begin{cases} (AB) // (CD) \\ AB = CD \end{cases}$

La parallèle à (BC) passant par le point D coupe $(AB]$ en un point A'. Montrons $A' = A$.

$A'BCD$ a ses côtés opposés parallèles donc c'est un parallélogramme. D'après II.2, on a donc $A'B = CD$.

Comme $A'B = CD$ et $AB = CD$, $A'B = AB$.

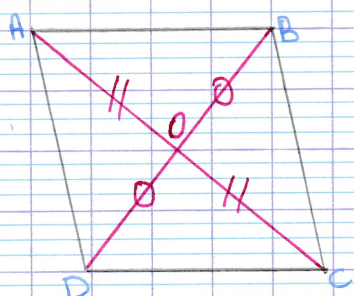
A' est un point de $(AB]$ avec $A'B = AB$, c'est donc le point A.

Comme $A'BCD = ABCD$ est un parallélogramme, on a terminé.

4. Sur les diagonales

Théorème : Dans un parallélogramme, les diagonales se croisent en leur milieu.

Figure :

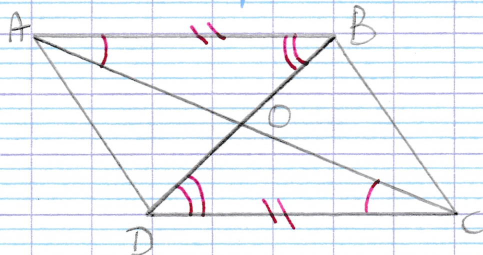


démonstration : Soit un parallélogramme ABCD. Notons O le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].

Comme (AB)//(CD), les angles alternes-internes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont de même mesure.

De même, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.

D'autre part, d'après II.2. AB=CD. On a donc :

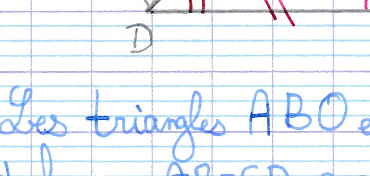


Les triangles ABO et CDO sont construits sur un côté de longueur AB=CD avec deux angles $\widehat{ODC} = \widehat{OBA}$ et $\widehat{OCD} = \widehat{OAB}$ donc ils sont superposables. Par conséquent : OB=OD et OA=OC.

Donc O est le milieu des deux diagonales.

Réciproque : Si un quadrilatère a ses deux diagonales qui se rencontrent en leurs milieux, c'est un parallélogramme.

exemple



OA=3cm, OB=2,8cm
OC=3cm OD=2,8 cm.

On sait que O est le milieu des deux diagonales [AC] et [BD] donc ABCD est un parallélogramme.

démonstration : soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu O.

O est le milieu de [AC] donc A et C sont symétriques par rapport à O.
De même, O est le milieu de [BD], donc B et D sont symétriques par rapport à O.

La symétrie de centre O envoie donc ABCD sur CDAB.
En particulier (AB) et (CD) sont symétriques par rapport à O, de même que (BC) et (DA).
Or, deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.
Donc (AB)//(CD) et (BC)//(AD) : ABCD est un parallélogramme.

On a aussi montré :

Théorème

> Les parallélogrammes sont exactement les quadrilatères à symétrie centrale.