# Chapitre Arithmétique

## I) Diviseurs et multiples

### 1) Rappel : division euclidienne

**Définition** Étant donnés un entier $a$ et un entier non nul $b$, la <u>division euclidienne de $a$ par $b$</u> est l'unique manière d'écrire

$$a = b \times q + r$$

avec $q$ entier et $r$ entier positif et inférieur à $b$.

$a$ est le dividende, $b$ le diviseur, $q$ le quotient et $r$ le reste.

exemples :

$$\begin{array}{r|l} 1\,2\,3 & 4 \\ \hline -1\,2\downarrow & 30 \\ \hline 0\,3 & \\ -0\,0 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$123 = 4 \times 30 + 3$

(ou $123 \div 4 = 30$ reste $3$)

$$\begin{array}{r|l} 7\,9\,2 & 8 \\ \hline -7\,2\downarrow & 9\,9 \\ \hline 7\,2 & \\ -7\,2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\rightarrow \begin{cases} 792 = 8 \times 99 + 0 \\ 792 \div 8 = 99 \text{ reste } 0 \end{cases}$

### 2) Multiples et diviseurs

**Définition** On dit qu'un entier $a$ est <u>multiple</u> de $b$ s'il peut s'écrire $a = b \times q$ avec $q$ entier.

Cela revient à dire que la division euclidienne de $a$ par $b$ a un reste nul (0).

On dit alors aussi que $b$ est un <u>diviseur</u> de $a$, ou que $b$ <u>divise</u> $a$.

Les nombres <u>pairs</u> sont les multiples de 2 et les nombres <u>impairs</u> sont ceux qui ne sont pas pairs.

Quand le diviseur est 2, 4, 5, 3, 9, 10 on dispose de critères simples pour en 6 :

Critères : Pour un entier N :

(1) • N est multiple de 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, ou 8 ;

(2) • N est multiple de 4 si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4 ;

(3) • N est multiple de 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;

(4) • N est multiple de 10 si son chiffre des unités est 0 ;

(5) • N est multiple de 3 si la somme de ses chiffres est multiple de 3 ;

(6) • N est multiple de 9 si la somme de ses chiffres est multiple de 9.

Tous ces critères sont nécessaires : s'ils ne sont pas vérifiés N n'est pas multiple de...

démonstration :

(5) : Notons q le nombre obtenu en supprimant le dernier chiffre de N et r ce dernier chiffre. On a alors $N = 10 \times q + r$, donc N est multiple de 10 exactement si $r = 0$. Par exemple : $123 = 120 + 3 = 12 \times 10 + 3 \rightarrow$ pas multiple de 10

$1740 = 174 \times 10 + 0 \rightarrow$ multiple de 10

(1) : On prend les mêmes notations.

On a alors $N = 10 \times q + r = 2 \times (5 \times q) + r$ donc N est la somme d'une quantité paire et de r (son chiffre des unités). N est donc pair exactement si r est pair (donc 0, 2, 4, 6 ou 8)

(3) : On écrit encore $N = 10 \times q + r = 5 \times (2 \times q) + r$.

N est donc la somme d'un multiple de 5 et de r. Il est donc multiple de 5 exactement quand r est multiple de 5 (donc $r = 0$ ou 5).

(2) : Notons cette fois Q le nombre obtenu en supprimant les deux derniers chiffres et R le nombre formé de ces deux derniers chiffres.

(Par exemple $N = 727\,342 \rightarrow Q = 7273$ et $R = 42$).

On a alors $N = Q \times 100 + R$ ($727\,342 = 727\,300 + 42 = 7273 \times 100 + 42$).

Comme $100 = 4 \times 25$ on a $N = 4 \times (25 \times Q) + R$ donc N est la somme de R et d'un multiple de 4. Il est donc multiple de 4 exactement si R est multiple de 4.

(5) et (6) requièrent plus de rotations donc on se contentera d'un exemple.

Prenons $N = 7431$.

On a $N = 7 \times 1000 + 4 \times 100 + 3 \times 10 + 1$

On a aussi $10 = 9 + 1 = 3 \times 3 + 1$,

$100 = 9 \times 11 + 1 = 3 \times 33 + 1$,

et $1000 = 9 \times 111 + 1 = 3 \times 333 + 1$.

Donc $N = 7 \times (9 \times 111 + 1) + 4 \times (9 \times 11 + 1) + 3 \times (9 \times 1 + 1) + 1 \times 1$

$= \underbrace{9 \times (7 \times 111 + 4 \times 11 + 3 \times 1)}_{\text{multiple de } 9} + \underbrace{7 \times 1 + 4 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1}_{\text{somme des chiffres de } N}$

De même, $N = \underbrace{3 \times (7 \times 333 + 4 \times 33 + 3 \times 3)}_{\text{multiple de } 3} + \underbrace{7 + 4 + 3 + 1}_{\text{somme des chiffres de } N}$.

On en déduit les critères voulus.

Autres cas : En général, pour déterminer si un nombre est multiple d'un autre, on se contente de poser la division et de regarder si le reste est nul ou non. Avec la calculatrice, cela revient à regarder si le quotient est entier ou non.

## II) Nombres premiers

### 1) Définition

Définition : Un nombre premier est un nombre entier supérieur ou égal à 2 n'ayant pour diviseurs que 1 et lui-même.

exemples : 2, 3, 5, 7 et 11 sont premiers.

- 4 n'est pas premier car il est multiple de 2.
- 3 n'est pas premier car il est multiple de 3.
- 1 n'est pas premier, par définition

### 2) Critères de primalité, cribles

Méthode: déterminer si un nombre est premier:

on vérifie tous les diviseurs possibles en appliquant les critères ou en calculant la division. Si on en trouve un, on s'arrête, sinon le nombre est premier.

exemple: 49: diviseur essayé:

2 → 49 n'est pas pair car 9 est impair

3 → non car $4+9=13=3\times4+1$ n'est pas multiple de 3

4 → non car 49 est impair

5 → non car 9 n'est pas 0 ou 5

6 → non car 49 est impair

7 → $49=7\times7$ donc 49 est multiple de 7.

Donc 49 n'est pas premier.

On voit que la méthode peut être très longue mais on peut réduire le nombre de diviseurs à essayer de deux manières:

- on se restreint aux diviseurs eux-mêmes premiers, car si N est multiple de 6 il est multiple aussi de 2 et 3 (ce que l'on aurait vu plus tôt)
- on s'arrête dès qu'on a testé tous les diviseurs inférieurs à $\sqrt{N}$. En effet, si on en trouve un plus grand, on aura $N=b\times q$ avec $b>\sqrt{N}$ mais comme c'est le premier que l'on trouve q est au moins aussi grand. Donc $q>\sqrt{N}$.

Alors $b\times q>\sqrt{N}\times\sqrt{N}=N$, et $N>N$ ce qui serait impossible

Cela donne la méthode suivante, qui donne au passage tous les nombres premiers jusque N.

Crible d'Ératosthène

1°) Construire la liste des entiers de 1 à N

2°) On pose B = 2.

On raye tous les multiples de 2 et on entoure 2.

3°) On prend pour B le plus petit nombre restant.

On raye tous les multiples de B et on entoure B.

4°) On répète 3° jusqu'à avoir $B\times B>N$.

5°) Les nombres restants ou entourés à la fin sont exactement ceux qui sont premiers.

Algorithme de primalité

Si on veut simplement savoir si N est premier, on peut faire :

1°) On pose B = 2.

2°) On calcule la division de N par B. Si N est multiple de B, on arrête car N n'est pas premier. Sinon, on remplace B par l'entier suivant.

3°) On répète 2°) jusqu'à avoir trouvé un diviseur ou avoir B×B > N.

4°) Si on arrête car B×B > N, alors N est premier. Sinon, on a trouvé un diviseur.

exemple : Liste des nombres premiers inférieurs à 100.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ (par déf) | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | ~~65~~ | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |
| 71 | ~~72~~ | 73 | ~~74~~ | ~~75~~ | ~~76~~ | ~~77~~ | ~~78~~ | 79 | ~~80~~ |
| ~~81~~ | ~~82~~ | 83 | ~~84~~ | ~~85~~ | ~~86~~ | ~~87~~ | ~~88~~ | 89 | ~~90~~ |
| ~~91~~ | ~~92~~ | ~~93~~ | ~~94~~ | ~~95~~ | ~~96~~ | 97 | ~~98~~ | ~~99~~ | ~~100~~ |

/ multiple de 2

\ multiple de 3

— multiple de 5

X multiple de 7

○ premier

On peut s'arrêter à 7 pour les essais car le nombre premier suivant est 11 et que 11×11 > 100

Remarques : • La partie présente convainc assez bien de cela : il est coûteux en général de déterminer si un nombre est premier ou de trouver des listes de nombres premiers. Leur principale utilité réside dans la décomposition de nombres entiers en produit de nombres premiers, qui a de nombreuses applications.

• Il y a une infinité de nombres premiers (il est intéressant de réfléchir à un bon argument pour cela, il y en a à votre portée).

• Des problèmes ouverts (dont la réponse ou la démonstration n'est pas encore connue) s'énoncent assez simplement. Citons-en deux :

Conjecture de Goldbach : Tout entier pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers

Conjecture des nombres premiers jumeaux : Il existe une infinité de couples de nombres premiers distants de 2 l'un de l'autre. (comme 5 et 7 ou 71 et 73).

## 3) Décomposition en facteurs premiers

Étant donné un nombre N, on a vu dans la partie précédente comment trouver son plus petit diviseur (hormis 1). On peut alors regarder le quotient et chercher à le diviser encore jusqu'à avoir un quotient premier.

exemples: $N = 210$.

$N = 2 \times 105$

105 est multiple de 3 ($1+5=6$) et $105 = 3 \times 35$

35 est multiple de 5 : $35 = 5 \times 7$

7 est premier.

Donc $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

$N = 12$

$N = 2 \times 6$

$6 = 2 \times 3$

3 est premier.

Donc $12 = 2 \times 2 \times 3$

En général, on a le résultat suivant :

Théorème

> Tout nombre entier s'écrit d'une unique façon (à ordre près) comme un produit de nombres premiers. Ce produit s'appelle décomposition en facteurs premiers.

Remarque : L'existence n'est pas un résultat très surprenant après les remarques ci-dessus. La partie plus importante du théorème est que la décomposition est unique. Évidemment, cela n'est pas vrai si on autorise les facteurs non premiers, car par exemple : $20 = 4 \times 5 = 2 \times 10$.

## III) Applications

### 1) Liste des diviseurs

Méthode | Si on veut la liste des diviseurs d'un nombre, on écrit sa décomposition en facteurs premiers et on forme tous les sous-produits

exemples:

- $12 = 2 \times 6 = \underbrace{2 \times 2 \times 3}$
  ↳ décomposition en facteurs premiers

Les diviseurs sont:

- 1
- 2 et 3
- $2 \times 2$ et $2 \times 3$ (i.e. 4 et 6)
- $2 \times 2 \times 3$ : 12

- $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18 = 2 \times 2 \times 2 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ $(= 2^3 \times 3^2)$

Les diviseurs sont:

- 1
- 2 et 3
- $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ et $3 \times 3 = 9$
- $2 \times 2 \times 2 = 8$, $2 \times 2 \times 3 = 12$, et $2 \times 3 \times 3 = 18$
- $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ et $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$
- $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

Remarque: il y a autant de diviseurs que de manière de choisir les puissances de chaque nombre premier.

Dans le premier exemple, on doit prendre $2^a \times 3^b$ avec $a = 0$, 1 ou 2 et $b = 0$ ou 1 donc il y a $3 \times 2 = 6$ diviseurs (3 possibilités pour a, 2 pour b).

Dans le second exemple, pour la même raison il y a $4 \times 3$ diviseurs.

exercice: déterminer le nombre de diviseurs de $3^4 \times 5^2 \times 11^3$.

## 2) Plus grand diviseur commun

**Méthode** Pour déterminer le plus grand nombre qui divise a et b, on les décompose chacun en facteurs premiers et on forme le nombre dont la décomposition contient les facteurs communs à a et b avec leur plus petite puissance.

**Remarque:** Le même énoncé vaut pour trouver le plus grand nombre divisant plusieurs nombres donnés (même s'il y en a plus de deux).

**Définition** Ce nombre s'appelle le PGCD (plus grand commun diviseur).
Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est 1.

exemples:

1) PGCD de 180 et 144.

On écrit $180 = 2\times 90 = 2\times 2\times 45 = 2\times 2\times 3\times 15 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5$

et $144 = 2\times 72 = 2\times 2\times 36 = 2\times 2\times 2\times 18 = 2\times 2\times 2\times 2\times 9 = 2^4\times 3\times 3$

On a donc $180 = 2^2\times 3^2\times 5$ et $144 = 2^4\times 3^2$.

Leur PGCD est donc $2^2\times 3^2$ (on garde 2 et 3 car ils apparaissent dans nos deux nombres et on garde $2^2$ plutôt que $2^4$ car il est plus petit).

Donc PGCD(144, 180) = 36

2) PGCD de 32, 36 et 136.

On trouve les décompositions suivantes : $32 = 2^5$

$36 = 2^5\times 3$

$136 = 2^3\times 17$.

Donc PGCD(32, 36, 136) = $2^3 = 8$.

## 3) Plus petit commun multiple

**Méthode** Pour trouver le plus petit nombre multiple de nombres donnés, on les décompose en facteurs premiers, on regarde les facteurs présents dans au moins un nombre, et on les garde avec leur plus grande puissance

exemples : · PPCM de 14 et 16.

On écrit $14 = 2 \times 7$

et $16 = 2^4$

Le PPCM est donc $2^4 \times 7 = 112$.

· PPCM de 180 et 144.

On a les décompositions en facteurs premiers : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$144 = 2^4 \times 3^2$

Donc $PPCM(180, 144) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$

· PPCM de 32, 96 et 136.

On a les décompositions en facteurs premiers : $32 = 2^5$

$96 = 2^5 \times 3$

$136 = 2^3 \times 17$

Donc $PPCM(32, 96, 136) = 2^5 \times 3 \times 17 = 1632$

# Chapitre Proportionnalité, fonctions

## I) Relations entre grandeurs

On veut dans ce chapitre regarder les relations qui peuvent exister entre deux grandeurs numériques : citons par exemple la taille et le poids d'un individu, la hauteur dont on lâche un objet et la durée de sa chute, etc.

**Définition** On dit qu'une grandeur A est fonction d'une grandeur $x$ si la valeur de $x$ détermine totalement la valeur de A. On dit que A est fonction des grandeurs $x$ et $y$ si les valeurs de $x$ et de $y$ déterminent celle de A, etc.

exemples :

- La masse M d'une quantité d'eau est fonction de son volume V, et on a la formule $M(\text{en kg}) = 1000 \times V(\text{en L})$.

- Le prix d'achat en vrac P est fonction du prix du kg $p$ et de la masse achetée M : $P(\text{en €}) = p \times M(\text{en kg})$.

- L'aire d'un rectangle $\mathcal{A}$ est fonction de sa longueur L et de sa largeur $l$ :
$\mathcal{A} = l \times L$

contre-exemples :

- La population d'un lieu n'est pas fonction de sa superficie (des lieux de même surface peuvent avoir des populations différentes)
- La longueur de la diagonale d'un rectangle n'est pas fonction de la longueur du rectangle (mais elle est fonction de sa longueur et de sa largeur).

Remarque : En langage mathématique, "être fonction de" est beaucoup plus fort que "dépendre de" dans la langue courante. Quand on étudie des grandeurs réelles, il y a beaucoup de facteurs à prendre en compte et les formules que l'on donne pour illustrer les relations, par exemple entre poids et taille, sont des approximations.

## II) Tableaux de valeurs

**Définition** Supposons que l'on veuille étudier une grandeur A en lien avec une autre $x$. On peut construire comme suit un tableau de valeurs :

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 3 | 1,4 | $\frac{2}{3}$ | 6 | $\frac{2}{3}$ | 11 |

On lit dans ce tableau :
- quand $x=1$, $A=7$
- quand $x=3$, $A=1,4$
- etc.

Remarque (3e) : en 3e, on pourra noter $A=f(x)$ et on dira que 1,4 est l'image de 3 ou que 4 est un antécédent de $\frac{2}{3}$ (6 en est un autre).

Remarque : · si A est fonction de $x$, on ne met qu'une seule colonne par valeur de $x$ car A ne peut pas changer $x$ étant fixé.

Voici par exemple un cas où A n'est pas fonction de $x$ :

| $x$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 3 | 1 | 4 | 4 | 10 | 12 |

Quand $x=3$, A peut valoir 3 ou 1, donc A n'est pas une fonction de $x$.

## III) Formules

Dans l'exemple de la définition en II, les valeurs ressemblent suivre aucune logique. En pratique, quand deux grandeurs sont fonction l'une de l'autre en sciences, on peut exprimer leur relation par une expression littérale appelée formule. Là où le tableau de valeurs ne donne qu'un nombre fini de valeurs, la formule permet de calculer toute valeur de A en connaissant celle de $x$.

**Définition** Si A est fonction de $x$, une formule de A est une expression littérale permettant de calculer A à partir de la valeur de $x$.

exemples : · L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté $c$ est $\mathcal{A} = c \times c$

· Si on verse un volume $V$ d'eau dans un verre de base $8\,cm^2$, la hauteur $h$ d'eau est $h = \frac{V}{8}$ ($h$ et $V$ en cm).

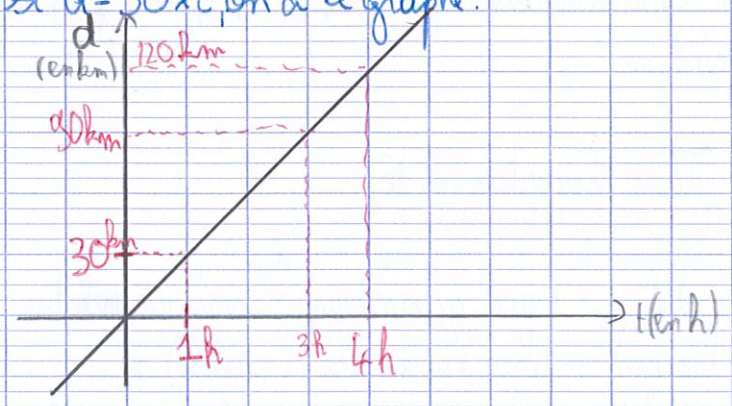
· Si un véhicule avance à $30\,km.h^{-1}$ pendant une durée $t$ (en h), il parcourt $d = 30 \times t$ (en km)

## IV] Graphes

Étant donné une grandeur fonction d'une autre, on peut représenter graphiquement la relation entre les deux de la manière suivante.

Définition | Le graphe donnant A en fonction de $x$ est la courbe (i.e. un trait de crayon) **du plan** (avec un repère orthogonal) dont les points sont ceux dont les coordonnées vérifient :
l'ordonnée du point est la valeur de A correspondant à son abscisse $x$.

exemple : si $d = 30 \times t$, on a le graphe :



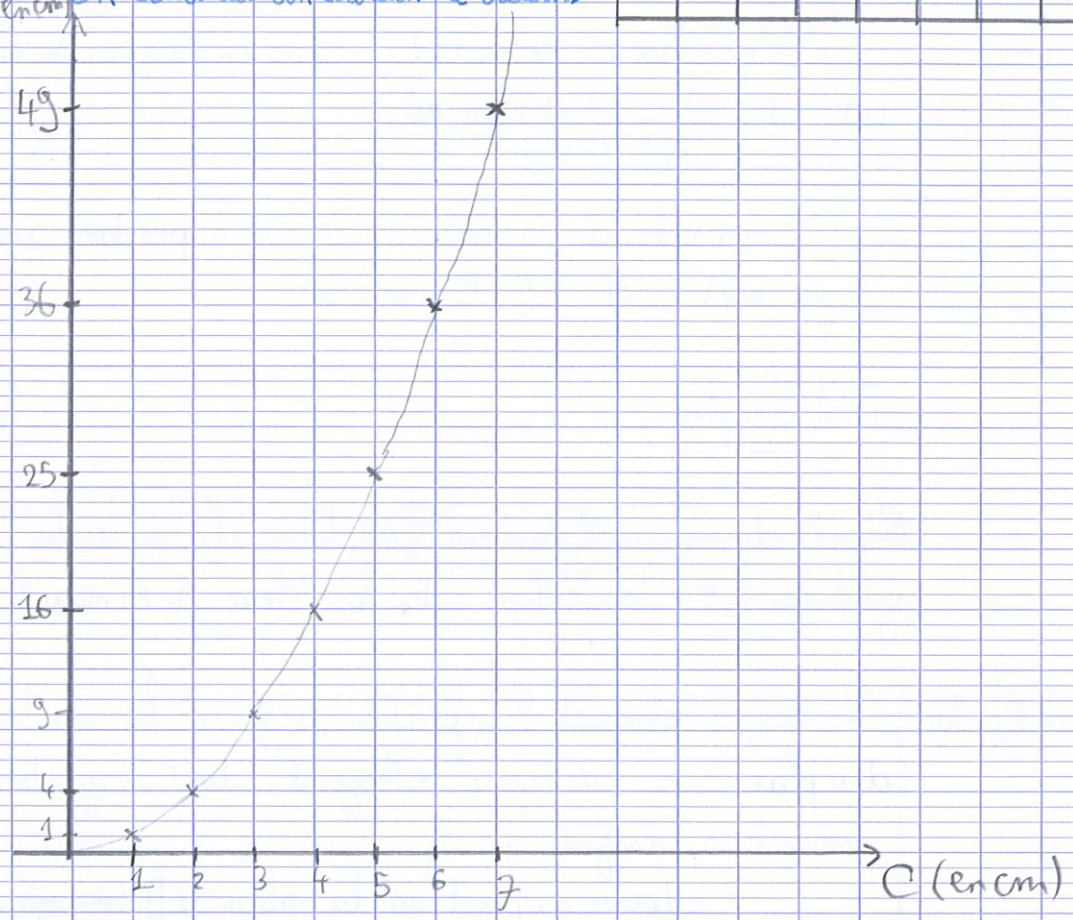

Remarques : · si la relation est plus compliquée, on ne peut pas tracer le graphe parfaitement à la main et on se contente d'en placer de nombreux points et de les relier harmonieusement (voir page suivante).

· on peut obtenir sur le graphe ci-dessus d ou t en fonction de l'autre valeur en suivant les pointillés.

exemple du carré : on avait $A = c \times c$.

On construit un tableau de valeurs :

| c | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |




Si on voulait être plus précis on calculerait le tableau pour les valeurs de c à une décimale (0,1, 0,2, 0,3, etc.) puis à 2, etc. C'est ce que fait notre calculatrice.

## V.) Proportionnalité

On dit que deux grandeurs A et x sont en relation de proportionnalité (qu'elles sont proportionnelles l'une avec l'autre) si :

(1) • A est fonction de $x$ et si $x$ est la somme de deux valeurs, A est la somme des valeurs leur correspondant

(2) • A s'obtient en multipliant $x$ par un nombre fixé, le coefficient/rapport de proportionnalité

(3) • Le graphe de A en fonction de $x$ est une droite contenant l'origine.

(4) • Si $x_1$ et $x_2$ correspondent à des valeurs $A_1$ et $A_2$ de A, on a

$$\frac{A_1}{x_1} = \frac{A_2}{x_2}$$

Théorème | Il suffit de vérifier une des quatre propriétés pour que toutes soient vraies.

application 1 : reconnaître une situation de proportionnalité.

Pour savoir si deux grandeurs sont proportionnelles, on commence par voir ce que l'on sait :

a) si on a une formule qui est du type $V = 3 \times B$, V et B sont proportionnels car on passe de l'un à l'autre en multipliant ou divisant par 3.

b) si on a un graphique, il suffit de regarder si c'est une droite passant par l'origine du repère

c) à partir d'un tableau de valeurs, on peut procéder de deux manières.

| A | 1 | 2 | 3 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 3 | 6 | 9 | 21 | 27 | 33 |
| $\frac{B}{A}$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

- ou bien on calcule $\frac{B}{A}$ (ou $\frac{A}{B}$) pour chaque valeur pour vérifier qu'on a le même résultat,

- ou bien (pour éviter les divisions), on compare les produits en croix de chaque colonne avec la première, comme à gauche ci-contre.

1 2 6
3 6 6

1 3 9
3 9 9

1 7 21
3 21 21

1 9 27
3 27 27

1 11 33
3 33 33

application 2 : trouver une valeur manquante dans une situation de proportionnalité.

Si on sait que A et B sont proportionnels entre eux et qu'on connaît au moins trois valeurs, on remplit ainsi :

| A | 7 | 9 |
|---|---|---|
| B | 84 | ? |

On sait que $\frac{?}{9} = \frac{84}{7}$ donc $? = \frac{84}{7} \times 9$.

Après calcul, on trouve $\frac{84}{7} = 12$ et $12 \times 9 = 108$.

Donc la case manquante est 108.

# Chapitre Opérations sur les nombres relatifs

## I) Addition

**Définition** La somme de deux nombres relatifs $\pm a$ et $\pm b$ est définie comme suit $(a,b>0)$ :

- $(+a)+(+b) = a+b$
- $(-a)+(-b) = -(a+b)$
- $(+a)+(-b) = \begin{cases} a-b & \text{si } a>b \\ 0 & \text{si } a=b \\ -(b-a) & \text{si } a<b \end{cases}$
- $(-a)+(+b) = (+b)+(-a)$ (cf point précédent ensuite).

exemples :
- $3+(-4)+5 = -(4-3)+5 = -1+5 = 5-1 = 4$
- $5+(-4)+3 = (5-4)+3 = 1+3 = 4$
- $3-4+5-6 = (3-4)+(5-6) = -(4-3)+(-(6-5))$
  $= -1+(-1) = -(1+1) = -2$

Remarques : les propriétés habituelles de l'addition restent vraies : on peut calculer des sommes successives dans l'ordre que l'on souhaite (cf les deux premiers exemples) et échanger les termes.

## II) Soustraction

**Définition** Le **opposé** d'un nombre relatif est le nombre obtenu en changeant son signe. Pour 0, l'opposé est lui-même.

**Remarque**
- L'opposé de l'opposé d'un nombre est lui-même : $-(-a) = a$.
- Si deux nombres sont dans un certain ordre, leurs opposés sont dans l'ordre contraire : si $a<b$, $-b<-a$.

exemples :
- $-2<3$ et $-3<2$
- $3<4$ et $-4<-3$

**Définition** La différence entre deux nombres relatifs est la somme du premier et de l'opposé du second.

$$a - b = a + (-b)$$

exemples :
- $3 - 4 = 3 + (-4) = -(4-3) = -1$
- $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$
- $-1 - (-3) = -1 + 3 = 3 - 1 = 2$
- $4 - 4 = 4 + (-4) = 0$

**Propriété** Un signe - devant une parenthèse contenant des sommes et des différences peut être transformé en + en changeant tous les signes de la parenthèse.

exemples :
- $a - (b - c) = a - b + c$
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $2 - (-3 - 4) = 2 + 3 + 4$

etc.

Remarque : c'est un cas particulier de distributivité (pour la multiplication par 1)

**Propriété** La différence entre un nombre et lui-même est nulle : $a - a = 0$.

exemple : $\cancel{3} + 7 - \cancel{3} = 7$.

## III) Multiplication

La multiplication des entiers relatifs est définie de manière à ce que les règles de distributivité soient toujours vérifiées.

Par exemple : $1 \times (-1) = 1 \times (0 - 1) = 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$

et surtout $(-1) \times (-1) = (-1) \times (0 - 1) = (-1) \times 0 - (-1) \times 1$
$= -(-1) = +1$.

car on a toujours $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.

On a donc le résultat suivant :

$$1 \times 1 = 1$$
$$1 \times (-1) = -1$$
$$(-1) \times 1 = -1$$
$$(-1) \times (-1) = 1$$

On le note souvent via le tableau de signes suivant :

Tableau (règle des signes)

| × | + | − |
|---|---|---|
| + | + | − |
| − | − | + |

On peut alors calculer n'importe quel produit : $2 \times (-3) = 2 \times 1 \times 3 \times (-1)$
$= 2 \times 3 \times 1 \times (-1)$
$= 6 \times -1 = -6$

et surtout $(-3) \times (-4) = (-1) \times 3 \times (-1) \times 4$
$= (-1) \times (-1) \times 3 \times 4$
$= 1 \times 12$
$= 12$.

On en déduit plus généralement la règle suivante :

Théorème : Le produit de deux nombres relatifs est obtenu en calculant le produit sans les signes, puis en y accollant le signe donné par le tableau précédent (règle des signes).

exemples :

$$2 \times (-4) = -8$$
$$(-3) \times 5 = -15$$
$$(-1) \times (-7) = +7$$

# IV) Division

**Définition** Le quotient d'un nombre relatif $a$ par un nombre relatif non nul $b$ est le nombre relatif $a \div b$ tel que : $\boxed{b \times (a \div b) = a.}$

**Théorème** Pour calculer un quotient, on le calcule d'abord sans les signes, puis on détermine son signe comme pour le produit (cf. tableau en III).

exemples :
- $(-3) \div 4 = -0{,}75$
- $(-4) \div (-2) = +2$
- $8 \div (-2) = -4$

démonstration : on écrit $a = \pm A$ et $b = \pm B$ avec $A$ et $B$ positifs, ce qui laisse quatre cas suivant les signes.

1) [+,+]. On a $b \times (A \div B) = B \times (A \div B) = A = a$, donc $a \div b = A \div B$.

2) [+,−]. On a
$$\begin{aligned} b \times (-(A \div B)) &= -b \times (A \div B) && \text{(propriétés du produit)} \\ &= B \times (A \div B) && \text{(car } b = -B\text{)} \\ &= A = a && \text{(définition du quotient)} \end{aligned}$$
Donc $a \div b = -A \div B$
↳ $(-A) \div B$

3) [−,+] On a
$$\begin{aligned} b \times (-(A \div B)) &= -b \times (A \div B) \\ &= -B \times (A \div B) \\ &= -A \\ &= a \end{aligned}$$
Donc $(-A) \div B = a \div b = -(A \div B)$

[−,−] 4) Enfin, $b \times (A \div B) = -B \times (A \div B) = -A = a$.

Donc $(-A) \div (-B) = a \div b = A \div B$

# Chapitre Triangles égaux

## I) Définition

Deux triangles sont égaux si on peut les découper et les superposer parfaitement.

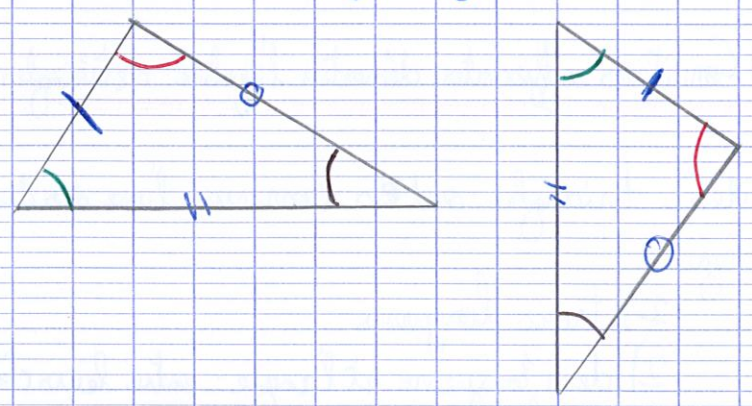
L'objectif de chapitre sera de donner des critères plus précis pour dire quand deux triangles sont égaux. On commence par donner des propriétés qui sont nécessairement vérifiées quand deux triangles sont égaux, puis on cherchera surtout ce qu'il suffit de constater pour affirmer que deux triangles sont égaux.

## II) Conditions nécessaires

Théorème | Si deux triangles sont égaux, alors leurs côtés sont deux-à-deux de même longueur, leurs angles sont deux à deux de même longueur et ils ont le même périmètre et la même aire.

Remarque: La propriété est évidente, puisque les deux triangles doivent se superposer.

Figure: Voici deux triangles égaux, codés pour illustrer les égalités.



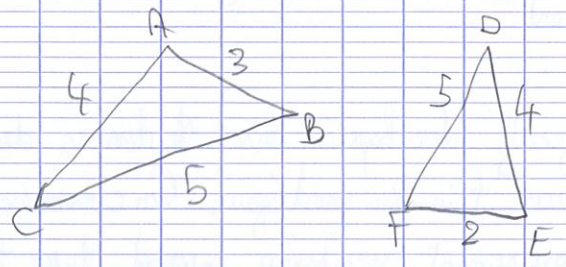
⚠ Dire que ABC et A'B'C' sont égaux ne dit a priori pas quels sommets se correspondent. On ne peut donc pas affirmer que AB = A'B', mais seulement que AB est une des trois longueurs A'B', B'C' ou A'C'.

**Utilisations** : ce résultat a deux utilités :

1) si on sait que deux triangles sont égaux, on peut connaître les longueurs et les angles de l'un à partir de ceux de l'autre.

2) si on connait les longueurs ou les angles de deux triangles et qu'elles ne correspondent pas, on peut montrer qu'ils ne sont pas égaux.

**exercice type** :




Les triangles sont-ils égaux ?

réponse : Les triangles ABC et DEF ne sont pas égaux, car s'ils l'étaient, leurs longueurs se correspondraient 2 à 2 et que le côté AB n'a la même longueur qu'aucun des côtés de DEF.

**Remarques** : 1) On peut raisonner de même sur les angles.

2) Ce type de raisonnement où l'on démontre que la conclusion d'un théorème est fausse pour affirmer que ses hypothèses sont fausses s'appelle une contraposition.

exemple plus simple :

On sait que si un nombre est multiple de 14, il est pair.

Donc : si un nombre est impair, il n'est pas multiple de 14.

## III) Conditions suffisantes : démontrer l'égalité de triangles

**Théorème** : Si deux triangles ont en commun l'une des données suivantes, ils sont égaux :

1) trois longueurs
2) deux longueurs et l'angle entre leurs côtés
3) une longueur et deux angles

**Utilisation** : si on arrive à vérifier que deux triangles partagent 1), 2) ou 3), on conclura qu'ils sont égaux.

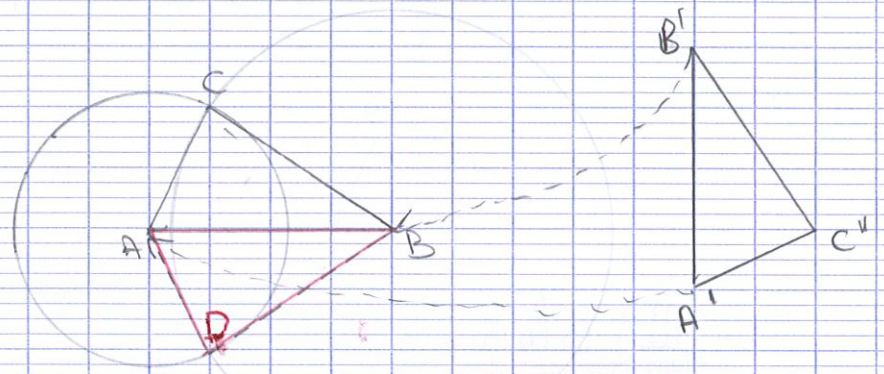
démonstration.

1) Supposons que les triangles $A'B'C'$ et $ABC$ vérifient $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$.

Déplaçons $A'B'C'$ de telle sorte que $A'$ soit sur $A$ et $B'$ sur $B$, ce qui est possible car $A'B' = AB$.

Traçons le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $B$ et de rayon $BC$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $A$ et de rayon $AC$.

Par hypothèse $C$ et $C'$ sont alors sur ces deux cercles.



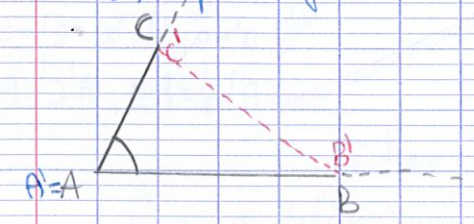

Ces deux cercles se croisent en deux points : $C$ et son symétrique $D$ par rapport à $(AB)$.

Si $C'$ est arrivé sur $C$, les deux triangles sont superposés. S'il est arrivé sur $D$, on effectue la symétrie d'axe $(AB)$, qui superpose nos deux triangles.

Donc $ABC$ et $A'B'C'$ sont égaux.

2) Supposons cette fois $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \end{cases}$.

On déplace le triangle $A'B'C'$ pour avoir $A'$ sur $A$, et $[A'B')$ sur $[AB)$ et $[A'C')$ sur $[AC)$, ce qui est possible car $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.




Comme $B' \in [AB)$ et $AB' = AB$, on a $B' = B$.

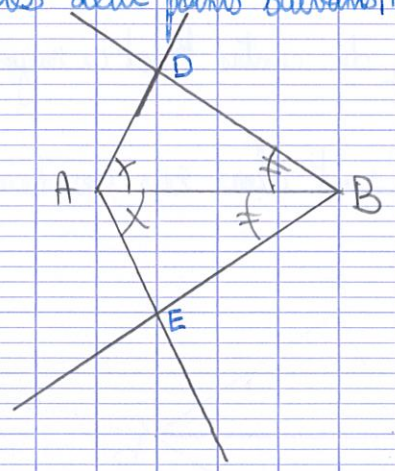
De même $C'$ et $C$ sont sur la même demi-droite et à la même distance de l'origine donc $C' = C$.

Les triangles sont donc bien superposés, ils sont alors égaux.

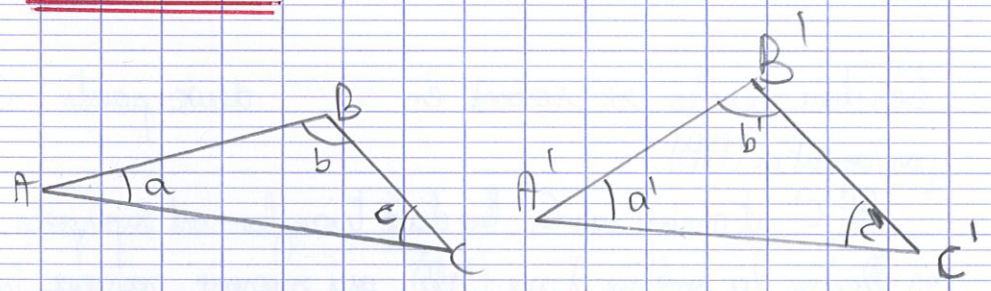
3) Remarquons que, puisque la somme des angles d'un triangle est 180°, à $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C}$, on a aussi égalité des angles restants : $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

Supposons donc que $A'B' = AB$, et collons $A'$ sur $A$ et $B'$ sur $B$.

Pour placer $C$ et $C'$ connaissant les valeurs des angles en $A$ et $B$, on doit être en un des deux points D et E suivants, mais les triangles ADB et AEB sont égaux car symétriques par rapport à (AB), donc on aboutit de toute façon à deux triangles égaux.




## III) Bilan




$A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $B'C' = BC$

$a' = a$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$

$a' = a$, $b' = b$, $A'B' = AB$

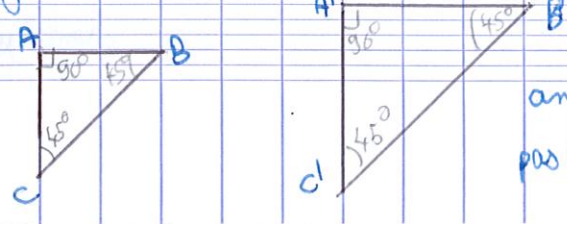
$A'B'C'$ et $ABC$ sont égaux.

Si on a bien nommé les sommets !

$a' = a$, $b' = b$, $c' = c$
$A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $B'C' = BC$

⚠ En revanche, trois angles égaux 2 à 2 ne montrent pas l'égalité des triangles (c'est alors leur similitude, vue en 3e).

Par exemple :




ont les mêmes angles 2 à 2 mais ne sont pas égaux (car les longueurs ne concordent pas).

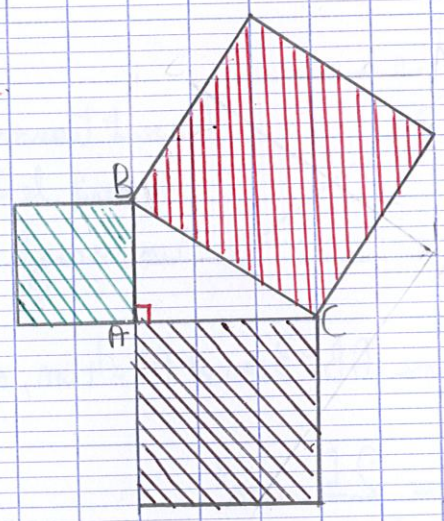
# Chapitre : Théorème de Pythagore

## I) Énoncé direct et démonstration

L'énoncé connu habituellement sous le nom de théorème de Pythagore est le suivant :

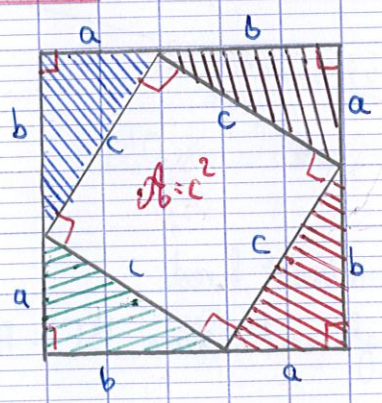
**Théorème** Soit ABC un triangle rectangle en A.
Alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
Autrement dit, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.

Figure :

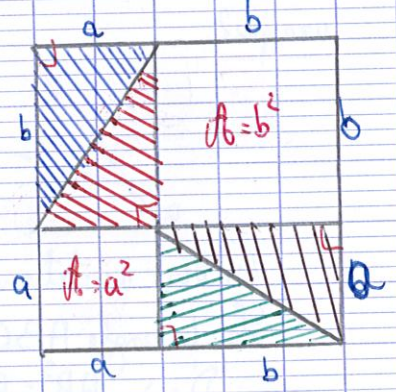



Le théorème revient donc à dire que l'aire rouge est la somme des aires vertes et noires.

Démonstration : on utilise les deux figures suivantes avec $a = AB$, $b = AC$ et $c = BC$.




(NB : à gauche, le trou est bien un carré car ses angles mesurent $180° - \hat{B} - \hat{C} = \hat{A} = 90°$)




Dans les deux cas, l'aire non coloriée est égale à celle du grand carré de côté $a+b$ moins quatre fois celle du triangle rectangle.

En particulier, les deux surfaces non hachurées sont égales.

D'où : $c^2 = a^2 + b^2$, ce qui est le résultat voulu.

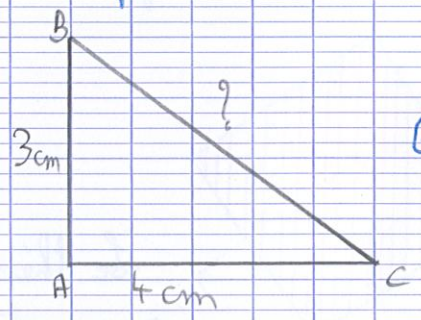
Remarques : • L'attribution du résultat à Pythagore est douteuse, il est vraisemblablement plus ancien, et on le retrouve un peu partout : Mesopotamie (≈ -1800), Inde (-600), Chine (quelque part entre -1000 et -250). Pythagore vit lui au VI$^e$ siècle av. J.C..

• Ce résultat permet d'exprimer facilement la longueur manquante d'un triangle rectangle dont on connait deux longueurs :

1)- soit on cherche l'hypoténuse c et on calcule $a^2+b^2$ puis on cherche quel nombre donne ce résultat quand on le met au carré

2)- soit on cherche un des petits côtés et on calcule donc par exemple $a^2=c^2-b^2$ pour trouver a.

exemple 1 :



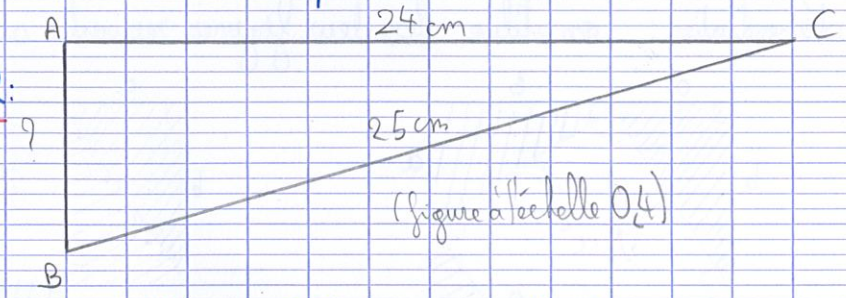

On veut trouver BC.
On écrit le théorème de Pythagore pour un triangle rectangle en A :

$BC^2=AB^2+AC^2$. Comme $AB=3cm$ et $AC=4cm$, on a donc $BC^2=3^2+4^2 cm^2$.

D'où $BC^2=9+16=25\ cm^2$.

Or, on sait que $25=5\times5$, donc $BC=5cm$.

exemple 2 :




On veut ici déterminer AB connaissant le reste.

Le triangle ABC est rectangle en A donc $BC^2=AB^2+AC^2$.

D'où $AB^2=BC^2-AC^2$.

En remplaçant par les valeurs de l'énoncé : $AB^2=(25)^2-(24)^2=625-576=49cm^2$

On sait que $49=7\times7=7^2$, donc $AB=7cm$.

## II) Réciproque

Remarque : un théorème affirme que si certaines hypothèses sont vérifiées (ici : ABC est rectangle en A), une conclusion est vraie (ici : $AB^2+AC^2=BC^2$). La réciproque d'un théorème est obtenue en inversant les hypothèses et la conclusion.

⚠ Un théorème peut être vrai sans que sa réciproque le soit ! Par exemple, si un quadrilatère est un carré, il a quatre angles droits, mais on ne peut pas dire que si un quadrilatère a quatre angles droits, il est nécessairement un carré.

Ici, cependant, la réciproque du théorème de Pythagore est vraie :

Théorème :

> Si dans un triangle ABC, les longueurs des côtés vérifient $BC^2=AB^2+AC^2$, alors ABC est rectangle en A.

démonstration : considérons le triangle A'B'C' rectangle en A' avec $A'B'=AB$ et $A'C'=AC$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $(B'C')^2=(A'B')^2+(A'C')^2$.

Comme $A'B'=AB$ et $A'C'=AC$, cela devient $(B'C')^2=AB^2+AC^2$.

Par hypothèse, $AB^2+AC^2=BC^2$, donc on a montré que $(B'C')^2=BC^2$.

Donc $B'C'=BC$.

Les triangles ABC et A'B'C' vérifient $\begin{cases} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ BC=B'C' \end{cases}$, donc ils sont égaux.

Leurs angles sont donc également égaux 2 à 2, donc en particulier : $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$.

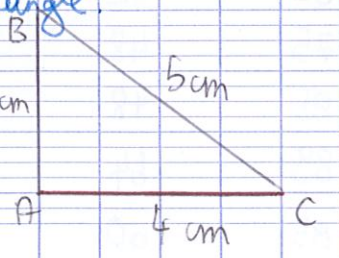
Comme A'B'C' est rectangle en A', on sait que $\widehat{B'A'C'}=90°$. Donc $\widehat{BAC}=90°$.

Donc ABC est rectangle en A.

Remarque : Le théorème de Pythagore permet de trouver une longueur manquante dans un triangle **que l'on** sait déjà être rectangle ; sa réciproque permet quant à elle de démontrer qu'un triangle dont on connait toutes les longueurs est un triangle rectangle.

exercice type :

Montrer que ABC est rectangle en A.




corrigé : on calcule : $AB^2+AC^2=3^2+4^2=9+16=25\,cm^2$

d'autre part $BC^2=5^2=25\,cm^2$.

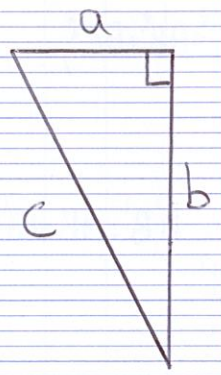
On a donc $BC^2=AB^2+AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

## III) Questions variées

On a vu qu'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 4 a une hypoténuse de longueur 5.

Pouvoir trouver un résultat entier exact est rare. On dit alors que (3,4,5) est un triplet pythagoricien.

En voici la liste des solutions avec toutes les longueurs inférieures à 100 :




| a | b | c | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 15 | 20 | 25 |
| 5 | 12 | 13 | 15 | 36 | 39 |
| 6 | 8 | 10 | 16 | 63 | 65 |
| 7 | 24 | 25 | 8 | 15 | 17 |
| 9 | 40 | 41 | 16 | 30 | 34 |
| 10 | 24 | 26 | 18 | 80 | 82 |
| 11 | 60 | 61 | 20 | 21 | 29 |
| 12 | 16 | 20 | 20 | 48 | 52 |
| 12 | 35 | 37 | 21 | 72 | 75 |
| 13 | 84 | 85 | 21 | 28 | 35 |
| 14 | 48 | 50 | 24 | 45 | 51 |
| 25 | 60 | 65 | 24 | 32 | 40 |
| 27 | 36 | 45 | 24 | 70 | 74 |
| 9 | 12 | 15 | 28 | 96 | 100 |
| 30 | 40 | 50 | 28 | 45 | 53 |
| 30 | 72 | 78 | 32 | 60 | 68 |
| 33 | 56 | 65 | 35 | 84 | 91 |
| 36 | 77 | 85 | 40 | 42 | 58 |
| 36 | 48 | 60 | 42 | 56 | 70 |
| 45 | 60 | 75 | 48 | 55 | 73 |
| 51 | 68 | 85 | 48 | 64 | 80 |
| 39 | 80 | 89 | 54 | 72 | 90 |
| 57 | 76 | 85 | 60 | 80 | 100 |
| 65 | 72 | 97 | 60 | 63 | 87 |
| 33 | 44 | 55 | 18 | 24 | 30 |

39, 52, 65
40, 75, 85

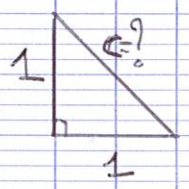
Il y a donc 52 solutions au total avec $a \leq b$, donc 104 en comptant les symétriques (avec $a \geq b$).

Si on choisit les longueurs a et b au hasard, entre 1 et 100, on a $100 \times 100 = 10\,000$ possibilités.

Il y a donc une probabilité de $\frac{104}{10\,000} = 1{,}04\%$ d'avoir une hypoténuse de longueur entière.

Bilan : si on choisit les longueurs d'un triangle rectangle au hasard, on a à peine une chance sur cent pour que l'hypoténuse tombe juste !

exemple le plus simple :




Si on applique le théorème de Pythagore à ce triangle rectangle isocèle, on trouve $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$.

Mais $c^2 = 2$ n'a pas de solution c entière....

Si on veut exprimer c, on calcule ainsi :

- Comme $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$, $1^2 < c^2 = 2 < 2^2$ et $1 < c < 2$.
- On calcule $(1{,}1)^2$, $(1{,}2)^2$, $(1{,}3)^2$, etc. jusque $(1{,}9)^2$, et on remarque que

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < c^2 = 2 < (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

donc $1{,}4 < c < 1{,}5$

- On calcule $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ et $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$,

donc $(1{,}41)^2 < c^2 = 2 < (1{,}42)^2$

donc $1{,}41 < c < 1{,}42$

- on peut continuer indéfiniment à encadrer c de plus en plus précisément.

C'est ce que fait la calculatrice quand on lui demande $\sqrt{2}$ :

$$c = \sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309 5...$$

$\sqrt{2}$ est <u>par définition</u> le nombre tel que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Comme on le voit, il n'est pas entier, et on pourrait montrer qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction d'entiers.

# Chapitre Puissances

## I) Définition, notation en exposant

### 1) Puissances positives

**Définition** Si $n$ est un entier strictement positif, et si $a$ est un nombre, la $n^e$ puissance de $a$ est le nombre obtenu en multipliant $n$ nombres égaux à $a$.

Si $a \neq 0$, la $0^e$ puissance de $a$ vaut toujours 1, par convention.

**Notation** On la note $a^n$, et on lit "a puissance n", ou "a (à l') exposant n", voire rarement "a n" tout court.

exemples: On a donc les égalités suivantes :
- $7^0 = 1$.
- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$
- $1^{10} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$
- $(-1)^5 = \underbrace{(-1) \times (-1)}_{=1} \times \underbrace{(-1) \times (-1)}_{=1} \times (-1) = -1$

### 2) Puissances négatives

**Définition** Si $-n$ est un entier négatif et si $a$ est un nombre, on définit $a^{-n}$ comme l'inverse de $a^n$.

exemples:
- $1^{-3} = \frac{1}{1^3} = \frac{1}{1 \times 1 \times 1} = \frac{1}{1} = 1$
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16}$
- $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2)} = -\frac{1}{8}$
- $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0{,}000\,01$

## II) Propriétés des puissances

### 1) Somme sous l'exposant

Théorème | Pour tous nombres entiers n et m et nombre $a \neq 0$, on a :

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

exemple : • $4^8 = 4^5 \times 4^3$

démonstration : • $a^n \times a^m = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{m \text{ fois}}$ (si n et m sont $> 0$)

$$= \underbrace{a \times \dots \times a}_{n+m \text{ fois}}$$

$$= a^{n+m}.$$

• si $m = 0$, $a^{n+0} = a^n = a^n \times 1 = a^n \times a^0$ (idem si $n = 0$)

• si $n < 0$ et $m < 0$, on écrit $m = -p$ et $n = -q$

$$a^{n+m} = a^{-p+(-q)} = a^{-p-q} = a^{-(p+q)}$$

et $a^n \times a^m = a^{-p} \times a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \times a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)}$

• Enfin si n et m ont des signes contraires, disons $n < 0$ et $m > 0$ par exemple :

On écrit $n = -p$, donc $n + m = (-p) + m = m - p$.

Alors $a^n \times a^m = a^{-p} \times a^m = \frac{a^m}{a^p} = \frac{\overbrace{a \times \dots \times a}^{m \text{ copies}}}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{p \text{ copies}}}$

1° cas : si $m \geq p$, on simplifie p fois la fraction par a et il reste $(m-p)$ copies de a au numérateur donc $\frac{a^{m-p}}{1} = a^{m-p}$.

2° cas : si $m < p$, on simplifie m fois par a et il reste $p-m$ copies de a au dénominateur, donc $\frac{1}{a^{p-m}}$, c'est-à-dire $a^{-(p-m)}$ donc $a^{m-p}$.

Dans les deux cas : $a^n \times a^m = a^{m-p} = a^{m+n} = a^{n+m}$.

## 2) Différence sous l'exposant

**Théorème** Pour tous nombres entiers $n$ et $m$ et tout nombre $a \neq 0$, on a

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

exemple : $4^8 = \frac{4^{10}}{4^2}$

démonstration : $a^{n-m} = a^{n+(-m)} \underset{\text{théorème du I.1.}}{=} a^n \times (a^{-m}) \overset{\text{définition de } a^{-m}}{=} a^n \times \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}$

## 3) Produit sous l'exposant

**Théorème** Pour tous nombres entiers $n$ et $m$ et tout nombre $a \neq 0$, on a :

$$a^{n \times m} = (a^n)^m$$

démonstration : • si $m > 0$, $(a^n)^m = \underbrace{a^n \times \cdots \times a^n}_{m \text{ fois}}$

$= a^{\overbrace{n + \cdots + n}^{m \text{ fois}}}$ (d'après I.1)

$= a^{m \times n}$

• si $m = 0$, $(a^n)^m = (a^n)^0 = 1$

et $a^{n \times m} = a^{n \times 0} = a^0 = 1$, donc $(a^n)^m = a^{n \times m}$.

• enfin, si $m < 0$, on écrit $m = -p$ et :

$(a^n)^m = (a^n)^{-p} = \frac{1}{(a^n)^p}$ (définition)

$= \frac{1}{a^{np}}$ (cas positif)

$= a^{-np}$

$= a^{n \times (-p)} = a^{n \times m}$.

exemples : • $2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$, et $2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$

Donc $4^5 = 32^2$ (sans avoir à calculer le résultat).

- $(-1)^{10} = ((-1)^2)^5 = (+1)^5 = 1$

On en tire d'ailleurs :

Corollaire : $(-1)^n = 1$ si $n$ est pair
$(-1)^n = -1$ si $n$ est impair

démonstration :

- si $n$ est pair, on écrit $n = 2 \times p$, donc $(-1)^n = (-1)^{2p} = ((-1)^2)^p = 1^p = 1$.

- si $n$ est impair, $n-1$ est pair donc $(-1)^n = (-1)^{n-1} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$.

## 4) Produit ou quotient de nombres au même exposant

Théorème : Si $n$ est un entier et $a$ et $b$ deux nombres non nuls, on a :

- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

démonstration :

si $n > 0$, $a^n \times b^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times b \times a \times b \times \cdots \times a \times b}_{n \text{ fois}} = (a \times b)^n$

(On réorganise l'ordre des termes du produit).

si $n = 0$, $a^0 \times b^0 = 1 = (a \times b)^0$.

si $n < 0$, on écrit $n = -p$ avec $p > 0$ et $a^{-p} \times b^{-p} = \dfrac{1}{a^p} \times \dfrac{1}{b^p} = \dfrac{1}{a^p \times b^p}$.

Le premier cas permet de dire que $a^p \times b^p = (ab)^p$, donc on a

$$a^{-p} \times b^{-p} = \frac{1}{(ab)^p} = (ab)^{-p}.$$

C'est-à-dire $a^n \times b^n = (ab)^n$.

## 5) Bilan

On peut donc : - développer une somme d'exposants en produit : $2^{3+4} = 2^3 \times 2^4$
- développer une différence d'exposants en quotient : $3^{3-1} = \frac{3^3}{3^1}$
- développer un produit d'exposants en puissance : $4^{2\times5} = (4^2)^5$.

et d'autre part permuter les produits/quotients et les exposants : $\cdot\ (2\times3)^5 = 2^5 \times 3^5$
$\cdot\ \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{3^7}{4^7}$.

Ce que l'on ne peut pas relier ou simplifier à ce stade, ce sont des expressions comme $2^3+4^3$ ou $(5+3)^7$.

En particulier, $(2+1)^4 \neq 2^4+1^4$ !

$3^4 = 9^2 = 81$ $\qquad$ $4^2+1 = 16+1 = 17$.

## 6) Remarque : Calcul rapide de grandes puissances

Pour calculer rapidement des puissances, on peut être astucieux.
Prenons par exemple $3^9$.
Naïvement, $3^9 = 3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3$, ce qui fait huit multiplications successives.
Mais on peut s'en sortir ainsi (les calculatrices le font d'ailleurs) :

$$3^9 = 3^8 \times 3 = 3^{4\times2} \times 3$$
$$= (3^4)^2 \times 3$$
$$= ((3^2)^2)^2 \times 3.$$

On calcule alors simplement $3^2 = 3\times3 = 9$,
puis $9^2 = 9\times9 = 81$, $81^2 = 6561$
et $6561\times3 = 19683$.

La technique générale consiste à calculer $a^{2n}$ comme le carré de $a^n$ directement.
On a ici réduit le nombre de calculs de 4 à 8.
Pour calculer $3^{32}$, on n'aurait que cinq opérations au lieu de 32...

## III) Racines carrées

Définition | La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre b tel que $b^2 = a$.
positif.

On le note $\sqrt{a}$ (racine (carrée) de a).

exemples: Les premières valeurs sont à connaître !

- $1^2 = 1$ donc $\sqrt{1} = 1$
- $2^2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$
- $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
- $4^2 = 16$ donc $\sqrt{16} = 4$
- $5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 5$
- $6^2 = 36$ donc $\sqrt{36} = 6$
- $7^2 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$
- $8^2 = 64$ donc $\sqrt{64} = 8$
- $9^2 = 81$ donc $\sqrt{81} = 9$
- $10^2 = 100$ donc $\sqrt{100} = 10$
- $11^2 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$
- $12^2 = 144$ donc $\sqrt{144} = 12$

et $13^2 = 169$ donc $\sqrt{169} = 13$

Remarque: si un nombre entier n'est pas le carré d'un entier, sa racine a une infinité de chiffres après la virgule, et ne peut même pas s'écrire comme une fraction :

$$\sqrt{2} = 1,41421356237 3...$$

## IV) Écriture scientifique, grands multiples et petits sous-multiples

### 1) Puissances de 10

Propriété

Si $n$ est un entier positif ou nul, $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$.

Si $n=-p$ est un entier négatif, $10^n = 10^{-p} = \underbrace{0,0\ldots0}_{p \text{ zéros}}1$.

⚠ Dans le second cas, on compte le 0 précédant la virgule !

$10^{-1} = 0,1$

$10^{-2} = 0,01$

etc.

### 2) Écriture scientifique

Propriété

Un nombre décimal non nul s'écrit d'une unique façon comme le produit :

1) d'un signe + ou − (que l'on peut oublier si c'est un +),
2) d'un nombre décimal entre 1 et 10 (mais pas 10),
3) d'une puissance de 10.

exemples :
- $234 = 2,34 \times 10^2$
- $-17,3 = -1,73 \times 10^1$
- $0,071 = 7,1 \times 10^{-2}$
- $-70,001 = -7,0001 \times 10^1$

Remarques : • La puissance de 10 donne un ordre de grandeur du nombre. Par exemple, $234 = 2,34 \times 10^2$ est comprise entre $10^2 = 100$ et $10^3 = 1000$.

• on ne peut pas additionner facilement deux nombres dont l'ordre de grandeur est différent, mais le résultat sera proche du plus grand :

$234 + (-17,3) = 2,34 \times 10^2 - 1,73 \times 10^1 \approx 2,34 \times 10^2$ car 17,3 est petit devant 234.

- En revanche, l'écriture scientifique se prête bien à la multiplication et à la division : $1{,}34 \times 10^1 \times 2{,}71 \times 10^2 = (1{,}34 \times 2{,}71) \times 10^{1+2}$
$= (1{,}34 \times 2{,}71) \times 10^3$

Attention cependant, le premier produit peut donner un résultat supérieur à 10 et modifier l'ordre de grandeur de 1.

exemple : $(5 \times 10^2) \times (3 \times 10^4) = (5 \times 3) \times 10^{2+4}$
$= 15 \times 10^6$
$= 1{,}5 \times 10^7$.

## 3) Unités avancées

Aux préfixes déjà vus, il faut ajouter :

- giga : $10^9$, G
- méga : $10^6$, M
- micro : $10^{-6}$, $\mu$ (c'est un mu, c'est le m minuscule grec)
- nano : $10^{-9}$, n

d'où par exemple : Gm = un milliard de mètres
Gt = un milliard de tonnes = mille milliards de kg.
$\mu$m = un millionnième de mètre
etc.

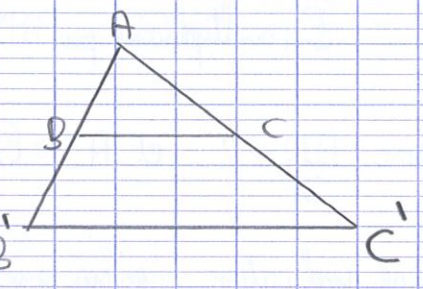
Exception : on mesure les quantités de données en informatique avec les octets (o), kilooctets (ko), mégaoctets (Mo) et gigaoctets (Go).

Pour ces unités seulement, 1 ko = 1024 octets ($2^{10}$ o)
1 Mo = 1024 ko = $2^{20}$ octets
1 Go = 1024 Mo = $2^{30}$ octets

Remarque : $2^{10} \approx 10^3$ (2,4% d'erreur)

# Chapitre : Théorème de Thalès

L'objectif de ce chapitre est de faire le lien, dans une figure comme celle-ci entre le parallélisme des côtés horizontaux et l'égalité de certains rapports de longueurs.




Le I donne l'égalité des rapports $\frac{AB}{AB'}$, $\frac{AC}{AC'}$ et $\frac{BC}{B'C'}$ quand on sait que $(BC)//(B'C')$.

Le II donne le résultat réciproque et montre que $(BC)//(B'C')$ quand les rapports sont égaux.

## I) Enoncé direct

Théorème de Thalès

Si A, B, C, B' et C' sont tels que :
- A, B, et C sont alignés
- A, B' et C' sont alignés
- $(BC)//(B'C')$

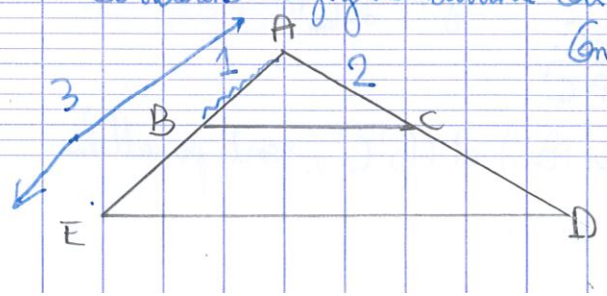
Alors $\boxed{\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}}$

Autrement dit, les longueurs de ABC sont proportionnelles à celles de AB'C' suivant le tableau

| | | |
|---|---|---|
| AB | AC | BC |
| AB' | AC' | B'C' |

exemple d'utilisation.

Considérons la figure suivante où $(BC)//(DE)$ : déterminer AD.




On sait que : A, B et E sont alignés,
- A, C et D sont alignés,
- $(BC)//(DE)$.

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$.

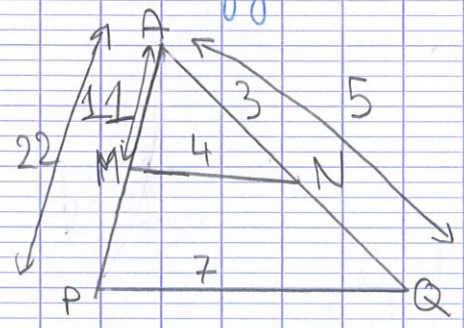
Donc $\frac{2}{AD} = \frac{1}{3}$.

En multipliant par AD les deux termes : $\frac{2}{AD} \times AD = \frac{1}{3} \times AD$.

Donc $\frac{AD}{3} = 2$ et $AD = 6$.

deuxième application : montrer que les droites ne sont pas parallèles.

On considère la figure suivante. Montrer que (MN) et (PQ) ne sont pas parallèles.




réponse : Les points A, M, P sont alignés, et les points A, N et Q sont alignés.

Cependant $\frac{AM}{AP} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AN}{AQ} = \frac{3}{5}$ ne sont pas égaux, donc les droites (MN) et (PQ) ne sont pas parallèles.

Remarques : • $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$ car $1 \times 5 \neq 2 \times 3$.

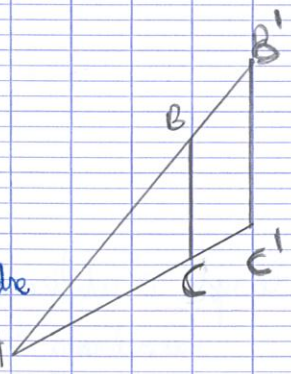
• On a raisonné par contraposition : si les droites étaient parallèles, on aurait $\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}$. Or, les rapports sont différents. Donc les droites ne sont pas parallèles.

## II) Réciproque

Théorème : Réciproque du théorème de Thalès.

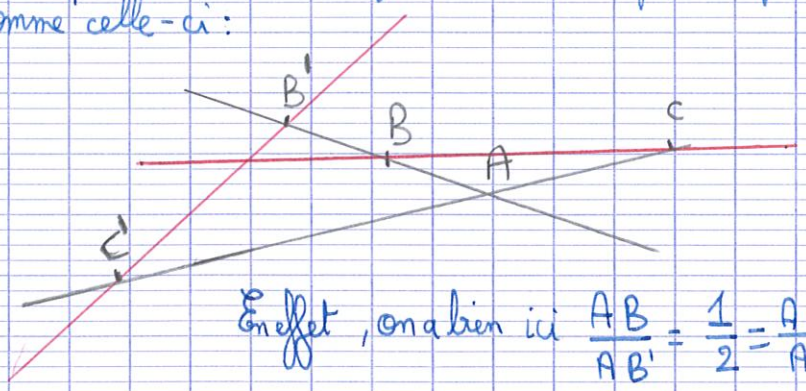
Considérons la figure ci-contre où :

- A, B et B' sont alignés dans cet ordre
- A, C et C' sont alignés dans cet ordre
- $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$




Alors les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.

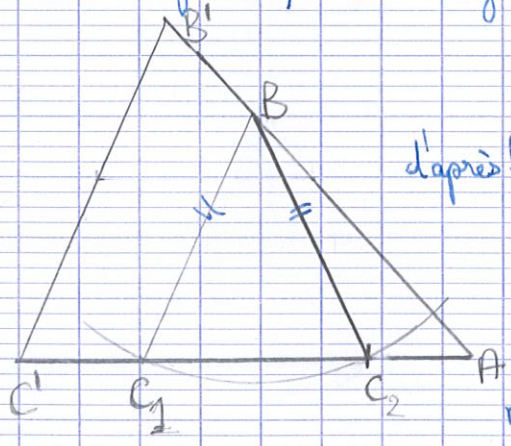
Remarques : • L'ordre d'alignement est ici important, pour éviter une figure comme celle-ci :




En effet, on a bien ici $\frac{AB}{AB'} = \frac{1}{2} = \frac{AC}{AC'}$ mais les deux droites (BC) et (B'C') (en rouge) ne sont pas parallèles.

• On ne considère pas ici le rapport $\frac{BC}{B'C'}$ dans les hypothèses. Les deux autres suffisent à démontrer le parallélisme, ce qui entraîne ensuite que $\frac{BC}{B'C'}$ leur est aussi égal.

En revanche, si on supposait seulement $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$, on ne pourrait pas conclure que les droites sont parallèles, à cause de figures comme la suivante.

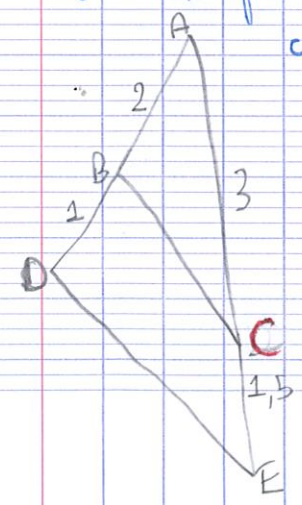



En effet, comme $(BC_1) // (B'C')$, on a d'après le théorème $\frac{BC_1}{B'C'} = \frac{AB}{AB'}$

Comme $BC_1 = BC_2$, on a donc aussi $\frac{BC_2}{B'C'} = \frac{AB}{AB'}$

mais $(BC_2)$ n'est pas parallèle à $(B'C')$ !

exercice type : À partir de la figure à main levée suivante montrer que (BC) et (DE) sont parallèles.




corrigé : Les points A, B et D sont alignés dans cet ordre, les points A, C et E sont alignés dans cet ordre, et on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AE} = \frac{3}{3+1,5} = \frac{3}{4,5} = \frac{2 \times 1,5}{3 \times 1,5} = \frac{2}{3}$$

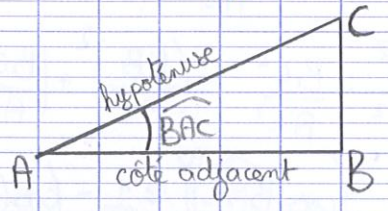
d'où $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, on a donc $(BC) // (DE)$.

# Chapitre. Trigonométrie : cosinus

## I) Définition

**Théorème** Dans un triangle ABC rectangle en B, le rapport de longueurs $\frac{AB}{AC}$ ne dépend que de l'angle $\widehat{BAC}$.

**Définition** Ce rapport est appelé <u>cosinus</u> de l'angle $\widehat{BAC}$, et noté $\cos(\widehat{BAC})$.

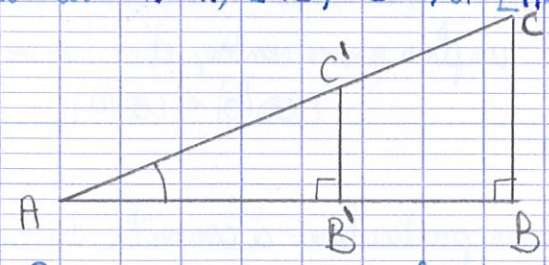



$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

<u>démonstration du théorème.</u>

On veut montrer que si ABC et A'B'C' sont deux triangles rectangles (en B ou B') avec $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, alors $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Quitte à déplacer les triangles on peut superposer ceux-ci sur leur angle en A pour avoir A' = A, [AB) = [A'B') et [AC) = [A'C') comme suit :




Comme (B'C') et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB), elles sont parallèles entre elles.

On a donc : · A, B et C alignés ;
· A, B' et C' alignés ;
· (B'C') // (BC).

D'après le théorème de Thalès, on a donc $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

On tire de la première égalité, en multipliant par les dénominateurs :
$AB' \times AC = AB \times AC'$.

Puis en divisant par $AC \times AC'$ : $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$. (Comme A' = A, c'est le résultat voulu)

## II) Propriétés

**Théorème**

1) Le cosinus est plus petit que 1.
2) Si on reprend les notations du I, $(\cos(\widehat{BAC}))^2 + (\cos(\widehat{BCA}))^2 = 1$.
3) Plus l'angle est grand, plus son cosinus est petit.

**démonstration :** 1) et 2) On a d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

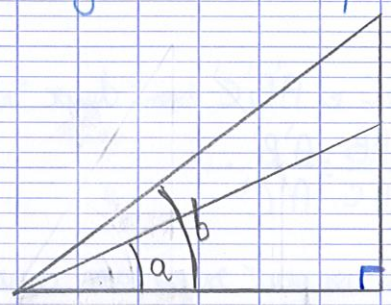
En divisant par $AC^2$, il vient : $\frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1$

Donc $1 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$, ce qui est la propriété 2.

Cette égalité entraîne que $(\cos(\widehat{BAC}))^2 = 1 - (\cos(\widehat{BCA}))^2 < 1$.

Donc $\cos(\widehat{BAC}) < 1$.

3)




Sur la figure ci-contre, les angles a et b ont le même côté adjacent, mais l'hypoténuse du grand triangle est plus longue (*)

Quand on calcule le cosinus de b, on divise donc par un plus grand nombre, et on trouve un nombre plus petit :

$\cos(b) < \cos(a)$.

(*) on peut le justifier par le théorème de Pythagore.

**Valeurs particulières**

Il y a cinq valeurs particulières à connaître du cosinus :

| angle (en °) | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| cosinus | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

La première et la dernière valeur disent simplement que quand l'angle est presque fermé, le côté adjacent devient l'hypoténuse. On va surtout justifier les trois autres.