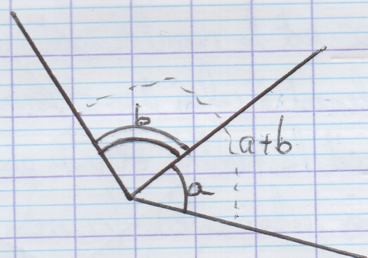
Chapitre 6: Angles

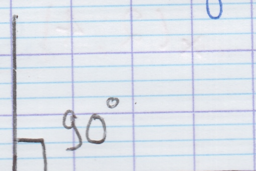
I. Axiomes

1. Mesure d'un angle

Axiome 1 La mesure de la réunion de deux angles adjacents est la somme de leurs mesures.



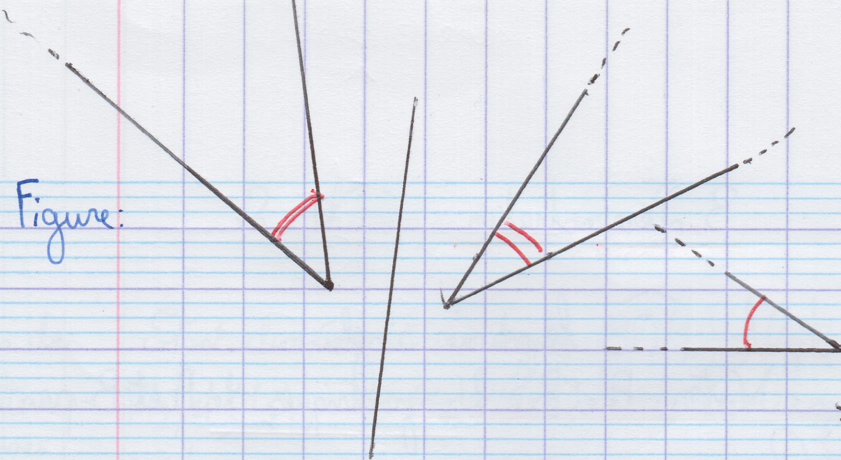
Axiome 2 : La mesure d'un angle droit est de 90°. (Un quart de tour

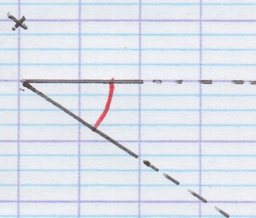


2. Symétries

Axiome 3 Deux angles symétriques (par rapport à une droite ou à un point sont de même mesure).

Figure:



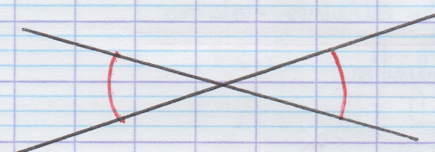


II. Angles opposés par le sommet

1. Définition

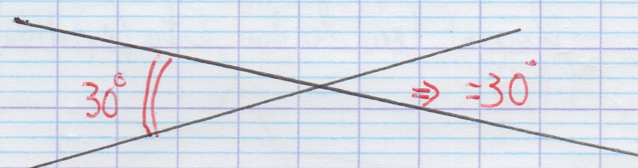
Deux angles sont opposés par le sommet lorsqu'ils sont situés à l'intersection de deux droites et ne sont pas adjacents.

Figure:



2. Théorème

Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.



3. Démonstration

Appelons $\widehat{AOB}$ le premier angle.

Notons A' et B' les symétriques de A et B par rapport à O.

Par définition de la symétrie centrale $A' \in (AO)$ mais $A' \notin [$
donc A' appartient à un côté du second angle.

De même, B' appartient à l'autre côté de ce second angle
Donc ce second angle est $\widehat{A'OB'}$, symétrique de $\widehat{AOB}$.

Il est donc (axiome 3) de même mesure.

III. Angles alternes-internes

1. Définition

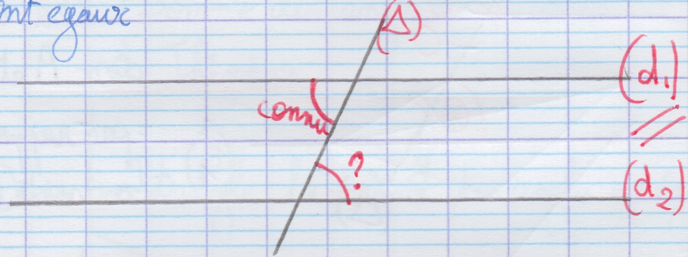
Étant données trois droites (d_1), (d_2) et (Δ) telles que (Δ) coupe (d_1) et (d_2)
on dit que deux angles formés par ces droites sont alternes-internes si :

- ils n'ont pas le même sommet
- ils sont de part et d'autre de (Δ)
- ils sont tous les deux entre (d_1) et (d_2)

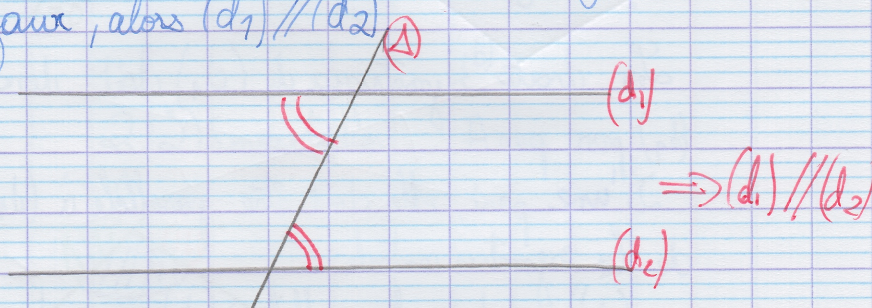
3. Théorème

Théorème des angles alternes-internes

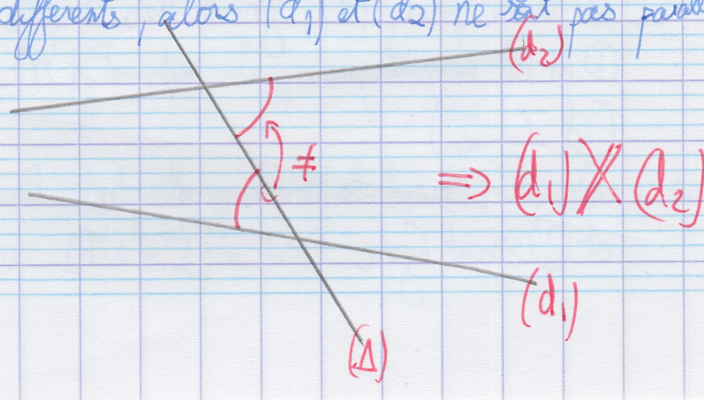
Étant données trois droites (d_1), (d_2) et (Δ) telles que (Δ) coupe (d_1) et (d_2), si $(d_1) // (d_2)$, alors deux angles alternes-internes sont égaux



Réciproque : Sous les mêmes conditions, si deux angles alternes-internes sont égaux, alors $(d_1) // (d_2)$

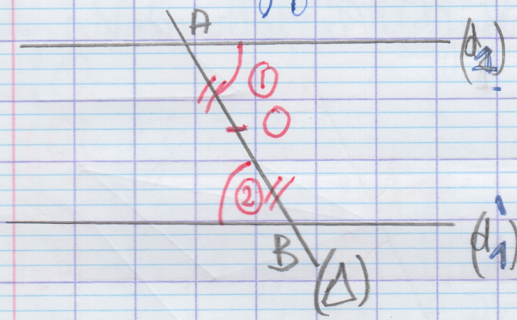


Contraposée : Sous les mêmes conditions, si deux angles alternes-internes sont différents, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.



3. Démonstration

Considérons la figure suivante :



O est le milieu de [AB] donc A et B sont symétriques par rapport à O.
La droite (AB) est donc sa propre symétrique par rapport à O.

La droite (d_1') symétrique de (d_1) doit donc passer par B, car (d_1) passe par A.
D'une part, elle doit être parallèle à (d_1) d'après les propriétés de la symétrie centrale.
(d_1') est donc la parallèle à (d_1) passant par B.

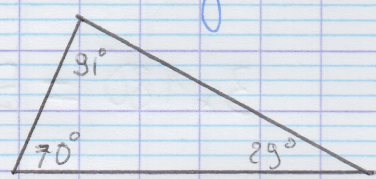
D'autre part, (d_1') forme des angles alternes-internes 1 et 2 symétriques par rapport à O, donc de même mesure (cf I.2.).
Donc (d_1') est la droite passant par B telle que les angles 1 et 2 soient égaux.

On a bien montré que la parallèle à (d,) passant par B et la droite passant par B avec des angles alternes-internes égaux sont la même droite. cela entraine le théorème du III.2.

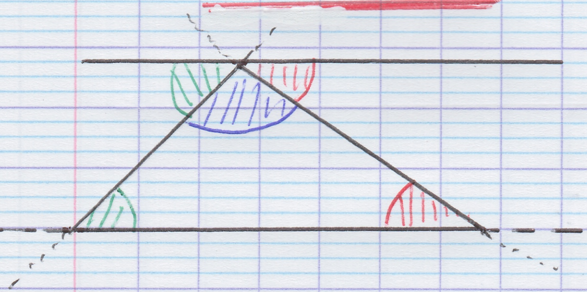
IV Somme des angles d'un triangle

1. Théorème

Dans un triangle la somme des angles est égale à un angle plat, c'est-à-dire à $180°$.



2. Démonstration



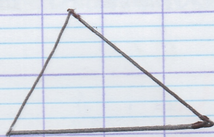
3. Cas des polygones

Théorème Dans un polygone à N sommets, la somme des angles est égale à $(N-2) \times 180°$.

démonstration :

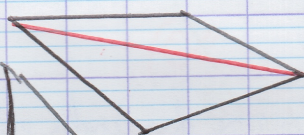
On peut découper le polygone à N côtés en N-2 triangles

N=3



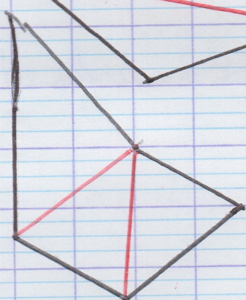
$180°$

N=4



$2 \times 180° = 360°$

N=5



$3 \times 180° = 540°$.

etc.