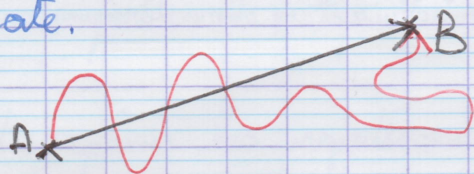
Chapitre 4 Géométrie du triangle

II. Inégalité triangulaire

1. Axiome

Le plus court chemin entre deux points est le segment de droite.

Figure :

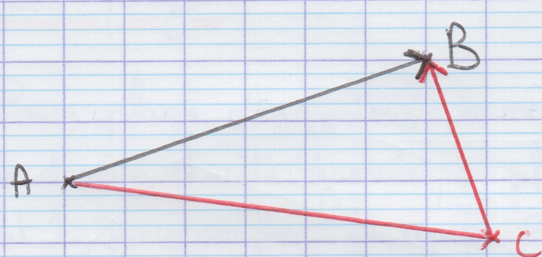


Corollaire : Etant donnés trois points A, B et C, on a

$$AB \leq AC + CB$$

↳ inférieur ou égal

Figure :



2) Triangles constructibles

Théorème : Étant données trois longueurs a, b et c, les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe un triangle ABC avec $\begin{cases} BC = a \\ AC = b \\ AB = c \end{cases}$

(2) : Chaque longueur est inférieure à la somme des deux autres :

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

(3) La plus grande longueur est inférieure à la somme des deux autres.

__Remarque__ : Étant données deux longueurs a et b, pour pouvoir former un triangle, il faut que la troisième longueur soit comprise entre leur somme et leur différence.

__exemple__ : Si AB = 3 cm et BC = 5 cm, on a $5 - 3 = 2$ cm $< AC < 5 + 3 = 8$ cm

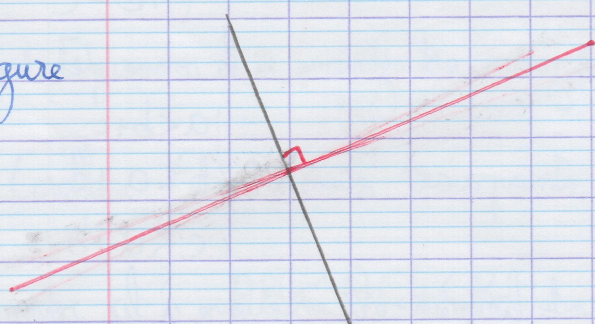
II) Droites du triangle

1. Médiatrices

Rappel : La médiatrice d'un segment est la droite passant par son milieu avec un angle droit.

Les points de la médiatrice sont exactement les points situés à égale distance des extrémités du segment.

Figure

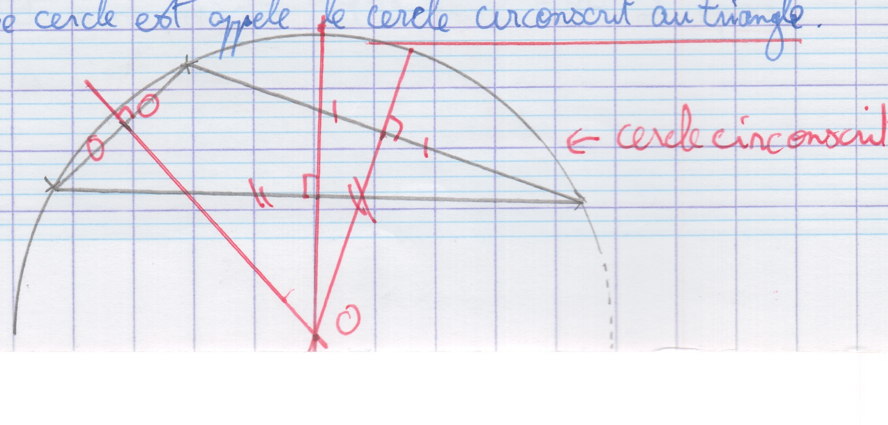


Théorème : Étant donné un triangle non plat ABC, les médiatrices des trois côtés sont concourantes.

Leur point de concours est le centre du seul cercle passant par tous les sommets du triangle.

Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle.

Figure :



démonstration :

Comme A, B et C sont non alignés, les médiatrices ne sont pas parallèles.

Notons O le point d'intersection des médiatrices de [AB] et de [BC].

Comme O est sur la médiatrice de [AB], OA = OB.

Comme O est sur la médiatrice de [BC], OB = OC.

Donc OA = OC. Le point O est situé à la même distance de A et C, il est donc sur la médiatrice de [AC].

On a montré que les trois médiatrices passent par O : elles sont donc concourantes.

On a aussi montré que OA = OB = OC, donc le cercle de centre O et de rayon OA passe par A, B et C.

Corollaire

Trois points sont soit alignés soit cocycliques (par trois points, il passe soit une droite soit un cercle).

Remarques :

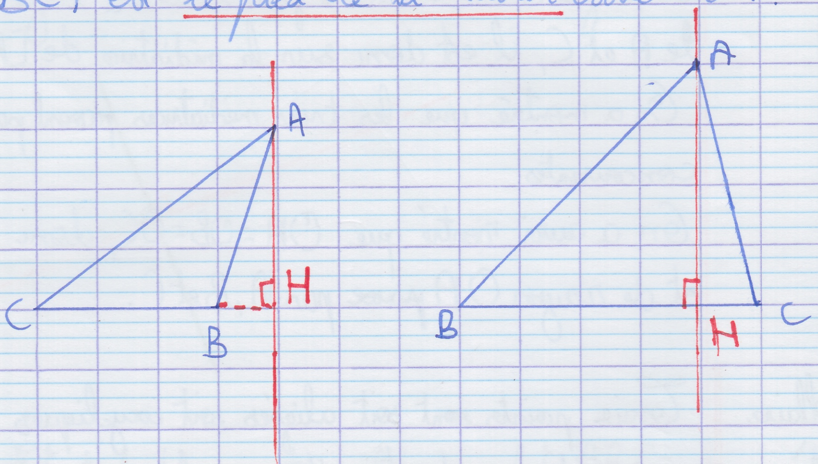
- On peut donc trouver le centre d'un cercle en traçant les médiatrices de deux cordes.
- Tout triangle non plat est donc inscriptible dans un cercle ; cela n'est en général pas vrai d'un polygone à quatre côtés ou plus.

2. Hauteurs

Définition Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé (BC).

Le point d'intersection entre la hauteur et la droite (BC) est le pied de la hauteur issue de A.

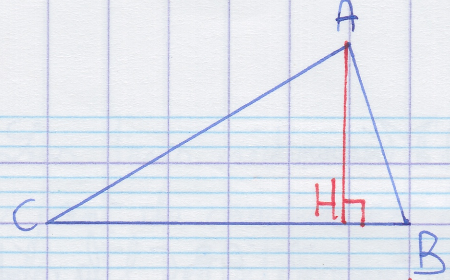
Figure :



Remarque : Le pied de la hauteur n'est pas nécessairement sur le côté, mais sur la droite le prolongeant.

Théorème La surface d'un triangle est la moitié du produit entre la longueur d'un côté et la distance entre ce côté et le sommet opposé

Figure:



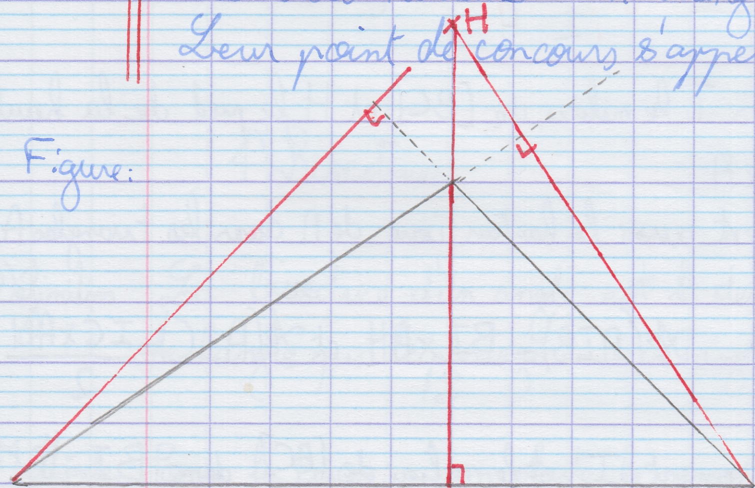
$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{AH \times BC}{2}}$$

Corollaire Si H, K et L sont les pieds des hauteurs issues de A, B et C, on a :

$$\boxed{AH \times BC = BK \times AC = CL \times AB.}$$

Théorème || Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours s'appelle <u>l'orthocentre</u> du triangle.

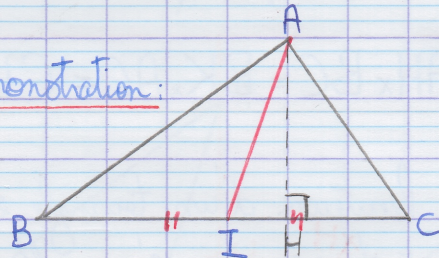
Figure:



3) Médianes

Définition Dans un triangle ABC, la médiane issue de A est la droite passant par A et le milieu du côté opposé [BC].

Propriété Les deux triangles formés par la médiane ont la même aire.



démonstration :

Notons I le milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A.

(AH) est aussi la hauteur issue de A dans les triangles AIB et AIC.

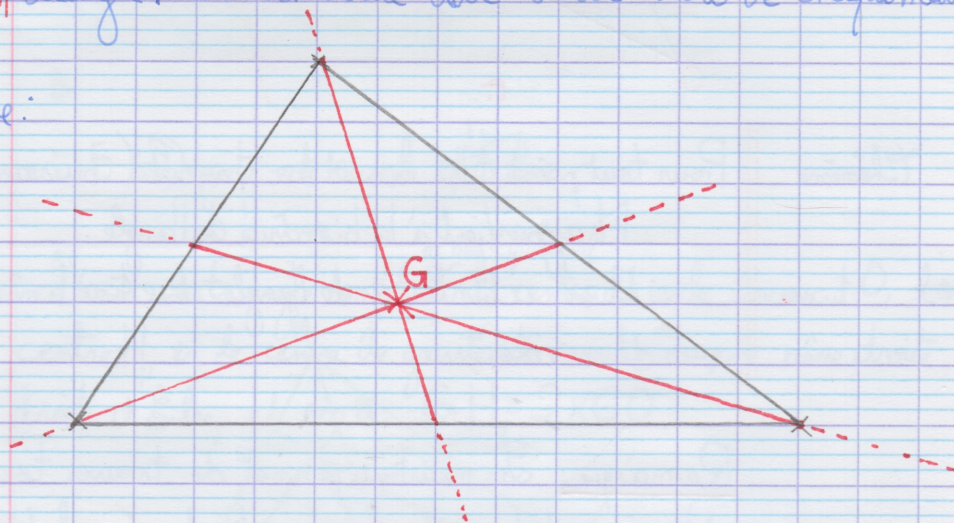
Donc $\mathcal{A}(AIB) = \dfrac{BI \times AH}{2}$ et $\mathcal{A}(AIC) = \dfrac{IC \times AH}{2}$.

D'autre part, I est le milieu de [BC], donc $BI = IC$.

En multipliant cette égalité par $\dfrac{AH}{2}$, on trouve bien $\mathcal{A}(AIB) = \mathcal{A}(AIC)$.

Théorème Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre de gravité du triangle. Il est situé aux deux tiers de chaque médiane.

Figure :



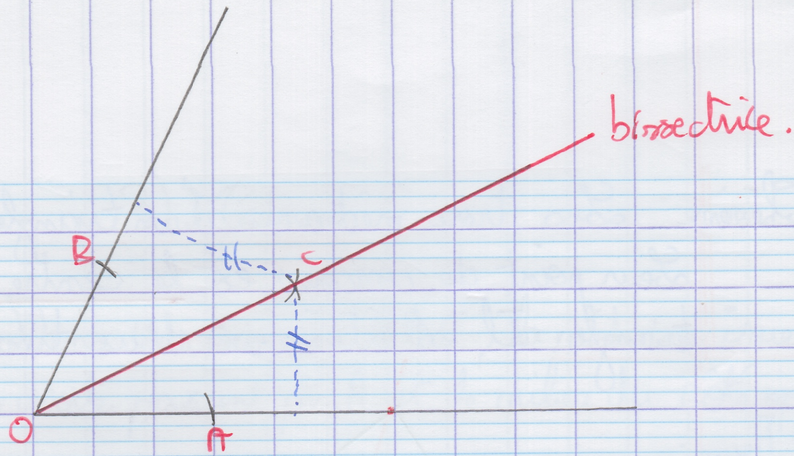
4) Bissectrices

Définition La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui le partage en deux angles de même mesure.

Méthode : Pour la tracer : • on plante le compas au sommet avec une ouverture fixée pour trouver deux points A et B sur chaque coté.

• depuis A puis depuis B on trace avec la même ouverture deux arcs, et on note leur intersection.

• On relie enfin le sommet de l'angle à ce dernier point pour tracer la bissectrice voulue.



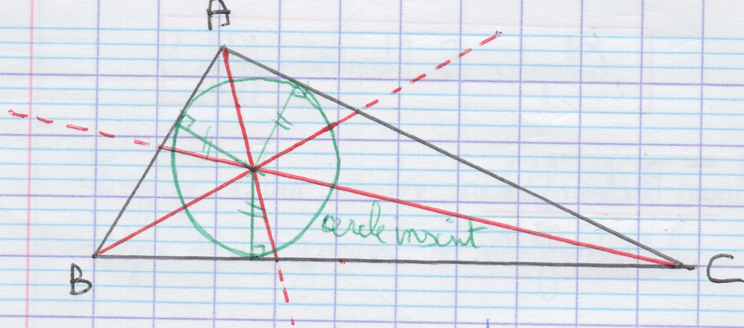
Théorème

Pour tout point M, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
- M appartient à la bissectrice de l'angle.
- M est à l'intérieur de l'angle et est à la même distance de ses deux côtés.

Remarque: La médiatrice permet de trouver tous les points situés à la même distance de deux points donnés; la bissectrice fournit tous les points situés à la même distance de deux droites données.

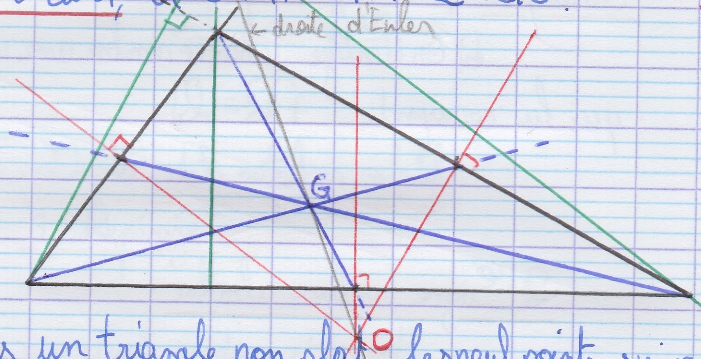
Théorème.

Dans un triangle non plat, les bissectrices des trois angles sont concourantes. Leur point de concours est le centre du seul cercle touchant chaque côté une et une seule fois (on parle de cercle inscrit).



5) Droite et cercle d'Euler.

Théorème (droite d'Euler) Dans un triangle non plat et non équilatéral, le centre du cercle circonscrit O, l'orthocentre H, et le centre de gravité G sont sur une même droite, dite droite d'Euler, et on a : $GH = 2 \times GO$.



Théorème Dans un triangle non plat, les neuf points suivants sont sur un même cercle, dit cercle d'Euler, ou des neuf points :

- les milieux des trois côtés ;
- les pieds des trois hauteurs ;
- les milieux des trois segments joignant l'orthocentre à un sommet.