Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Un enfoque computacional de representaciones de grupos en homologías

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Manuel Campero Jurado

bajo la dirección de

Dr. Rafael Villarroel Flores

Pachuca, Hidalgo. Octubre de 2018.

Resumen

En esta tesis se hace blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah.

Abstract

In this thesis blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah blah.

Chapter 1

Representaciones de grupos

Sea $GL(n, \mathbb{C})$ el grupo de todas las matrices no singulares de grado n sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Sea G un grupo. Una representación (matricial) de G es, por definición, un homomorfismo de G en $GL(n, \mathbb{C})$: $\mathbb{A} \colon a \mapsto A(a)$, tal que:

1. $A(ab)(a)(b)$,

2. $A(1) = \mathrm{I}$ (la matriz identidad),

3. $A(a^{-1}) = A(a)^{-1}$.

El número n se llama el grado de la representación. Se dice que la representación es fiel, si $\mathbb{A}$ es biyectiva.

Ejemplo 1.1. El mapeo que a manda cada elemento de G a $1 \in \mathbb{C}$ es una representación de grado 1. Ésta es llamada la representación unitaria de G, y es denotada por 1_G.

Ejemplo 1.2. Dada una representación $a \mapsto A(a)$, el mapeo

$$a \to P^{-1} A(a) P$$

se convierte en una representación de G para cualquier matriz P no singular.

Sean $\mathbb{A} \colon a \mapsto A(a)$ y $\mathbb{B} \colon a \mapsto B(a)$ representaciones de G. Si exite una matriz no singular P tal que

$$B(a) = P^{-1} A(a) P$$

diremos que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son equivalentes. Representaciones equivalentes son denotadas por $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$. La relación $\sim$ define una clase de equivalencia de representaciones de G.

Ejemplo 1.3. Sea S_n el grupo simétrico de grado n. Para un elemento

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix} \in S_n$$

Sea $A(\sigma)$ la matriz cuyo i-ésimo renglón es $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ con 1 en el s_i-ésimo lugar:

$$A(\sigma) = (\alpha_{ij}(\sigma)) \qquad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

con

$$\alpha_{ij}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = s_i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

El mapeo $\sigma \mapsto A(\sigma)$ es una representación fiel de S_n.

Ejemplo 1.4. Sea G un grupo finito que consiste de los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ y sea S^G el grupo simétrico en G. El mapeo lleva cada elemento de $a \in G$ a la permutación

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 a & a_2 a & \cdots & a_n a \end{pmatrix} \in S_n^G$$

es un homomorfismo biyectivo de G a S^G. A la permutación anterior, se le asocia la matriz

$$A(a) = (\alpha_{ij}(a))$$

con

$$\alpha_{ij}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i a = a_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

como en el ejemplo 1.3. Entonces el mapeo $a \mapsto A(\sigma)$ convierte una representación fiel de G. Ésta representación es llamada represetación regular derecha de G. Sea $\Delta(a)$

$$\alpha_{ij}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$A(a) = \begin{pmatrix} \delta\left(a_1 a a_1^{-1}\right) & \delta\left(a_1 a a_2^{-1}\right) & \cdots & \delta\left(a_1 a a_n^{-1}\right) \\ \delta\left(a_2 a a_1^{-1}\right) & \delta\left(a_2 a a_2^{-1}\right) & \cdots & \delta\left(a_2 a a_n^{-1}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta\left(a_n a a_1^{-1}\right) & \delta\left(a_n a a_2^{-1}\right) & \cdots & \delta\left(a_n a a_n^{-1}\right) \end{pmatrix}$$

Si a $\neq 1$, cada entrada sobre la diagonal es cero.

La representación regular izquierda de G es definida similarmente usando el homomorfismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ aa_1 & aa_2 & \cdots & aa_n \end{pmatrix}$$

concretamente

$$A(a) = \begin{pmatrix} \delta\left(a_1^{-1}aa_1\right) & \delta\left(a_1^{-1}aa_2\right) & \cdots & \delta\left(a_1^{-1}aa_n\right) \\ \delta\left(a_2^{-1}aa_1\right) & \delta\left(a_2^{-1}aa_2\right) & \cdots & \delta\left(a_2^{-1}aa_n\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta\left(a_n^{-1}aa_1\right) & \delta\left(a_n^{-1}aa_2\right) & \cdots & \delta\left(a_n^{-1}aa_n\right) \end{pmatrix}$$

Sea $\phi\colon a \mapsto \phi(a)$ un homomorfismo de G en S_n (es decir, una permutación de de G). Expresando la permutación $\phi(a)$ por la matriz $A(a)$ como en el ejemplo 1.3, se obtiene una matriz representación $a \mapsto\rightarrow A(a)$.

Sea $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a)$ una representación de grado n. Se dice que $\mathbb{A}$ es reducible si existe una matriz no singular, tal que

$$P^{-1}A(a)\,P = \begin{pmatrix} B(a) & 0 \\ D(a) & C(a) \end{pmatrix}$$

donde $B(a)$, $C(a)$ son matrices cuadradas de grado r, s con $r \geq 1$, $s \geq 1$, $r + s = n$. Se observa que las representaciones

$$a \mapsto A'(a) = \begin{pmatrix} B(a) & 0 \\ D(a) & C(a) \end{pmatrix}$$

y

$$a \mapsto A''(a) = \begin{pmatrix} C(a) & D(a) \\ 0 & C(a) \end{pmatrix}$$

son equivalentes, porque $Q^{-1}A'(a)\,Q = A''(a)$, con

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I_R} \\ \mathrm{I_S} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{I_r}, \mathrm{I_s} \text{ son las matrices identidad de grado } \mathrm{r}, \mathrm{s}).$$

Se dice que $\mathbb{A}$ es irreducible si no es reducible. En el ejemplo 1.3, el mapeo $a \mapsto B(a)$ y $a \mapsto C(a)$ convierten representaciones de grado r, s, respectivamente.

Dada una representación de G, $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a)$, y $\mathbb{B}\colon a \mapsto B(a)$, con grado n, m, respectivamente, el mapeo.

$$Q = \begin{pmatrix} A(a) & 0 \\ 0 & B(a) \end{pmatrix}, \qquad \text{para todo } a \in G$$

convierte en una representación de G de grado $n + m$. Esta representación es llamada la suma directa de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, y es denotada por $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Una representación $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a)$ de G se dice completamente reducible si $\mathbb{A}$ es equivalente a la suma directa de algunas representaciones irreducibles, es decir, existe una matriz no singular P, tal que

$$P^{-1}A(a)\,P = \begin{pmatrix} \mathrm{F}_1(a) & & & & & 0 \\ & \mathrm{F}_2(a) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \mathrm{F_r}(a) \end{pmatrix}$$

donde cada $\mathbb{F}_\beth\colon a \mapsto F_i(a)$ $(i = 1, 2, ..., r)$ es una representación irreducible de G.

Representación por matrices unitarias, y representaciones de completamente reducibles de grupos finitos

Una representación $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a)$ de G se dice unitaria si $A(a)$ es una matriz unitaria para todo $a \in G$, lo cual significa que $\overline{A(a)}^t A(a) = \mathrm{I}$. Aquí $\overline{A(a)}^t$ denota la transpuesta de $\overline{A} = (\alpha_{ij})$, donde $A = (\alpha_{ij})$, y $\overline{(\alpha_{ij})}$ es el complejo conjugado de (α_{ij}). Se pretende mostrar que cada representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria y es completamente reducible.

Una matriz se dice hermitiana si $\overline{A^t} = A$, y positiva definida si $\overline{x}^t Ax > 0$ para todo vector columna x (distinto de cero).

Lema 2.1. Para cualquier matriz no singular A, $\overline{A(a)}^t A$ es una matriz hermitiana definida positiva. La suma de matrices hermitianas definidas positivas, también es hermitiana y definida positiva.

Lema 2.2. Para cualquier matriz hermitiana definida positiva A, existe una matriz triangular superior no singular C tal que $\overline{C}^t AC = \mathrm{I}$.

Lo anterior es cierto, ya que, sea

$$A(\alpha_{ij})\,\text{con}\ \ (i, j = 1, 2, ..., n)\,.$$

Entonces

$$\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \quad \text{con}\ \ (i, j = 1, 2, ..., n)\,,$$

y

$$(\alpha_{ii}) > 0 \quad \text{para}\ \ (i = 1, 2, ..., n)\,.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \overline{a}^t & \mathrm{B} \end{pmatrix}, \quad (\alpha = \alpha_{11} > 0, a = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1n})\,, \mathrm{B} = (\alpha_{ij}) \quad (i, j = 2, ..., n))$$

sea

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\overline{C_1}^t A C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha}\overline{a}^t a + \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

y $-\frac{1}{\alpha}\overline{a}^t a + \mathrm{B}$ es una matriz hermitiana definida positiva. Y la prueba se sigue usando inducción el grado de A veces.

Teorema 2.3. Sea G un grupo finito. Para una representación $\mathbb{B} : a \to F\,(a)$ de G, entonces exite una matriz triangular superior no singular C, tal que $C_{-1}F\,(a)\,C$ es una matriz unitaria para todo $a \in G$.

Sea

$$A = \sum_{b \in G} \overline{F\,(b)}^t F\,(b)$$

Entonces A es una matriz hermitiana definida positiva por el Lemma 2.1. Entonces existe una matriz triangular no singular C, tal que

$$\overline{C}^t A C = \mathrm{I}$$

$$A = (\overline{C}^t) C^{-1}$$

Entonces

$$\overline{F\,(a)}^t A F\,(a) = \sum_{b \in G} \overline{F\,(ba)}^t F\,(ba) = A$$

, y se obtiene

$$\overline{F\,(a)}^t (\overline{C}^t)^{-1} C^{-1} F\,(a) = (\overline{C}^t)^{-1} C^{-1}$$

, es decir

$$\overline{(C_{-1}F(a)C)}^t (C_{-1}F(a)^t C) = \mathrm{I}$$

y $C_{-1}F(a)^t C$ es una matriz unitaria.

Teorema 2.4. Una representación de un grupo finito es completamente reducible.

Sea $\mathbb{A} : a \to A\,(a)$ una representación de un grupo finito de G y sea $A(a)$ descompuesta como

$$A(a) = \begin{pmatrix} A_1(a) & * \\ 0 & A_2(a) \end{pmatrix}$$

Por el teorema anterior, existe una matriz triangular no superior C tal que $C^{-1}A(a)C$ es una matriz unitaria. Sea $U(a) = C^{-1}A(a)C$. Como C es una matriz triangular superior, $U(a)$ se descompone como

$$U(a) = \begin{pmatrix} U_1(a) & V(a) \\ 0 & U_2(a) \end{pmatrix}$$

Como $\overline{U(a)}^t = U(a)^{-1} = U(a^{-1})$, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \overline{U_1(a)} & 0 \\ \overline{V(a)}^t & \overline{U_2(a)}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(a^{-1}) & V(a^{-1}) \\ 0 & U_2(a^{-1}) \end{pmatrix}$$

Lema 3.1. (Lema de Schur) Sea $\mathbb{A}\colon a \mapsto A\,(a)$ y $\mathbb{B}\colon a \mapsto B\,(a)$ representaciones irreducibles de un grupo G con grados m y n respectivamente. Sea P una matriz de mxn con la propierdad de que $A(a)P = PB(a)$, para todo $a \in G$. entonces

- $P = 0$
- $m = n$ y P es no singular.

Asumimos $P \neq 0$. Y se quiere mostrar la segunda condición. Supongamos que $m \neq n$, o $m = n$ y P es singular. Entonces existe $Q \in GL(m, \mathbb{C})$ y $\mathrm{R} \in GL(n, \mathbb{C})$, tal que

$$QPR = \begin{pmatrix} \mathrm{I_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{I_r},\ \text{es la matriz identidad de grado r}).$$

con r <max$\{m, n\}$. Como $QA(a)Q^{-1}(QPR) = QPR(R^{-1}B(a)R)$, y se obtiene

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$QA(a)A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{A}_{11},\ \text{es una matriz cuadrada de grado r}).$$

y

$$R^{-1}B(a)R = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} (\mathrm{B}_{11},\ \text{es una matriz cuadrada de grado r}).$$

Por lo tanto $A_{21} = 0$ si $r < m$ y B_{12} si $r < n$. De cualquier manera $\mathbb{A}$ o $\mathbb{B}$ es reducible, lo cual es una contradicción.

Teorema 3.2. Sea $\mathbb{A}\colon a \mapsto A\,(a)$ una representación irreducible de un grupo G. Sea P una matriz con la propiedad $A(a)P = PA(a)$ para todo $a \in G$. Entonces $P = \lambda \mathrm{I}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea λ un eigenvalor de P. Entonces $\det(\lambda\mathbb{I} - P) = 0$, y además

$$A(a)(\lambda\mathbb{I} - P) = (\lambda\mathbb{I} - P)A(a) \qquad \text{(para todo a} \in \text{G.)}$$

Entonces por el Lema de Schur,

$$\lambda\mathrm{I} - P = 0$$

Teorema 3.2. Sea G un grupo abeliano. Entonces cada representación irreducible de G es de grado 1.

Sea $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a)$ una representación irreducible de G. Como $A(a)$ conmuta con $A(b)$, el teorema pasado nos dice que $A(a) = \lambda(a)\mathrm{I}$ para algún $\lambda(a) \in \mathbb{C}$. Entonces $\mathbb{A}$ es irreducible, y el grado de $\mathbb{A}$ debe ser 1.

(Relación ortogonal de carácteres). Desde aquí en adelante, se asumirá que estamos trabajando con grupos finitos.

Carácteres Para una matriz cuadrada $A = \alpha_{ij}$ de grado n, tr A denota la traza de A, es decir

$$\text{tr A} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots \alpha_{nn}$$

Cálculos directos muestran que **Lema 4.1.**

- tr AB = tr BA
- tr $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ = tr A para alguna matriz no singular P.

Para una representación $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a)$ de un grupo G, sea tr A(a) $=$ $\chi(a)$. Entonces $\chi(a)$ es una función que toma valores en $\mathbb{C}$ y es llamada el carácter de $\mathbb{A}$. Obviamente, $\chi(1)$ es igual al grado de $\mathbb{A}$. Carácteres de representaciones irreducibles son llamados carácteres irreducibles. Y por el lema 4.1(2), se tiene lo siguiente:

LEMA 4.2. Representaciones equivalentes de un grupo tienen el mismo carácter.

Como $A(x^{-1}ax) = A(x)^{-1}A(a)A(x)$, se sigue que

$$\chi(x^{-1}ax) = \chi(a)$$

Así χ toma el mismo valor en una clase de conjugación de G. Tal función es llamada función de clase.

La primera relación ortogonal de carácteres. Sea G un grupo de orden g. Sean $\mathbb{A}\colon a \mapsto A(a) = (\alpha_{ij}(a))$, y $\mathbb{B}\colon a \mapsto B(a) = (\alpha_{ij}(a))$ representaciones irreducibles de G con grado m, n, respectivamente. Para una matriz arbitraria $U = (\gamma_{ij})$, de mxn, se tiene

$$V = \sum_{x \in G} A(x) U B(x^{-1}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} A(a)V &= \sum_{x \in G} A(ax) U B(x^{-1}) \\ &= \sum_{y \in G} A(y) U B(y^{-1}a) \qquad (y = ax) \\ &= \sum_{y \in G} A(y) U B(y^{-1}) B(a). \end{aligned}$$

Como y varia sobre G conforme x lo hace, se tiene

$$A(a)V = VB(a).$$

Asuminos que A y B no son equivalentes. Entonces $V = 0$ por el Lema de Schur. La (ij) entrada de V es

$$\sum_{x \in G} \sum_{u,v} \alpha_{iu}(x) \gamma_{uv} \beta_{vj}(x^{-1}) = 0.$$

En particular, para algún par de u,v sea $\gamma_{uv} = 1$ y para cualquier otro caso $\gamma_{\rho\sigma} = 0$. Lo cual conduce a

$$\sum_{x \in G} \alpha_{iu}(x) \beta_{vj}(x^{-1}) = 0.$$

Ahora, asumimos que $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. Entonces para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, $V = \lambda\mathrm{I}$, y por el Teorema 3.2. La (i, j) entrada de V es

$$\sum_{x \in G} \sum_{u,v} \alpha_{iu}(x) \gamma_{uv} \beta_{vj}(x^{-1}) = \delta_{ij} \lambda,$$

donde $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Tomando la traza de

$$\sum_{x \in G} A(x) U A(x^{-1}) = \lambda\mathrm{I}$$

y se obtiene

$$g(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{nn})$$

donde n es el grado de $\mathbb{A}$,y g es la cardinalidad de G, de lo cual se sigue
$\lambda = \frac{g}{n}(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{nn})$.

Ahora, para algún par de u,v sea $\gamma_{uv} = 1$ y para cualquier otro caso $\gamma_{\rho\sigma} = 0$. Entonces

$$\sum_{x \in G} \alpha_{iu}(x)\beta_{vj}(x^{-1}) = \delta_{ij}\delta_{uv}\frac{g}{n}.$$

Lo cual nos conduce al siguiente teorema

Teorema 4.3. Sea G un grupo de orden g.

- Sea $\mathbb{A} : a \to A(a) = (\alpha_{ij}(a))$ una representación irreducible de G con grado n. Entonces

$$\sum_{x \in G} \alpha_{iu}(x)\alpha_{vj}(x^{-1}) = \delta_{ij}\delta_{uv}\frac{g}{n}.$$

- Sea $\mathbb{B} : b \to B(a) = (\beta_{ij}(a))$ una representación irreducible, la cual no es esquivalente a $\mathbb{A}$, entonces

$$\sum_{x \in G} \alpha_{iu}(x)\beta_{vj}(x^{-1}) = 0.$$

Sean χ, $\chi^{'}$ los carácteres de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$. Por el teorema anterior, poniendo a $u = i$, $v = j$ y tomando la suma sobre i,j, se obtiene lo siguiente:

Teorema 4.4. (La primer relación de ortogonalidad de carácteres) Sea G un grupo de orden g.

- Sea χ un caráter irreducible de G, entonces

$$\sum_{x \in G} \chi(x)\chi(x^{-1}) = g.$$

- Sea χ, $\chi^{'}$ carácteres de representaciones irreducibles no equivalentes de G, entonces

$$\sum_{x \in G} \chi(x)\chi^{'}(x^{-1}) = 0.$$

Se observa que $\chi(a^{-1}) = \overline{\chi(a)}$ para todo $a \in G$, porque el Teorema 2.3 dice que $\mathbb{A}$ es equivalente a una representación unitaria $\mathbb{U}$: $a \mapsto U(a)$, y se por lo tanto

$$\chi(a^{-1}) = trU(a^{-1}) = trU(a)^{-1} = tr\overline{U(a)}^{t} = \overline{\chi(a)}$$

Sean $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$,... representantes de las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de un grupo G y sea χ_1, χ_2,... los carácteres de $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$,... . Sea C_1, C_2,...,C_k las clases de conjuación de G con $|C_\alpha| = h_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, ..., k)$ y sea a_1, a_2,...,a_k los representantes de las clases de conjugación. Como los carácteres son funciones de clases, el Teorema 4.4 se reescribe como sigue

Theorema 4.4'.

$$\sum_{\alpha=1}^{k} h_\alpha \chi_i(a_\alpha)\overline{\chi_j(a_\alpha)} = \delta_{ij} g.$$

Para funciones φ, ψ que toman valores en $\mathbb{C}$ en un grupo G de orden g, se define el producto interno $(\varphi,\psi)_G$ de la siguiente manera

$$(\varphi,\psi)_G = \frac{1}{g}\sum_{x\in G}\varphi(x)\psi(x^{-1})$$

Cuando sea claro que se está hablando del grupo G, se escribirá (φ,ψ) en lugar de $(\varphi,\psi)_G$. Claramente el producto interno cumple las siguientes propiedades

$$(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi), (\varphi_1{+}\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi){+}(\varphi_2,\psi), (\varphi,\psi_1{+}\psi_2)=(\varphi,\psi_1){+}(\varphi,\psi_2), (\lambda\varphi,\psi)=(\psi,\lambda\varphi)=\lambda(\varphi$$

Con esta notación la primera relación de ortogonalidad de carácteres es expresada como sigue:

Teorema 4.4". Sean χ_1, χ_2,... los carácteres de carácteres de representaciones no equivalentes de un grupo G. Entonces

$$(\chi_i,\chi_j) = \delta_{ij}$$

Multiplicidad de representaciones irreducibles. Sea $\mathbb{A}$ una representación de un grupo G. Como $\mathbb{A}$ es completamente reducible, entonces por el Teorema 2.3, $\mathbb{A}$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{F}_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbb{F}_1 & & & & \\ & & & \mathbb{F}_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \mathbb{F}_2 & \\ 0 & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$,... son representaciones no equivalentes. El número m_i es llamado la multiplicidad de $\mathbb{F}_i$ en $\mathbb{A}$ ($m_i = 0$ si $\mathbb{F}_i$ no aparece) y se escribe

$$\mathbb{A} \sim m_1\mathbb{F}_1 + m_2\mathbb{F}_2 + \cdots$$

Sea χ el caráter de $\mathbb{A}$ y χ_i el carácter de $\mathbb{F}_i$ $(i = 1, 2, ...)$. Entonces

$$\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots$$

Si $m_i \neq 0$, $\mathbb{F}_i$ y χ_i son llamados componentes irreducibles de $\mathbb{A}$ y χ respectivamente.

Teorema 4.5. Sea G un grupo y sea χ el caráter de una representación de G. Sea m_i la multiplicidad de un carácter irreducible χ_i en χ. Entonces

$$m_i = (\chi, \chi_i) = \frac{1}{g} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi_i(x)}$$

Sea

$$\chi = \sum_j m_j \chi_j$$

la suma de carácteres irreducibles con m_j la multiplicidad de χ_j. Entonces

$$(\chi, \chi_i) = \sum_j m_j (\chi_j, \chi_i)$$

Bibliography