

# 1

Решить системы линейных уравнений методами обратной матрицы и Крамера. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

### Метод обратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right] = [I | A^{-1}], \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13+4-15 \\ 13+5-15 \\ -13-6+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

### Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) - 2(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + 3(1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) = -1.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 13(-1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) - 2(-1 \cdot 1 - 0 \cdot 5) + 3(-1 \cdot 2 - (-1) \cdot 5) = -2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1 \cdot 1 - 0 \cdot 5) - 13(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + 3(1 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1)) = -3.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 13 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1 \cdot 5 - (-1) \cdot 2) - 2(1 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1)) + 13(1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) = -1.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

## Проверка

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 13,$$

$$2 - 3 = -1, \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1).$$

$$-2 + 2 \cdot 3 + 1 = 5.$$

## 2

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 11 & 5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{ряд}_2 \leftarrow \text{ряд}_2 - 3\text{ряд}_1 \\ \text{ряд}_3 \leftarrow \text{ряд}_3 - 5\text{ряд}_1 \\ \text{ряд}_4 \leftarrow \text{ряд}_4 - 7\text{ряд}_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -14 & -2 & 10 \\ 0 & -14 & -24 & -2 & 10 \\ 0 & -14 & -24 & -2 & 10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{ряд}_2 \leftrightarrow \text{ряд}_3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & -24 & -2 & 10 \\ 0 & -4 & -14 & -2 & 10 \\ 0 & -14 & -24 & -2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{ряд}_3 \leftarrow 7\text{ряд}_3 - 2\text{ряд}_2 \\ \text{ряд}_4 \leftarrow \text{ряд}_4 - \text{ряд}_2}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & -24 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -50 & -10 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{ряд}_3 \leftarrow -\frac{1}{50}\text{ряд}_3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & -24 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{ряд}_1 \leftarrow \text{ряд}_1 - 5\text{ряд}_3 \\ \text{ряд}_2 \leftarrow \text{ряд}_2 + 24\text{ряд}_3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -14 & 0 & \frac{14}{5} & -14 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{ряд}_2 \leftarrow -\frac{1}{14}\text{ряд}_2}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{ряд}_1 \leftarrow \text{ряд}_1 - 3\text{ряд}_2}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_3 + \frac{1}{5}x_4 = -1. \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_4 = t \in \mathbb{R}, x_1 = 1 - \frac{3}{5}t, x_2 = 1 + \frac{1}{5}t, x_3 = -1 - \frac{1}{5}t}.$$

## Проверка

$$(1 - \frac{3}{5}t) + 3(1 + \frac{1}{5}t) + 5(-1 - \frac{1}{5}t) + t = -1,$$

$$3(1 - \frac{3}{5}t) + 5(1 + \frac{1}{5}t) + (-1 - \frac{1}{5}t) + t = 7,$$

$$5(1 - \frac{3}{5}t) + (1 + \frac{1}{5}t) + (-1 - \frac{1}{5}t) + 3t = 5,$$

$$7(1 - \frac{3}{5}t) + 7(1 + \frac{1}{5}t) + 11(-1 - \frac{1}{5}t) + 5t = 3.$$

### 3

Решить однородную систему. Выделить ФСР и выполнить проверку.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{ряд}_2 \leftarrow \text{ряд}_2 - 3\text{ряд}_1 \\ \text{ряд}_3 \leftarrow \text{ряд}_3 + 2\text{ряд}_1 \\ \text{ряд}_4 \leftarrow \text{ряд}_4 - 4\text{ряд}_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{ряд}_3 \leftarrow \text{ряд}_3 + \text{ряд}_2 \\ \text{ряд}_4 \leftarrow \text{ряд}_4 - \text{ряд}_2 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{ряд}_2 \leftarrow \frac{1}{3}\text{ряд}_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{ряд}_1 \leftarrow \text{ряд}_1 + \text{ряд}_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$x_3 = s, \quad x_4 = t \in \mathbb{R}; \quad x_1 = s + t, \quad x_2 = -s - t$$

$$\text{ФСР: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Проверка

$$\text{для } (1, -1, 1, 0) : 1 - (-1) - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0, \quad 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 0,$$

$$- 2 \cdot 1 - (-1) + 1 + 0 = 0, \quad 4 \cdot 1 - (-1) - 5 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{для } (1, -1, 0, 1) : 1 - (-1) - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0, \quad 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0,$$

$$- 2 \cdot 1 - (-1) + 0 + 1 = 0, \quad 4 \cdot 1 - (-1) - 5 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = 0.$$

### 4

Исследовать систему на совместность и решить ее в случае совместности. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{ряд}_1 \leftrightarrow \text{ряд}_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\text{ряд}_3 \leftarrow \text{ряд}_3 - 3\text{ряд}_1]{\text{ряд}_2 \leftarrow \text{ряд}_2 - 2\text{ряд}_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{ряд}_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\text{ряд}_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\text{ряд}_1 \leftarrow \text{ряд}_1 - 3\text{ряд}_2]{\text{ряд}_3 \leftarrow \text{ряд}_3 + 4\text{ряд}_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{ряд}_1 \leftarrow \frac{1}{3}\text{ряд}_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow \text{rank } A = \text{rank}[A|b] = 2 < 4 \Rightarrow$  система совместна, 2 параметра.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 13x_4 = 13, & x_2 = s, x_4 = t \in \mathbb{R}, \\ x_3 + 9x_4 = -7. & x_1 = \frac{s + 13t + 13}{3}, x_3 = -7 - 9t. \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{13}{3}, 0, -7, 0 \right) + s \left( \frac{1}{3}, 1, 0, 0 \right) + t \left( \frac{13}{3}, 0, -9, 1 \right), s, t \in \mathbb{R}.$$

### Проверка

$$9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3(s + 13t + 13) - 3s + 5(-7 - 9t) + 6t = 4,$$

$$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2(s + 13t + 13) - 2s + 3(-7 - 9t) + t = 5,$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = (s + 13t + 13) - s + 3(-7 - 9t) + 14t = -8.$$