

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет социально-экономических и компьютерных наук

Лабораторная работа №1

по дисциплине «Теоретические основы информатики»

Кодирование информации и представление данных в памяти компьютера

Выполнил: студент Яцишин Л.С., уч. группа ПСАПР-25-2

Пермь, 2025

Содержание

| | | |
|---|--|----|
| 0 | Правки | 3 |
| 1 | Задание 1 | 3 |
| | Задание 1 — Трассировка | 3 |
| | Задание 1 — Пояснение | 3 |
| | Задание 1 — Скриншоты | 4 |
| | Задание 1 — Выводы | 4 |
| 2 | Задание 2 | 5 |
| | Задание 2 — Трассировка | 5 |
| | Задание 2 — Пояснение | 5 |
| | Задание 2 — Скриншоты | 6 |
| | Задание 2 — Выводы | 6 |
| 3 | Задание 3 | 7 |
| | Задание 3 — Трассировка | 7 |
| | Задание 3 — Пояснение | 7 |
| | Задание 3 — C++ | 9 |
| | Задание 3 — Python | 11 |
| | Задание 3 — Проверка на других значениях N | 12 |
| 4 | Задание 4 | 14 |
| | Задание 4 — Анализ алгоритма | 14 |
| | Задание 4 — Реализация алгоритма на C++ | 15 |
| | Задание 4 — Результаты | 17 |
| | Задание 4 — Выводы | 17 |

0 Правки

После 06.10.2025. Решено задание №4. Исправлены неточности.

После 04.10.2025. Я просмотрел семинары и файл с примером, и отредактировал работу (всё ещё первые 3 задания), чтобы она соответствовала требованиям. Так же исправил опечатки, ошибки и места, где я, как выяснилось, не доделал или сделал плохо.

1 Задание 1

Сколько раз выполнится цикл в программе, фрагмент кода которой на языке C++ приведён ниже, если переменная A имеет целочисленный тип – целое без знака в формате байта (контроль выхода за допустимый диапазон значений отключён). Какое значение примет переменная A после завершения цикла?

Поясните ответ – выполните трассировку программы («сухую прокрутку» – пошаговое выполнение вручную) – заполните таблицу, структура которой показана ниже, чтобы обосновать свой ответ (покажите, как меняется значение переменной – как выполняются операции – повторите их столько раз, сколько раз они повторятся при выполнении цикла):

```
1 static unsigned char A;  
2 A = 255;  
3  
4 do { A++;  
5 } while (A != 0);
```

Трассировка

| Оператор/ операция | Десятичное значение переменной A: ожидаемое/полученное | Внутреннее представление A | Комментарий |
|-----------------------|--|-------------------------------|------------------------|
| A = 255; | 255 / 255 | 11111111 ₂ 0xFF | Инициализация |
| A++ | 256 / 0 | 00000000 ₂ 0x00 | Переполнение |
| A != 0 | итог: ложь | 00000000 ₂ 0x00 | Условие не выполнилось |
| Цикл не повторился | | | |

Итого: тело цикла выполнено ровно 1 раз; после завершения A == 0.

Пояснение

| Номера битов в разрядной сетке: | [8] | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|------------------------------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| + | | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Скриншоты

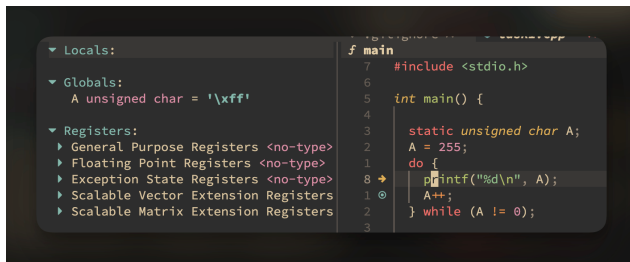


Рис. 1: static unsigned char A = 255;



Рис. 2: A++;

Выводы

- Трассировка подтверждается отладкой: после единственного прохода `A` становится 0.
- Причина поведения – определённое поведение беззнаковых типов в C/C++. Арифметика для unsigned типов определяется по модулю 2^N (здесь $N = 8$), поэтому $11111111_2 + 00000001_2 = [1]00000000_2 = 0$ (восьмой разряд отпадает). При этом никакой ошибки не происходит и процессор просто оставляет флаг переполнения, который можно при необходимости обрабатывать.
- Вывод: цикл выполняется один раз, финальное значение `A == 0`.

2 Задание 2

Задание 2. Сколько раз выполнится цикл в программе, фрагмент кода которой на языке C++ приведён ниже, если переменная A имеет целочисленный тип – целое со знаком в формате байта (контроль выхода за допустимый диапазон значений отключён).

Поясните ответ – выполните трассировку программы («сухую прокрутку») – заполните таблицу, чтобы обосновать свой ответ (покажите, как меняется значение переменной – повторите их столько раз, сколько раз они повторятся при выполнении цикла):

```
1 static signed char A;  
2  
3 A = -127;  
4 while (A < 0) {  
5     A = A - 1;  
6 }
```

Трассировка

| Оператор/ операция | Десятичное значение переменной A: ожидаемое/полученное | Внутреннее представление A | Комментарий |
|-----------------------|--|-------------------------------|-----------------------------|
| A = -127; | -127 / -127 | 10000001 ₂ 0x81 | Инициализация |
| A < 0 | итог: истина | 10000001 ₂ 0x81 | Условие выпол- нилось |
| A = A - 1; | -128 / -128 | 10000000 ₂ 0x80 | Тело цикла выполнилось |
| A < 0 | итог: истина | 10000000 ₂ 0x80 | Условие выпол- нилось |
| A = A - 1; | -129 / 127 | 01111111 ₂ 0x7F | Переполнение |
| A < 0 | итог: ложь | 01111111 ₂ 0x7F | Условие не вы- полнилось |

Пояснение

| Номера битов в разрядной сетке: | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| – | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Чтобы получить дополнительный код для отрицательного числа в 8-битном signed char нужно:

1. представить модуль числа как unsigned char;
2. инвертировать все биты;
3. прибавить 1.

Это эквивалентно арифметике по модулю 2^8 : $-x \equiv 2^8 - x \pmod{2^8}$. Соответственно:

$$127_{10} = 01111111_2 \xrightarrow{\text{инверсия}} 10000000_2 \xrightarrow{+1} 10000001_2 = 0x81 \quad (-127_{10}).$$

Далее при вычитании второй единицы происходит перенос с 7-го бита (который является показателем знака) и соответственно при интерпретации этого байта как `signed char` получится 127.

Скриншоты

```

Globals:
  A signed char = '\x81'

Registers:
  General Purpose Register: -127
  Floating Point Register: 
  Exception State Register: 
  Scalable Vector Extens: 
  Scalable Matrix Extens: 

7 int main() {
5     static signed char A;
4     A = -127;
3     while (A < 0) {
2         A = A - 1;
1         printf("%d\n", A);
0     }
3     return 0;
4 }
  
```

Рис. 3: `static signed char A = -127;`

```

Globals:
  A signed char = '\x7f'

Registers:
  General Purpose Register: -1
  Floating Point Register: 
  Exception State Register: 
  Scalable Vector Extens: 
  Scalable Matrix Extens: 

11 int main() {
10     static signed char A;
9     A = -127;
8     while (A < 0) {
7         A = A - 1;
6         printf("%d\n", A);
5     }
4     return 0;
3 }
task1.cpp:
1 }
  
```

Рис. 4: `A - 2;`

Выводы

- Трассировка и отладка совпали: тело цикла выполняется дважды. Последовательность значений: $-127 \rightarrow -128 \rightarrow 127$, после чего условие $A < 0$ ложно и цикл прекращается.
- Причина: тип `signed char` имеет диапазон $[-128, 127]$. Первое вычитание даёт -128 . Второе вычитание для -128 выходит за диапазон и отнимает бит с позиции отведённой для знака.

3 Задание 3

Сколько раз выполнится цикл в программе, фрагмент кода которой на языке Pascal приведён ниже, если переменная S имеет вещественный тип однократной точности, а переменная N – тип целого без знака в формате байта. Какое значение получит переменная S?

Поясните ответ – выполните трассировку программы (пошаговое выполнение вручную – «сухую прокрутку») – заполните таблицу, структура которой приведена ниже, вычисляя значения при выполнении каждого оператора, чтобы обосновать свой ответ (покажите, как меняется значение переменной – повторите их столько раз, сколько раз они повторяются при выполнении цикла, и заполните соответствующие строки в таблице)

```

1 {NOTE: real – двухкратная точность, single – однократная }
2 var S: single; N: byte; { Объявление переменных }
3 begin
4   N := 3; { Присваивание переменной N значения }
5   S := 1/N; { Присваивание переменной S значения – вычисляется выражение 1/N }
6   while S <> 1 do {Выполнять, пока S не равно 1 }
7     begin
8       writeln(S); {вывести на экран}
9       S := S + 1 / N;
10    end;
11    writeln(S); {вывести на экран}
12 end.
```

Трассировка

| Оператор/ операция | Десятичное значение S | Внутреннее представление S | Комментарий |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| N := 3; | — | — | Инициализация |
| S := 1/N; | 0.333333 | 0 01111101 010101010101010101010 | 1/3 |
| S <> 1 | итог: истина | 0 01111101 010101010101010101010 | Условие цикла выполнено |
| S := S + 1/N; | 0.666666 | 0 01111110 010101010101010101010 | Суммирование двух 1/3 |
| S <> 1 | итог: истина | 0 01111110 010101010101010101010 | Ещё не 1 |
| S := S + 1/N; | 1.0 / 0.999999 | 0 01111110 111111111111111111111 | Округление даёт 1.0 |
| S <> 1 | итог: ложь? | 0 01111110 111111111111111111111 | Выход из цикла |

Перевод десятичного числа в двоичную систему и нормализация:

$$\frac{1}{3}_{10} = 0.\overline{01}_2 = 0.0101010101 \dots_2$$

Для нормализации сдвигаем точку так, чтобы первое представимое число имело вид 1....; первая единица стоит в позиции 2^{-2} , поэтому получаем:

$$0.01010101 \dots_2 = 1.01010101 \dots_2 \times 2^{-2}.$$

Мантисса (24 разряда: скрытая 1 + 23 дробных разряда): Нормализованная мантисса (бесконечная) —

$$M = 1.010101010101010101010101 \dots_2.$$

Нам нужно сохранить 23 дробных бита (скрытая 1 не хранится). Итоговая хранимая мантисса (скрытая 1 + дробная часть):

$$\underbrace{010101010101010101010101}_{23}.$$

Порядок (со смещением): Истинный порядок $E = -2$, значит

$$E_{\text{смещённый}} = -2 + 127 = 125.$$

В двоичном виде (8 бит):

$$125_{10} = 01111101_2.$$

Знак: $S = 0$ (положительное число).

Итоговое 32-битное представление:

$$\underbrace{0}_{\text{знак}} \underbrace{01111101}_{\text{порядок}} \underbrace{010101010101010101010101}_{\text{дробная часть}} = \boxed{0,333333_{10}}.$$

Операция сложения: $S := S + 1/3$. Алгоритм процессора в двоичном виде:

1. Выравнивание порядков: не требуется, одинаковые числа.
2. Сложение мантисс (включая скрытую 1):

$$\begin{array}{r} 01.010101010101010101010101_2 \\ + 01.010101010101010101010101_2 \\ \hline = 10.10101010101010101010100_2 \end{array}$$

В результате появился перенос в старший разряд: форма $10.10 \dots$ — не нормализовано.

3. Нормализация: сдвигаем точку и увеличиваем порядок на 1:

$$10.10101010101010101010100_2 = 1.010101010101010101010101_2 \times 2^1.$$

Поскольку у слагаемых порядок был -2 , после увеличения он становится -1 , что соответствует правильному виду для $2/3$: $2/3 = 0.10101010 \dots_2 = 1.0101010 \dots_2 \times 2^{-1}$.

Итоговое записанное значение (после сложения):

$$0 \ 01111110 \ 010101010101010101010101$$

Примечание. Я не до конца разобрался почему в сухом прогоне получилось именно

$$0 \ 01111110 \ 111111111111111111111111_2 = 0.999999_{10}, \text{ а не}$$

$0 \ 01111111 \ 000000000000000000000000_2 = 1_{10}$. При реальном запуске выполнение прекращается, хотя условие поставленно на чёткое равенство, а не на вхождение в диапазон. Может быть дело в округлении, которое где-то не делается или делается не так.

Перевод на C++ и сравнение

Переведите программу на язык C++, выбрав подходящие типы данных и операторы языка C++. Выполните «сухую прокрутку» программы на C++ (заполните трассировочную таблицу, заменив операторы языка Pascal на соответствующие операторы языка C++). Какие результаты получены? С какой точностью (сколько десятичных знаков) могут быть эти числа записаны в памяти компьютера в указанном формате? Проверьте, используя справочную систему Microsoft (информацию по типам данных в C++).

В чём разница в описаниях типов данных, чем различаются правила выполнения операций на языках C++ и Pascal? Объясните ответ. Проверьте результаты, выполнив программу на Pascal.

```
1  #include <stdio>
2
3  int main() {
4      unsigned char N = 3;
5      float S;
6
7      S = 1.0f / N;
8
9      int iters = 0;
10     while (S != 1.0f) {
11         printf("iters=%d, S=%.9E\n", iters, S);
12         S = S + 1.0f / N;
13         ++iters;
14     }
15
16     printf("iters=%d, S=%.9E\n", iters, S);
17 }
```

Теоретически, поскольку я постарался сделать как можно более прямой перевод между языками, трассировочная таблица Pascal и C++ должна совпадать (отличия только в синтаксисе).

| Оператор/ операция | Десятичное значение S | Внутреннее представление S | Комментарий |
|-------------------------|-----------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| unsigned char N = 3; | — | — | Инициализация |
| S = 1.0f / N; | 0.333333 | 0 01111101 010101010101010101010 | 1/3 |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111101 010101010101010101010 | Условие цикла выполнено |
| S = S + 1.0f / N; | 0.666666 | 0 01111110 010101010101010101010 | Суммирование двух 1/3 |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 010101010101010101010 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 1.0 / 0.999999 | 0 01111110 111111111111111111111 | Округление даёт 1.0 |
| S != 1.0f | итог: ложь? | 0 01111110 111111111111111111111 | Выход из цикла |

```
Target OS: Linux for x86-64
Compiling main.pas
Linking a.out
10 lines compiled, 0.0 sec
3.333333433E-01
6.666666865E-01
1.000000000E+00
```

Рис. 5: Выполнение на Pascal

```
toi/lab1 main* < runcpp -l -d task1.cpp
Learning mode (no optimizations, with
iters=0, S=3.333333433E-01
iters=1, S=6.666666865E-01
iters=2, S=1.000000000E+00
toi/lab1 main* >
```

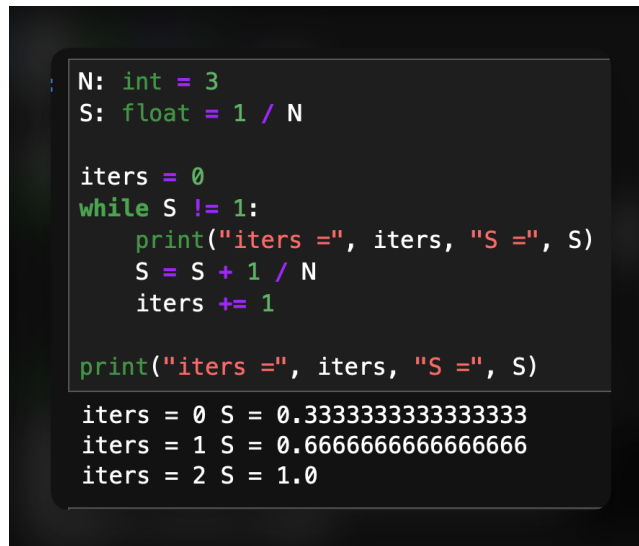
Рис. 6: Выполнение на C++

При корректном выборе одинаковой точности (Pascal: single, C++: float) существенной разницы в поведении программ нет: оба языка выполняют вещественное деление и сложение в указанном формате, и последовательность значений совпадает. Точность представления: формат IEEE-754 single (32 бита) имеет 24 бита значащих, что соответствует $\log_{10}(2^{24}) \approx 7,22$ значащим десятичным цифрам — то есть примерно 7 значащих десятичных цифр. Поэтому цифры после седьмой уже не являются точными. (Код на Pascal проверял в онлайн компиляторе [Online Pascal Compiler](#))

Перевод на Python и сравнение

Переведите программу на язык Python. Какие результаты получены? Сравните их с результатами выполнения программы на C++.

```
1 N: int = 3
2 S: float = 1 / N
3
4 iters = 0
5 while S != 1:
6     print("iters =", iters, "S =", S)
7     S = S + 1 / N
8     iters += 1
9
10 print("iters =", iters, "S =", S)
```



```
: N: int = 3
  S: float = 1 / N

iters = 0
while S != 1:
    print("iters =", iters, "S =", S)
    S = S + 1 / N
    iters += 1

print("iters =", iters, "S =", S)

iters = 0 S = 0.3333333333333333
iters = 1 S = 0.6666666666666666
iters = 2 S = 1.0
```

Рис. 7: Выполнение на Python

Сравнение. Результаты выполнения программы на python дпо сути ничем не отличаются от результатов выполнения программы на C++, за исключением точности. В Python не такая гранулированная система типов чисел как в C++ – в стандартном Python float – двухкратная точность, а int теоретически вообще может расти до бесконечности, потому что реализован через массив более маленьких фиксированного размера. На сколько я помню Integer в Haskell имеет такую же идею (в сравнении с Int). Соответственно там, где в C++ при N=7 было использованно float, в Python используется double и из-за накопления другой ошибки цикл никогда не завершается. (Если в C++ заменить тип N на double, то будет такое же поведение.)

Проверка на других значениях N

Как изменятся результаты, если организовать ввод значений переменной N и выполнить программу для других значений? Проведите эксперименты с разными значениями (7, 11). Всегда ли цикл будет выполняться конечное число раз? Чем объясняются полученные результаты? Опишите свои эксперименты в отчёте (заполните трассировочные таблицы, как это было показано выше) и поясните полученные ответы (коды вещественных чисел – их внутреннее представление – можно посмотреть в режиме отладки в 16-ричной системе, переключившись на дизассемблированный код, ...).

| Оператор/ операция | Десятичное значение S | Внутреннее представление S | Комментарий |
|-------------------------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| unsigned char N = 7; | — | — | Инициализация |
| S = 1.0f / N; | 0.142857 | 0 01111100 00100100100100100100 | 1/7 |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111100 00100100100100100100 | Условие цикла истинно |
| S = S + 1.0f / N; | 0.285714 | 0 01111101 00100100100100100100 | Сумма двух 1/7 |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111101 00100100100100100100 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.428571 | 0 01111101 10110110110110110110 | Третье суммирование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111101 10110110110110110110 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.571428 | 0 01111110 00100100100100100100 | Четвёртое суммирование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 00100100100100100100 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.714285 | 0 01111110 01101101101101101101 | Пятое суммирование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 01101101101101101101 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.857142 | 0 01111110 10110110110110110110 | Шестое суммирование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 10110110110110110110 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.999999 | 0 01111110 11111111111111111111 | Седьмое суммирование даёт |
| S != 1.0f | итог: ложь? | 0 01111110 11111111111111111111 | Цикл завершается |

На сколько я понимаю, тут такая же проблема, как в задании 2. Потому что при реальном запуске программы на седьмом суммировании просиходит остановка.

| Оператор/ операция | Десятичное значение S | Внутреннее представление S | Комментарий |
|--------------------------|-----------------------------|------------------------------------|---|
| unsigned char N = 11; | — | — | Инициализация |
| S = 1.0f / N; | 0.090909 | 0 01111011 01110100010111010001011 | 1/11 представлено с усечением мантиссы (truncate) |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111011 01110100010111010001011 | Условие цикла выпол- нено |
| S = S + 1.0f / N; | 0.181818 | 0 01111100 01110100010111010001011 | Сумма двух усечён- ных 1/11 |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111100 01110100010111010001011 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.272727 | 0 01111101 00010111010001011101000 | Третье суммирование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111101 00010111010001011101000 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.363636 | 0 01111101 01110100010111010001010 | Четвёртое суммирова- ние |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111101 01110100010111010001010 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.454545 | 0 01111101 11010001011101000101100 | Пятое суммирование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111101 11010001011101000101100 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.545454 | 0 01111110 00010111010001011100111 | Шестое суммирова- ние |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 00010111010001011100111 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.636363 | 0 01111110 01000101110100010111000 | Седьмое суммирова- ние |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 01000101110100010111000 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.727272 | 0 01111110 01110100010111010001001 | Восьмое суммирова- ние |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 01110100010111010001001 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.818181 | 0 01111110 10100010111010001011010 | Девятое суммирова- ние |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 10100010111010001011010 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.909090 | 0 01111110 11010001011101000101011 | Десятое суммирова- ние |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 11010001011101000101011 | Ещё не 1 |
| S = S + 1.0f / N; | 0.999999 | 0 01111110 11111111111111111111100 | Одиннадцатое сумми- рование |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111110 11111111111111111111100 | Условие цикла всё ещё истинно |
| S = S + 1.0f / N; | 1.090908 | 0 01111111 00010111010001011100110 | Двенадцатое сумми- рование — значение больше 1 |
| S != 1.0f | итог: истина | 0 01111111 00010111010001011100110 | Цикл не завершается |

1. Всегда ли цикл выполнится конечное число раз и чем это объясняется? Нет. Зависит от того, попадёт ли накопленное значение S ровно в представимое $1.0f$. float (IEEE-754 single) имеет конечную точность. Значение $1/N$ часто не представимо точно, при суммировании идут округления; последовательность $S_k = \text{round}(k \cdot (1/N))$ в типе float может в какой-то момент дать ровно $1.0f$ (тогда цикл закончится) или никогда не дать ровно $1.0f$ (тогда цикл не закончится).

- $N = 3$ — завершается (после трёх сумм S достигает ровно $1.0f$).
- $N = 7$ — завершается (после семи сумм S округляется к $1.0f$).
- $N = 11$ — НЕ завершается: на шаге, где ожидалось ровно 1, получается немного больше.

С практической точки зрения есть 2 вывода:

1. Главное смотреть не на название типов и операций, а на стандарт согласно которому они реализованы.
2. При необходимости сравнения двух чисел представленных в формате с “плавающей точкой” нужно сравнивать не на прямую, а на вхождения модуля разности выбранных чисел в определённый маленький диапазон.

4 Задание 4

Разработайте на основе самостоятельно выведенной рекуррентной формулы алгоритм вычисления суммы ряда $S(x)$ для приближённого вычисления функции $y = F(x)$ (x вводится с клавиатуры; выбор функции $F(x)$ для вычислений разложением в ряд $S(x)$ ограничивается предложенным списком (см. ниже), где для каждой функции приведена формула разложения в ряд и вес этой функции в оценке результатов выполнения задания по 10-балльной шкале).

Покажите порядок вывода рекуррентной формулы.

Опишите алгоритм на псевдокоде (см. пример в рекомендациях по выполнению задания и в материалах практических занятий).

Я выбрал $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x$, соответственно $S = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{2n^2+1}{(2n)!} x^{2n}$.

Анализ алгоритма

1. Вывод рекуррентной формулы общего члена. Пусть

$$A_n = (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{(2n)!} x^{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда «шаг» между соседними слагаемыми равен

$$M_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}} \cdot \frac{2n^2 + 1}{2(n-1)^2 + 1} \cdot \frac{x^2}{(2n)(2n-1)} = - \frac{x^2}{(2n)(2n-1)} \cdot \frac{2n^2 + 1}{2(n-1)^2 + 1}.$$

Следовательно, рекуррентная формула:

$$A_n = A_{n-1} \cdot M_n, \quad M_n = - \frac{x^2}{(2n)(2n-1)} \cdot \frac{2n^2 + 1}{2(n-1)^2 + 1}.$$

2. Начальные значения. Первый член ($n = 0$): $A_0 = 1$. Начальная сумма: $S_0 = A_0 = 1$.

3. Алгоритм вычисления при заданном n .

```
1  Ввод x;
2  Ввод n;
3  A ← 1.0;
4  S ← 1.0;
5
6  Цикл по всем k от 1 до n с шагом 1
7    Выполнять:
8       $A \leftarrow A \times \left( - (x^2) / ((2k)(2k - 1)) \times ( (2k^2 + 1) / (2(k - 1)^2 + 1) ) \right);$ 
9      S ← S + A;
10  Конец цикла по k;
11  Вывод S;
```

Реализация алгоритма на C++

Разработайте на основе выведенной рекуррентной формулы и разработанного алгоритма программу вычисления суммы ряда

- а) для заданного количества N слагаемых A_k в сумме ряда $S(x)$, (N вводится с клавиатуры);
- б) с заданной точностью E (E вводится с клавиатуры) – суммируются слагаемые A_k , абсолютная величина которых не меньше заданного E ;
- в) с максимально возможной точностью (до машинного нуля – до слагаемого A_k , которое становится машинным нулём).

```
1  #include <cstdio>
2  #include <cmath>
3
4  int main() {
5      float Sn = 1.0f, Se = 1.0f, Se0 = 1.0f, A = 1.0f; // или double
6      float x, e; // или double
7      int n;
8
9      printf("Введите x: ");
10     scanf("%f", &x);
11     printf("Введите n: ");
12     scanf("%d", &n);
13     printf("Введите e (точность вычислений): ");
14     scanf("%f", &e);
15
16     // а) Sn: сумма по заданному n
17     for (int k = 1; k <= n; ++k) {
18         A *= ( - (x * x) / ( (2.0f * k) * (2.0f * k - 1.0f) )
19             * ( (2.0f * k * k + 1.0f) / ( 2.0f * (k - 1) * (k - 1) + 1.0f ) ) );
20         Sn += A;
21     }
22     printf("\nSn = %g, n = %d, A_N=%g\n", Sn, n, A);
23
24     // б) Se: сумма до заданной точности e
25     A = 1.0f;
26     int i = 1;
```

```

27 while (abs(A) >= e) {
28     A *= ( - (x * x) / ( (2.0f * i) * (2.0f * i - 1.0f) )
29         * ( (2.0f * i * i + 1.0f) / ( 2.0f * (i - 1) * (i - 1) + 1.0f ) ) );
30     Se += A;
31     ++i;
32 }
33 printf("Количество слагаемых для Se: %d (точность до e = %gf)\n", i, e);
34 printf("Se = %g\n", Se);
35
36 // в) Se0: сумма с точностью до машинного нуля
37 A = 1.0f;
38 i = 1;
39 while (abs(A) > 0.0f) {
40     A *= ( - (x * x) / ( (2.0f * i) * (2.0f * i - 1.0f) )
41         * ( (2.0f * i * i + 1.0f) / ( 2.0f * (i - 1) * (i - 1) + 1.0f ) ) );
42     Se0 += A;
43     ++i;
44 }
45 printf("Количество слагаемых для Se0: %d (точность до e = 0.0f)\n", i);
46 printf("Se0 = %g\n", Se0);
47
48 return 0;
49 }
50

```

Такой же по структуре код будет с двойной точностью для вещественных чисел (только соответственно типы будут `double` и вместо `.0f` будет просто `.0`).

Результаты

| | x | N (a) / CA (б, в) | A_N (a) / E | Тип данных | S(x) | $y = F(x)$ |
|----|-----|----------------------|----------------------|------------|-------------|----------------|
| а) | 0.1 | N = 100 000 000 | $A_N = 0.0f$ | float | 0.985038 | 0.98503747... |
| а) | 0.1 | N = 100 000 000 | $A_N = 0.0$ | double | 0.985037 | 0.98503747... |
| б) | 0.1 | CA = 4 | E = 0.00001 | float | 0.985038 | 0.98503747... |
| б) | 0.1 | CA = 5 | E = 0.0000000001 | double | 0.985037 | 0.98503747... |
| в) | 0.1 | CA = 13 | E = 0.0f | float | 0.985038 | 0.98503747... |
| в) | 0.1 | CA = 63 | E = 0.0 | double | 0.985037 | 0.98503747... |
| а) | 10 | N = 10 | $A_N = 82611.74f$ | float | 1812.65 | 43.8346104... |
| а) | 10 | N = 10 | $A_N = 82611.74$ | double | 1812.65 | 43.8346104... |
| б) | 10 | CA = 18 | E = 0.1 | float | 43.8252 | 43.8346104... |
| б) | 10 | CA = 18 | E = 0.1 | double | 43.833 | 43.8346104... |
| в) | 10 | CA = 47 | E = 0.0f | float | 43.8268 | 43.8346104... |
| в) | 10 | CA = 156 | E = 0.0 | double | 43.8346 | 43.8346104... |
| а) | 100 | N = 10 | $A_N = 8.26174e+23f$ | float | 8.0132e+23 | -4285.41376... |
| а) | 100 | N = 10 | $A_N = 82611.74$ | double | 1812.65 | -4285.41376... |
| б) | 100 | overflow | E = 0.1f | float | — | -4285.41376... |
| б) | 100 | CA = 142 | E = 0.1 | double | 4.16736e+29 | -4285.41376... |
| в) | 100 | overflow | E = 0.0f | float | — | -4285.41376... |
| в) | 100 | CA = 375 | E = 0.0 | double | 4.16736e+29 | -4285.41376... |

Вычисление истинных значений $F(x)$ проводил в онлайн системе [Wolfarm Alpha](#).

Выводы

Видно, что при адекватных значениях x (N/E) программа с необходимой точностью вычисляет значение функции. Если же x взять слишком большой, то может, как в случае с однократной точностью, произойти переполнение (причём кажется переменной `int` которая отвечает за количество итераций), и программа завершится с ошибкой. Но, что более важно, при большом значении x члены ряда становятся очень большими, знак видимо начинает теряться, быстро накапливается ошибка и происходит сильное расхождение с $F(x)$. Выходит, что если теоретически данный ряд сходится, то на практике такой алгоритм с такими значениями неприменим для аппроксимации $F(x)$.