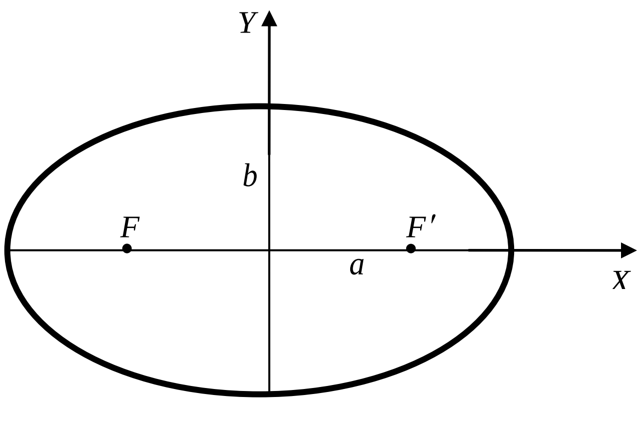
5. ელიფსი

გავეცნოთ მრუდს, რომელიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფიზიკაში. სხვა რომ არაფერი ვთქვათ, ამ მრუდზე მოძრაობს ჩვენი მშობლიური დედამიწა მზის გარშემო. ეს მრუდია ელიფსი.

ელიფსი ეწოდება სიბრტყის წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომლების დაშორებათა ჯამი ამ სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილამდე მოცემული რიცხვია (ის ამ ორ წერტილს შორის მანძილზე მეტია). ამ ორ წერტილს ელიფსის ფოკუსები ეწოდება. ნახ. 5.1-ზე გამოსახული ელიფსის ფოკუსებია F და F'. ფოკუსებზე გამავალ ქორდას ელიფსის დიდ ღერძი ეწოდება. ის ყველაზე გრძელი ქორდაა ელიფსში.



ნახ. 5.1

დიდი ღერძის შუა წერტილში გამავალ მის მართობულ ქორდას ელიფსის პატარა ღერძი ეწოდება. ის ცენტრზე გამავალ ქორდებს შორის ყველაზე მოკლეა.

თუ კოორდინატთა X ღერძი ემთხვევა ელიფსის დიდ ღერძს, ხოლო Y ღერძი – ელიფსის პატარა ღერძს (ნახ. 5.1), მაშინ ელიფსის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

სადაც a დიდი ნახევარღერძის სიგრძეა, ხოლო b – პატარა ნახევარღერძის.

ელიფსით შემოსაზღვრული ნაკვთის ფართობი განისაზღვრება ფორმულით

$$S=\pi a b$$

რაც უფრო ვიწროა ელიფსი ანუ რაც უფრო მეტია $\frac{a}{b}$ ფარდობა, მით უფრო ახლოსაა ფოკუსები დიდი ღერძის კიდურა წერტილებთან.

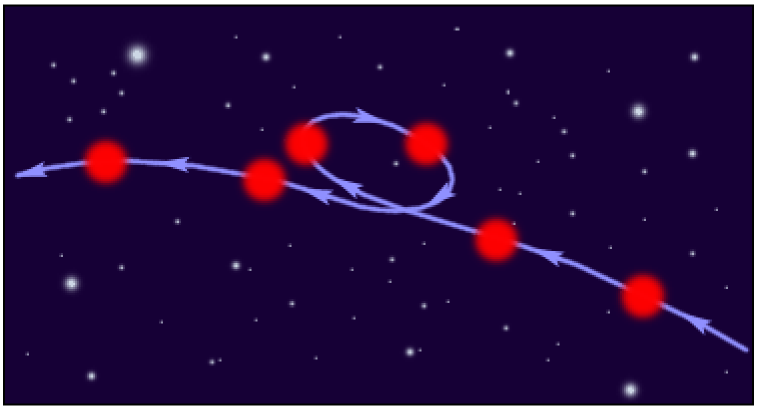
6. კეპლერის კანონები. მოძრაობა გრავიტაციის მოქმედებით

ატომებისა და ელემენტარული ნაწილაკების სამყაროში გრავიტაციული ძალები ბევრად ნაკლებია სხვა სახის ურთიერთქმედებებთან შედარებით. რთულია ჩვენს გარშემო მყოფ სხეულებს შორის გრავიტაციულ ურთიერთქმედებაზე დაკვირვება, მაშინაც კი, როდესაც მათი მასები მრავალი ათასი კილოგრამია. მაგრამ "დიდი" ობიექტების ქცევას, როგორიცაა პლანეტები, კომეტები და ვარსკვლავები, სწორედ გრავიტაცია განსაზღვრავს. გრავიტაცია გვაკავებს ჩვენ დედამიწაზე.

გრავიტაცია მართავს მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობას. მის გარეშე პლანეტები გაიფანტებოდა სხვადასხვა მიმართულებით.

პლანეტების მოძრაობის კანონზომიერება უძველესი დროიდან იპყრობდა ადამიანის ყურადღებას. პლანეტების მოძრაობის და მზის სისტემის აგებულების შესწავლამ მიგვიყვანა გრავიტაციის თეორიის შექმნამდე.

სამყაროს პირველი მოდელი (**გეოცენტრული სისტემა**) წამოაყენა ძველმა ბერძენმა მეცნიერმა **პტოლემემ**. ამ მოდელში სამყაროს ცენტრად განიხილებოდა დედამიწა, რომლის გარშემო მოძრაობდა პლანეტები და ვარსკვლავები. დედამიწაზე მყოფი დამკვირვებლის თვალსაზრისით პლანეტები მოძრაობს ძალზე რთულ ტრაექტორიებზე. პტოლემეს მოდელი დიდხანს ბატონობდა.

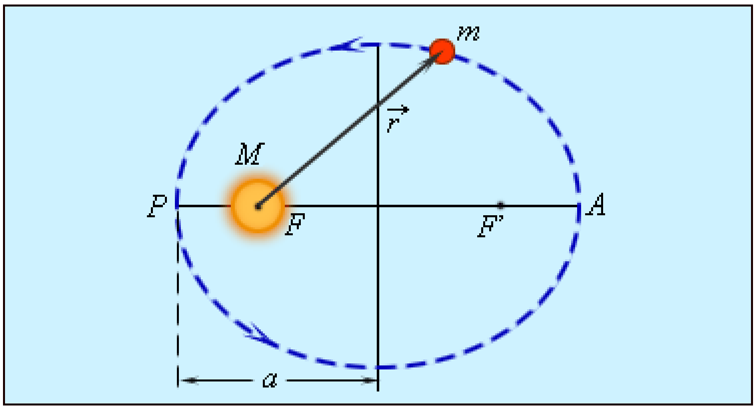


ნახ. 6.1. დედამიწიდან დაკვირვებული მარსის მოძრაობის პირობითი გამოსახულება უძრავი ვარსკვლავების ფონზე

XVI საუკუნის შუა ხანებში პოლონელმა ასტრონომმა **კოპერნიკმა** შემოიღო **ჰელიოცენტრული სისტემა**. ამ სისტემაში მზე განიხილება უძრავად და პლანეტები მოძრაობს მის გარშემო. კოპერნიკის სისტემაში პლანეტების ტრაექტორიები ბევრად მარტივია. კოპერნიკის სისტემის საფუძველზე გერმანელმა ასტრონომმა კეპლერმა, დანიელი ასტრონომის **ტიხო ბრაგეს** დაკვირვებების შედეგებზე დაყრდნობით, ჩამოაყალიბა მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის კანონები.

კეპლერის პირველი კანონი: პლანეტები მოძრაობს ელიფსებზე, რომელთა ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე.

ნახ. 6.2-ზე გამოსახულია პლანეტის ელიფსური ორბიტა. პლანეტის მასა ბევრად ნაკლებია მზის მასასთან შედარებით. ტრაექტორიის მზესთან უახლოეს P წერტილს **პერიჰელიუმი** ეწოდება, ხოლო უშორეს A წერტილს კი – **აფელიუმი**. მათ შორის მანძილი ელიფსის დიდი ღერძია.

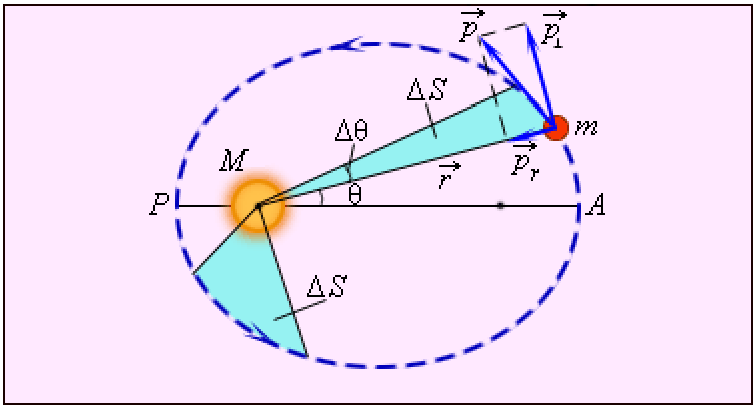


ნახ. 6.2

$m << M$ მასის პლანეტის ელიფსური ორბიტა.
a დიდი ნახევარღერძის სიგრძეა, F და F' ორბიტის ფოკუსებია

მზის სისტემის თითქმის ყველა პლანეტის (პლუტონის გარდა) ორბიტა ახლოსაა წრეწირთან.

კეპლერის მეორე კანონი: პლანეტის რადიუს-ვექტორი დროის ტოლ შუალედებში ტოლ ფართობებს მოხვეტს.



ნახ. 6.3

ფართობების კანონი – კეპლერის მეორე კანონი

კეპლერის მეორე კანონი იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონის ეკვივალენტურია. ნახ. 6.3-ზე გამოსახულია პლანეტის $\vec{p}$ იმპულსი, აგრეთვე მისი $\vec{p}_r$ და $\vec{p}_\perp$ მდგენელები. $\Delta t \to 0$ უსასრულოდ მცირე დროში რადიუს-ვექტორის მიერ მოხვეტილი ფართობი $\upsilon_\perp \Delta t = \frac{p_\perp}{m}\Delta t$ ფუძის და r სიმაღლის მქონე სამკუთხედის ფართობის ტოლია:

$\Delta S = \frac{1}{2}\frac{p_\perp r}{m}\Delta t \quad (\Delta t \to 0)$ ანუ $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{p_\perp r}{m} \quad (\Delta t \to 0)$, მაგრამ $p_\perp r = L$ მზის მიმართ იმპულსის მომენტის მოდულია, ამიტომ გვექნება

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m} \quad (\Delta t \to 0)$$

რადგან პლანეტაზე მზიდან მოქმედი გრავიტაციული ძალის მომენტი მზის მიმართ ნულია, ამიტომ იმპულსის მომენტი მუდმივია. ამის გამო, ზედა ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{\Delta S}{\Delta t} = const$. ეს კი კეპლერის მეორე კანონია.

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ სიდიდეს, რომელიც გვიჩვენებს ერთეულ დროში პლანეტის რადიუს-ვექტორის მიერ მოხვეტილ ფართობს, სექტორული სიჩქარე ეწოდება.

კეპლერის მესამე კანონი: პლანეტების გარშემოვლის პერიოდების კვადრატები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი ორბიტების დიდი ნახევარღერძების კუბები.

$$\frac{T^2}{a^3} = const \quad \text{ანუ} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

კეპლერის კანონები გამოდგება დედამიწის გარშემო მოძრავი თანამგზავრებისთვისაც.

კეპლერის კანონები შესაძლებელია გამოვიყვანოთ ნიუტონის კანონების გამოყენებით.

დიდი მასის სფერულად სიმეტრიული სხეულის (მას უძრავად მივიჩნევთ) გრავიტაციულ ველში ბევრად მცირე მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობისას ტრაექტორიის ფორმა დამოკიდებულია სისტემის სრულ მექანიკურ ენერგიაზე:

თუ სრული ენერგია უარყოფითია, მაშინ ტრაექტორია ელიფსია (ან წრეწირია, რომელიც ელიფსის კერძო სახეა).

თუ სრული ენერგია ნულია, მაშინ ტრაექტორია პარაბოლაა. სხეულის უსასრულობასთან მიახლოებისას სიჩქარე უახლოვდება ნულს.

თუ სრული ენერგია დადებითია, მაშინ ტრაექტორია ჰიპერბოლაა. სხეულის უსასრულობასთან მიახლოებისას სიჩქარე უახლოვდება ნულისგან განსხვავებულ მნიშვნელობას.

ცხადია, როდესაც სხეულის სიჩქარე მიმართულია დიდი მასის სხეულის ცენტრისკენ ან ცენტრიდან, მაშინ სხეული წრფის გასწვრივ მოძრაობს.

7. გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია

r მანძილით დაშორებული m_1 და m_2 მასის ნივთიერი წერტილების გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის ფორმულის მიღებას ინტეგრების ცოდნა სჭირდება. ჩვენ მოვიყვანთ შედეგს გამოყვანის გარეშე:

$$U = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r} + C$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა. მისი კონკრეტული მნიშვნელობა დამოკიდებულია ნულოვანი დონის არჩევაზე. ჩვეულებრივ, ნულად თვლიან უსასრულოდ დაშორებული სხეულების პოტენციალურ ენერგიას. ამ შემთხვევაში $C = 0$ და $U = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r}$.

იმავე ფორმულით განისაზღვრება მასის განაწილებაში სფერული სიმეტრიის მქონე ორი სხეულის გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია, ამ შემთხვევაში r მათ ცენტრებს შორის მანძილია. იგივე ფორმულით შეიძლება განისაზღვროს მასის განაწილებაში სფერული სიმეტრიის მქონე სხეულისა და ნივთიერი წერტილის გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიაც, ამ შემთხვევაში r ნივთიერ წერტილსა და სხეულის ცენტრს შორის მანძილია.

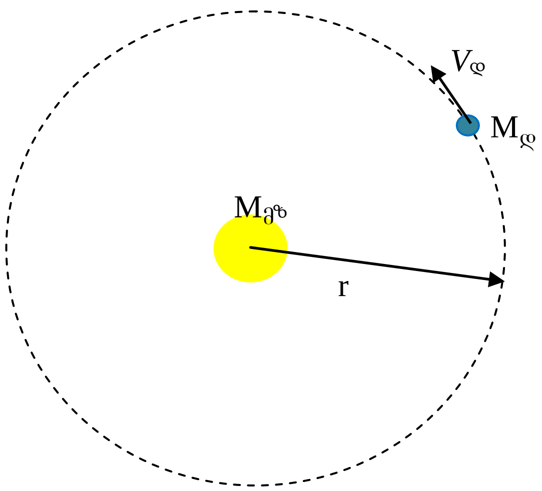
ამოცანების ამოხსნის ნიმუში

ამოცანა 7.1

განსაზღვრეთ III კოსმოსური სიჩქარე, ანუ რა მინიმალური სიჩქარე უნდა მივანიჭოთ სხეულს დედამიწის მიმართ, რომ ის გაექცეს მზეს.

ამოხსნა:

მზის გარშემო დედამიწის მოძრაობის ტრაექტორია განვიხილოთ როგორც $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$მ რადიუსის წრეწირი, მაშინ დედამიწის სიჩქარის მოდული (ორბიტალური სიჩქარე) გამოითვლება ფორმულით $V_დ = \sqrt{\frac{GM_{მზ}}{r}}$. თუ შევიტანთ რიცხვით მნიშვნელობებს, მივიღებთ $V_დ \approx 30$კმ/წმ.



განვიხილოთ სხეული, რომელმაც დაძლია დედამიწის მიზიდულობა, მაგრამ მზიდან პრაქტიკულად იმავე მანძილითაა დაშორებული, როგორითაც დედამიწა. ვიპოვოთ, მინიმუმ რა სიჩქარე უნდა ჰქონდეს ამ სხეულს მზესთან დაკავშირებულ ინერციულ ათვლის სისტემაში, რომ დაძლიოს მზის მიზიდულობა. გამოვიყენოთ მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონი:

$$\frac{-GM_{მზ}}{r} + \frac{V^2}{2} = 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2GM_{მზ}}{r}} \approx 42{,}3\text{კმ/წმ} \qquad (1)$$

დედამიწიდან სხეულის გაქცევის პროცესი განვიხილოთ ათვლის სისტემაში, რომლის სათავე დედამიწის ცენტრია, ხოლო ღერძები მიმართულია შორეული ვარსკვლავებისაკენ. სხეულის გაქცევის პროცესში ამ ათვლის სისტემის სიჩქარე მზესთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში ძალიან მცირედ იცვლება, ამიტომ ის შეგვიძლია ინერციულ ათვლის სისტემად მივიჩნიოთ. სხეულის მზესთან ურთიერთქმედების ენერგია ამ პროცესში შეგვიძლია უცვლელად მივიჩნიოთ.

დედამიწის მიზიდულობის დაძლევის შემდეგ სხეულის მინიმალური სიჩქარე დედამიწის მიმართ იქნება $v = V - V_{\oplus} \approx 12{,}3$ კმ/წმ (ამისათვის სხეული უნდა გავისროლოთ დედამიწის ორბიტალური სიჩქარის მიმართულებით). ენერგიის შენახვის კანონის თანახმად,

$$\frac{mv_{III}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\oplus}} = \frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

სადაც $M_{\oplus}$ დედამიწის მასაა, ხოლო $r_{\oplus}$ - მისი რადიუსი. მე-(2) ფორმულიდან მიიღება, რომ $v_{III}^2 = v^2 + \frac{2GM_{\oplus}}{r_{\oplus}} = (V - V_{\oplus})^2 + 2v_I^2$, (3)

სადაც $v_I = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}}} = 7{,}9$ კმ/წმ პირველი კოსმოსური სიჩქარეა. რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს $v_{III} \approx 16{,}7$ კმ/წმ.