კეპლერის კანონები

ლეევან კანკაძე

13 მაი. 2021 წ.

შესავალი

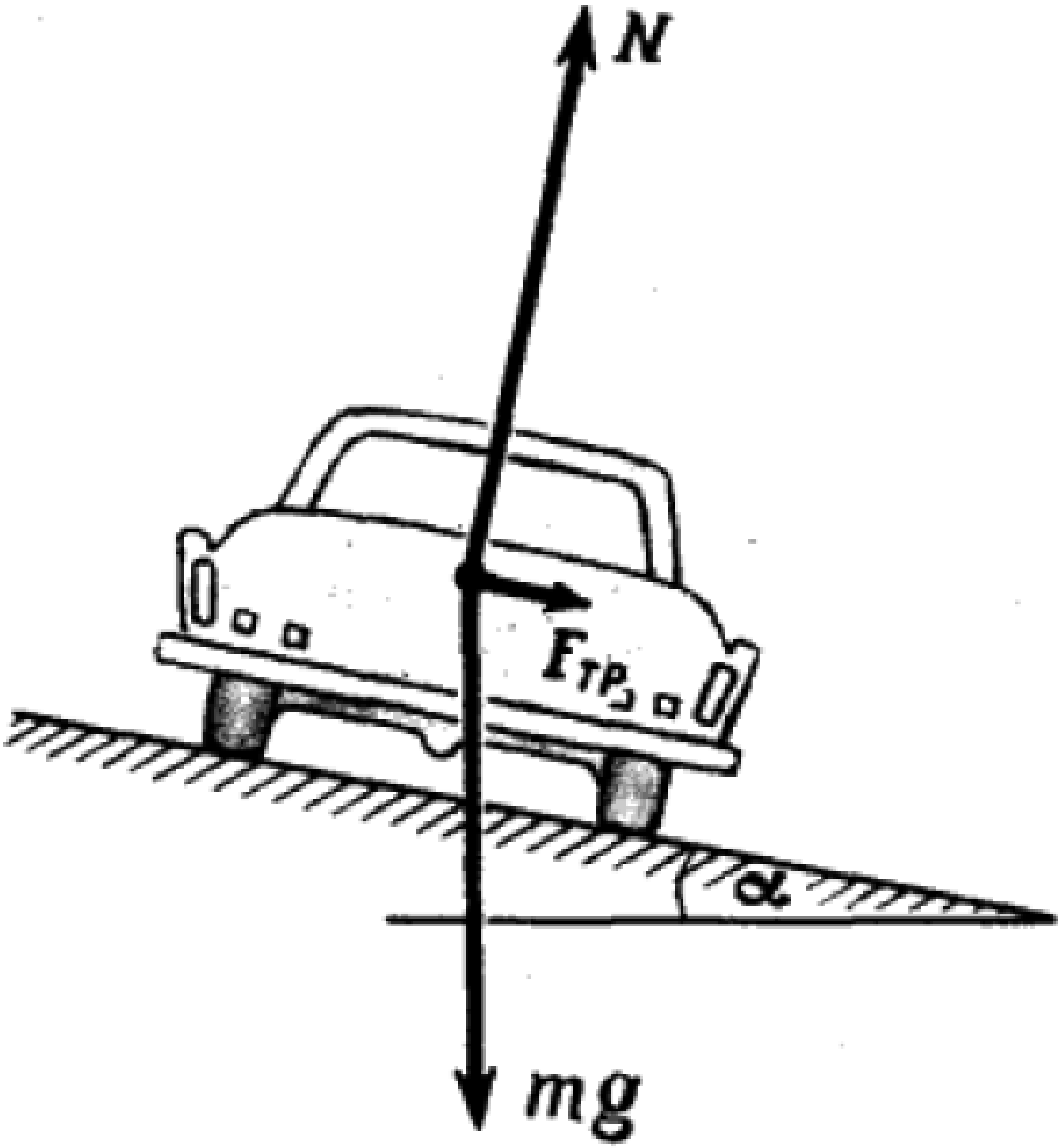
კეპლერის კანონები.

1 შესავალი

2 წრეწირზე მოძრაობა

01. მოტოციკლეტისტი მოძრაობს ჰორიზონტალურ ზედაპირზე $v = 70$ კმ/სთ სიჩქარით, ბრუნდება $R = 100$ მ რადიუსის მოსახვევში, რა კუთხით უნდა გადაიხაროს რომ არ დაეცეს?
ამოხსნა
აქაც ხახუნის ძალაა, ძალა რომელიც აჩერებს მოტოცეკლისტს, $F_{fr} = \frac{mv^2}{R}$, საყრდენის რეაქციის ძალა $N = mg$. მომენტების წესი სიმძიმის ცენტრის მიმართ მომცემს განტოლებას $F_{fr} \cdot l \sin\alpha = Nl\cos\alpha$. აქ მოცემული არაა μ და მაგიტომ გვჭირდება. ეს მომენტები.

02. რა მაქსიმალური v სიჩქარით შეიძლება იმოძრავოს მანქანამ α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე თუ სიმრუდის რადიუსია R და ხახუნის კოეფიციენტი ბორბლებსა და გზას შორის არის k.



სურ 1: A boat.

3 კეპლერის კანონები

3.1 კეპლერის პირველი კანონი

პლანეტები მოძრაობს ელიფსებზე, რომელთა ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე.

3.2 კეპლერის მეორე კანონი

პლანეტის რადიუს-ვექტორი დროის ტოლ შუალედებში ტოლ ფართობებს მოხვეტს.

3.3 კეპლერის მესამე კანონი

პლანეტების გარშემოვლის პერიოდების კვადრატები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი ორბიტების დიდი ნახევარღერძების კუბები.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{1}$$

4 გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია

r მანძილით დაშორებული m_1 და m_2 მასის ნივთიერი წერტილების გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის ფორმულის მიღებას ინტეგრების ცოდნა სჭირდება. ჩვენ მოვიყვანთ შედეგს გამოყვანის გარეშე:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C \tag{2}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა. მისი კონკრეტული მნიშვნელობა დამოკიდებულია ნულოვანი დონის არჩევაზე. ჩვეულებრივ, ნულად თვლიან უსასრულოდ დაშორებული სხეულების პოტენციალურ ენერგიას. ამ შემთხვევაში $C = 0$ და

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

.

5 კოსმოსური სიჩქარეები

5.1 პირველი კოსმოსური სიჩქარე

პირველი კოსმოსური სიჩქარე არის ის სიჩქარე, რომელიც საჭიროა სხეულს მივანიჭოთ გასროლისას რომ არ დაეცეს დედამიწაზე და გააგრძელოს მის გარშემო ბრუნვა. ნიუტონის მეორე კანონით:

$$\frac{mv^2}{r_E} = G\frac{M_E m}{r_E^2} \tag{3}$$

სადაც M_E არის დედამიწის მასა, r_E არის დედამიწის რადიუსი. რიცხვით გამოთვლისას მიიღება რომ $v = 7.91 \cdot 10^3$ მ/წმ.

5.2 მეორე კოსმოსური სიჩქარე

მეორე კოსმოსური სიჩქარის მინიჭებისას სხეულს შეუძლია დატოვოს დედამიწის ორბიტა, თუკი ჩავწერთ სრულ მექანიკურ ენერგიას.

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{M_E m}{r_E} \tag{4}$$

ცხადოა როდესაც დედამიწის დატოვებს მას აღარ ექნება დედამიწასთან ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია, და რადგან მინიმალურ სიჩქარეს ვეძებთ აღარც კინეტიკური ენერგია ექნება ორბიტის დატოვებისას მაშინ.

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{M_E m}{r_E} = 0 \tag{5}$$

აქედან მივიღებთ:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_E}{r_E}} \tag{6}$$

სადაც M_E არის დედამიწის მასა, r_E არის დედამიწის რადიუსი. რიცხვით გამოთვლისას მიიღება რომ $v = 11.2 \cdot 10^3$ მ/წმ.

ორივე შემთხვევაში შეიძლება გამოვიყენოთ მიახლოება, $g = GM/r_E^2$ და ზემო განტოლებებში ჩავსვათ.

6 ამოცანები

01. რა დროში დაეცემა მთვარე დედამიწას თუ ის სწრაფად გაჩერდება.
ამოხნსა: ამ ამოცანაში უნდა გამოვიყენოთ კეპლერის მესამე კანონი:

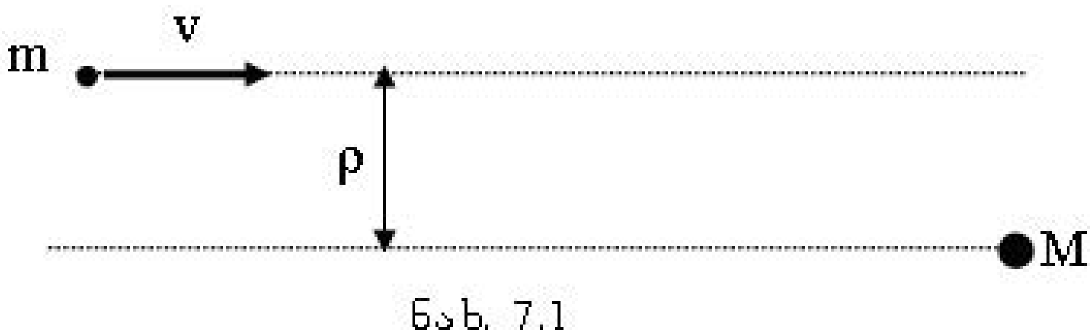
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{7}$$

დავარდნა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ძალიან გაწელილი ელიფსი. თუ დავუშვებთ რომ თავიდან მთვარის რადიუსი იყო a ახალი რადიუსი იქნება $a/2$, მაშინ ვარდნის დრო იქნება.

$$T_1^2 = T_2^2 \cdot \frac{(a/2)^3}{a^3} = T_2^2 \frac{1}{8} \tag{8}$$

სადაც T_2 არის ძველი მთვარის პერიოდი, მაშინ დავარდნის დრო იქნება პერიოდის ნახევარი $T_1/2$

02. უძრავად დამაგრებული M მასის ნივთიერი წერტილის გრავიტაციულ ველში დიდი მანძილით დაშორებული წერტილიდან (ამ მანძილზე გრავიტაციული ურთიერთქმედება შეგვიძლია უგულებელვყოთ) v სიჩქარით მოძრაობს m მასის ნივთიერი წერტილი, რომლის სამიზნე პარამეტრია ρ. იპოვეთ უმცირესი მანძილი ნივთიერ წერტილებს შორის.



სურ 2: A boat.

ამოხსნა: იხსნება იმპულსის მუდმივობისა და ენერგიის მუდმივობით.
პასუხი:

$$r_{min} = \frac{1}{v^2}$$