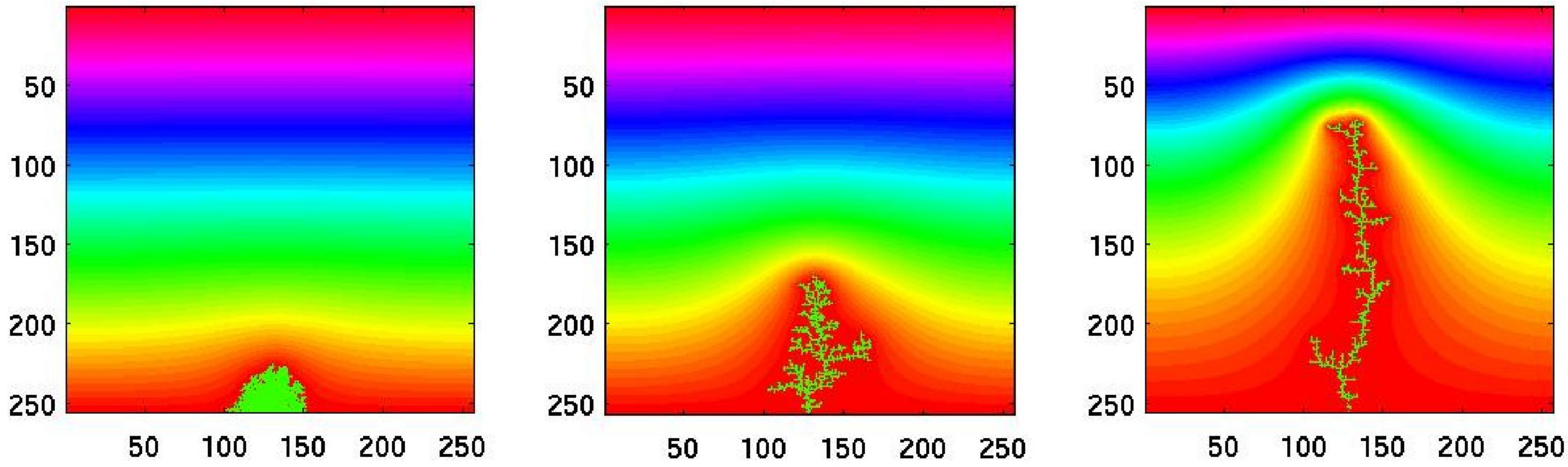
CHƯƠNG 6

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BAN ĐẦU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Nội dung

- Mở đầu: Phương trình vi phân
- Phương pháp Euler
  - Phương pháp Euler thuận
  - Phương pháp Euler cải biên
  - Phương pháp Euler ngược
- Phương pháp Runge – Kutta
  - Phương pháp Runge – Kutta bậc 2
  - Phương pháp Runge – Kutta bậc 3
  - Phương pháp Runge – Kutta bậc 4
- Các hàm trên Matlab
- Bài tập

Ví dụ


50
100
150
200
250
50 100 150 200 250
50
100
150
200
250
50 100 150 200 250
50
100
150
200
250
50 100 150 200 250

Mở đầu (1)

- Bài toán tìm nghiệm của các phương trình vi phân (PTVP) thường được chia làm 2 loại: bài toán giá trị ban đầu và bài toán điều kiện biên phụ thuộc vào việc ta cần tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu hay điều kiện biên.
- Đa số các bài toán giá trị ban đầu mô tả các hệ thống được xét phụ thuộc thời gian và lời giải của bài toán phụ thuộc vào điều kiện tại thời điểm ban đầu

Mở đầu (2)

- Bài toán giá trị ban đầu (IVP: Input Value Problem) đối với PTVP cấp 1 có thể viết dưới dạng:

$$y^{'}(t) = f(y,t); y(t_0) = y_0$$

  - y' là đạo hàm bậc nhất của y, f(y,t) là hàm của hai biến y và t, $y(t_0)=y_0$ là điều kiện ban đầu của bài toán.
  - Nếu f không phụ thuộc vào y thì có thể tính y' bằng cách lấy tích phân của hàm f.
  - Nếu f phụ thuộc vào y?

Ví dụ

- VD1: Tốc độ tăng trưởng dân số phụ thuộc vào dân số. Nếu dân số tại thời điểm t là y(t) thì tốc độ tăng dân số tại thời điểm t là

  $$y'(t) = k\, y(t)$$

  trong đó k là một hàng số dương.
- VD2: Phương trình Lotka-Voltera về thú săn mồi (cáo)-con mồi (thỏ): Gọi F(t) là số lượng cáo và R(t) là số lượng thỏ tại thời điểm t, ta có:

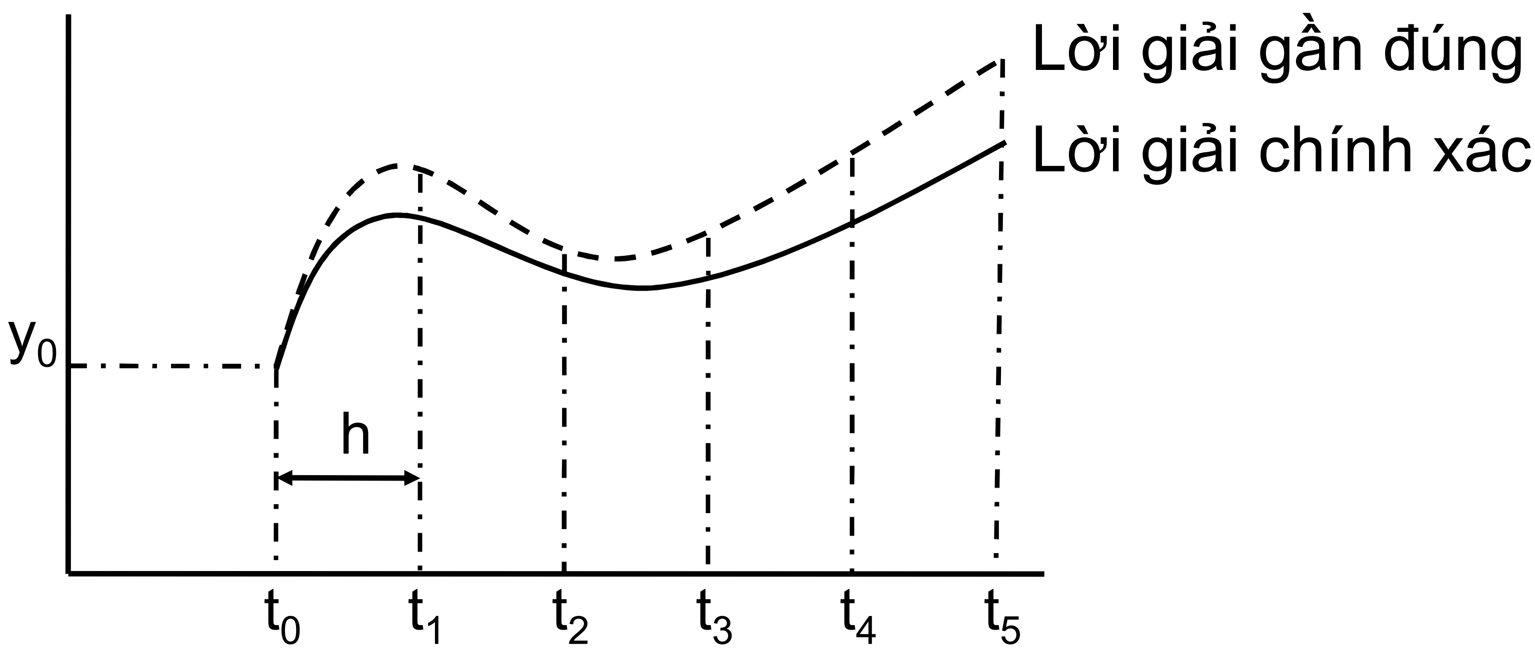
  $$R'(t) = (a - bF)R$$

  $$F'(t) = (cR - d)F$$

  trong đó *a,b,c,d* là các hằng số dương
- Các PTVP trên rất khó có thể giải bằng phương pháp giải tích

Giải PTVP bằng phương pháp gần đúng (phương pháp số)

- Phương pháp số đòi hỏi tính giá trị tại lưới điểm theo thời gian $t_n = t_{n-1} + h$, $n = 1, 2, \ldots$, h là độ dài bước



Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm

- **Định lý 1**: Nếu f là hàm liên tục trên hình chữ nhật:

  $R = \{(t,y) : |t - t_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta \}$

  thì IPV có nghiệm y(t) với $|t - t_0| \leq \min\{\alpha, \beta /M\}$, trong đó

  $M = \max \{|f(t,y)| : (t,y) \in R\}$.
- **Định lý 2**: Nếu f và δf/δy liên tục trên hình chữ nhật

  $R = \{(t,y) : |t - t_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta \}$

  thì IPV có nghiệm duy nhất y(t) với $|t - t_0| \leq \min\{\alpha, \beta /M\}$, trong đó $M = \max \{|f(t,y)| : (t,y) \in R\}$.
- **Định lý 3**: Giả sử t_0 nằm trong đoạn [a,b]. Nếu f liên tục với $a \leq t \leq b$, $-\infty \leq y \leq \infty$ và liên tục liptchitz đều theo y, nghĩa là tìm được hằng số L sao cho với mọi y_1, y_2 và t thuộc [a,b] ta có $|f(t,y_2) - f(t,y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$

  thì IVP có nghiệm duy nhất y(t) trên đoạn [a,b].

Phương pháp Euler thuận (1)

- Xét PTVP: y' = f(y,t), PP Euler thuận thu được bằng cách sử dụng sai phân xấp xỉ thuận

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx y_n' = f(y_n, t_n) \qquad (1)$$

(1) => $y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$ (2)

- Sử dụng (2), y_n được tính đệ quy như sau:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(y_0, t_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(y_1, t_1) \\ &\ldots\ldots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}, t_{n-1}) \end{aligned} \qquad (3)$$

Phương pháp Euler thuận (2): Ví dụ

- Xét PTVP: $y' = -20y + 7e^{-0.5t}$, $y(0) = 5$ (4)

  Giải PTVP (4) với t thuộc [0,0.04], $h=10^{-2};10^{-3};10^{-4}$

  Đánh giá sai số biết nghiệm chính xác của (4) là:

$$y = 5e^{-20t} + (7/19.5)(e^{-0.5t} - e^{-20t})$$

Phương pháp Euler thuận (2): Ví dụ

t	h = 0.01		h = 0.001		h = 0.0001	
	Kết quả	Sai số	Kết quả	Sai số	Kết quả	Sai số
0.01	4.07000	0.08693	4.14924	0.0769	4.15617	0.0076
0.02	3.32565	0.14072	3.45379	0.1259	3.46513	0.0124
0.03	2.72982	0.17085	2.88524	0.1544	2.89915	0.0153
0.04	1.87087	0.18440	2.42037	0.1684	2.43554	0.0167

Phương pháp Euler thuận (3)

- PP Euler thuận rất đơn giản, nhưng có hai nhược điểm:
  - Sai số làm tròn lớn như trong ví dụ 1
  - Tính không ổn định xuất hiện khi hằng số thời gian của phương trình âm, trừ khi bước thời gian h đủ nhỏ.
- VD xét PTVP: $y' = -\alpha y$, $y(0) = y_0$

  trong đó $y_0 > 0$, $\alpha > 0$.

  Lời giải chính xác của bài toán là: $y = y_0 e^{-\alpha t}$ tiến tới 0 khi t tăng. Nếu giải bằng PP Euler thuận thì:

  - Nếu $\alpha h < 1$ thì lời giải được thu nhỏ và dương
  - Nếu $\alpha h > 1$ thì dấu của lời giải là xen kẽ nhau. Đặc biệt nếu $\alpha h > 2$ thi biên độ của lời giải tăng theo từng bước, và lời giải dao động.

  => Không ổn định

Phương pháp Euler thuận (4) đối với hệ PTVP

- Xét hệ PTVP thường cấp 1:

$$y' = f(y,z,t), \quad y(0) = y_0$$

$$z' = g(y,z,t), \quad z(0) = z_0 \qquad (5)$$

Phương pháp Euler thuận đối với hệ PTVP (4) được viết như sau:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(y_n,z_n,t_n)$$

$$z_{n+1} = z_n + h\, g(y_n,z_n,t_n) \qquad (6)$$

Phương pháp Euler thuận (5) đối với PTVP bậc cao

- Để giải các PTVP bậc cao ta có thể phân rã nó thành hệ các PTVP bậc 1.
- VD: Xét PTVP bậc 2:

$$y''(t) - 0.05\, y'(t) + 0.15\, y(t) = 0$$
$$y'(0) = 0 \qquad (7)$$
$$y(0) = 1$$

Đặt y' = z và viết lại (7) dưới dạng

$$y' = z, \qquad y(0) = 1,$$
$$z' = 0.05z - 0.15\, y, \qquad z(0) = 0 \qquad (8)$$

Giải (8) như là hệ PTVP, dùng công thức (6)

Phương pháp Euler cải biên (1)

- PP Euler cải biên chính xác và ổn định hơn PP Euler thuận
- PP Euler cải biên dựa trên quy tắc hình thang để tính tích phân y'=y(t):

$$y_{n+1} = y_n + h/2\,[f(y_{n+1}, t_{n+1}) + f(y_n,t_n)] \qquad (8)$$

- Nếu f là tuyến tính với y thì (8) là tuyến tính với y_{n+1}, do đó ta có thể dễ dàng xác định y_{n+1}
- Nếu f là không tuyến tính với y thì (8) là phi tuyến tính y_{n+1}. Việc tìm y_{n+1} giống việc giải phương trình phi tuyến như đã học trong chương 4.

Phương pháp Euler cải biên (2): VD

- Sử dụng PP Euler cải biên với h=0.1 để giải PTVP:

  $y' = -y^{1.5} + 1$, $y(0) = 10$, với $0 \le t \le 1$
- Áp dụng PP Euler cải biên ta được:

  $$y_{n+1} = y_n + h/2\,[-(y_{n+1})^{1.5} - (y_n)^{1.5} + 2] \qquad (9)$$

  Với n = 0 ta có

  $$y_1 = y_0 + h/2\,[-(y_1)^{1.5} - (y_0)^{1.5} + 2]$$

  xấp xỉ tốt nhất cho y_1 ở vế phải là y_0.

  Đặt $y_1 = y_0$, ta có:

  $$y_1 = y_0 + h/2\,[-(y_0)^{1.5} - (y_0)^{1.5} + 2] \qquad (10)$$
- Tương tự ta tính được y_n

Phương pháp Euler ngược

- Xét PTVP: y' = f(y,t), PP Euler ngược thu được bằng cách sử dụng sai phân xấp xỉ ngược

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx y'_{n+1} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad (1)$$

(1) => $$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad (2)$$

- Chú ý: (2) chưa cho ta công thức hiện bởi vì ta phải tính giá trị của hàm f đối với đối số y_{n+1} còn chưa biết. Để tìm y_{n+1} ta có thể giải (2) như là phương trình phi tuyến như đã trình bày trong chương 4.

Phương pháp Euler ngược: VD

- Xét PTVP: $y' = y^3$, $y(0) = 1$. Thực hiện PP Euler ngược với $h=0.5$, ta có:

  $$y_1 = y_0 + h\, f(y_1,t_1) = 1 + 0.5\,(y_1)^3 \quad (3)$$

  (3) có thể giải bằng phương pháp Newton:

  $$y_k = y_{k-1} – f(y_{k-1})/f'(y_{k-1})$$

  (3) giải bằng Matlab:

  ```
  fzero('x+0.5*x^3-1',1)
  ```

Tổng kết các phương pháp Euler

- Phương pháp Euler thuận dựa trên xấp xỉ sai phân thuận. Sai số trong một khoảng lặp của nó tỉ lệ với h^2 và sai số toàn cục tỉ lệ với h. PP này đơn giản nhưng sai số lớn và độ không ổn định cao.
- Phương pháp Euler cải biên dựa trên quy tắc hình thang. Sai số trong một khoảng lặp của nó tỉ lệ với h^3 và sai số toàn cục tỉ lệ với h^2.
- Phương pháp Euler ngược dựa trên xấp xỉ sai phân ngược. Sai số của nó tương tự như phương pháp sai phân thuận. Tuy nhiên phương pháp này ổn định, vì vậy được dùng để giải những bài toán không trơn (rất khó giải bằng các phương pháp khác).

Phương pháp Runge-Kutta

- Nhược điểm của PP Euler là bậc của độ chính xác giảm dần. Muốn có độ chính xác cao đòi hỏi h phải rất nhỏ.
- Trong PP Runge-Kutta, bậc của độ chính xác được tăng lên bằng cách sử dụng các điểm trung gian trong mỗi bước lặp.
- Xét PTVP: $y' = f(y,t), \quad y(0) = y_0$ (1)

Để tính y_{n+1} tại $t_{n+1} = t_n + h$ với y_n đã biết, ta lấy tích phân phương trình trên trong khoảng $[t_n, t_{n+1}]$ như sau:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)\,dt \qquad (2)$$

PP Runge-Kutta được phát triển nhờ áp dụng các PP tính tích phân số để tính tích phân ở bên phải của (2).

Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 (1)

- Chúng ta khảo sát một ứng dụng của quy tắc hình thang vào vế phải của (2) như sau:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt = \frac{1}{2}h\left[f(y_n,t_n) + f(y_{n+1},t_{n+1})\right] \quad (3)$$

  Trong (3) thì y_{n+1} chưa biết. Như vậy số hạng thứ 2 được xấp xỉ bởi $f(\bar{y}_{n+1},t_{n+1})$, trong đó $\bar{y}_{n+1}$ là ước tính đầu tiên của y_{n+1} được tính theo PP Euler thuận.

- PP thu được theo cách này gọi là PP Runge-Kutta bậc 2

Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 (2)

- Công thức PP Runge-Kutta bậc 2:

$$\overline{y_{n+1}} = y_n + hf(y_n, t_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(y_n, t_n) + f(\overline{y_{n+1}}, t_{n+1})\right] \qquad (4)$$

hoặc ta có thể viết dưới dạng sau:

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$
$$k_2 = hf(y_n + k_1, t_{n+1}) \qquad (5)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 (3)

- PP Runge-Kutta bậc 2 tương đương với PP Euler cải biên chỉ áp dụng với một bước lặp.
- Độ chính xác của PP Runge-Kutta bậc 2 là h^2, trùng với PP Euler cải biên với điều kiện thủ tục lặp giải phương trình phi tuyến trong nó là hội tụ. Như vậy việc sử dụng PP Runge-Kutta bậc 2 với bước nhảy h đủ nhỏ là tốt hơn so với sử dụng PP Euler cải biên.
- Việc sử dung PP Runge-Kutta khá đơn giản.

Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 (4)

- VD: Xét PTVP bậc 2 sau:

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = q(t)$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \qquad (6)$$

trong đó a, b là các hằng số, q(t) đã biết. Đặt z=y'(t) ta có:

$$y' = z, \qquad y(0) = 1,$$

$$z' = q(t) - a\,z - b\,y, \quad z(0) = 0 \qquad (7)$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 (5)

- PP Runge-Kutta cho (7) có dạng như sau:

$$k_1 = h\, z_n$$

$$l_1 = h\,(q_n - a\, z_n - b\, y_n)$$

$$k_2 = h\,(z_n + l_1)$$

$$l_2 = h\,(q_{n+1} - a\,(z_n + l_1) - b\,(y_n + k_1)) \qquad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}\,(k_1 + k_2)$$

$$z_{n+1} = z_n + \tfrac{1}{2}\,(l_1 + l_2)$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3 (1)

- PP Runge-Kutta bậc 3 dựa trên việc áp dụng sơ đồ tích phân bậc chính xác cao hơn cho số hạng thứ 2 trong phương trình (2). Sử dụng quy tắc Simson 1/3, (2) được xấp xỉ bởi:

  $y_{n+1} = y_n + h/6\,[f(y_n,t_n) + 4f(\bar{y}_{n+1/2}, t_{n+1/2}) + f(\bar{y}_{n+1}, t_1)]$ (9)

  trong đó $\bar{y}_{n+1/2}$ và $\bar{y}_{n+1}$ là ước tính (vì $y_{n+1/2}$ và y_{n+1} chưa biết) như sau:

  $\bar{y}_{n+1/2} = y_n + h/2\, f(y_n,t_n)$ (10)

  $\bar{y}_{n+1} = y_n + h[\theta\, f(y_n,t_n)+(1- \theta)\, f(\bar{y}_{n+1/2}, t_{n+1/2})]$ (11)

  trong đó θ (chưa biết) dùng để xác định độ chính xác cực đại của phương pháp.

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3 (2)

- Thay (10) và (11) vào (9), ta thu được PP Runge-Kutta bậc 3 dưới dạng sau:

$$k_1 = h\, f(y_n, t_n)$$

$$k_2 = h\, f(y_n + \tfrac{1}{2} k_1, t_n + \tfrac{1}{2} h)$$

$$k_3 = h\, f(y_n + \theta k_1 + (1-\theta) k_2, t_n + h) \qquad (12)$$

$$y_{n+1} = y_n + 1/6\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

- Có thể chứng minh được rằng $\theta = -1$ là tối ưu.

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (1)

- Việc phát triển PP Runge-Kutta bậc 4 cũng tương tự như PP Runge-Kutta bậc 3, ngoại trừ có thêm bước trung gian tính đạo hàm. PP Runge-Kutta bậc 4 có sai số địa phương tỉ lệ với h^3.
- PP Runge-Kutta bậc 4 dựa trên quy tắc Simson 1/3:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(y_n, t_n) \\
k_2 &= h\, f(y_n + \tfrac{1}{2} k_1, t_n + \tfrac{1}{2} h) \\
k_3 &= h\, f(y_n + \tfrac{1}{2} k_2, t_n + \tfrac{1}{2} h) \\
k_4 &= h\, f(y_n + k_3, t_n + h) \\
y_{n+1} &= y_n + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (2)

- PP Runge-Kutta bậc 4 dựa trên quy tắc Simson 3/8:

$$k_1 = h\, f(y_n, t_n)$$

$$k_2 = h\, f(y_n + 1/3\, k_1, t_n + 1/3\, h)$$

$$k_3 = h\, f(y_n + 1/3\, k_1 + 1/3\, k_2, t_n + 2/3\, h) \qquad (14)$$

$$k_4 = h\, f(y_n + k_1 - k_2 + k_3, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + 1/8\,(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (3)

- VD1: Tính y(1) bằng cách giải PTVP

  $y' = -1/(1+y^2)$,

  $y(0)=1$,

  sử dụng PP Runge-Kutta bậc 4 với h=1

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (4)

- Đặt

  $f(y,t) = -1/(1+y^2)$, $y_0 = 1$, $t_0 = 0$,

  ta có:

  $k_1 = h\, f(y_0,t_0) = -1/(1+1) = -1/2$

  $k_2 = h\, f(y_0 + ½\, k_1,t_0 + ½\, h) = -1/(1+(0.75)^2) = -0.64$

  $k_3 = h\, f(y_0 + ½\, k_2,t_0 + ½\, h) = -1/(1+(0.68)^2) = -0.6838$

  $k_4 = h\, f(y_0 + k_3,t_0 + h) = -1/(1+(0.3161)^2) = -0.9091$

  $y_1 = y_0 + 1/6\, (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

  $= 1+1/6(-0.5 -2\,(0.64) -2\,(0.6838) – 0.9091) = 0.3238$

Các hàm để giải PTVP trên Matlab

- Các hàm giải PTVP: ODE45, ODE113, ODE15S, ODE23S, ODE23T, ODE23TB
- Các hàm thiết lập tùy chọn: ODESET, ODEGET
- Các hàm đưa ra kết quả: ODEPLOT, ODEPHAS2, ODEPHAS3, ODEPRINT
- Tìm công thức giải tích của nghiệm: dsolve

Giải PTVP trên Matlab: ODE23 (1)

- Lệnh gọi:

  [T,Y] = ODE23(ODEFUN,TSPAN,Y0)

- Các tham số đầu vào:
  - TSPAN là khoảng tích phân [t0,t1]
  - Y0 là giá trị ban đầu
  - ODEFUN(T,Y) trả lại véc tơ cột tương ứng với giá trị f(t,y)
- Kết quả:
  - Mỗi dòng trong mảng kết quả Y tương ứng với thời gian trong véc tơ cột T

Giải PTVP trên Matlab: ODE23 (2)

- VD1: Giải PTVP y’ = sin t, y(0) = 1, 0 ≤ t ≤ 2PI.

  (Nghiệm chính xác là: y = -cos t + 2)
- Chương trình Matlab

```
%Viết hàm tính giá trị của hàm vế phải:
function dydt = fp(t,y)
% Tính giá trị cho PTVP y’ = sin t
dydt = [sin(t)];
% Giải PTVP bằng hàm ODE23
[t,y] = ode23(@fp,[0,2*pi],[1]);
plot(t,y);
hold on
plot(t,-cos(t),'r')
```

Bài tập