CHƯƠNG 4

GiẢI PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Nội dung

Đặt vấn đề

1. **Phương pháp chia đôi**
2. **Phương pháp dây cung**
3. **Phương pháp Newton**
4. **Phương pháp cát tuyến**
5. **Phương pháp lặp**
6. **Phương pháp Bairstow**

Đặt vấn đề

- Phương trình phi tuyến (PTPT)
  - VD1: $x^2 = 0$
  - VD2: $1 + 2x + x^2 - 3x^3 + 7x^4 = 0$
  - VD3: $\ln(x+1) = 0$
  - VD4: $tg(x) – artg(2x) = 0$
  - Tổng quát: $f(x) = 0$
- Giải phương trình phi tuyến (root finding)
  - Tìm x để $f(x) = 0$
  - X được gọi là nghiệm của PT, cũng được gọi là không điểm của hàm f
- Tìm nghiệm dưới dạng công thức hiện: Khó, một số không tồn tại (VD PT đa thức bậc lớn hơn 4)

  => sử dụng PP số dựa trên thủ tục lặp

Giải PTPT: Một số khái niệm (1)

- Sự tồn tại nghiệm
  - Định lý: Cho hàm f:R->R; [a,b] là đoạn phân ly nghiệm nếu f(a) và f(b) trái dấu. Nếu thêm điều kiện f liên tục trên [a,b] thì tồn tại nghiệm x^* ϵ [a,b] sao cho $f(x^*)=0$.
  - VD: $e^x + 1 = 0$ vô nghiệm

    $2x + 3 = 0$ có một nghiệm

    $x^2 + 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm

    $\sin(x) = 0$ có vô số nghiệm
- Độ nhạy và điều kiện của bài toán giải PTPT
  - Số điều kiện của bài toán tìm nghiệm x^* : $1/|f'(x^*)|$

Giải PTPT: Một số khái niệm (2)

- Giải PTPT bằng phương pháp lặp
  - Điều kiện dừng
    - $|f(x)| < \varepsilon$

      $|x^* - x| < \varepsilon$
    - ε là độ chính xác cho trước
  - Tốc độ hội tụ:
    - Gọi sai số ở bước lặp k là $e_k = x_k - x^*$; x_k là lời giải xấp xỉ tại bước k, x^* là nghiệm chính xác.
    - Dãy $\{e_k\}$ hội tụ với tốc độ r nếu: $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C$; $C \neq 0$
      - r = 1: hội tụ tuyến tính
      - r > 1: hội tụ trên tuyến tính
      - r = 2: hội tụ bình phương

Giải PTPT: Phương pháp chia đôi (1)

- Ý tưởng: nếu [a,c] chỉ chứa một nghiệm của PT $f(x)=0$ thì $f(a)*f(c)\leq 0$; [a,c]-khoảng phân ly nghiệm
- Phương pháp chia đôi: Chia đôi khoảng phân ly nghiệm liên tục cho đến khi đủ nhỏ, như sau:
  - Chia đôi: $b = (a+c)/2$
  - Kiểm tra:
    - Nếu $f(b) = 0$, => b là nghiệm
    - Nếu $f(a)*f(b)<0$ thì đặt [a,b] là khoảng phân ly nghiệm mới
    - Nếu $f(c)*f(b)<0$ thì đặt [b,c] là khoảng phân ly nghiệm mới
  - Lặp cho đến khi khoảng phân ly nghiệm nhỏ hơn độ chính xác ε cho trước

Giải PTPT: Phương pháp chia đôi (2)

- Độ dài khoảng phân ly nghiệm sau mỗi bước lặp:
  - Bước 1: $(c-a)/2^1$
  - Bước 2: $(c-a)/2^2$
  - Bước n: $(c-a)/2^n$
- Cho trước độ chính xác ε, thì số bước lặp cần thiết là số nguyên n thỏa mãn:

$$\frac{c-a}{2^n} \le \varepsilon \quad => n \ge \log_2 \frac{c-a}{\varepsilon}$$

- Vậy số bước lặp cần thiết là: $=> n = \left\lceil \log_2 \frac{c-a}{\varepsilon} \right\rceil$

Giải PTPT: Phương pháp chia đôi (3)

- VD: PT $e^x - 2 = 0$ có nghiệm nằm trong khoảng [0,2]. Tìm nghiệm với sai số cho phép 0.01
  - Đặt a = 0, c = 2, => f(a)*f(c) = -1*5.389 < 0
  - Bước lặp 1:
    - Đặt b = (2-0)/2 = 1; f(b) = 0.718
    - Kiểm tra: f(a)*f(b) < 0, => [0,1] là khoảng phân ly nghiệm mới
  - Bước lặp 2:
    - Đặt b = (1-0)/2 = 0.5; f(b) = - 0.351
    - Kiểm tra: f(b)*f(c) < 0, => [0.5,1] là khoảng phân ly nghiệm mới
  - ....

Giải PTPT: Phương pháp chia đôi (4)

Lần lặp	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Sai số (độ dài khoảng PLN)
1	0	1	2	-1	0.718	5.3890	1
2	0	0.5	1	-1	-0.351	0.718	0.5
3	0.5	0.75	1	-0.351	0.117	0.718	0.25
4	0.5	0.625	0.75	-0.351	-0.132	0.117	0.125
5	0.625	0.688	0.75	-0.132	-0.011	0.117	0.0625
6	0.688	0.719	0.75	-0.011	0.058	0.117	0.03125
7	0.688	0.703	0.719	-0.011	0.020	0.052	0.015625
8	0.688	0.695	0.703	-0.011	0.004	0.020	0.0078125

- Ghi chú: số bước lặp: $=> n = \left\lceil \log_2 \frac{2-0}{0.01} \right\rceil = \lceil \log_2 200 \rceil = 8$

Giải PTPT: Phương pháp chia đôi (5)

- Yêu cầu và tính năng:
  - Yêu cầu phải biết trước khoảng phân ly nghiệm
  - Không đòi hỏi tính liên tục của đạo hàm bậc nhất
  - Có thể giải kiểu PTPT bất kỳ
  - Có thể áp dụng cho hàm không biểu diễn dưới dạng giải tích

Giải PTPT: Phương pháp chia đôi (6)

- Bài tập: Viết chương trình Matlab giải phương trình phi tuyến bằng phương pháp chia đôi

Giải PTPT: Phương pháp dây cung (1)

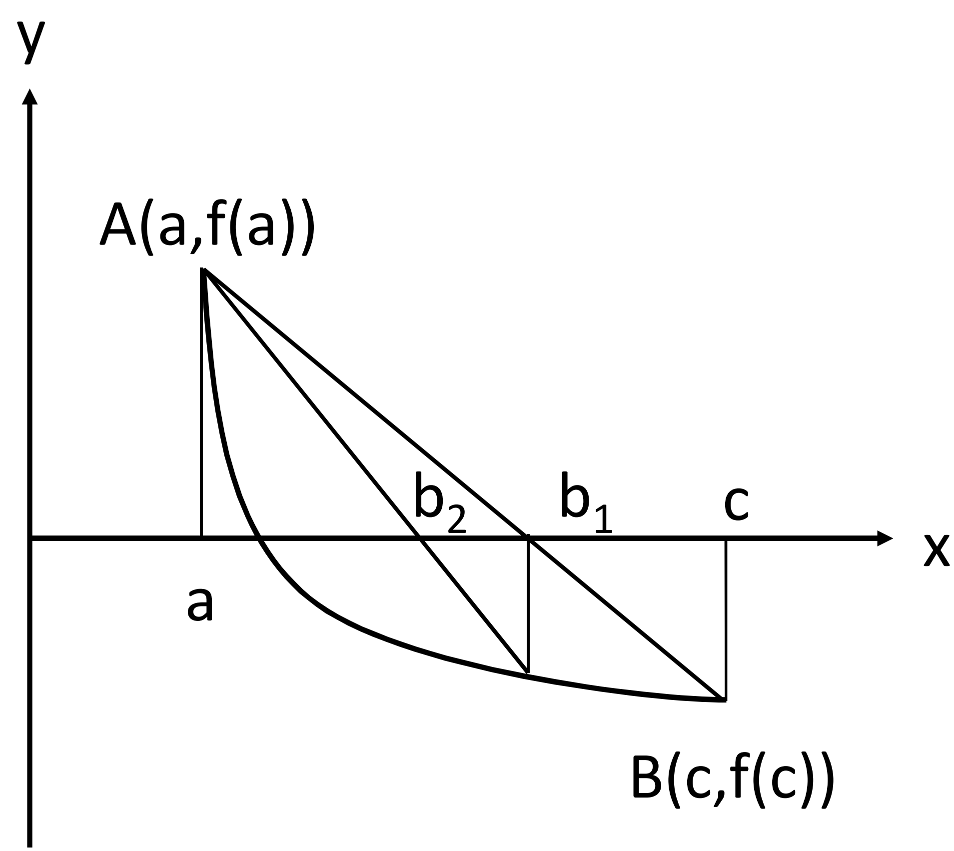
- Thay vì chia đôi khoảng phân ly nghiệm, phương pháp dây cung sử dụng đoạn thẳng đi qua hai đầu mút của khoảng phân ly nghiệm để tìm khoảng phân ly nghiệm mới
- Giả sử [a,c] là khoảng phân ly nghiệm, PT đường thẳng đi qua 2 điểm A(a,f(a)) và B(c,f(c)), gọi là dây cung AB, là:

$$y = f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) \ldots hay \ldots x = a + \frac{c - a}{f(c) - f(a)}(y - f(a))$$

- Điểm b được tìm bằng giao điểm của AB và trục hoành, tức y=0, do đó:

$$b = a - \frac{c - a}{f(c) - f(a)} f(a) = \frac{af(c) - cf(a)}{f(c) - f(a)}$$

Giải PTPT: Phương pháp dây cung (2)



Giải PTPT: Phương pháp dây cung (3)

- Khác so với phương pháp chia đôi:
  - Không đặt b=(c-a)/2
  - Đặt:

$$b = \frac{af(c) - cf(a)}{f(c) - f(a)}$$

Giải PTPT: Phương pháp dây cung (4)

- Yêu cầu và tính năng:
  – Yêu cầu phải biết trước khoảng phân ly nghiệm
  – Có thể giải kiểu PTPT bất kỳ
  – Hội tụ nhanh nếu hàm có dạng phép nội suy tuyến tính; hội tụ chậm nếu khoảng phân ly nghiệm lớn.

Giải PTPT: Phương pháp Newton (1)

- Ý tưởng:
  - Thay PTPT $f(x) = 0$ bằng một phương trình tuyến tính với x.
  - Yêu cầu biết nghiệm xấp xỉ ban đầu
  - Dựa trên khai triển Taylor

Giải PTPT: Phương pháp Newton (2)

- Xét PT f(x) = 0, f(x) khả vi liên tục đến cấp n trong khoảng $[x_{0,}x]$, khả vi cấp n+1 trong khoảng $(x_{0,}x)$; khai triển Taylor cho hàm f(x) là:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

trong đó ξ thuộc (x_o,x). Ký hiệu h = x - x_o, ta có:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+o(h^2)$$

- Một cách xấp xỉ: $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$
- Vậy giải PT f(x)=0 ⇔ giải PT

$$f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)=0 \Rightarrow x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Giải PTPT: Phương pháp Newton (3)

- Thủ tục lặp để giải PTPT bằng phương pháp Newton:
  - Chọn nghiệm xấp xỉ x_0
  - Tìm nghiệm theo công thức lặp

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, k = 1,2,\ldots$$

  - Kết thúc khi:

$$\left| f(x_k) \right| < \varepsilon$$

Giải PTPT: Phương pháp Newton (4)

- Nhận xét:
  - Đòi hỏi tính đạo hàm bậc nhất.
  - Tốc độ hội tụ bình phương

Giải PTPT: Phương pháp Newton (6)

- VD: Giải PT sau: $f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$:
  - Ta có: $f'(x) = 2x - 4\cos(x)$
  - Suy ra công thức lặp Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 4\sin(x_n)}{2x_n - 4\cos(x_n)}$$

  - Lấy $x_0 = 3$, ta có kết quả như bảng sau:

Bước lặp	x	f(x)
0	3	8.346
1	2.153	1.295
2	1.954	0.108

Giải PTPT: Phương pháp Newton (7)

- Bài tập: Viết chương trình Matlab giải PTPT bằng phương pháp Newton

Giải PTPT: Phương pháp cát tuyến

- Phương pháp Newton

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, k = 1,2,\ldots$$

- Ý tưởng: Thay việc tính đạo hàm trong phương pháp Newton bằng việc tính sai phân xấp xỉ dựa trên hai bước lặp liên tiếp.
- Phương pháp cát tuyến:

$$S_{k-1} = f'(x_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}; \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{S_{k-1}}, k = 1,2,\ldots$$

  – Cần hai điểm xuất phát: x_0 và x_1

Giải PTPT: Phương pháp lặp (1)

- Ý tưởng:
  - Thay vì bài toán tìm x để f(x) = 0, người ta viết bài toán dưới dạng: tìm x thỏa mãn

$$x = g(x) \qquad (1)$$

- Định nghĩa: Điểm x^* là điểm bất động của hàm g nếu $x^* = g(x^*)$, nghĩa là x^* không bị biến đổi bởi ánh xạ g. Bài toán (1) gọi là bài toán điểm bất động

Giải PTPT: Phương pháp lặp (2)

- Các ví dụ:
  - Phương pháp Newton, vì $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, k = 1,2,\ldots$

  Nên có thể đặt $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, ta được phương pháp lặp

  - Tìm nghiệm của PT: $f(x) = x - e^x$, => $g(x) = e^x$
  - Tìm nghiệm của PT: $f(x) = x^2 – x – 2$, => $g(x) = x^2 – 2$
- Công thức giải PTPT bằng phương pháp lặp

$$x_k = g(x_{k-1});\ k = 1, 2, \ldots$$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (1)

- Ý tưởng:
  - Dùng để tìm nghiệm của một đa thức
  - Chia đa thức thành các nhân tử bậc 2, => việc tìm nghiệm của đa thức được thay bằng tìm nghiệm của các đa thức bậc 2

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (2)

- Mô tả phương pháp Bairstow:
  - Xét đa thức bậc N:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_Nx^N \qquad (1)$$

Ta có thể viết dưới dạng:

$$y = (x^2 + px + q)*G(x) + R(x) \qquad (2)$$

- p, q chọn tùy ý
- G(x) là đa thức bậc N-2:

$$G(x) = b_2 + b_3x + b_4x^2 + \ldots + b_Nx^{N-2} \qquad (3)$$

- R(x) là phần dư, thường là bậc 1:

$$R(x) = b_0 + b_1x \qquad (4)$$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (3)

– Nếu chọn được p, q sao cho R(x) = 0 thì $x^2 + px + q$ là nhân tử bậc 2 của y và nghiệm của nó được tính theo công thức:

$$-p \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

– Vì b_0 và b_1 phụ thuộc vào cách chọn p, q, nên ta có thể viết:

$$b_0 = b_0(p,q) \qquad (5a)$$

$$b_1 = b_1(p,q)$$

– Bây giờ ta phải tìm p = p*, q = q* để

$$b_0(p^*,q^*) = 0 \qquad (5b)$$

$$b_1(p^*,q^*) = 0$$

khi đó ta sẽ có: R(x) = 0

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (4)

– Thay (3) và (4) vào (2) và viết phương trình thu được theo dạng chuỗi lũy thừa. Bởi vì phương trình này phải bằng phương trình (1), nên bằng cách cân bằng hệ số ta có:

$a_N = b_N$

$a_{N-1} = b_{N-1} + p*b_N$

$a_{N-2} = b_{N-2} + p*b_{N-1} + q*b_N$

.... (6)

$a_2 = b_2 + p*b_3 + q*b_4$

$a_1 = b_1 + p*b_2 + q*b_3$

$a_0 = b_0 + q*b_2$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (5)

– Viết lại PT (6), các hệ số b_0, b_1, ..., b_n, có thể tính được như sau:

$b_N = a_N$

$b_{N-1} = a_{N-1} - p*b_N$

$b_{N-2} = a_{N-2} - p*b_{N-1} - q*b_N$

.... (7)

$b_2 = a_2 - p*b_3 - q*b_4$

$b_1 = a_1 - p*b_2 - q*b_3$

$b_0 = a_0 - q*b_2$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (6)

- Coi p, q trong PT (5a) như là một lân cận của p* và q*, khai triển Taylor cho PT (5b) ta có:

$$b_0(p^*,q^*) = b_0(p,q) + \Delta p\left(\frac{\partial b_0}{\partial p}\right) + \Delta q\left(\frac{\partial b_0}{\partial q}\right) + \ldots = 0 \qquad (8)$$

$$b_1(p^*,q^*) = b_1(p,q) + \Delta p\left(\frac{\partial b_1}{\partial p}\right) + \Delta q\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + \ldots = 0$$

trong đó Δp = p* - p; Δq = q^* – q

- Từ (8) ta có:

$$\Delta p\left(\frac{\partial b_0}{\partial p}\right) + \Delta q\left(\frac{\partial b_0}{\partial q}\right) = -b_0(p,q) \qquad (9)$$

$$\Delta p\left(\frac{\partial b_1}{\partial p}\right) + \Delta q\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + = -b_1(p,q)$$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (7)

- Trong PT (9), đạo hàm riêng được tính bằng cách đạo hàm hai vế của PT (7):
  - Đạo hàm theo p:

$$(b_N)_p = 0$$

$$(b_{N-1})_p = -b_N - p*(b_N)_p$$

$$(b_{N-2})_p = -b_{N-1} - p*(b_{N-1})_p - q*(b_N)_p$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$(b_2)_p = -b_3 - p*(b_3)_p - q*(b_4)_p$$

$$(b_1)_p = -b_2 - p*(b_2)_p - q*(b_3)_p$$

$$(b_0)_p = -q*(b_2)_p$$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (8)

– Đạo hàm theo q:

$(b_N)_q = 0$

$(b_{N-1})_q = 0$

$(b_{N-2})_q = - b_N$

…………………. (11)

$(b_2)_q = - b_4 - p*(b_3)_q - q*(b_4)_q$

$(b_1)_q = - b_3 - p*(b_2)_q - q*(b_3)_q$

$(b_0)_q = - b_2 - q*(b_2)_q$

Giải PTPT: Phương pháp Bairstow (8)

- Tóm tắt phương pháp Bairstow:
  - (1) Khởi tạo giá trị p, q; tính b_0, b_1 theo (7);
  - (2) Tính $(b_0)_p$, $(b_1)_p$, $(b_0)_q$, $(b_1)_q$ theo (10) và (11);
  - (3) Giải (9) để tìm Δp và Δq;
  - (4) Tìm p* và q* theo công thức: p*=p+ Δp;q*=q+ Δq

  Các bước trên được lặp lài nhờ sử dụng p*, q* của bước trước như là giá trí khởi tạo p, q của bước sau.

Một số hàm trên MatLab để giải phương trình

- Tìm nghiệm của đa thức: roots
- Tìm nghiệm của phương trình phi tuyến: FZERO