Chương 5

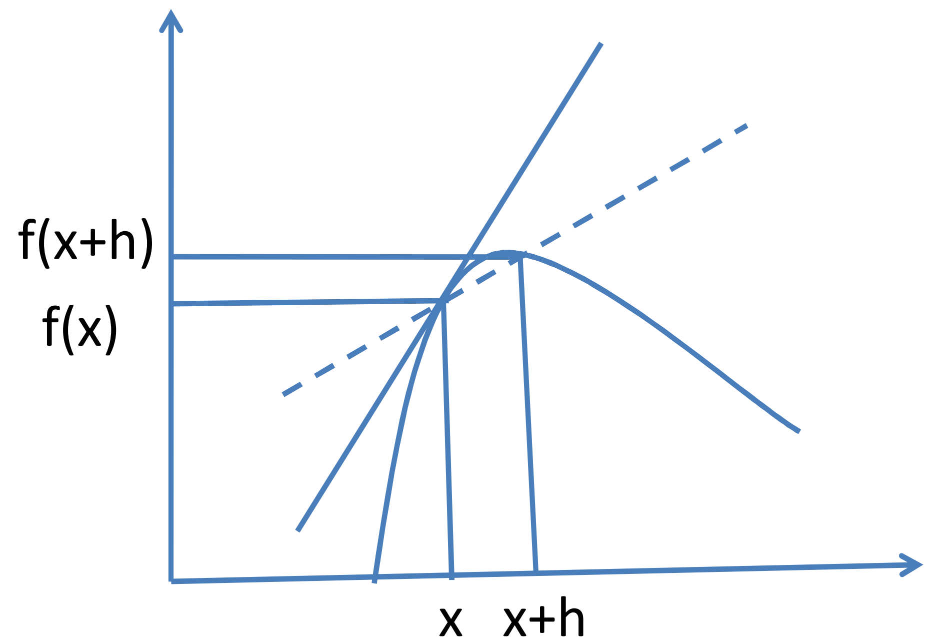
TÍNH GẦN ĐÚNG
ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

5.1. Tính gần đúng đạo hàm: đặt vấn đề

- Định nghĩa đạo hàm bậc nhất:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Ý nghĩa hình học:
  – f'(x) là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm x



- Tính gần đúng đạo hàm:
  – $h \neq 0$
  – f'(x) là hệ số góc của cát tuyến

5.1.1. Công thức sai phân thuận (Forward difference)

- Xây dựng công thức : Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x:

$$f(x+h) = f(x) + f^{'}(x)h + f^{''}(\zeta)\frac{h^2}{2!} \qquad (1)$$

Trong đó ξ thuộc đoạn [x,x+h].

Từ (1) ta có:

$$f^{'}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f^{''}(\zeta)\frac{h}{2!} \qquad (2)$$

Coi số hạng f’’(ξ) h/2 là sai số rút gọn, từ (2) suy ra:

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (3)$$

Là công thức tính gần đúng ĐH theo PP sai phân thuận

CT sai phân thuận: Phân tích sai số

- Sai số rút gọn là: f''(ξ) h/2= O(h)

⇒Phương pháp có độ chính xác bậc nhất

- Sai số làm tròn: Giả sử khi tính f(x) và f(x+h) có sai số làm tròn, công thức tính f':

$$\frac{f(x+h)(1+\delta_1)-f(x)(1+\delta_2)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{\delta_1 f(x+h)-\delta_2 f(x)}{h}$$

Do |δi| nhỏ hơn độ chính xác của máy tính ε nên sai số làm tròn khi tính f' là:

$$\frac{\varepsilon(|f(x+h)|+|f(x)|)}{h}$$

- Sai số tổng cộng đạt tối thiểu khi: $h \approx \sqrt{\varepsilon}$

CT sai phân thuận: Ví dụ

- Xét hàm: $f(x) = \sin x$. Sử dụng CT sai phân thuận để tính gần đúng $f'(\pi/3)$. Phân tích sai số.
  - Tính với $h=10^{-k}$, $k = 1,\ldots,16$
  - Tìm h để có sai số nhỏ nhất

Kết quả

h	Đạo hàm	Sai số
10^{-1}	0.455901885410761	-0.044098114589239
10^{-2}	0.495661575773687	-0.004338424226313
10^{-3}	0.499566904000770	-0.000433095999230
10^{-4}	0.499956697895820	-0.000043302104180
10^{-5}	0.499995669867026	-0.000004330132974
10^{-6}	0.499999566971887	-0.000000433028113
10^{-7}	0.499999956993236	-0.000000043006764
10^{-8}	0.499999996961265	-0.000000003038736
10^{-9}	0.500000041370186	0.000000041370185

5.1.2. Công thức sai phân ngược (Backward difference)

- Xây dựng công thức: Tương tự như trong CT sai phân thuận,khai triển Taylor với x-h thay vì x+h, ta có:

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad (1)$$

- Sai số: Tương tự như trong CT sai phân thuận
  - Độ chính xác bậc nhất
  - Sai số nhỏ nhất khi: $h \approx \sqrt{\varepsilon}$

- Bài tập: Sử dụng CT sai phân ngược để tính gần đúng f’(π/3), biết f(x) = sin x

5.1.3. Công thức sai phân trung tâm (Central difference)

- Xây dựng công thức : Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x:

$$f(x-h) = f(x) - f^{'}(x)h + f^{''}(x)\frac{h^2}{2!} - f^{'''}(\zeta^{-})\frac{h^3}{3!} \qquad (1)$$

$$f(x+h) = f(x) + f^{'}(x)h + f^{''}(x)\frac{h^2}{2!} + f^{'''}(\zeta^{+})\frac{h^3}{3!} \qquad (2)$$

Trong đó ξ^{+} thuộc đoạn [x,x+h], ξ^{-} thuộc đoạn [x-h,x].

Từ (1) và (2) ta có công thức tính gần đúng ĐH theo PP sai phân trung tâm

$$f^{'}(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad (3)$$

CT sai phân trung: Phân tích sai số

- Sai số rút gọn:

$$-\frac{1}{6} f^{'''}(\zeta\ )h^2, \qquad \zeta \in [x-h, x+h]$$

  – CT có độ chính xác bậc 2;
  – Sai số tổng cộng bé nhất khi $h = \varepsilon^{1/3}$

- Bài tập: Sử dụng PP sai phân trung tâm để tính gần đúng f'(π/3), biết f(x) = sin x. So sánh với PP sai phân thuận và sai phân ngược

So sánh sai số 3 phương pháp

h	Sai phân thuận	Sai phân ngược	Sai phân trung tâm
10^{-1}	$\sim10^{-2}$	$\sim10^{-2}$	$\sim10^{-4}$
10^{-2}	$\sim10^{-3}$	$\sim10^{-3}$	$\sim10^{-6}$
10^{-3}	$\sim10^{-4}$	$\sim10^{-4}$	$\sim10^{-8}$
10^{-4}	$\sim10^{-5}$	$\sim10^{-5}$	$\sim10^{-10}$
10^{-5}	$\sim10^{-6}$	$\sim10^{-6}$	**$\sim10^{-12}$**
10^{-6}	$\sim10^{-7}$	$\sim10^{-7}$	$\sim10^{-11}$
10^{-7}	$\sim10^{-8}$	$\sim10^{-8}$	$\sim10^{-10}$
10^{-8}	**$\sim10^{-9}$**	**$\sim10^{-9}$**	$\sim10^{-9}$
10^{-9}	$\sim10^{-8}$	$\sim10^{-8}$	$\sim10^{-8}$

5.1.4. Tính gần đúng đạo hàm cấp cao: Đạo hàm cấp 2

- Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x:

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+f''(h)\frac{h^2}{2!}-f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f''''(x)\frac{h^4}{4!}-f'''''(x)\frac{h^5}{5!}+\ldots(1)$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(h)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f''''(x)\frac{h^4}{4!}+f'''''(x)\frac{h^5}{5!}+\ldots(2)$$

Từ (1) và (2) ta có công thức tính gần đúng ĐH bậc 2

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \qquad (3)$$

- Sai số rút gọn: $-\frac{1}{12}f''''(\zeta)h^2, \qquad \zeta\in\left[x-h,x+h\right]$
  - Sai số bé nhất khi h = $\varepsilon^{1/4}$

5.1.5. Tính gần đúng đạo hàm riêng

- Tương tự, ta có thể xây dựng các PP tính gần đúng đạo hàm riêng, ví dụ PP sai phân trung tâm tính đạo hàm riêng cho hàm f(x,y) như sau:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f(x,y+h) - f(x,y-h)}{2h}$$

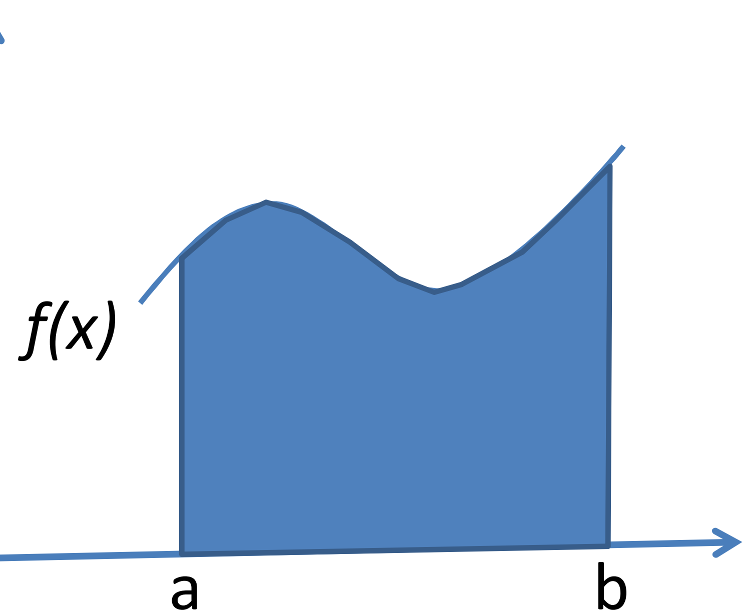
5.2. Tính gần đúng tích phân: đặt vấn đề

- Tính tích phân:

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

trong đó f(x) là hàm khả tích trên đoạn [a,b]

- Ý nghĩa hình học của tích phân:



5.2.1. Tính gần đúng tích phân: Tổng Riemann

- Giả sử hàm f xác định trên [a,b] và Δ là phép chia đoạn [a,b] thành n đoạn đóng $I_k=[x_{k-1},x_k]$, k=1,…,n, trong đó $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Chọn n điểm $\{c_k: k=1,\ldots,n\}$, mỗi điểm thuộc đoạn con, nghĩa là: c_k thuộc I_k với mọi k. Tổng

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$$

được gọi là tổng Riemann của hàm f(x) tương ứng với phép chia Δ và các điểm chọn lọc $\{c_k: k=1,\ldots,n\}$.

5.2.2. Tính gần đúng tích phân: Định nghĩa

- Tích phân xác định của hàm f(x) theo x từ a đến b là giới hạn của tổng Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k,$$

- Với giả thiết là giới hạn này tồn tại.
  - Hàm f(x) gọi là hàm cần tích phân
  - a, b là các cận tích phân
  - [a,b] là khoảng tích phân

5.2.3. Tính gần đúng tích phân: Các tính chất của tích phân xác định

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b C.f(x)dx = C.\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad c \in [a, b]$$

5.2.4. Tính gần đúng tích phân: Các định lý

- ĐL1: Nếu f là liên tục trên [a,b] và F là nguyên hàm của hàm f (F’ = f) thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- ĐL2 (ĐL về giá trị trung bình): Nếu f là liên tục trên [a,b] thì tồn tại số c trong đoạn [a,b] sao cho:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5.2.5. Tính gần đúng tích phân: Công thức Newton-Cotes (1)

- Cách tiếp cận đầu tiên để xây dựng công thức tính gần đúng tích phân là xấp xỉ hàm f(x) trên khoảng tích phân [a,b] bởi một đa thức. Trong mỗi khoảng con ta xấp xỉ hàm f(x) bởi một đa thức:

  $$p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \qquad (1)$$

  Ta có thể dễ dàng tính chính xác tích phân của (1)
- Đơn giản nhất ta có thể thay hàm f(x) bởi đa thức nội suy.

Tính gần đúng tích phân: PP Newton-Cotes (2)

- Thay f(x) bằng đa thức nội suy Lagrange ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a \left(\sum_{i=0}^{m} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \right) dx$$

$$= \sum_{i=0}^{m} f(x_i) \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \qquad (1)$$

Tính gần đúng tích phân: PP Newton-Cotes (3)

- Sai số của PP được đánh giá bởi:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_m(x)dx = \frac{1}{(m+1)!}\int_b^a f^{(m+1)}(\zeta_x)\left(\prod_{i=0}^{m}(x - x_{i})\right)dx$$

$$\zeta_x \in [a, b] \qquad (2)$$

Tính gần đúng tích phân: PP Newton-Cotes (4)

- Các công thức tính gần đúng tích phân thu được theo cách tiếp cận này trong đó sử dụng lưới chia cách đều trong khoảng tích phân, nghĩa là:

  $x_i = a+i*h; i=0,1,\ldots,m; h =(b-a)/m,$

  được gọi là công thức Newton-Cotes.
- Với m khác nhau, ta có các PP khác nhau

m	Bậc đa thức	Công thức	Sai số
1	Tuyến tính	Hình thang	$O(h^2)$
2	Bậc 2	Simpson 1/3	$O(h^4)$
3	Bậc 3	Simpson 3/8	$O(h^4)$

5.2.6. Tính gần đúng tích phân: Công thức hình thang (Trapezoidal rule)

- Với n=1, đa thức nội suy có dạng:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\left(f(a) + f(b)\right)}{2}\left(b-a\right) \qquad (1)$$

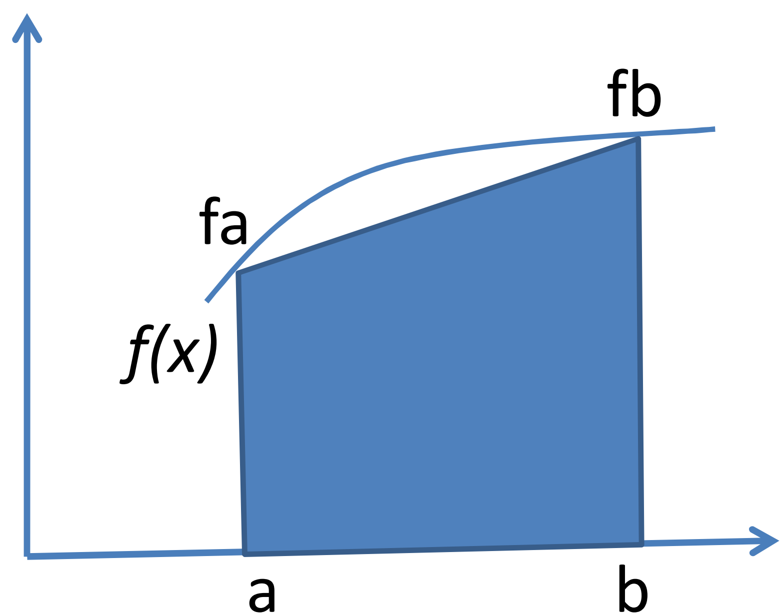
- (1) gọi là công thức hình thang tính gần đúng tích phân

Tính gần đúng tích phân: Công thức hình thang (2)

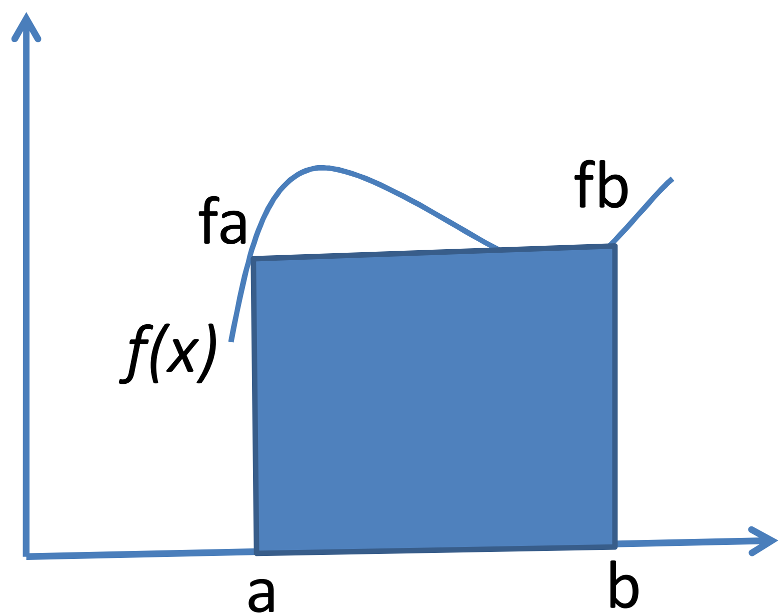
- Sai số của CT hình thang:

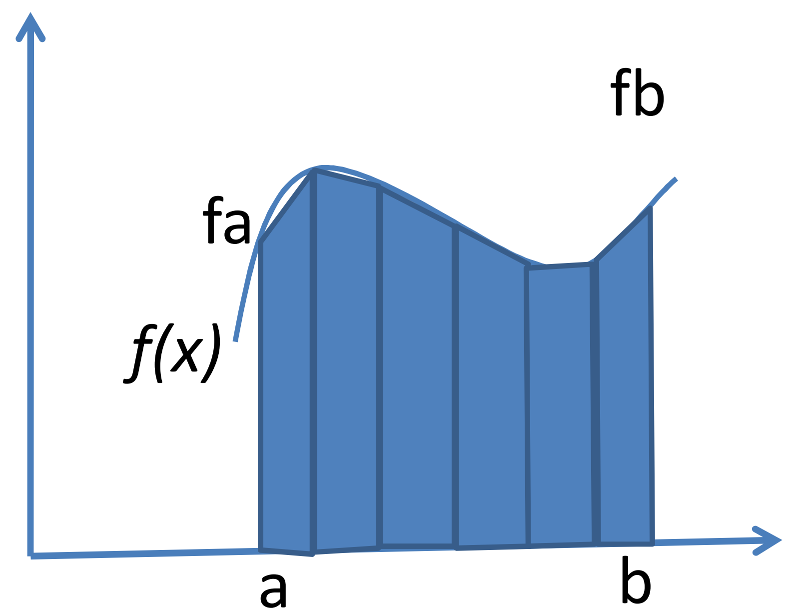
$$-\frac{b-a}{12} f''(\zeta) h^2, \qquad h = b-a, \quad \zeta \in [a,b]$$

- Ý nghĩa hình học:



5.2.7. Tính gần đúng tích phân: Công thức hình thang mở rộng (1)





- Ý tưởng công thức hình thang mở rộng: Chia nhỏ đoạn [a,b] để giảm sai số

Tính gần đúng tích phân: Công thức hình thang mở rộng (2)

- Chia đoạn [a,b] thành n khoảng bằng nhau dùng n+1 điểm: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_{n-1} = a + (n-1)*h$, $x_n = a + n*h$ trong đó h = (b-a)/n, ta có:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)dx \qquad (1)$$

- Áp dụng công thức hình thang cho mỗi đoạn ta có:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right] \qquad (2)$$

- (2) gọi là công thức hình thang mở rộng

5.2.8. Tính gần đúng tích phân: Công thức Simpson 1/3

- Thay n=2 vào công thức Newton-Cotes rồi tính tích phân, ta được:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$x_0 = a, \qquad x_1 = a + h, \qquad x_2 = a + 2h = b, \qquad\qquad (1)$$

- (1) gọi là công thức Simpson 1/3

5.2.9. Tính gần đúng tích phân: Công thức Simpson 1/3 mở rộng

- Giống như CT hình thang mở rộng, ta chia đoạn tích phân [a,b] thành nhiều khoảng con và áp dụng CT Simpson 1/3 cho mỗi khoảng con, ta thu được CT Simpson mở rộng:

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,..}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6,..}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

$$x_0 = a, \qquad x_i = a + ih, \qquad i = 1,\ldots,n, \quad (1)$$

- Chú ý: Ta cần số khoảng con chẵn, hay số điểm lẻ.

5.2.10. Tính gần đúng tích phân: Công thức Simpson 3/8

- Thay n=3 vào công thức Newton-Cotes rồi tính tích phân, ta được:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$x_0 = a, \qquad x_1 = a + h, \qquad x_2 = a + 2h, \qquad x_3 = a + 3h \qquad\qquad (1)$$

- (1) gọi là công thức Simpson 3/8