L'EVARISTE

Sujet matin - Suggestion de corrigé

Durée : 2 heures

ALBERTSCHOOL D E Shaw & Co

I - Début du périple chez Eugène Charles Catalan

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n-ième nombre de Catalan par :

$$C_n := \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

1. Calculer C_i pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$.

0.5pt/C_i

On a :

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{1!1!} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

$$C_2 = \frac{1}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = \boxed{5}$$

$$C_4 = \frac{1}{5} \cdot \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 2 = \boxed{14}$$

$$C_5 = \frac{1}{6} \cdot \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 = \boxed{42}$$

$$C_6 = \frac{1}{7} \cdot \binom{12}{6} = \frac{1}{7} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{132}$$

2. a) Montrer que :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

2pts

On a :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
&= C_n
\end{aligned}$$

b) En déduire que $C_n \in \mathbb{N}$.

1pt - $C_n \in \mathbb{Z}$
1pt - $C_n > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étant donné que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

On peut affirmer que

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

De plus :

$$C_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} \cdot \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Par conséquent, $\boxed{C_n \in \mathbb{N}}$.

3. a) Montrer que :

$$(n+2) \cdot C_{n+1} = 2(2n+1) \cdot C_n$$

.

2pts

On a :

$$\begin{aligned}
(n+2) \cdot C_{n+1} &= (n+2) \cdot \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n!}{n!n!} \\
&= 2(2n+1) \cdot C_n
\end{aligned}$$

b) En déduire que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

2pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

et que

$$2(2n+1) \geqslant n+2$$

On peut en déduire que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

c) Démontrer par récurrence que $C_n \geqslant 2^{n-1}$; En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} C_n$.

4pts récurrence
1pt limit

On veut démontrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ le prédicat suivant :

$$\mathcal{P}(n) : C_n \geqslant 2^{n-1}$$

<u>Initialisation</u> : On a $2^{-1} = \dfrac{1}{2} \leqslant 1 = C_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié. De plus :

$$2^0 = 1 \leqslant 1 = C_1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est également vérifié.

Ici, on traite les deux premiers rangs pour ne pas être embêté dans l'hérédité.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifié à un rang $n \geqslant 1$ quelconque, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié. On constate que $2n+1 \geqslant n+2$, donc :

$$\frac{2(2n+1)}{n+2} \geqslant 2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n \\ &\geqslant 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Le prédicat étant vérifié au rang 0, au rang 1, et héréditaire à partir du rang 1, il est alors vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit via minoration par la suite divergente $(2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ que :

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$$

4. a) Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$C_0 = 1 \text{ and } \forall n \geqslant 0,\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

8pts

b) En déduire que C_n est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k - 1$.

8pts

a) Méthode combinatoire : L'identité démontrée en 2)a), à savoir :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

présente une interprétation combinatoire très captivante !

Effectivement, n parmi $2n$ correspond au nombre de chemins de taille $2n$ allant de $(0,0)$ à (n,n) composés de n pas unitaires $(1,0)$ (vers l'est) et de n pas unitaires $(0,1)$ (vers le nord).

On choisit par exemple les n moments où l'on va vers l'est, et on comble le reste du chemin avec des pas vers le nord.

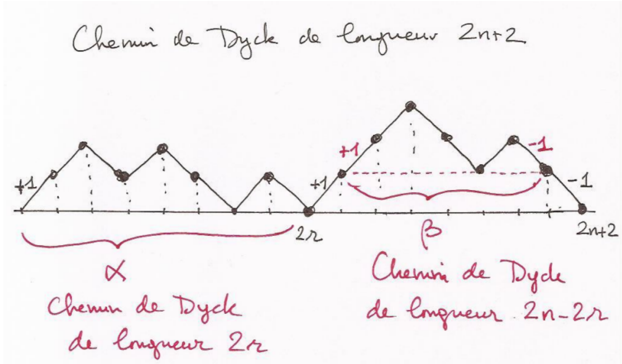
Le fait d'enlever $n+1$ chemins parmi $2n$ retire les « mauvais chemins », i.e les chemins qui passent sous la diagonale principale d'équation $y = x$.

Bref, C_n compte le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) composés de pas unitaires $(1,0)$ (vers l'est) et $(0,1)$ (vers le nord) qui ne passent jamais sous la diagonale principale $y = x$ (on appelle cela des escaliers de Dyck pour votre culture personnelle :D).

La stratégie est ici de dénombrer différemment ces escaliers. Soit un escalier de Dyck P de longueur $2(n+1)$. On considère son **dernier retour à la diagonale**, c'est-à-dire le plus grand indice $k > 0$ tel que le chemin **touche** la diagonale principale.

Ce retour correspond à un premier **sous-escalier de Dyck**, de longueur $2k$ pour un certain $k \in [\![0,n]\!]$, et qui est un escalier de Dyck présentant C_k possibilités. Le reste du chemin, qui part de ce point et se termine à $(n+1, n+1)$, est un autre sous-escalier de Dyck de longueur $2(n+1-k)$ indépendant du premier. Étant donné que les deux premières étapes et les deux dernières étapes de celui-ci sont imposées (nécessairement il monte deux fois, et il redescend deux fois !), il y a $C_{n+1-k-1}$ possibilités, soit C_{n-k}.

Visuellement, ça donne ça :



Ainsi, chaque chemin de Dyck de longueur $2(n+1)$ peut être décomposé de façon unique en une concaténation de deux chemins de Dyck :

$$\text{un chemin de longueur } 2k \quad \text{suivi de} \quad \text{un chemin de longueur } 2(n+1-k)$$

On a donc :

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k}$$

Méthode par somme génératrice :

Méthode télescopique :

II - Petit détour chez James Stirling

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **asymptotiquement équivalentes** si :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Auquel cas, on note $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$.

Le but de cette partie est de démontrer de façon élémentaire l'équivalent asymptotique de Stirling :

$$\exists L \in \mathbb{R}, \quad n! \underset{\infty}{\sim} L\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite :

$$u_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

1. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1.$$

2pts

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) &= \ln\left(\frac{\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)e}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(e^{-1}) \\
&= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1
\end{aligned}$$

2. On souhaite encadrer $K_n := \ln(n+1) - \ln(n)$.

a) Justifier que K_n correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f définie sur $[n, n+1]$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

1pt

By the fundamental theorem calculus :

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \ln(n+1) - \ln(n)$$

since $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur $[n, n+1]$, le trapèze tangent à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ ayant pour base $[n, n+1]$, ainsi que le trapèze dont les points de coordonnées sont :

$\cdot\ (n, 0) \qquad \cdot\ (n+1, 0) \qquad \cdot\ \left(n, \frac{1}{n}\right) \qquad \cdot\ \left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$

2pts

Use GeoGebra or Desmos (I will put a proper drawing later, maybe).

c) Montrer que :

$$\frac{2}{2n+1} \leqslant K_n \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

.

4pts

- $\frac{2}{2n+1}$ correspond to the area of the trapeze tangent to $\mathcal{C}_f$ at $n+\frac{1}{2}$ with boundaries $y=0$, $x=n$ and $x=n+1$.

- K_n correspond to the area under $\mathcal{C}_f$ with boundaries $y=0$, $x=n$ and $x=n+1$.

- $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ correspond to the area of the trapeze defined by the 4 points $(n,0)$, $(n+1,0)$, $(n+1,f(n+1))$, $(n,f(n))$.

$f'(x)=\frac{1}{x}$ and $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$, so $f''(x)<0 \forall x\in\mathbb{R}^*$, hence f is concave, which gives the inequality.

3. Déduire de ce qui précède que :

$$0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad (\star)$$

4pts

From 2., we have :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{2n+1} \leqslant K_n = \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\
\iff \quad & \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot\frac{2}{2n+1} \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)] \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot\frac{2n+1}{2n(n+1)} \\
\iff \quad & 1 \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)] \leqslant \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} \\
\iff \quad & 0 \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)]-1 =^{\text{using 1}} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4n^2+4n} \\
\iff \quad & 0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad \text{(using 1.)}
\end{aligned}$$

4. On pose $v_n := u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.
a) Justifier à l'aide de $(\star)$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1pt u_n
2pts v_n

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \\
\iff \quad & \ln(u_{n+1}) \leqslant \ln(u_n) \\
\iff \quad & u_{n+1} \leqslant u_n \\
\iff \quad & (u_n) \text{ decreases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \ln\left(\frac{v_n e^{\frac{1}{4n}}}{v_{n+1} e^{\frac{1}{4(n+1)}}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{4n}-\frac{1}{4(n+1)}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \leqslant 1 \\
\iff & \frac{v_n}{v_{n+1}} \leqslant 0 \\
\iff & v_n \leqslant v_{n+1} \\
\iff & (v_n) \text{ increases}
\end{aligned}
$$

b) Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, notée L.

4pts

Since $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} > 0$ (as all terms are positive) and (u_n) decreases, (u_n) converges (say, to L).

Moreover, $\forall n > 1, u_n < u_1 = e$ as (u_n) decreases (so $L \in [0, e]$).

As $\forall n > 0, e^{-\frac{1}{4n}} < 1$, $v_n = u_n e^{-\frac{1}{4n}} < e$ and (v_n) increase, so (v_n) converges (say, to L').
Note that $v_n > 0$, so $L' \in [0, e]$ as well, and $v_n < u_n$ $\forall n > 0$, so $0 \leqslant L' \leqslant L \leqslant e$.

If $L = 0$, then $L' = 0$ and $L = L'$.
If $L > 0$, then $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{L'}{L}$. Observe that $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{4n}} = 1$, so $\frac{L'}{L} = 1 \iff L' = L$.
Thus, in both cases, $L = L'$, so (u_n) and (v_n) converge to the same limit.

5. Conclure que :

$$
L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \leqslant n! \leqslant L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}e^{\frac{1}{4n}}.
$$

2pts each side

Since (u_n) is a decreasing sequence converging to L, we have $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
& u_n \geqslant L \\
\iff & \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \geqslant L \\
\iff & n! \geqslant L\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \\
\iff & n! \geqslant L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}
\end{aligned}
$$

Since (v_n) is an increasing sequence converging to L, we have $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & v_n \leqslant L \\ \iff \quad & \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{4n}} \leqslant L \\ \iff \quad & n! \leqslant L \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} e^{\frac{1}{4n}} \\ \iff \quad & n! \leqslant L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}} \end{aligned}$$

6. En déduire l'équivalent asymptotique de Stirling.

4pts

Using 5., we have for all n natural :

$$\begin{aligned} & L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \leqslant \quad n! \quad \leqslant L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}} \\ \iff & \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{L\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \leqslant \frac{n!}{L\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \leqslant \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}}{L\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \end{aligned}$$

Of course :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{L\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

and

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}}{L\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{4n}} = 1$$

Hence, by the two policemen theorem (or "sandwich" theorem), we have :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{L\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

7. En admettant que $L = \sqrt{2\pi}$, démontrer finalement que :

$$C_n \underset{\infty}{\sim} \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$$

4pts

Using $n! \sim L\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$, hence, $(2n)! \sim L\sqrt{2n} \cdot \left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right)$:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{L\sqrt{2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{L^2 n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{\sqrt{2} \cdot (2)^{2n}}{L\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

III - Escale sympathique chez John Wallis

Le but de cette partie est de démontrer que L vaut bien $\sqrt{2\pi}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit :

$$W_k := \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}x$$

On définit de plus la fonction suivante :

$$g : x \longmapsto -\frac{x}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

1. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?

0.5pt $g(0)$
0.5pt $g(1)$

$$g(0) = 0 \text{ and } g(1) = 0$$

2. a) Déterminer W_0.

1pt

$$W_0 = \int_0^1 (1-x^2)^0 dx = \int_0^1 dx = 1$$

b) Justifier que $W_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

4pts

$$W_1 = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

let $x = \sin(u)$ so $\frac{dx}{du} = \cos(u)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}du \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)du\right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

As

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(u)du = 0.$$

3. a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; g'(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

4pts

g is the combination of differentiable functions on $\mathbb{R}$, hence, it is itself differentiable on $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}\right)' + \left(-\frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (x^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot [-(1-x^2)+1] - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
\\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{k+2}\right]
\end{aligned}$$

b) En déduire que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

2pts

Using the fundamental theorem of Calculus :

$$\begin{aligned}
g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(x)dx \\
0 - 0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{k+2}\right] dx \\
0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

c) Montrer qu'alors :

$$\frac{k+3}{k+2} W_{k+2} = W_k$$

1pt

From b), recognizing the expressions for W_k and W_{k+2} :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}\,dx \\
0 &= W_k - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) W_{k+2} \\
W_k &= \left(\frac{k+3}{k+2}\right) W_{k+2}
\end{aligned}$$

d) Conclure que :

$$W_{2k} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \qquad\qquad W_{2k-1} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2pts each

By induction on even $n = 2k$: $W_0 = 1$ and $W_{k+2} = \frac{k+2}{k+3} W_k$, so :

$$W_{2k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i+1} = \frac{\prod_{i=1}^{k} 2i}{\prod_{i=1}^{k} 2i+1} = \frac{2^k k!}{\prod_{i=1}^{k} 2i+1} = \frac{2^k k! \prod_{i=1}^{k} 2i}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Note that $\prod_{i=1}^{k}(2i+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}$.

By induction on odd $n = 2k-1$: $W_1 = \frac{\pi}{4}$ and $W_{k+2} = \frac{k+2}{k+3} W_k$, so :

$$W_{2k-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2i+1}{2i+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k-1} 2i+1}{\prod_{i=0}^{k-1} 2i+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

Note that $\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.

e) Justifier que :

$$0 \leqslant W_{2k} \leqslant W_{2k-1} \leqslant W_{2k-2}$$

Puis que :

$$1 \leqslant \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} \leqslant \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}}$$

4pts

On $x \in [0,1]$, we have $x^2 \in [0,1]$ and $1 - x^2 \in [0,1]$. Morover, if $u \in [0,1]$ then $a > b$ implies $u^a < u^b$, so :

$$\begin{aligned}
& & \frac{2k}{2} & > \frac{2k-1}{2} & > \frac{2k-2}{2} & \\
\Longrightarrow 0 & & \leqslant (1-x^2)^{\frac{2k}{2}} & < (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} & < (1-x^2)^{\frac{2k-2}{2}} & \qquad \forall\, x \in [0,1] \\
\Longrightarrow \int_0^1 0\, dx & & \leqslant \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k}{2}} dx & \leqslant \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} dx & \leqslant \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k-2}{2}} dx & \qquad \text{(integrating over } [0,1]) \\
\Longleftrightarrow 0 & & \leqslant W_{2k} & \leqslant W_{2k-1} & \leqslant W_{2k-2} & \qquad \text{(recognizing expression for } W_k) \\
\Longrightarrow & & 1 & \leqslant \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} & \leqslant \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}} & \qquad \text{(dividing by } W_{2k})
\end{aligned}$$

f) En déduire que :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} = 1$$

1pt

From c), we have $\frac{W_{2k-2}}{W_{2k}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$ as $k \to +\infty$. Hence, by the two policemen theorem (or "sandwich" theorem), and e), we have the desired result.

4. Déduire de tout ce qui précède que $L = \sqrt{2\pi}$.
<u>Indication</u> : On pourra utiliser l'équivalent asymptotique de Stirling couplé au résultat précédent.

4pts

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{k\to+\infty} \frac{W_{2k}}{W_{2k-1}} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}}{\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{(2k+1)\cdot\left((2k)!\right)^2}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}\left(L\sqrt{k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^4}{(2k+1)\cdot\left(L\sqrt{2k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\right)^2}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}L^4k^2\left(\frac{k}{e}\right)^{4k}}{(2k+1)\cdot L^2(2k)2^{4k}\left(\frac{k}{e}\right)^{4k}}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= L^2\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{(2k+1)\pi}
\end{aligned}
$$

We know $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2\pi}$, hence, we have $L^2\cdot\frac{1}{2\pi} = 1$ thus $L = \sqrt{2\pi}$ (as $L > 0$).

IV - Une fin déroutante

On pose ici :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_k}$$

1. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}_+$. On note $\mathcal{K}$ cette limite.

2pts

From I-3.a), we have $C_n \geqslant 2^{n-1} \implies 0 \leqslant \frac{1}{C_n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Hence, (S_n) increases. Moreover, $S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}$, and since $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} = 4$, $S_n \leqslant 4$, so (S_n) converges to $\mathcal{K} \in [0, 4]$.

2. On rappelle que l'arctangente (notée arctan) est la réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Autrement dit :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$$

a) Justifier que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

1pt

$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ hence, $\arctan(\tan(\frac{\pi}{6})) = \arctan(\frac{1}{\sqrt{6}})$ so $\arctan(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{\pi}{6}$.

b) On admet que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démontrer que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

1pt

Basic application of chain rule : $\arctan(u(x)) = \arctan'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

3. On admet que :

$$\mathcal{K} = \int_0^1 \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} \mathrm{d}x$$

a) Justifier qu'une primitive de $h : x \longmapsto \dfrac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}$ est donnée par :

$$H : x \longmapsto \frac{1}{9}\left(\frac{3(2x-1)(x^2-x+3)}{(1-x+x^2)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

8pts

I am not latex-ing those calculations.

LeChat solution :
We need to find $H'(x)$ and show that it equals $h(x)$.
First, let's differentiate $H(x)$:

$$H(x) = \frac{1}{9}\left(3(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Using the product rule and chain rule, we get :

$$H'(x) = \frac{1}{9}\left(3 \cdot \frac{d}{dx}\left[(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\right] + 4\sqrt{3} \cdot \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]\right)$$

Now, let's differentiate each term separately :
1. Differentiate $(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}$:
Using the product rule :

$$\frac{d}{dx}\left[(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\right] = (2x-1)\cdot\frac{d}{dx}\left[(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\right] + (x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}[2x-1]$$

2. Differentiate $\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$:
Using the chain rule :

$$\frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Combining these results and simplifying, we should arrive at :

$$H'(x) = \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} = h(x)$$

Thus, $H(x)$ is indeed a primitive of $h(x)$.
b) En déduire la tant attendue valeur de $\mathcal{K}$.

4pts

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \int_0^1 h(x)dx \\
&= H(1) - H(0) \qquad \text{(fundamental theorem of calculus)} \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3(2-1)(1-1+3)}{(1-1+1)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2-1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3(0-1)(0-0+3)}{(1-0+0)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{0-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(9 + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 9 - 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 2 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{\pi}{3} = 2 + \frac{\pi}{9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

4. Démontrer que $\mathcal{K}$ est un nombre irrationnel.
Indication : On admettra que π n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers.

2pts

π is transcendent, while $9\sqrt{3}$ and 2 are algebraic numbers, hence, $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$ is transcendent, and $\mathcal{K}$ is transcendent as well. $\mathcal{K}$ being transcendent, it must be irrational.