L'EVARISTE

Examen de l'après-midi

Durée : 4 heures

Les téléphones portables, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tout dispositif électronique de communication ou de stockage, ainsi que tout document, sont interdits.

Les calculatrices sans mémoire (type collège) ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la présentation écrite est un critère important de notation. L'humilité est appréciée tout au long du raisonnement. Vous pouvez traiter les problèmes dans l'ordre de votre choix.

<u>Problème 1</u> : *(Bonne année !)*

2026 est un entier remarquable : c'est un **<u>nombre beprisque</u>**, c'est-à-dire un nombre situé entre un carré parfait et un nombre premier. En effet,

$$2025 = 45^2 \quad \text{et} \quad 2027 \text{ est premier.}$$

À l'heure actuelle, on conjecture qu'il existe une infinité de nombres beprisques, mais on ne sait pas le démontrer (si vous avez du temps libre, n'hésitez pas à essayer).

Voici un modeste problème de théorie des nombres centré autour de 2025, 2026 et 2027 :)

1. *(Échauffement)* Écrire 2025 et 2026 comme somme de deux carrés d'entiers naturels, puis montrer que 2027 ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers naturels.
   On a
   $$2025 = 45^2 + 0^2,$$
   et aussi
   $$2025 = 36^2 + 27^2,$$
   puisque $36^2 + 27^2 = 1296 + 729 = 2025$.
   De plus,
   $$2026 = 45^2 + 1^2,$$
   car $45^2 = 2025$.

   Impossibilité d'écrire 2027 comme somme de deux carrés
   On commence par observer que
   $$2027 \equiv 3 \pmod 4.$$
   Or, pour tout entier n,
   $$n^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4.$$
   Ainsi, pour tous $a, b \in \mathbb{N}$,
   $$a^2 + b^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 2 \pmod 4,$$
   et ne peut donc jamais être congru à 3 modulo 4.
2. *(Les choses se corsent)* Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que
   $$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351}.$$
   Montrer que a est un multiple de 2027.
   Il est trivial que
   $$\begin{aligned} a = {} & 2637731588470808407259503965177847921076789082427033971477349444417 \\ & 8217932556844996978604843774588644816540813564994171995517040932876 26 \\ & 8878029363179960206617904350428384585228056547129749416915414850836 35 \\ & 8358610673699571811688474712041805538449096672774522488661252862932 91 \\ & 5696834442336691520769636695125886000141140905926734135056566249045 64 \\ & 2884998120563572069498074979766785808845950014757610422042278080081 24 \\ & 4484028288301681912321247998922220944629774705297069189674415676972 76 \\ & 8096271459446471314271584465993264030402715491625425617698463673624 46 \\ & \hfill 57998831960081144148882996236435 11, \end{aligned}$$
   ce qui est évidemment divisible par 2027.
   Plus sérieusement,
   $$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351} \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1350}\right) \\ &= \frac{1}{676} + \frac{1}{677} + \cdots + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351} \\ &= \left(\frac{1}{676} + \frac{1}{1351}\right) + \left(\frac{1}{677} + \frac{1}{1350}\right) + \ldots \\ &= \frac{2027}{676 \times 1351} + \frac{2027}{677 \times 1350} + \ldots \end{aligned}$$

La primalité de 2027 permet de conclure.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On sait qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des chiffres $a_0, \ldots, a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \qquad \text{(écriture en base 10 de } N\text{)}.$$

On définit la fonction f par

$$f(N) = \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

On dit que N est un **nombre heureux** si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = N, \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = f(u_k) \end{cases}$$

atteint la valeur 1, c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_p = 1,$$

sinon, on dit que N est un **nombre malheureux**.

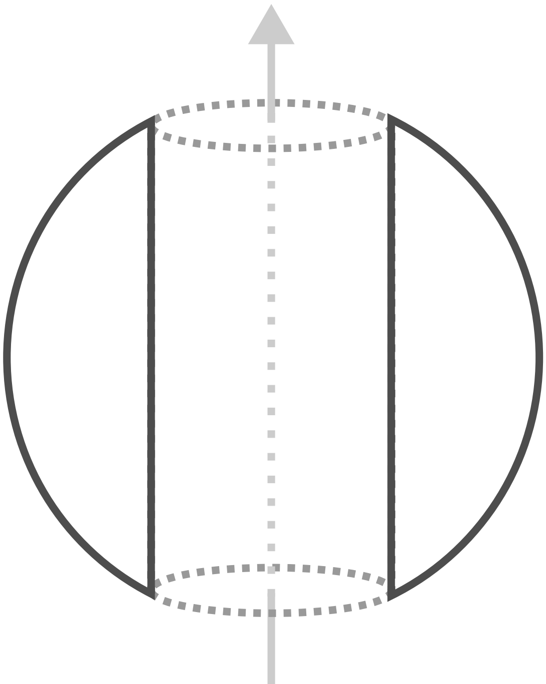
a) Vérifier que 2026 est un nombre heureux, et que 2025 et 2027 sont des nombres malheureux :(

b) Justifier qu'il existe une infinité de nombres heureux et une infinité de nombres malheureux.

c) Montrer que l'une des deux propriétés suivantes est toujours vérifiée :
- N est un nombre heureux ;
- il existe un indice $r \in \mathbb{N}$ tel que
$$u_r = 4,$$
et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associée à N est périodique à partir de l'indice r.

<u>Problème 2</u> : *(Le cadeau d'Axel)*

Axel souhaite fabriquer un collier unique pour sa petite amie ; il achète donc chez un bijoutier une sphère pleine d'or parfaitement ronde. Pour transformer cette sphère en une élégante perle d'or, il perce un trou cylindrique rectiligne passant exactement par le centre de la sphère.



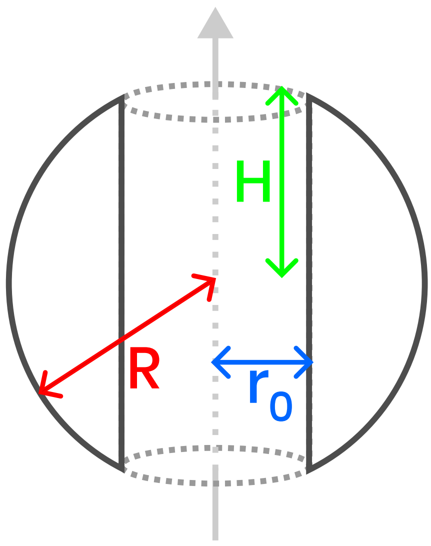
Il perce soigneusement, en prenant soin de récupérer chaque copeau d'or, car le bijoutier s'est engagé à racheter tout l'or inutilisé au même prix au gramme. Ainsi, Axel ne paie que la quantité d'or effectivement présente dans la perle finale.

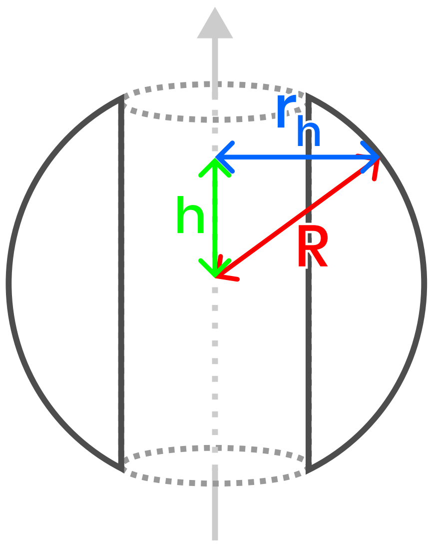
Une fois le trou percé, Axel pose la perle obtenue sur la table. Sa hauteur (la distance entre le bas et le haut de la perle) est exactement de 1 cm.
Axel souhaite savoir : quel est le volume de la perle d'or qu'il a créée ?

Axel consulte le prix de l'or : ≈ 2500 € par cm^3. Sa petite amie adorant les mathématiques, Axel décide de se fixer un budget élégant de 100π € pour la perle d'or.

Il se demande : quelles tailles de perles (c'est-à-dire quelles hauteurs de perle et quels choix de rayon initial de la sphère / rayon du trou) correspondent exactement à son budget de 100π € ?
Expliquer toutes les options de taille permettant de payer exactement 100π €.

Annotons la figure en plaçant l'origine au centre de la sphère :





À partir de cela, on obtient par le théorème de Pythagore :

$$H^2 + r_0^2 = R^2 \implies r_0 = \sqrt{R^2 - H^2}$$

et

$$h^2 + r_h^2 = R^2 \implies r_h = \sqrt{R^2 - h^2}$$

Exprimons le volume recherché sous forme d'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \int_{-H}^{H} \left(\int_{r_0}^{r_h} 2\pi r \ dr \right) \ dh \\
&= \pi \int_{-H}^{H} \left(\int_{\sqrt{R^2-H^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} 2r \ dr \right) \ dh \\
&= \pi \int_{-H}^{H} \left[r^2 \right]_{\sqrt{R^2-H^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \ dh \\
&= \pi \int_{-H}^{H} (R^2 - h^2) - (R^2 - H^2) \ dh \\
&= \pi \int_{-H}^{H} H^2 - h^2 \ dh \\
&= \pi \left[H^2 h - \frac{1}{3} h^3 \right]_{-H}^{H} \\
&= \pi \left(\left(H^3 - \frac{1}{3} H^3 \right) - \left(-H^3 + \frac{1}{3} H^3 \right) \right) \\
&= \frac{4\pi}{3} H^3
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un résultat célèbre : le volume d'une sphère percée dépend uniquement de la hauteur du solide obtenu, et non du rayon initial de la sphère.

En remplaçant par la valeur $H = 0{,}5$ cm :

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \text{ cm}^3$$

Axel peut utiliser un volume maximal

$$\mathcal{V} = \frac{100\pi}{2500} = \frac{\pi}{25} \text{ cm}^3$$

d'or. On obtient donc

$$\frac{4\pi}{3}H^3 = \frac{\pi}{25} \implies H^3 = \frac{3}{100} \implies H = \sqrt[3]{0.03} \approx 0.31 \text{ cm}.$$

Ainsi, tout $R > H = \sqrt[3]{0.03} \approx 0.31$ cm convient, à condition que le cylindre percé ait pour rayon

$$r_0 = \sqrt{R^2 - H^2}.$$

<u>Problème 3</u> : ***(Le traîneau à propulsion laser du Père Noël)***

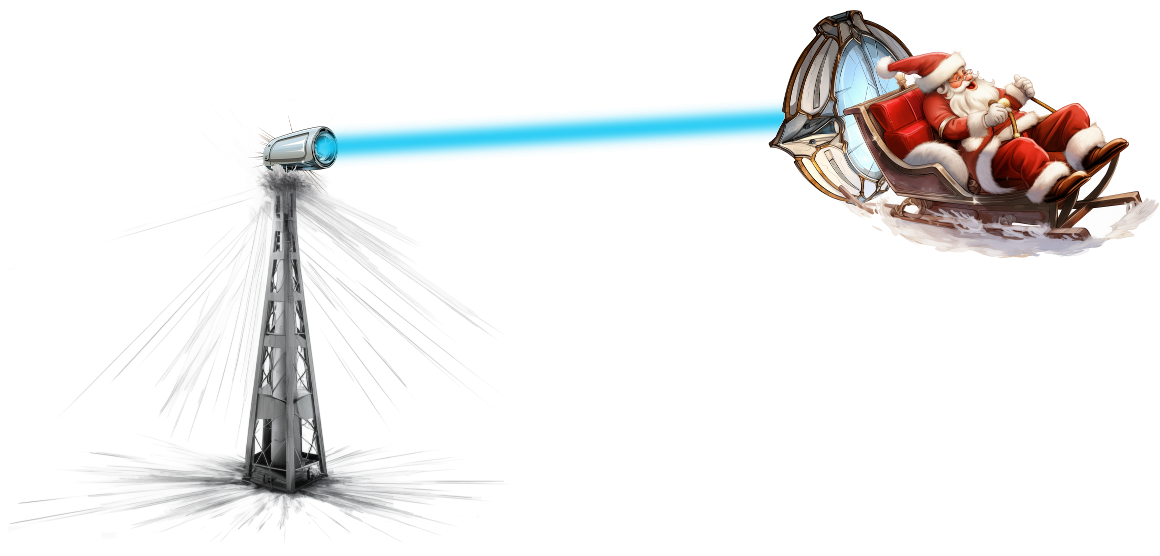
Des étudiants de l'École Albert ont espionné la nuit de Noël. Ils ont découvert le secret du traîneau du Père Noël : il est extrêmement high-tech ! En effectuant des mesures, ils ont réussi à en déduire le fonctionnement suivant :
Le traîneau est propulsé par des tours laser. Le principe est simple :

- Les tours sont disposées à intervalles réguliers.
- Chaque tour émet un laser qui pousse le traîneau vers l'avant.
- Le traîneau possède un bouclier à l'arrière pour se protéger du laser.

Lorsque le traîneau passe à proximité d'une tour, la distance à cette tour est notée D (en mètres). Le laser devient plus faible lorsque le traîneau s'éloigne ; en fait, la vitesse du traîneau est inversement proportionnelle à la distance à la tour dont il reçoit l'impulsion. Le traîneau doit rester à au moins 8 km de chaque tour lorsqu'il reçoit de l'énergie. Lorsqu'il passe devant la première tour (au temps $t = 0$), il est déjà à la distance de sécurité de 8 km et se déplace à 900 km/h (soit 250 m/s). Le traîneau ne doit jamais ralentir en dessous de 40 m/s (soit 144 km/h). S'il va plus lentement, il ne peut plus voler correctement.

Autrement dit : à quelle distance maximale peut-on espacer les tours pour que le traîneau ne cesse jamais de voler ?

À long terme, quelle est la vitesse moyenne du traîneau ?



Problème : Le traîneau se déplace à proximité de tours laser qui le propulsent vers l'avant. La vitesse du traîneau dépend de sa distance D à la tour :

$$V = \frac{\beta}{D}, \quad \beta = 2{,}000{,}000 \text{ s}^{-1}.$$

On cherche à déterminer l'espacement maximal possible entre deux tours tel que le traîneau ne descende jamais en dessous de la vitesse minimale

$$V_{\min} = 40\,\text{m/s}.$$

Étape 1 : Déterminer la distance maximale à une tour correspondant à la vitesse minimale. Le traîneau doit vérifier

$$V \geq V_{\min} \implies \frac{\beta}{D} \geq V_{\min} \implies D \leq \frac{\beta}{V_{\min}}.$$

En remplaçant $\beta = 2{,}000{,}000\,\text{s}^{-1}$ et $V_{\min} = 40\,\text{m/s}$:

$$D_{\max} = \frac{2{,}000{,}000}{40} = 50{,}000 \text{ m}.$$

Étape 2 : Calculer la distance parcourue par le traîneau entre deux tours. Le traîneau commence à la distance $D_0 = 8{,}000\,\text{m}$ (distance minimale de sécurité à la première tour) et avance jusqu'à atteindre la distance $D_{\max} = 50{,}000\,\text{m}$ par rapport à cette tour. La distance parcourue le long de la trajectoire correspond alors à la différence de ces distances, en supposant que les tours sont alignées le long d'une droite et que la distance D est mesurée le long de cette droite :

$$\Delta x = D_{\max} - D_0 = 50{,}000 - 8{,}000 = 42{,}000 \text{ m}.$$

Étape 3 : Conclusion Ainsi, l'espacement maximal $L_{\max}$ entre deux tours consécutives, garantissant que le traîneau ne descende jamais en dessous de $V_{\min}$, est

$$\boxed{L_{\max} = 42{,}000 \text{ m} = 42 \text{ km}.}$$

Le traîneau passe à proximité de chaque tour avec une vitesse

$$V(D) = \frac{\beta}{D}, \quad \beta = 2{,}000{,}000 \text{ s}^{-1}.$$

La distance à chaque tour varie entre la distance minimale de sécurité

$$D_{\min} = 8{,}000 \text{ m}$$

et la distance maximale

$$D_{\max} = 50{,}000 \text{ m},$$

qui correspond à la vitesse minimale admissible

$$V_{\min} = 40 \text{ m/s}.$$

Étape 1 : Exprimer le temps nécessaire pour parcourir une petite distance dD. Le traîneau s'éloigne de la tour le long de la droite reliant la tour et le traîneau. À la distance D, la vitesse instantanée est

$$V(D) = \frac{dD}{dt} = \frac{\beta}{D} \quad \implies \quad dt = \frac{D}{\beta}\,dD.$$

Étape 2 : Calculer le temps total pour passer de $D_{\min}$ à $D_{\max}$.

$$T = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \frac{D}{\beta}\,dD = \frac{1}{\beta}\left[\frac{D^2}{2}\right]_{D_{\min}}^{D_{\max}} = \frac{D_{\max}^2 - D_{\min}^2}{2\beta}.$$

Étape 3 : Calculer la distance totale parcourue sur cet intervalle. La distance le long de la droite entre les tours est

$$L = D_{\text{max}} - D_{\text{min}}.$$

Étape 4 : Calculer la vitesse moyenne.
La vitesse moyenne est donnée par

$$\overline{V} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{L}{T} = \frac{D_{\text{max}} - D_{\text{min}}}{\frac{D_{\text{max}}^2 - D_{\text{min}}^2}{2\beta}} = \frac{2\beta(D_{\text{max}} - D_{\text{min}})}{D_{\text{max}}^2 - D_{\text{min}}^2}.$$

On factorise $D_{\text{max}} - D_{\text{min}}$ au dénominateur :

$$D_{\text{max}}^2 - D_{\text{min}}^2 = (D_{\text{max}} - D_{\text{min}})(D_{\text{max}} + D_{\text{min}}),$$

d'où

$$\overline{V} = \frac{2\beta}{D_{\text{max}} + D_{\text{min}}}.$$

Étape 5 : Application numérique.

$$\overline{V} = \frac{2 \cdot 2{,}000{,}000}{50{,}000 + 8{,}000} = \frac{4{,}000{,}000}{58{,}000} \approx 68.97 \text{ m/s} \approx 248 \text{ km/h}.$$

Ainsi :

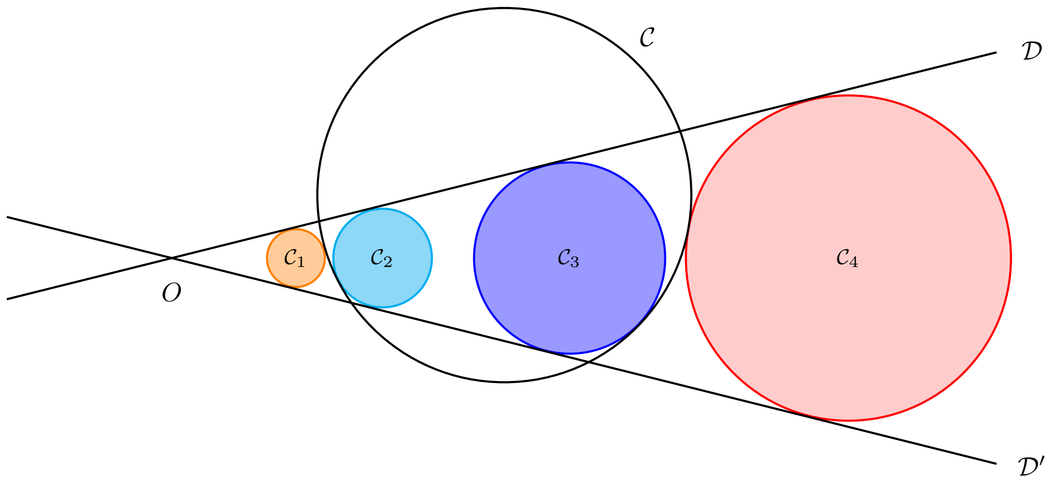
$$\boxed{\overline{V} \approx 69 \text{ m/s} \quad (\text{soit } 248 \text{ km/h}).}$$

Problème 4 : ***(Sangaku !)***

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites s'intersectant en un point O, et $\mathcal{C}$ un cercle coupant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

On considère en outre quatre cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ de rayons respectifs R_1, R_2, R_3, R_4, tous tangents à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$; les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ étant tangent intérieurement à $\mathcal{C}$, et les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$ étant tangent extérieurement à $\mathcal{C}$.

À titre d'illustration, voici un exemple de configuration correspondant à l'énoncé :



Démontrer le théorème d'Ohara, c'est-à-dire :

$$R_1 R_4 = R_2 R_3.$$