L'EVARISTE

Sujet après-midi

Durée : 4 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les problèmes dans l'ordre que vous souhaitez.

<u>Problème 1</u> : *(Bonne année !)*

2026 est un entier remarquable : il s'agit d'un **<u>nombre beprisque</u>**, c'est-à-dire un nombre compris entre un carré parfait et un nombre premier. Effectivement,

$$2025 = 45^2 \qquad \text{et} \qquad 2027 \text{ est premier.}$$

À l'heure actuelle, nous conjecturons qu'il existe une infinité de nombres beprisques, mais nous ne savons pas le démontrer (s'il vous reste un peu de temps, n'hésitez pas).

Voici donc un modeste sujet de théorie des nombres centré sur $2025, 2026$ et 2027 :)

1. *(Mise en jambe)* Écrire 2025 et 2026 comme la somme de deux carrés d'entiers naturels, puis montrer que 2027 ne peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers naturels.
2. *(Cela se corse)* Considérons $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351}.$$

   Montrer que a est un multiple de 2027.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On sait qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des chiffres $a_0, \ldots, a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \qquad \text{(écriture de } N \text{ en base 10).}$$

   On définit la fonction f par

$$f(N) = \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

   On dit que N est un **<u>nombre heureux</u>** si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = N, \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = f(u_k) \end{cases}$$

   atteint la valeur 1, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_p = 1,$$

   autrement, on dira que N est **<u>nombre malheureux</u>**.

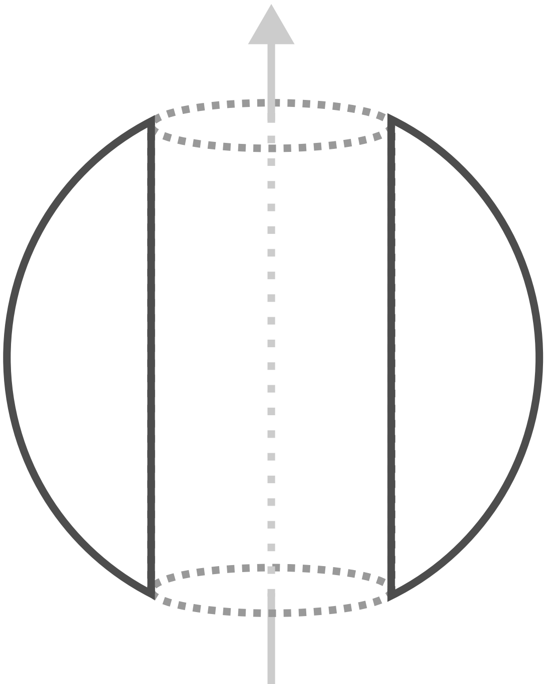
   a) Vérifier que 2026 est un nombre heureux, puis que 2025 et 2027 sont des nombres malheureux :(
   b) Justifier qu'il existe une infinité de nombres heureux et une infinité de nombres malheureux.
   c) Montrer que l'une des deux propriétés suivantes est systématiquement vérifiée :
      - N est un nombre heureux ;
      - il existe un rang $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_r = 4,$$

        et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associée à N est périodique à partir du rang r.

<u>Problème 2</u> : ***(Le cadeau d'Axel)***

Axel veut fabriquer un collier unique pour sa petite amie ; il achète donc chez un bijoutier une sphère d'or massif parfaitement ronde. Pour transformer cette sphère en une élégante perle dorée, il perce un trou cylindrique rectiligne passant exactement par le centre de la sphère.



Il perce soigneusement, en s'assurant de récupérer toute la limaille d'or, car le bijoutier a accepté de racheter tout l'or inutilisé au même prix au gramme. Ainsi, Axel ne paie que la quantité d'or qui reste réellement dans la perle finale.

Une fois le trou percé, Axel pose la perle ainsi obtenue sur la table. Sa hauteur (la distance entre le bas et le haut de la perle) est exactement de 1 cm.
Axel veut savoir : quel est le volume de la perle d'or qu'il a créée ?

Axel regarde le prix de l'or : ≈ 2500€ par cm^3. Sa petite amie adore les mathématiques, donc Axel décide de se limiter à un budget « propre » de 100π€ pour la perle.

Il se demande : quelle(s) taille(s) de perle (c'est-à-dire quelles hauteurs de perle et quels choix de rayon de la sphère initiale / rayon du trou) correspondent exactement à son budget de 100π€ ?
Expliquer toutes les options de taille possibles pour lesquelles il paie exactement 100π€.

<u>Problème 3</u> : ***(Le traîneau du Père Noël propulsé par laser)***

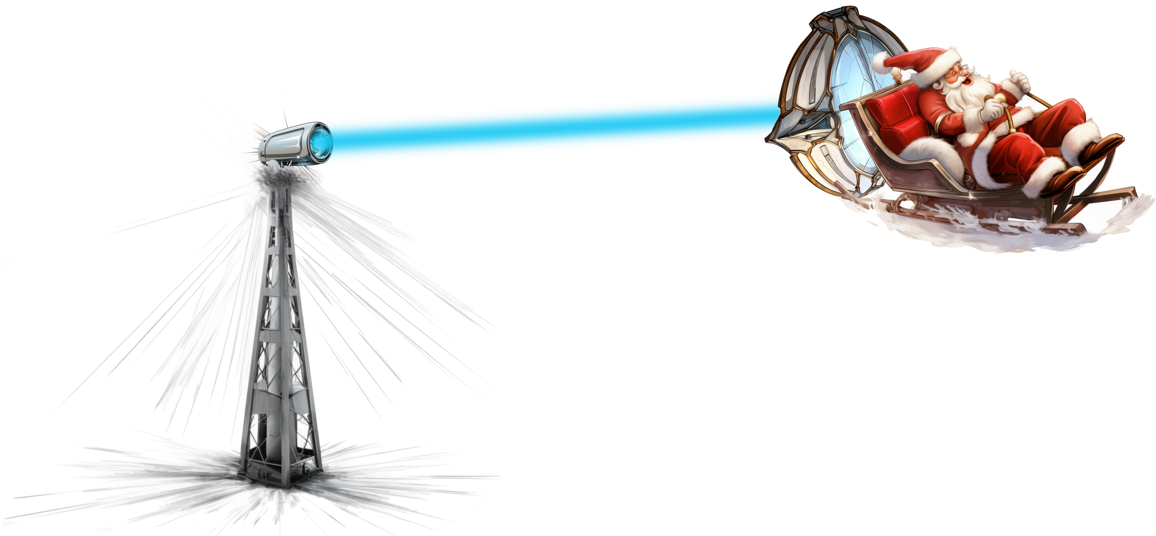
Des élèves d'Albert School ont espionné le Père Noël la veille de Noël. Ils ont découvert son secret : il possède un traîneau très high-tech ! En faisant des mesures, ils ont réussi à déduire les informations suivantes sur son fonctionnement :
Le traîneau est propulsé par des tours laser. L'idée est simple :

- Il y a des tours espacées à intervalles réguliers.
- Chaque tour tire un laser qui pousse le traîneau vers l'avant.
- Le traîneau possède un bouclier à l'arrière pour se protéger du laser.

Lorsque le traîneau passe devant une tour, on appelle D (en mètres) la distance à cette tour. Le laser devient plus faible lorsque le traîneau s'éloigne ; en fait, la vitesse du traîneau est inversement proportionnelle à la distance à la tour qui le pousse. Le traîneau doit rester à au moins 8 km de chaque tour lorsqu'il reçoit de l'énergie. Quand le traîneau passe devant la première tour (au temps $t = 0$), il est déjà à la distance de sécurité de 8 km et se déplace à 900 km/h (soit 250 m/s). Le traîneau ne doit jamais ralentir en dessous de 40 m/s (ce qui correspond à 144 km/h). S'il va plus lentement que cela, il ne peut pas voler correctement.

Ainsi, à quelle distance maximale peut-on espacer les tours pour que le traîneau ne cesse jamais de voler ?

À long terme, quelle est la vitesse moyenne du traîneau ?

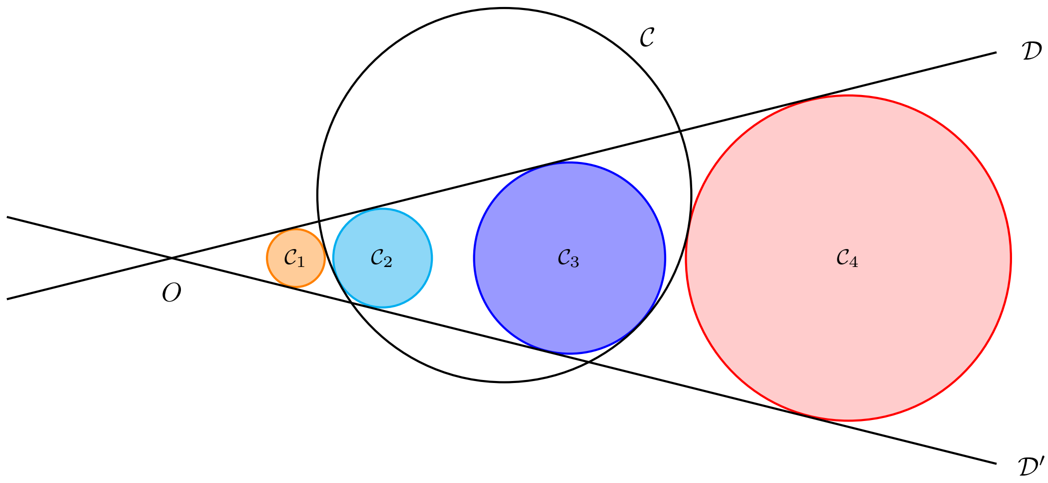


<u>Problème 4</u> : *(Sangaku !)*

Considérons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en un point O, et $\mathcal{C}$ un cercle coupant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Considérons de plus quatre cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ de rayons respectifs R_1, R_2, R_3, R_4 étant tous tangents à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$; les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ étant tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$ étant tangents extérieurement à $\mathcal{C}$.

À titre indicatif, voici un exemple de configuration correspondant à l'énoncé :



Démontrer le théorème d'Ohara, i.e.

$$R_1 R_4 = R_2 R_3.$$