L'EVARISTE

Sujet matin

Durée : 2 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur ***important*** *d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les questions dans l'ordre que vous souhaitez.*

Rappels et notations :

On dispose des quantificateurs et des connecteurs logiques suivants :

$\neg$	négation
$\forall$	pour tout
$\exists$	il existe
$\wedge$	conjonction (et)
$\vee$	disjonction (ou)
$\Longrightarrow$	implication (si ... alors ...)
$\Longleftrightarrow$	équivalence (si et seulement si)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes*. On dit que $z \in \mathbb{C}$ s'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = x + iy,$$

où l'*unité imaginaire* i vérifie $i^2 = -1$. On appelle x la *partie réelle* de z, notée $\Re(z)$, et y sa *partie imaginaire*, notée $\Im(z)$. On appelle de plus *conjugué* de z le complexe défini par

$$\overline{z} = x - iy,$$

et on appelle *module* de z le réel positif défini par

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

I – Mise en jambe

Dans cette section, considérons $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supposons $a \neq 0$.

1. a) [$\cdot$/**1**] Résoudre l'équation $ax + b = 0$.
   b) [$\cdot$/**1**] Utiliser votre formule pour résoudre $5x + 7 = 0$.
2. a) [$\cdot$/**8**] En mettant l'expression quadratique sous forme canonique, résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

   b) Résoudre les équations suivantes :
      i) [$\cdot$/**2**] $x^2 + x - 6 = 0$
      ii) [$\cdot$/**2**] $x^2 - 24x + 143 = 0$
      iii) [$\cdot$/**2**] $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
      iv) [$\cdot$/**2**] $(e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$
3. [$\cdot$/**3**] Considérons l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

   Justifier qu'il existe $a', b', c' \in \mathbb{R}$ tels que cette équation soit équivalente à

$$x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

4. [$\cdot$/**3**] En procédant au changement de variable

$$x = y - \frac{a'}{3},$$

   montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{R}$ telle que l'équation précédente soit équivalente à

$$y^3 + py + q = 0,$$

5. a) [$\cdot$/**3**] En posant $y = u + v$, réécrire l'équation $y^3 + py + q = 0$ en fonction de u et v.
   b) [$\cdot$/**3**] En imposant la condition

$$uv = -\frac{p}{3},$$

   expliciter une équation entre u^3, v^3 et q.
6. Considérons l'équation en la variable z suivante :

$$(z - u^3)(z - v^3) = 0.$$

   a) [$\cdot$/**4**] Réécrire cette équation avec des coefficients exprimés en fonction de p et q.
   b) [$\cdot$/**4**] Exprimer z en fonction de p et q.

   <u>Indication</u> : on pourra utiliser la formule obtenue au cours de la question 2.
   c) [$\cdot$/**2**] En supposant que les deux solutions de l'équation en z sont u^3 et v^3, expliciter u et v.
7. [$\cdot$/**2**] En déduire une expression de y en fonction de p et q.
8. [$\cdot$/**6**] On admet que l'une des solutions de l'équation

$$y^3 + py + q = 0$$

   est donnée par

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2}}}^{2} + (\frac{p}{3}^{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2}}}^{2} + (\frac{p}{3}^{3}.$$

   Résoudre l'équation

$$x^3 + 9x^2 + 33x + 25 = 0.$$

   <u>Indication</u> : après avoir trouvé une racine, factoriser puis utiliser la formule du second degré.

Nous avons ainsi trouvé une formule pour déterminer une racine d'un polynôme de degré 1, 2 et 3. Il existe également une formule générale pour les polynômes de degré 4, mais elle ne tenait pas dans la marge de cette page...

II – Théorème fondamental de l'algèbre

1. a) [·/**1**] Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) \leqslant |z| = |\overline{z}|.$$
   b) [·/**1**] Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = z\overline{z}.$$
   c) [·/**1**] En calculant $|zw|^2$, montrer que
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |zw| = |z|\,|w|.$$
   d) [·/**4**] En calculant $|z+w|^2$, montrer que
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z+w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{(Inégalité triangulaire)}.$$
   e) [·/**2**] Justifier que
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z| - |w| \leqslant |z+w|,$$
   en utilisant l'inégalité triangulaire.

L'objectif de cette section est de montrer que tout polynôme
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{où } a_k \in \mathbb{C},$$
admet exactement n racines complexes (comptées avec multiplicité).

2. a) [·/**4**] Montrer que
$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty.$$
   b) [·/**1**] En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > R \ \Rightarrow\ |p(z)| > |p(0)| + 1.$$
   c) [·/**2**] En considérant
$$D = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R \,\},$$
   montrer que $|p(z)|$ admet un minimum global sur D.
3. Soit z_0 un point où ce minimum est atteint, c'est-à-dire
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |p(z_0)| \leqslant |p(z)|.$$
   On suppose par l'absurde que $|p(z_0)| > 0$.
   Posons $w = z - z_0$ et définissons $P(w) = p(z_0 + w)$. Notons
$$P(w) = \sum_{k=0}^{n} b_k w^k.$$
   a) [·/**1**] Exprimer b_0 en fonction de $p(z_0)$.
   b) [·/**1**] Montrer qu'il existe un entier $k_0 \geqslant 1$ tel que
$$P(w) = b_0 + w^{k_0} q(w),$$
   où q est un polynôme vérifiant $q(0) \neq 0$.
4. On utilise l'approximation $w^{k_0} q(w) \approx w^{k_0} q(0)$ pour $|w|$ petit. Écrivons
$$p(z_0) = Re^{i\alpha}, \qquad q(0) = Se^{i\beta}, \qquad w = re^{i\theta}.$$
   a) [·/**1**] Exprimer w^{k_0} et $w^{k_0} q(0)$ en fonction de r, S, β, θ.
   b) [·/**3**] Trouver θ tel que
$$\arg(w^{k_0} q(0)) \equiv \arg(p(z_0)) + \pi \pmod{2\pi}.$$

c) [$\cdot$/**2**] En déduire l'expression de $w^{k_0}q(0)$.

d) [$\cdot$/**2**] Montrer que
$$|p(z_0) + w^{k_0}q(0)| < |p(z_0)|.$$

e) [$\cdot$/**2**] Conclure à une contradiction sous l'hypothèse $|p(z_0)| > 0$.

5. On pose le terme d'erreur
$$E(w) = w^{k_0}(q(w) - q(0)).$$

a) [$\cdot$/**2**] Exprimer $P(w)$ en fonction de b_0, $w^{k_0}q(0)$ et $E(w)$.

b) [$\cdot$/**2**] Justifier que
$$\lim_{w\to 0} q(w) = q(0).$$

c) [$\cdot$/**2**] Majorer $|E(w)|$ pour $|w|$ assez petit.

d) [$\cdot$/**2**] Montrer que
$$|p(z_0 + w)| \leqslant |p(z_0) + w^{k_0}q(0)| + |E(w)|.$$

e) [$\cdot$/**3**] Conclure que p admet au moins une racine.

6. [$\cdot$/**3**] Par factorisation itérative, montrer qu'un polynôme de degré n admet exactement n racines.

III - Discussion autour de la théorie des groupes

1. Considérons deux objets étiquetés 1 et 2. On appelle (1) la permutation identité, et (1 2) la permutation qui échange les deux objets. La composition des permutations est notée $\star$.

   On peut se représenter la situation de manière concrète : on dispose de deux boules, une blanche (notée W) et une noire (notée B). L'état initial est (W, B). La permutation (1) laisse l'état inchangé, tandis que (1 2) échange les deux boules.

a) [$\cdot$/**2**] Calculer les compositions suivantes :

— $(1\ 2) \star (1\ 2)$

— $(1) \star (1\ 2)$

— $(1\ 2) \star (1)$

— $(1) \star (1)$

b) [$\cdot$/**4**] On rappelle qu'un ensemble S muni d'une loi $\cdot$ est appelé un groupe s'il vérifie :

— **Fermeture :** $\forall a, b \in S,\ a \cdot b \in S$;

— **Associativité :** $\forall a, b, c \in S,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

— **Élément neutre :** $\exists e \in S$ tel que $\forall a \in S,\ a \cdot e = e \cdot a = a$;

— **Inverse :** $\forall a \in S,\ \exists a^{-1} \in S$ tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Montrer que l'ensemble $\{(1), (1\ 2)\}$ muni de la loi $\star$ est un groupe, noté S_2.

c) [$\cdot$/**4**] Un groupe est dit *abélien* si
$$\forall a, b \in S, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Le groupe S_2 est-il abélien ? Justifier.

2. Considérons maintenant une équation du second degré
$$x^2 + px + q = 0$$
admettant deux racines r_1 et r_2.

a) [$\cdot$/**2**] Écrire les racines r_1 et r_2 à l'aide de la formule du second degré.

b) [$\cdot$/**2**] On peut voir r_1 et r_2 comme deux objets permutés par le groupe S_2. Trouver une quantité impliquant r_1 et r_2 qui est invariante par permutation.

3. Considérons maintenant trois objets étiquetés 1, 2 et 3. L'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ muni de la composition $\star$ est noté S_3.

   On définit les permutations suivantes :

— (1) : identité ;

— (1 2), (1 3), (2 3) : transpositions ;

— (1 2 3) et (1 3 2) : cycles de longueur 3.

a) [$\cdot$/**6**] Compléter la table de Cayley de S_3 :

$\star$	(1)	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1)						
(1 2)						
(1 3)						
(2 3)						
(1 2 3)						
(1 3 2)						

b) [$\cdot$/**2**] Le groupe S_3 est-il abélien ? Justifier.

c) [$\cdot$/**3**] On appelle *ordre* d'un élément a, noté $\mathrm{ord}(a)$, le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $a^n = e$. Déterminer l'ordre de (2 3), puis l'ordre de (1 2 3).

4. Considérons désormais cinq objets étiquetés $1, 2, 3, 4, 5$. L'ensemble de toutes les permutations de ces objets muni de la composition est noté S_5.

a) [$\cdot$/**2**] Combien y a-t-il de permutations dans S_5 ? On notera ce nombre $|S_5|$.

b) [$\cdot$/**4**] Donner un exemple de permutation de S_5 :

- d'ordre 2 ;
- d'ordre 3 ;
- d'ordre 5 ;
- d'ordre 6.

c) [$\cdot$/**2**] Le groupe S_5 est-il abélien ? Justifier.

5. On appelle *transposition* toute permutation qui échange exactement deux éléments et laisse les autres invariants.

a) [$\cdot$/**1**] Écrire le cycle (1 2 3) comme produit de transpositions.

b) [$\cdot$/**2**] Écrire le cycle (1 2 3 4) comme produit de transpositions.

c) [$\cdot$/**3**] Montrer qu'un cycle général $(1\ 2\ \dots\ k)$ peut s'écrire comme produit de transpositions.

d) [$\cdot$/**4**] Montrer qu'une permutation quelconque peut s'écrire comme produit de transpositions.

6. Une permutation est dite *paire* si elle s'écrit comme produit d'un nombre pair de transpositions. L'ensemble des permutations paires de S_5 est noté A_5.

a) [$\cdot$/**4**] Montrer que A_5 est un sous-groupe de S_5.

b) [$\cdot$/**4**] Montrer que exactement la moitié des permutations de S_5 sont paires. En déduire $|A_5|$.

7. Deux éléments g, h d'un groupe G sont dits *conjugués* s'il existe $x \in G$ tel que

$$h = xgx^{-1}.$$

L'ensemble des éléments conjugués à g est appelé la *classe de conjugaison* de g.

a) [$\cdot$/**1**] Montrer que l'élément neutre forme à lui seul une classe.

b) [$\cdot$/**4**] Montrer qu'un élément ne peut appartenir qu'à une seule classe.

c) [$\cdot$/**2**] Comparer $|G|$ avec la somme des tailles de toutes les classes de conjugaison.

8. Un sous-groupe H d'un groupe G est dit *normal* si

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H, \quad ghg^{-1} \in H.$$

On note alors $H \triangleleft G$.

a) [$\cdot$/**4**] Montrer que toute classe de conjugaison d'un élément de H est contenue dans H.

b) [$\cdot$/**2**] En déduire qu'un sous-groupe normal est réunion de classes entières.

9. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

a) [$\cdot$/**1**] Définir $gH = \{gh \mid h \in H\}$ et montrer que $gH \subseteq G$.

b) [$\cdot$/**2**] Montrer que $g_1H = g_2H$ si et seulement si $g_2^{-1}g_1 \in H$.

c) [$\cdot$/**2**] En déduire que deux ensembles g_1H et g_2H sont soit égaux, soit disjoints.

d) [$\cdot$/**2**] Montrer que l'application $h \longmapsto gh$ est une bijection de H sur gH.

e) [$\cdot$/**2**] En déduire que $|gH| = |H|$.
f) [$\cdot$/**2**] Montrer que G est réunion disjointe de k classes à gauche de H.
g) [$\cdot$/**1**] Conclure que $|H|$ divise $|G|$ (Théorème de Lagrange).

10. On admet que les tailles des classes de conjugaison de A_5 sont

$$1,\ 12,\ 12,\ 20,\ 15.$$

a) [$\cdot$/**4**] En déduire que A_5 est un groupe simple.

11. On appelle *série dérivée* d'un groupe G la suite de sous-groupes définie par

$$G^{(0)} = G \quad \text{et} \quad G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

où, pour tout groupe H, on note

$$[H, H] = \left\{ \prod_{k=1}^{m} h_k h'_k h_k^{-1} h'^{-1}_k \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ h_k, h'_k \in H \right\}.$$

Le groupe G est dit *résoluble* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$G^{(n)} = \{e\}.$$

a) [$\cdot$/**3**] Montrer que, pour tout groupe G, le sous-groupe $[G, G]$ est un sous-groupe normal de G.
b) [$\cdot$/**4**] On définit le groupe quotient

$$G/[G, G] = \{\, g[G, G] \mid g \in G \,\}.$$

Montrer que la loi

$$(g[G, G])\,(h[G, G]) = (gh)[G, G]$$

est bien définie et que $G/[G, G]$ est un groupe.
c) [$\cdot$/**4**] Montrer que le groupe quotient $G/[G, G]$ est abélien.
d) [$\cdot$/**2**] En déduire que, si G n'est pas abélien, alors $[G, G] \neq \{e\}$.

12. Considérons désormais le groupe alterné A_5.

a) [$\cdot$/**1**] Justifier que A_5 n'est pas abélien.
b) [$\cdot$/**1**] En déduire que $A_5^{(1)} = [A_5, A_5]$ est un sous-groupe normal non trivial de A_5.
c) [$\cdot$/**1**] En utilisant le fait que A_5 est simple, montrer que

$$[A_5, A_5] = A_5.$$

d) [$\cdot$/**1**] En déduire que la série dérivée de A_5 est stationnaire et que A_5 n'est pas résoluble.

13. a) [$\cdot$/**3**] Montrer par récurrence sur n que, si G est un groupe résoluble et si $H \leqslant G$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H^{(n)} \leqslant G^{(n)}.$$

b) [$\cdot$/**2**] En déduire que tout sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.

14. [$\cdot$/**2**] Conclure que le groupe symétrique S_5 n'est pas résoluble.

Remarque. On peut montrer qu'un polynôme $f(x)$ est *résoluble par radicaux* — c'est-à-dire que ses racines peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'opérations arithmétiques et de radicaux — si et seulement si le groupe de symétries de ses racines, appelé *groupe de Galois* et noté $\mathrm{Gal}(f/K)$, est un groupe résoluble. Dans les questions précédentes, on a montré que le groupe symétrique S_5 n'est pas résoluble. Or, pour un polynôme général de degré 5, le groupe de symétrie de ses racines est isomorphe à S_5. Il ne peut donc pas exister de formule générale par radicaux pour les racines d'un polynôme de degré 5.
Plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 5$, le groupe symétrique S_n n'est pas résoluble. Il n'existe donc pas de formule générale par radicaux pour résoudre les équations polynomiales de degré strictement supérieur à 4.

IV — À la gloire de Galois

1. [$\cdot$/**1000**] Déduire une formule générale permettant de résoudre les équations polynomiales de degré 5 par radicaux.