



L'ÉVARISTE

SUJET MATIN - SUGGESTION DE CORRIGÉ

Durée : 2 heures

DE Shaw & Co

I - Début du périple chez Eugène Charles Catalan

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n -ième nombre de Catalan par :

$$C_n := \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

1. Calculer C_i pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

0.5pt/ C_i

On a :

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{1!1!} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

$$C_2 = \frac{1}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = \boxed{5}$$

$$C_4 = \frac{1}{5} \cdot \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 2 = \boxed{14}$$

$$C_5 = \frac{1}{6} \cdot \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 = \boxed{42}$$

$$C_6 = \frac{1}{7} \cdot \binom{12}{6} = \frac{1}{7} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{132}$$

2. a) Montrer que :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

2pts

On a :

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= C_n \end{aligned}$$

b) En déduire que $C_n \in \mathbb{N}$.

1pt - $C_n \in \mathbb{Z}$

1pt - $C_n > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étant donné que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

On peut affirmer que

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \in \mathbb{Z}$$

De plus :

$$C_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} \cdot \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\geq 0} \geq 0$$

Par conséquent, $\boxed{C_n \in \mathbb{N}}$.

3. a) Montrer que :

$$(n+2) \cdot C_{n+1} = 2(2n+1) \cdot C_n$$

.

2pts

On a :

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot C_{n+1} &= (n+2) \cdot \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n!}{n!n!} \\ &= 2(2n+1) \cdot C_n \end{aligned}$$

b) En déduire que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

2pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

et que

$$2(2n+1) \geq n+2$$

On peut en déduire que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

c) Démontrer par récurrence que $C_n \geq 2^{n-1}$; En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

4pts récurrence

1pt limit

On veut démontrer par récurrence sur \mathbb{N} le prédicat suivant :

$$\mathcal{P}(n) : C_n \geq 2^{n-1}$$

Initialisation : On a $2^{-1} = \frac{1}{2} \leq 1 = C_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié. De plus :

$$2^0 = 1 \leq 1 = C_1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est également vérifié.

Ici, on traite les deux premiers rangs pour ne pas être embêté dans l'hérédité.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifié à un rang $n \geq 1$ quelconque, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié. On constate que $2n+1 \geq n+2$, donc :

$$\frac{2(2n+1)}{n+2} \geq 2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Le prédicat étant vérifié au rang 0, au rang 1, et héréditaire à partir du rang 1, il est alors vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit via minoration par la suite divergente $(2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty$$

4. a) Montrer que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$C_0 = 1 \text{ and } \forall n \geq 0, C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

8pts

b) En déduire que C_n est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k - 1$.

8pts

a) Méthode combinatoire : L'identité démontrée en 2)a), à savoir :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

présente une interprétation combinatoire très captivante !

Effectivement, n parmi $2n$ correspond au nombre de chemins de taille $2n$ allant de $(0,0)$ à (n,n) composés de n pas unitaires $(1,0)$ (vers l'est) et de n pas unitaires $(0,1)$ (vers le nord).

On choisit par exemple les n moments où l'on va vers l'est, et on comble le reste du chemin avec des pas vers le nord.

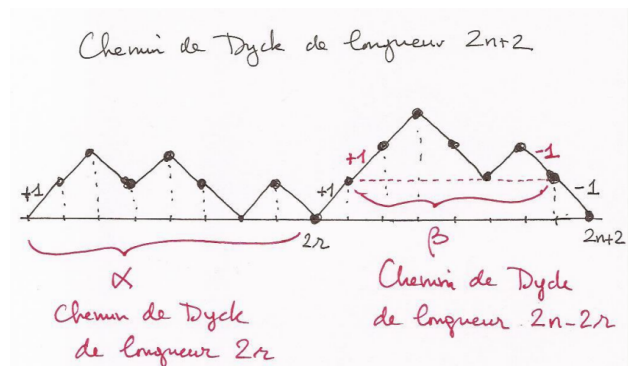
Le fait d'enlever $n+1$ chemins parmi $2n$ retire les « mauvais chemins », i.e les chemins qui passent sous la diagonale principale d'équation $y = x$.

Bref, C_n compte le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) composés de pas unitaires $(1,0)$ (vers l'est) et $(0,1)$ (vers le nord) qui ne passent jamais sous la diagonale principale $y = x$ (on appelle cela des escaliers de Dyck pour votre culture personnelle :D).

La stratégie est ici de dénombrer différemment ces escaliers. Soit un escalier de Dyck P de longueur $2(n+1)$. On considère son **dernier retour à la diagonale**, c'est-à-dire le plus grand indice $k > 0$ tel que le chemin **touche** la diagonale principale.

Ce retour correspond à un premier **sous-escalier de Dyck**, de longueur $2k$ pour un certain $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et qui est un escalier de Dyck présentant C_k possibilités. Le reste du chemin, qui part de ce point et se termine à $(n+1, n+1)$, est un autre sous-escalier de Dyck de longueur $2(n+1-k)$ indépendant du premier. Étant donné que les deux premières étapes et les deux dernières étapes de celui-ci sont imposées (nécessairement il monte deux fois, et il redescend deux fois!), il y a $C_{n+1-k-1}$ possibilités, soit C_{n-k} .

Visuellement, ça donne ça :



Ainsi, chaque chemin de Dyck de longueur $2(n+1)$ peut être décomposé de façon unique en une concaténation de deux chemins de Dyck :

un chemin de longueur $2k$ suivi de un chemin de longueur $2(n+1-k)$

On a donc :

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-k}$$

Méthode par somme génératrice :

Méthode télescopique :

II - Petit détour chez James Stirling

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeur dans \mathbb{R} . On dit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **asymptotiquement équivalentes** si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Auquel cas, on note $a_n \sim_{\infty} b_n$.

Le but de cette partie est de démontrer de façon élémentaire l'équivalent asymptotique de Stirling :

$$\exists L \in \mathbb{R}, \quad n! \sim_{\infty} L\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite :

$$u_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

1. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1.$$

2pts

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) &= \ln\left(\frac{\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)e}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(e^{-1}) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \end{aligned}$$

2. On souhaite encadrer $K_n := \ln(n+1) - \ln(n)$.

a) Justifier que K_n correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f définie sur $[n, n+1]$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

1pt

By the fundamental theorem calculus :

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \ln(n+1) - \ln(n)$$

since $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

b) Tracer \mathcal{C}_f la courbe représentative de f sur $[n, n+1]$, le trapèze tangent à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ ayant pour base $[n, n+1]$, ainsi que le trapèze dont les points de coordonnées sont :

$$\cdot (n, 0) \quad \cdot (n+1, 0) \quad \cdot \left(n, \frac{1}{n}\right) \quad \cdot \left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$$

2pts

Use GeoGebra or Desmos (I will put a proper drawing later, maybe).

c) Montrer que :

$$\frac{2}{2n+1} \leq K_n \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

.

4pts

— $\frac{2}{2n+1}$ correspond to the area of the trapeze tangent to \mathcal{C}_f at $n + \frac{1}{2}$ with boundaries $y = 0$, $x = n$ and $x = n + 1$.

— K_n correspond to the area under \mathcal{C}_f with boundaries $y = 0$, $x = n$ and $x = n + 1$.

— $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ correspond to the area of the trapeze defined by the 4 points $(n, 0)$, $(n + 1, 0)$, $(n + 1, f(n + 1))$, $(n, f(n))$.

$f'(x) = \frac{1}{x}$ and $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, so $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^*$, hence f is concave, which gives the inequality.

3. Déduire de ce qui précède que :

$$0 \leq \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad (\star)$$

4pts

From 2., we have :

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n+1} &\leq K_n = \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ \iff \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \frac{2}{2n+1} &\leq \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] \leq \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ \iff 1 &\leq \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] \leq \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 4n} \\ \iff 0 &\leq \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \stackrel{\text{using 1}}{=} \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{4n^2 + 4n} \\ \iff 0 &\leq \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad (\text{using 1.}) \end{aligned}$$

4. On pose $v_n := u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.

a) Justifier    l'aide de (\star) que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

1pt u_n
2pts v_n

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \\ \iff \ln(u_{n+1}) &\leq \ln(u_n) \\ \iff u_{n+1} &\leq u_n \\ \iff (u_n) &\text{ decreases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \ln\left(\frac{v_n e^{\frac{1}{4n}}}{v_{n+1} e^{\frac{1}{4(n+1)}}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{4n} - \frac{1}{4(n+1)}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
\iff & \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \leq 1 \\
\iff & \frac{v_n}{v_{n+1}} \leq e \\
\iff & v_n \leq v_{n+1} \\
\iff & (v_n) \text{ increases}
\end{aligned}$$

b) Montrer alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, notée L .

4pts

Since $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} > 0$ (as all terms are positive) and (u_n) decreases, (u_n) converges (say, to L).

Moreover, $\forall n > 1, u_n < u_1 = e$ as (u_n) decreases (so $L \in [0, e]$).

As $\forall n > 0, e^{-\frac{1}{4n}} < 1, v_n = u_n e^{-\frac{1}{4n}} < e$ and (v_n) increase, so (v_n) converges (say, to L').
Note that $v_n > 0$, so $L' \in [0, e]$ as well, and $v_n < u_n \forall n > 0$, so $0 \leq L' \leq L \leq e$.

If $L = 0$, then $L' = 0$ and $L = L'$.

If $L > 0$, then $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{L'}{L}$. Observe that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{4n}} = 1$, so $\frac{L'}{L} = 1 \iff L' = L$.
Thus, in both cases, $L = L'$, so (u_n) and (v_n) converge to the same limit.

5. Conclure que :

$$L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \leq n! \leq L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}.$$

2pts each side

Since (u_n) is a decreasing sequence converging to L , we have $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& u_n \geq L \\
\iff & \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \geq L \\
\iff & n! \geq L \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \\
\iff & n! \geq L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}
\end{aligned}$$

Since (v_n) is an increasing sequence converging to L , we have $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 v_n &\leq L \\
 \iff \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{4n}} &\leq L \\
 \iff n! &\leq L \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} e^{\frac{1}{4n}} \\
 \iff n! &\leq L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}
 \end{aligned}$$

6. En déduire l'équivalent asymptotique de Stirling.

4pts

Using 5., we have for all n natural :

$$\begin{aligned}
 L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} &\leq n! \leq L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}} \\
 \iff \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} &\leq \frac{n!}{L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}}{L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}
 \end{aligned}$$

Of course :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}}{L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{4n}} = 1$$

Hence, by the two policemen theorem (or "sandwich" theorem), we have :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

7. En admettant que $L = \sqrt{2\pi}$, démontrer finalement que :

$$C_n \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$$

4pts

Using $n! \sim L \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$, hence, $(2n)! \sim L \sqrt{2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{L \sqrt{2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{L^2 n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{\sqrt{2} \cdot (2)^{2n}}{L \sqrt{n}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{4^n}{\sqrt{\pi} \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}
 \end{aligned}$$

III - Escalier sympathique chez John Wallis

Le but de cette partie est de démontrer que L vaut bien $\sqrt{2\pi}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit :

$$W_k := \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} dx$$

On définit de plus la fonction suivante :

$$g : x \mapsto -\frac{x}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

1. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?

0.5pt $g(0)$
0.5pt $g(1)$

$$g(0) = 0 \text{ and } g(1) = 0$$

2. a) Déterminer W_0 .

1pt

$$W_0 = \int_0^1 (1-x^2)^0 dx = \int_0^1 dx = 1$$

b) Justifier que $W_1 = \frac{\pi}{4}$.

4pts

$$W_1 = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

let $x = \sin(u)$ so $\frac{dx}{du} = \cos(u)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du \right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

As

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(u) du = 0.$$

3. a) Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

4pts

g is the combination of differentiable functions on \mathbb{R} , hence, it is itself differentiable on \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}\right)' + \left(-\frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (x^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot [-(1-x^2) + 1] - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{k+2}\right]
\end{aligned}$$

b) En déduire que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} dx = 0$$

2pts

Using the fundamental theorem of Calculus :

$$\begin{aligned}
g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(x) dx \\
0 - 0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{k+2}\right] dx \\
0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} dx
\end{aligned}$$

c) Montrer qu'alors :

$$\frac{k+3}{k+2} W_{k+2} = W_k$$

1pt

From b), recognizing the expressions for W_k and W_{k+2} :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} dx \\
0 &= W_k - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) W_{k+2} \\
W_k &= \left(\frac{k+3}{k+2}\right) W_{k+2}
\end{aligned}$$

d) Conclure que :

$$W_{2k} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} \quad W_{2k-1} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2pts each

By induction on even $n = 2k$: $W_0 = 1$ and $W_{k+2} = \frac{k+2}{k+3}W_k$, so :

$$W_{2k} = \prod_{i=1}^k \frac{2i}{2i+1} = \frac{\prod_{i=1}^k 2i}{\prod_{i=1}^k 2i+1} = \frac{2^k k!}{\prod_{i=1}^k 2i+1} = \frac{2^k k! \prod_{i=1}^k 2i}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!}$$

Note that $\prod_{i=1}^k (2i+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}$.

By induction on odd $n = 2k-1$: $W_1 = \frac{\pi}{4}$ and $W_{k+2} = \frac{k+2}{k+3}W_k$, so :

$$W_{2k-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2i+1}{2i+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k-1} 2i+1}{\prod_{i=0}^{k-1} 2i+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

Note that $\prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.

e) Justifier que :

$$0 \leq W_{2k} \leq W_{2k-1} \leq W_{2k-2}$$

Puis que :

$$1 \leq \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} \leq \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}}$$

4pts

On $x \in [0, 1]$, we have $x^2 \in [0, 1]$ and $1 - x^2 \in [0, 1]$. Moreover, if $u \in [0, 1]$ then $a > b$ implies $u^a < u^b$, so :

$$\begin{array}{llll} \frac{2k}{2} & > \frac{2k-1}{2} & > \frac{2k-2}{2} \\ \Rightarrow 0 & \leq (1-x^2)^{\frac{2k}{2}} & < (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} & < (1-x^2)^{\frac{2k-2}{2}} \quad \forall x \in [0, 1] \\ \Rightarrow \int_0^1 0 \, dx & \leq \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k}{2}} \, dx & \leq \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} \, dx & \leq \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k-2}{2}} \, dx \quad (\text{integrating over } [0, 1]) \\ \Leftrightarrow 0 & \leq W_{2k} & \leq W_{2k-1} & \leq W_{2k-2} \quad (\text{recognizing expression for } W_k) \\ \Rightarrow & 1 & \leq \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} & \leq \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}} \quad (\text{dividing by } W_{2k}) \end{array}$$

f) En déduire que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} = 1$$

1pt

From c), we have $\frac{W_{2k-2}}{W_{2k}} = \frac{2k+1}{2k} \rightarrow 1$ as $k \rightarrow +\infty$. Hence, by the two policemen theorem (or "sandwich" theorem), and e), we have the desired result.

4. Déduire de tout ce qui précède que $L = \sqrt{2\pi}$.

Indication : On pourra utiliser l'équivalent asymptotique de Stirling couplé au résultat précédent.

4pts

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{W_{2k}}{W_{2k-1}} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}}{\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \cdot \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{(2k+1) \cdot ((2k)!)^2} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k} \left(L\sqrt{k} \left(\frac{k}{e} \right)^k \right)^4}{(2k+1) \cdot \left(L\sqrt{2k} \left(\frac{2k}{e} \right)^{2k} \right)^2} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k} L^4 k^2 \left(\frac{k}{e} \right)^{4k}}{(2k+1) \cdot L^2 (2k) 2^{4k} \left(\frac{k}{e} \right)^{4k}} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= L^2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{(2k+1)\pi}
\end{aligned}$$

We know $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2\pi}$, hence, we have $L^2 \cdot \frac{1}{2\pi} = 1$ thus $L = \sqrt{2\pi}$ (as $L > 0$).

IV - Une fin déroutante

On pose ici :

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_k}$$

1. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R}_+$. On note \mathcal{K} cette limite.

2pts

From I-3.a), we have $C_n \geq 2^{n-1} \implies 0 \leq \frac{1}{C_n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Hence, (S_n) increases. Moreover, $S_n \leq \sum_{k=0}^n 2^{k-1}$, and since $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 2^{k-1} = 4$, $S_n \leq 4$, so (S_n) converges to $\mathcal{K} \in [0, 4]$.

2. On rappelle que l'arctangente (notée \arctan) est la réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Autrement dit :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$$

a) Justifier que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

1pt

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hence, } \arctan(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ so } \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

b) On admet que \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démontrer que si u est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

1pt

$$\text{Basic application of chain rule : } \arctan(u(x)) = \arctan'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

3. On admet que :

$$\mathcal{K} = \int_0^1 \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} dx$$

a) Justifier qu'une primitive de $h : x \mapsto \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}$ est donnée par :

$$H : x \mapsto \frac{1}{9} \left(\frac{3(2x-1)(x^2-x+3)}{(1-x+x^2)^2} + 4\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right)$$

8pts

I am not latex-ing those calculations.

LeChat solution :

We need to find $H'(x)$ and show that it equals $h(x)$.

First, let's differentiate $H(x)$:

$$H(x) = \frac{1}{9} \left(3(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2} + 4\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right)$$

Using the product rule and chain rule, we get :

$$H'(x) = \frac{1}{9} \left(3 \cdot \frac{d}{dx} [(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}] + 4\sqrt{3} \cdot \frac{d}{dx} \left[\arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right)$$

Now, let's differentiate each term separately :

1. Differentiate $(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}$:

Using the product rule :

$$\frac{d}{dx} [(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}] = (2x-1) \cdot \frac{d}{dx} [(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}] + (x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2} \cdot \frac{d}{dx} [2x-1]$$

2. Differentiate $\arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$:

Using the chain rule :

$$\frac{d}{dx} \left[\arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Combining these results and simplifying, we should arrive at :

$$H'(x) = \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} = h(x)$$

Thus, $H(x)$ is indeed a primitive of $h(x)$.

b) En déduire la tant attendue valeur de \mathcal{K} .

4pts

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \int_0^1 h(x) dx \\ &= H(1) - H(0) \quad (\text{fundamental theorem of calculus}) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3(2-1)(1-1+3)}{(1-1+1)^2} + 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2-1}{\sqrt{3}} \right) \right) - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3(0-1)(0-0+3)}{(1-0+0)^2} + 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{0-1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(9 + 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 9 - 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= 2 + \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{\pi}{3} = 2 + \frac{\pi}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4. Démontrer que \mathcal{K} est un nombre irrationnel.

Indication : On admettra que π n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers.

2pts

π is transcendental, while $9\sqrt{3}$ and 2 are algebraic numbers, hence, $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$ is transcendental, and \mathcal{K} is transcendental as well. \mathcal{K} being transcendental, it must be irrational.