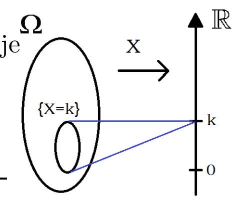
3. Diszkrét valószínűségi változók

Az előző két előadásban szereplő definíciók (eseményalgebra, feltételes valószínűség) ugyan alapfogalmai a témának, de nem elégségesek, hogy természetes módon le tudjunk írjunk bizonyos problémákat.

Például hogyan tudnánk megfogalmazni az eddigi eszközökkel olyan egyszerű állításokat, hogy két kockadobás eredménye független? Vagy hogy egy kockadobás átlagos eredménye 3,5, egy 0 és 1 közt egyenletesen kiválasztott véletlen szám átlagos értéke pedig $\frac{1}{2}$? Ezekhez arra van szükségünk, hogy ne csak eseményekről, hanem véletlen mennyiségekről (ún. valószínűségi változókról) is beszélni tudjunk.

3.1. Valószínűségi változó



3.1.1. Definíció. Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény. Adott $x \in \mathbb{R}$ valós számra jelölje

$$\{X < x\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

vagyis azon kimenetelek halmazát, amikor X kisebb, mint x. Ezeket a halmazokat az X **nívóhalmaz**ainak hívják. Az X függvényt **valószínűségi változó**nak nevezzük, ha minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$\{X < x\} \in \mathcal{F},$$

azaz röviden X nívóhalmazai események.

3.1.2. Példa. Az eddigi példáinkban is szerepeltek már valószínűségi változók, csak nem neveztük őket a nevükön. Néhány példa valószínűségi változóra:

(1) Egy kockadobás eredménye. A valószínűségi változó definíciójában szereplő „$\{X < x\} \in \mathcal{F}$ minden valós x-re” feltétel ebben az esetben ekvivalens azzal, hogy minden k-ra azon kimenetelek halmaza, amelyek esetén k-t dobtunk, egy esemény.

(2) Kockadobás eredményének négyzete. Lehetséges értékei 1, 4, 9, 16, 25 és 36, mindegyik lehetőséget $\frac{1}{6}$ eséllyel veszi fel. Formálisan felírva választhatjuk az eseményteret $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$-nak, $\mathcal{F}$ és $\mathbb{P}$ ahogy korábban, a valószínűségi változó pedig $Y(\omega) = \omega^2$.

(3) Egy urnában 2 fehér és 3 piros golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg fehéret nem húztunk. A fehér kihúzásáig húzott piros golyók száma egy valószínűségi változó.

(4) Valószínűségi változót eseményből is kaphatunk. Legyen

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in A, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezt hívjuk az A eseményhez tartozó **indikátor valószínűségi változó**nak.

Megjegyzés. Az $\{X < x\} \in \mathcal{F}$ feltétel helyett használhattuk volna az $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ feltételt is (ahogy néhány más jegyzet teszi is), ahol értelemszerűen $\{X \leq x\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$. Ez a módosítás nem változtatna a fenti definíció értelmén, azaz ekvivalens definíciót kapnánk. Hasonlóan definiálhatók az $\{X = x\}$, $\{X > x\}$, de akár az $\{a < X < b\}$ halmazok is, amik azon kimenetelek halmazai, amikre teljesül a zárójeles állítás. Belátható, hogy ezek szintén események.

3.2. Várható érték véges esetben

Egy véletlen mennyiség esetében az egyik legtermészetesebb kérdés, hogy "Jó-jó, véletlen, de úgy átlagban mennyi?". Ezt a véletlenszerű esetek közti "átlagos" értéket fogja meg a várható érték fogalma.

3.2.1. Definíció. Egy X valószínűségi változó **egyszerű**, ha csak véges sok értéket vehet fel. Egy egyszerű valószínűségi változó **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \operatorname{Ran}(X)} k \cdot \mathbb{P}(X = k),$$

ahol $\operatorname{Ran}(X)$ az X véges értékkészlete, és $\mathbb{P}(X = k)$ jelöli az $\{X = k\}$ esemény valószínűségét.