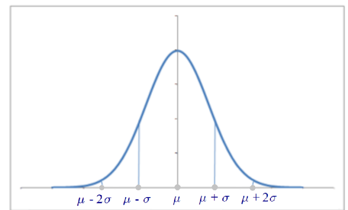
8. Normális eloszlás

Volt már szó nevezetes eloszlásokról, de a legnevezetesebbről még nem. Ez a Gauss-féle normális eloszlás, avagy Gauss-eloszlás, amely elméleti és gyakorlati szempontból is központi jelentőséggel bír.

Alkalmazásokban tipikusan akkor találkozunk vele, ha nagyszámú, független, de egymagában elhanyagolható méretű hatás eredményeként létrejövő valószínűségi változó eloszlásáról van szó, mint amilyen egy fizikai mérés eredménye. Ennek elméleti hátterét, a centrális határeloszlás tételt, a 9. előadásban tárgyaljuk.

8.1. Az eloszlás definíciója

Kezdjük azzal, miről is beszélünk, utána ráérünk megmagyarázni, miért nevezetes ez az eloszlás.[31]



8.1.1. Definíció. Egy Y valószínűségi változó **normális eloszlás**ú μ és σ^2 valós paraméterekkel ($\sigma^2 > 0$), ha Y folytonos valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Jelölése: $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$.

Ha $\mu = 0$ és $\sigma^2 = 1$, akkor az eloszlás neve **standard normális eloszlás** (néha: sztenderd normális eloszlás). Sűrűségfüggvényét φ jelöli, azaz

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Érdemes rögtön ellenőrizni, hogy a fenti f_Y valóban sűrűségfüggvény. A 4. előadás szerint ehhez elég belátnunk, hogy nemnegatív, és a teljes valós egyenesen az integrálja 1. A nemnegativitás világos (hiszen e^x mindig pozitív), de az integrált ki kell számolni. Kezdjük a standard esettel.

8.1.2. Állítás. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Bizonyítás. Az eredeti integrál helyett vizsgáljuk először a négyzetét. Ez a következőképp írható át:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Ez egy kettős improprius integrál. Mivel $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ sehol sem negatív, így a kettős integrálja éppen[32]

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{B_R} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ahol B_R jelöli az R sugarú, origó körüli zárt körlapot. Ezt pedig polárkoordinátákra való áttéréssel számolhatjuk ki: legyen $x = r\cos(\alpha)$ és $y = r\sin(\alpha)$. Ekkor

$$\iint_{B_R} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^R \mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} (-e^{-\frac{R^2}{2}}+1)\mathrm{d}\alpha = 2\pi(1-e^{-\frac{R^2}{2}}).$$

Ha R tart végtelenhez, akkor az $e^{-\frac{R^2}{2}}$ tart 0-hoz, így a keresett mennyiségünk négyzete 2π. Mivel az e^{-x^2} pozitív, így az integrálja is pozitív, ezért innen gyököt vonva kapjuk az állítást.[33] $\square$

[31] A türelmetlen olvasó addig rákereshet a Galton-deszka fogalmára, lásd pl. [youtube] The Galton Board

[32] Ez a kettősintegrál alaptulajdonságaiból belátható, feltéve, hogy a függvény minden véges téglalapon integrálható.

[33] Igazából arra is szükségünk van, hogy az integrál értelmes. Ez szintén abból adódik, hogy $e^{-\frac{x^2}{2}}$ pozitív és folytonos, tehát az integrál létezik, esetleg végtelen. A fenti számolás pedig meghatározza az értékét.

8.2. Standardizálás

Az állítás szerint a standard normális eloszlás tényleg egy valószínűségi eloszlás. Mi a helyzet a többi normális eloszlással? A hozzájuk tartozó sűrűségfüggvényeket is ki lehetne integrálni, de ennél most koncepciózusabb megközelítést alkalmazunk.

8.2.1. Lemma. *Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, és legyen X folytonos valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvényét f_X jelöli. Ekkor $Y = \sigma X + \mu$ sűrűségfüggvénye*

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \tag{4}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. A sűrűségfüggvény definíciója szerint azt kell belátnunk, hogy $\frac{1}{\sigma} f_X\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)$ nemnegatív és

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma} f_X\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\mathrm{d}x = F_Y(a)$$

minden $a \in \mathbb{R}$ esetén, ahol F_Y az Y eloszlásfüggvénye. A nemnegativitás világos, hiszen f_X nemnegatív és $\sigma > 0$. Az integrált pedig a következőképp számolhatjuk ki:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma} f_X\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\mathrm{d}x \overset{z=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma} f_X(z)\sigma \mathrm{d}z = F_X\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big) =$$
$$= \mathbb{P}\Big(X < \frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = \mathbb{P}(\sigma X + \mu < a) = \mathbb{P}(Y < a) = F_Y(a),$$

felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{b} f_X(z)\mathrm{d}z = F_X(b) = \mathbb{P}(X < b)$ tetszőleges valós b esetén. □

⚠ **8.2.2. Következmény.** *Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Egy Y valószínűségi változó pontosan akkor $N(\mu; \sigma^2)$ eloszlású, ha létezik $X \sim N(0; 1)$ amire $Y = \sigma X + \mu$.*

Más szavakal, a többi normális eloszlás nem más, mint a standard normális eloszlás lineáris függvénye (transzformáltja). Emiatt a legtöbb esetben elegendő megértenünk a standard eset működését.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $X \sim N(0; 1)$ és $Y = \sigma X + \mu$. A lemma miatt f_Y kiszámolható f_X felhasználásával, ahol $f_X = \varphi$. Emiatt

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

vagyis Y valóban $N(\mu; \sigma^2)$ eloszlású.

Visszafelé, ha $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$, akkor legyen $X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu)$. Átrendezve, $Y = \sigma X + \mu$. Ekkor ismét használhatjuk a lemmát, ami miatt tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén (4) egyenlet teljesül. Alkalmazva az $x = \sigma z + \mu$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$f_X(z) = \sigma f_Y(\sigma z + \mu) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát X eloszlása valóban standard normális. □

Megjegyzés. A legtöbb eddig tárgyalt eloszlásra nem teljesül, hogy a különböző paraméterű verziók egymás egyszerű transzformáltjai. Például, ha egy X valószínűségi változó $B(n; p)$ binomiális eloszlású, és emiatt az értékei a $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ halmazból adódnak (mindegyik pozitív eséllyel), akkor $3X$-nek nem lehet az értéke 2, így már csak emiatt sem lehet $3X$ binomiális eloszlású. Ugyanígy $\sigma X + \mu$ csak akkor lehet binomiális, ha $\sigma = 1$ és $\mu = 0$.

Az egyetlen kivételünk ez alól az exponenciális eloszlás, ugyanis ha $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, akkor $\sigma X \sim \mathrm{Exp}(\sigma^{-1}\lambda)$ tetszőleges λ, σ pozitív valósakra.

Rendben, láttuk a normális eloszlás sűrűségfüggvényét, de mi van az eloszlásfüggvényével?

Jelölés: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét Φ jelöli, azaz
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z.$$
A titkolózást – mármint hogy csak integrálalakban írjuk fel az eloszlásfüggvényt – az indokolja, hogy Φ nem írható fel zárt alakban.[34] Ettől függetlenül az integrál létezik és véges minden valós x-re, sőt numerikusan is jól közelíthető. Pusztán nem tudjuk kifejezni elemi módon, olyan alakban, ami nem használ határértéket. Fontos azonosság Φ-re:
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}),$$
amely tulajdonság abból adódik, hogy φ szimmetrikus a 0-ra, azaz $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Mit jelent a normális eloszlás definíciójában a μ és a σ?

8.2.3. Állítás. *Legyen $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$. Ekkor $\mathbb{E}(Y) = \mu$ és $\mathbb{D}^2(Y) = \sigma^2$.*

Más szavakkal, a normális eloszlások éppen a várható értékükkel és– a szórásnégyzetükkel vannak paraméterezve. A fenti összefüggésből adódik az ún. **standardizálás** módszere is. Ez azt jelenti, hogy ha Y eloszlása normális, akkor
$$\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\mathbb{D}(Y)} \sim N(0; 1).$$
Ez a gyakorlatban is jól alkalmazható: általában egyszerűbb a valószínűségi változót transzformálni, és a standard normális sűrűségfüggvényével vagy eloszlásfüggvényével számolni, lásd még a lenti példát.

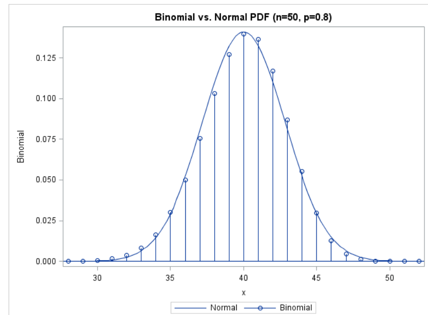
Bizonyítás. A következmény miatt létezik X, amire $Y = \sigma X + \mu$. Emiatt
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma\mathbb{E}(X) + \mu, \quad \text{és} \quad \mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(\sigma X + \mu) = \mathbb{D}^2(\sigma X) = \sigma^2\mathbb{D}^2(X).$$
Tehát az állításhoz elég a standard normális eloszlású X esetére kiszámolni, hogy $\mathbb{E}(X) = 0$, illetve $\mathbb{D}^2(X) = 1$. Ez pedig valóban teljesül, hiszen a transzformált várható értékére vonatkozó állítás miatt:
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[- e^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0 - 0) = 0,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[x\big(- e^{-\frac{x^2}{2}} \big) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \big(- e^{-\frac{x^2}{2}} \big) \mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$
Következésképp, $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - 0^2 = 1.$ □

8.2.4. Példa. Egy tartályból a gyártási folyamat végeztével mintát veszünk. Tegyük fel, hogy a minta hőmérséklete Celsius-fokban mérve $N(-2; 1{,}69)$ eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy a minta hőmérséklete nagyobb, mint $0°C$?
Jelölje a minta hőmérsékletét Y. A kérdésünk a $\mathbb{P}(Y > 0)$ mennyiség. Nézzük az Y standardizáltját:
$$X \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y + 2}{\sqrt{1{,}69}} \sim N(0; 1) \qquad \text{azaz} \qquad \mathbb{P}\Big(\frac{Y + 2}{1{,}3} < x \Big) = \mathbb{P}(X < x) = \Phi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Így $\mathbb{P}(Y > 0)$-ra a következőt kapjuk:
$$\mathbb{P}(Y > 0) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y < 0) = 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{Y + 2}{1{,}3} < \frac{2}{1{,}3} \Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{2}{1{,}3} \Big),$$
ahol Φ értéke kiszámoltatható megfelelő szoftver segítségével, de egyszerűen ki is kereshető a Φ értékeit tartalmazó táblázatból. Így kapjuk, hogy $\mathbb{P}(Y > 0) \approx 0{,}0620 \approx 6\%$.

Megjegyzés. A szórást vizuálisabban is azonosíthatjuk: a sűrűségfüggvény inflexiós pontjai, vagyis azon pontok, ahol a grafikon konvexitást vált, éppen $\mu - \sigma$ és $\mu + \sigma$. Speciálisan, a standard normális eloszlás φ sűrűségfüggvénye a $[-1, 1]$ intervallumon konkáv, azon kívül konvex. Ez következik abból, hogy $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)$, így $\varphi''(x) < 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in (-1, 1)$.

[34] Bővebben lásd: math.stanford.edu/∼conrad/papers/elemint.pdf

8.3. De Moivre–Laplace-tétel



Miért akarna valaki épp egy ilyen eloszlást használni? Empirikus tapasztalat, hogy a normális eloszlás sok esetben jó közelítést jelent mérési eredmények eloszlására. Ilyen például egy ország lakosságának magassága vagy súlya, vagy a napi átlaghőmérséklet az év egy adott hónapjában, stb. A közös ezekben, hogy az eredményét rengeteg apró, egymástól többé-kevésbé független faktor befolyásolja.

A következő tétel azt állítja, hogy nagy n esetén a binomiális eloszlás közelíthető a normális eloszlással.[35]

8.3.1. Tétel. *Legyen $p \in (0,1)$ és $S_n \sim B(n;p)$. Ekkor minden $a < b$ valós számokra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < b\right) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a),$$

ahol a binomiális eloszlásról tanultak szerint $\mathbb{E}(S_n) = np$ és $\mathbb{D}(S_n) = \sqrt{np(1-p)}$.

A tétel egyik érdekessége, hogy hiába $p \neq \frac{1}{2}$, és így a binomiális eloszlás nem szimmetrikus, a megfelelően lenormált változó határeloszlása mégis 0-ra szimmetrikus sűrűségfüggvényű.

8.3.2. Példa. A matematikusok 31,4% százaléka szandált hord. Száz találomra választott matematikust nézve, közelítőleg mi az esélye, hogy kevesebb, mint 25 pár szandált találunk rajtuk. (A szituációt némileg idealizálva, tegyük fel, hogy egy matematikuson vagy egy teljes pár szandál van, vagy nincs rajta szandál.)

Jelölje S_n a szandálok számát, ahol $n = 100$ és $p = 0{,}314$. Kiszámolható, hogy $\mathbb{E}S_n = 31{,}4$ és $\mathbb{D}(S_n) = \sqrt{100p(1-p)} = 4{,}6412$. A fenti tétel szerint $X = (S_n - 31{,}4)/4{,}6412$ közelítőleg standard normális eloszlású. Emiatt

$$\mathbb{P}(S_n < 25) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 31{,}4}{4{,}6412} < \frac{25 - 31{,}4}{4{,}6412}\right) = \mathbb{P}(X < -1{,}3790) \approx$$
$$\approx \Phi(-1{,}3790) = 1 - \Phi(1{,}3790) \approx 0{,}0839 \approx 8\%.$$

A tétel segítségével így megspórolhattuk a binomiális eloszlás tagjaival történő fáradtságos számolást. Hogy ez a közelítés mennyire jó, arról további tételek rendelkeznek.[36]

Megjegyzés. Lehet némi déjà vu érzésünk: a Poisson-eloszlás esetében is elmondtuk, hogy a binomiális eloszlás a Poisson-eloszláshoz tart, ha $n \to \infty$. Most meg azt mondjuk, hogy a normálishoz. Nincs itt ellentmondás? Nincs, ugyanis másféle paraméterezés esetén kapjuk egyik, illetve másik határértéket.

A mostani helyzetben p rögzített, $n \to \infty$, és az eloszlás standardizálva van (S_n helyett $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\mathbb{D}(S_n)}$ határeloszlását nézzük), míg a Poisson-eloszlás esetében azzal a feltétellel dolgoztunk, hogy $p \to 0$ és $n \to \infty$, de olyan ütemben, hogy $np \to \lambda$.

8.4. Kitekintés: heurisztika a de Moivre–Laplace tételhez

A tételt nem bizonyítjuk, de körbejárjuk a bal oldalán szereplő kifejezést, és hogy miért épp a normális eloszlás jelenik meg a jobb oldalon. (A gyakorlat szempontjából a fenti tétel és példa a lényeges, nem a most következő vázlatos érvelés.)

[35] Ettől nem független tény, hogy a normális eloszlás a statisztika szempontjából is központi jelentőségű, lásd pl. [youtube] Crash course statistics - The shape of the data: distributions

[36] Lásd még: Berry-Esseen-típusú egyenlőtlenségek, pl. arxiv.org/abs/1111.6554

Jelölje h az $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ számot. Vizsgáljuk meg a következő valószínűségi változó eloszlását:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} = h(S_n - np), \qquad \text{ahol}$$

$$\operatorname{Ran}\Big(h(S_n - np)\Big) = \big\{h(k-np) \mid k = 0, 1, 2, \dots, n\big\},$$

hiszen S_n binomiális. Vegyük észre, hogy minél nagyobb n, annál kisebb h, vagyis a fenti valószínűségi változó annál sűrűbben veszi fel az értékeit. Annak a valószínűsége, hogy épp $h(k-np)$ az értéke, $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Készítsünk $h(S_n - np)$ imént végiggondolt eloszlásából egy szakaszonként lineáris, sűrűségfüggvényre emlékeztető függvényt a következőképp. Definiáljuk az $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy minden $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$f_n\big(h(k-np)\big) = \frac{1}{h}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

továbbá két szomszédos $h(k-np)$ alakú pont közt legyen f_n lineáris, a pontokat tartalmazó intervallumon kívül pedig azonosan nulla.

Mi köze f_n-nek a tétel állításához? Az, hogy a bal oldali kifejezés közelítőleg $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$, precízebben

- $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \mathbb{P}\big(a < h(S_n - np) < b\big) = 0$

Ha ezt a konvergenciát elhisszük, akkor elég bizonyítani, hogy $\int_a^b f_n \to \int_a^b \varphi$ minden $a < b$ esetén. Az ebben szereplő $n \mapsto f_n$ függvénysorozatról elemi módon belátható a következő:

- Ha $x \in \mathbb{R}$, ami nem $h(k-np)$ alakú semmilyen k és n esetén, akkor f_n deriválható x-ben minden n-re, és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = -x.$$

Ez az állítás lényeges információt tartalmaz az $f_n(x)$ határértékekről: azt, hogy az $f'(x) = -xf(x)$ differenciálegyenlet aszimptotikus értelemben teljesül f_n-re, néhány speciális alakú x kivételével. Ezen a ponton viszont számos, nem elhanyagolható technikai kérdésbe ütközünk:

- Létezik-e egyáltalán az $f_n(x)$ határértéke minden $x \in \mathbb{R}$ esetén?
- Ha létezik az $x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ függvény, akkor igaz-e, hogy minden pontban pozitív, folytonos, illetve folytonosan differenciálható? Továbbá sűrűségfüggvény-e?
- Teljesül-e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén?
- Ha f_n-ről belátjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, abból következik-e, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \varphi$ minden $a < b$ esetén?

A fenti vázlatpontok tárgyalása meghaladja a jegyzet kereteit. Ha feltételezzük, hogy ezek a tulajdonságok teljesülnek, akkor a következőt kapjuk:

$$-x = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f_n'(x)}{\lim_{n\to\infty} f_n(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \big(\ln f(x)\big)'$$

majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (azaz ha x nem $h(k-np)$ alakú). Ezt integrálva adódik, hogy $\ln f(x) = -\frac{x^2}{2} + c$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ esetén, azaz

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}e^c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel elfogadtuk, hogy f sűrűségfüggvény, így e^c szükségképpen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, vagyis f_n valóban a standard normális sűrűségfüggvényhez tart.

A normális eloszlásnak léteznek további karakterizációi, de ezeket itt idő hiányában megint csak nem tárgyaljuk.[37]

[37]Karakterizációk egy gyűjteményét lásd: [Cross Validated] What is the most surprising characterization of the Gaussian (normal) distribution?