I. BEVEZETŐ

I.1. ALAPFOGALMAK

Jelölések: K: véletlen kísérlet, ω_i: elemi esemény, $\Omega = \{\forall i : \omega_i\}$: eseménytér, $F \subseteq 2^{\Omega}$: eseményalgebra, $A \in F$: esemény, $\Omega \in F$: biztos esemény.
Műveletek eseményekkel: összegzés: A+B (halmazunió), szorzás: AB (halmazmetszet), negálás: $\overline{A} = \Omega \setminus A$, kivonás (differencia): $A \setminus B = A\overline{B}$, szimmetrikus differencia: A4B=(A\B)+(B\A).
Két esemény kapcsolata: A maga után vonja B-t ($A \subseteq B$), A és B kizárják egymást (diszjunktak) ($AB=\varnothing$).
(D) Teljes eseményrendszer: Az A_i események ~t alkotnak, ha páronként diszjunktak ($\forall i \neq j :\ A_i A_j = \varnothing$) és összegük a biztos esemény ($\sum\limits_{\forall i} A_i = \Omega$).
(A) F ún. σ-algebrát alkot: azaz eleme a biztos esemény ($\Omega \in F$), és zárt az összegzés és a negálás műveletekre (vagyis bármely elemének a negáltja és bármely elemeinek az összege is eleme).
(D) P valószínűség: P: F → [0,1] úgy, hogy a biztos esemény valószínűsége 1 (P(Ω)=1), és páronként diszjunkt események esetén P az összeadásra homomorf (művelettartó), azaz ezek összegének valószínűsége a valószínűségük összegével egyenlő, tehát:

$$A_i \in F,\ \forall i \neq j : A_i A_j = \varnothing \ \rightarrow\ P\left(\sum_{\forall i} A_i\right) = \sum_{\forall i} P\left(A_i\right)$$

(T) P tulajdonságai: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$, $A \subseteq B\ \rightarrow\ P\left(A\right) \le P\left(B\right)$, $P\left(A \setminus B\right) = P\left(A\right) - P\left(AB\right)$.

(T) Poincare-tétel: $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left(-1\right)^{i+1} \sum\limits_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_i \le n} P\left(\prod\limits_{k=1}^{i} A_{jk}\right)\right\}$ (szeml.: „szita”-módszer).

(T) Boole-egyenlőtlenség(ek): $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$, ill. $P\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$.

(T) Folytonossági tétel(ek): $\forall i \in \mathbb{Z}^+ :\ A_i \in F \text{ és } A_i \subseteq A_{i+1}\ \rightarrow\ P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$,

$$\forall i \in \mathbb{Z}^+ :\ B_i \in F \text{ és } B_i \supseteq B_{i+1}\ \rightarrow\ P\left(\prod_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right).$$

(D) Kolmogorov-féle valószínűségi mező: A fenti tulajdonságoknak megfelelő $\left(\Omega, F, P\right)$ hármast a K véletlen kísérlethez tartozó ~nek nevezzük.
Megjegyzés: Innentől a $\left(\Omega, F, P\right)$ hármas mindig Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt jelöl (hogy ne kelljen mindig kiírni).

I.2. KLASSZIKUS VALÓSZÍNŰSÉG

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ és $\#\Omega = n$ véges, $\forall$i: $P\left(\omega_i\right) = p = \dfrac{1}{n}$, F=$2^{\Omega}$ $\rightarrow$ $A \in F$ esetén $P\left(A\right) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$

Szemléletesen: véges sok elemi esemény van, ezek valószínűsége megegyezik, és minden esemény megfigyelhető.
Leggyakoribb esetei: kockadobás, pénzfeldobás, kártyahúzás, lottóhúzás, …
FELADATOK MEGOLDÁSA:
A feladatokban szövegesen definiált események valószínűségét kell kiszámolni. Ehhez meg kell határoznunk az elemi események számát (Ω számosságát), majd az A eseményhalmaz számosságát. Ez utóbbit kombinatorikai módszerek használatával könnyíthetjük meg (ismételjük át ezzel kapcsolatos ismereteinket). Figyeljünk arra, hogy esetszétválasztásnál semmit ne hagyjunk ki, és semmit ne számoljunk kétszer. Néha pl. a komplementer esemény számosságának meghatározása lényegesen egyszerűbb; ezt, és az ehhez hasonló trükköket „célszerű” észrevenni.

I.3. Geometriai valószínűség

Ω egy véges területű síkbeli alakzat. (Vezessük be az m() területfüggvényt, amely egy alakzathoz egy véges értéket rendel, amennyiben az mérhető területű!) F elemei az Ω mérhető területű részei.

$A \in F$ esetén $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, vagyis A és Ω területének aránya.

Leggyakoribb esetei: Két folytonos értékű paraméterrel leírható véletlen kísérletek. Pl.: két tetszőlegesen kiválasztott 0 és 1 közé eső valós szám, …

Feladatok megoldása:

A szöveges specifikáció alapján készítsünk rajzot Ω-ról és a keresett A eseménynek megfelelő alakzatról. Egy bonyolult alakzat területének a kiszámításához (egyszerű alakzat területét ránézésre megállapítjuk) vegyünk fel egy koordinátarendszert, amelyben határozzuk meg az alakzatok határvonalait leíró függvényeket és ezek segítségével integrálással kapjuk meg a keresett területet (integrálni tudni kell). Összetett alakzatokat daraboljuk szét egyszerűbbekre, és ezekre egyenként alkalmazzuk a fenti módszert. Ha meghatároztuk A és Ω területét, akkor már csak a képletet kell használni. A komplementeres trükk néha itt is bejöhet.

I.4. Feltételes valószínűség

(D) Feltételes valószínűség: $A, B \in F$ és $P(B) > 0$ estén az A eseménynek a B-re vonatkoztatott ~e: $P_B(A) = P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$. Szemléletesen: ha tudjuk hogy B bekövetkezett, akkor az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége $P_B(A)$.

(T) A feltételes valószínűség tulajdonságai: Csak szemléletesen: a P_B feltételes valószínűség pontosan úgy viselkedik, mint a P valószínűség azzal az enyhítéssel, hogy minden Ω helyébe B írható (de nem kötelező). Vagyis minden P-re vonatkozó formula átírható P_B-re.

(D) Függetlenség: $A, B \in F$ esetén az A és B események függetlenek $\leftrightarrow$ ha $P(AB) = P(A)P(B)$.

(T) A függetlenség tulajdonságai:

1.) Ha A és B események függetlenek $\rightarrow$ $\overline{A}, B$ is függetlenek (rekurzíve: $A, \overline{B}$ és $\overline{A}, \overline{B}$ is).

2.) Ha $P(A) \in \{0,1\}$ $\rightarrow$ $\forall B \in F$ esetén A és B függetlenek.

(D) Az $A_{i \in \{1,\dots,n\}} \in F$ események **páronként függetlenek,** ha $\forall i \neq j$ esetén A_i és A_j függetlenek.

(D) Az $A_{i \in \{1,\dots,n\}} \in F$ események **teljesen függetlenek,** ha $\forall I \in 2^{\{1,\dots,n\}}$ esetén $\prod_{\forall i \in I} P(A_i) = P\left(\prod_{\forall i \in I} A_i\right)$, vagyis közülük tetszőlegesen kiválasztott események függetlenek.

(T) Ha $A_{i \in \{1,\dots,n\}} \in F$ események teljesen függetlenek $\rightarrow$ $\forall I \in 2^{\{1,\dots,n\}}$ esetén a $B_{i \in \{1,\dots,n\}}$ események is teljesen függetlenek, ahol: $B_i = \begin{cases} \overline{A_i}, & \text{ha } i \in I \\ A_i, & \text{ha } i \notin I \end{cases}$

Szemléletesen: közülük tetszőlegesen kiválasztott eseményeket az ellentettjükre kicserélve (megnegálva) az események továbbra is teljesen függetlenek maradnak.

A feltételes valószínűséggel kapcsolatos fontos tételek:

(T) Teljes valószínűség tétel: Ha $\langle A_i \rangle \in F$ teljes eseményrendszer, $P(A_i) > 0$ és $B \in F$ tetszőleges esemény $\rightarrow$ $P(B) = \sum_{\forall i} P(B \mid A_i) P(A_i)$.

Szemléletesen a teljes valószínűség tétele azt állítja, hogy egy B esemény valószínűségét úgy is megállapíthatjuk, hogy a biztos eseményt feldaraboljuk (legfeljebb megszámlálhatóan végtelen darabra), és a B eseménynek ezen darabokra számított feltételes valószínűségeit összeadjuk.

(T) Bayes-tétel: Ha $\langle A_i \rangle \in F$ teljes eseményrendszer, $P(A_i) > 0$ és $B \in F$, $P(B) > 0 \rightarrow$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum\limits_{\forall k} P(B \mid A_k) P(A_k)}.$$

A Bayes-tétel tulajdonképpen a teljes valószínűség tételnek egy kicsit átalakított alakja. A feladattól függ, hogy a kettő közül melyiket csélszerű használni, vagyis hogy melyik képletben szereplő valószínűségek értékét egyszerűbb kiszámolni az adott feladatban.

(T) Szorzási szabály: Ha $A_{i \in \{1,\ldots,n\}} \in F$ eseményekre teljesül, hogy $P\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right) > 0 \rightarrow$

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P\left(A_i \mid \prod_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Csak akkor célszerű használni, ha a feladat szövegezése miatt a fenti feltételes valószínűségeket nagyon könnyű kiszámolni.

A FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉGGEL KAPCSOLATOS FELADATOK MEGOLDÁSA:

A feladatok általában olyanok, hogy meg van adva néhány esemény, néhány valószínűség, esetleg az események egymáshoz való viszonya (függetlenek, egymást kizárják, A maga után vonja B-t), és ezekből kell mindenféle egyéb valószínűségeket kiszámolni.

Kezdjük azzal, hogy az események egymáshoz való viszonyaiból (feltéve ha volt ilyen megadva) egyenleteket írunk fel:

A és B függetlenek $\rightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

A és B kizárják egymást $\rightarrow$ $P(AB) = 0$

A maga után vonja B-t $\rightarrow$ $P(A) \le P(B)$ és $P(AB) = P(A)$

Ezután nézzük meg, hogy a keresett valószínűséget milyen képlettel tudjuk felírni. Pl.:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ vagy $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$. Ehhez nagy segítség lehet, ha az események viszonyát kis halmazos ábrával szemléltetjük magunknak. Így ezeket a képleteket sem nagyon kell megjegyezni (nem mintha olyan nehezek lennének), mert a rajzról tisztán leolvashatók. De azért nagy könnyebbség, ha észrevesszük, hogy hol lehet a fenti tételek valamelyikét használni.

Végül a már ismert valószínűségek értékét írjuk be, a még nem ismerteket pedig a fenti módszerrel próbáljuk továbbontani (2-3 lépésnél többre általában nincs szükség).

Nézzünk egy példát: Legyenek A, B, C teljesen független események, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{2}{3}$.

Keressük a következőket: $P(A \mid B+C) = ?$, $P(B \mid A4B) = ?$, $P(A \mid A+C) = ?$ és $P(\overline{ABC}) = ?$

Megoldás:

A, B, C teljesen függetlenek $\rightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, $P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{3}$, $P(BC) = P(B)P(C) = \frac{1}{3}$ és $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6}$.

$$P(A \mid B+C) = \frac{P(AB+AC)}{P(B+C)} = \frac{P(AB)+P(AC)-P(ABC)}{P(B)+P(C)-P(BC)} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}.$$

$$P(B \mid A4B) = \frac{P(B(A4B))}{P(A4B)} = \frac{P(B \setminus A)}{P(A\overline{B} + \overline{A}B)} = \frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-2P(AB)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \mid A+C) = \frac{P(A(A+C))}{P(A+C)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(C)-P(AC)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.\quad P(\overline{ABC}) = 1 - P(ABC) = \frac{5}{6}.$$

II. Valószínűségi változók

II.1. Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

(D) Valószínűségi változó: Az $X:\Omega \to \mathbb{R}$ fv-t valószínűségi változónak nevezzük, ha $\forall t \in \mathbb{R}:\ A=\{\omega: X(\omega)<t\} \in F$, azaz minden ilyen A megfigyelhető esemény. (Az A eseményt a t-hez tartozó nívóeseménynek nevezzük.)

Megjegyzés: A valószínűségi változókat azért vezetjük be, hogy a kezdetben bevezetett módszert egy olyannal váltsuk fel, amely bonyolultabb feladatoknál sokkal kényelmesebben kezelhető (mint azt később látni fogjuk). Innentől a valószínűségi változók helyett a v.v. rövidítést használom.

(D) Eloszlásfüggvény: Az X v.v. eloszlásfüggvénye $F_X:\ \mathbb{R} \to [0,1]$, ahol $F_X(t)=P\left(A=\{\omega:\ X(\omega)<t\}\right)$, azaz F_X értéke t-ben a t-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

(T) F_X tulajdonságai:

1.) F_X monoton nő ($\forall u<v:\ F_X(u)\le F_X(v)$).

2.) F_X minden pontjában balról folytonos ($\forall u \in \mathbb{R}:\ \lim\limits_{t\to u-0} F_X(t)=F_X(u)$).

3.) Határértéke a $-\infty$ ben 0, a $+\infty$ ben 1 ($\lim\limits_{t\to -\infty} F_X(t)=0$ és $\lim\limits_{t\to +\infty} F_X(t)=1$).

(T) Kolmogorov: Minden a fenti tulajdonságokat teljesítő F_X függvényhez létezik értelmes véletlen kísérlet, és ezek egyértelműen meghatározzák egymást.

(T) Tetszőleges x<y estén:

1.) $P(x\le X<y)=F_X(y)-F_X(x)$.

2.) $P(x<X<y)=F_X(y)-F_X(x+0)$.

3.) $P(x\le X\le y)=F_X(y+0)-F_X(x)$.

4.) $P(x<X\le y)=F_X(y+0)-F_X(x+0)$.

(D) Diszkrét v.v.: Az X v.v. diszkrét, ha értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú ($E_X \subset \mathbb{R}$, ahol $\#E_X \le \aleph_0$). Innentől a diszkrét v.v. helyett a d.v.v. rövidítést használom.

(D) Az X d.v.v. eloszlása: $p_{i\in\{1,\dots,n\}}=P(X=x_i)=P\left(A=\{\omega:\ X(\omega)=x_i\}\right)$, ahol az A esemény az x_i értékhez tartozó elemi események halmaza. Természetesen: $0\le p_i\le 1$ és $\sum\limits_{\forall i} p_i=1$.

(T) Az X d.v.v. eloszlásfüggvénye: $F_X(t)=\sum\limits_{\forall x_i<t} p_i$.

(D) Folytonos v.v.: Az X v.v. folytonos, ha értékkészlete kontinuum számosságú, és F_X eloszlásfüggvénye abszolút folytonos, azaz folytonos és legfeljebb véges sok pont kivételével differenciálható. Innentől a folytonos v.v. helyett az f.v.v. rövidítést használom.

(D) Az X f.v.v. sűrűségfüggvénye: Az X f.v.v. F_X eloszlásfv-e az abszolút folytonossági tulajdonsága miatt felírható $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ alakban, ahol f_X az X f.v.v. sűrűségfv-e.

(T) A sűrűségfv tulajdonságai: $f_X(t)\ge 0$ és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt=1$.

II.2. Valószínűségi változók transzformációi

Diszkrét-diszkrét transzformáció: Legyen X, Y d.v.v., $g:\ E_X \to E_Y$ és $Y=g(X)$. Ekkor:

$$P(Y=y)=\sum_{\forall x_i:\ g(x_i)=y} P(X=x_i).$$

Szemléletesen: az X-hez tartozó véletlen kísérlet eseményterét egyértelműen (nem feltétlenül egy-egyértelműen) leképezem egy új, az Y-hoz tartozó véletlen kísérlet eseményterére.

Folytonos-diszkrét transzformáció (diszkretizáció): Legyen X f.v.v. és $\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^{n} [u_i, u_{i+1})$, ahol $u_0 = -\infty$ és $u_{n+1} = +\infty$. Ekkor $Y = y_k :\ X \in [u_{k-1}, u_k)$ d.v.v. és $P(Y = y_k) = \int_{u_{k-1}}^{u_k} f_X(t)\,dt$.

Szemléletesen: A valós számok halmazát legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú intervallumra partícionálom (vagyis a partíciók diszjunktak és lefedik a teljes halmazt) és az egyes intervallumokhoz egy véletlen kísérlet elemi eseményeit rendelem, ahol ezen elemi események valószínűsége a hozzájuk tartozó intervallumba esés valószínűségével egyenlő.
Tipp: Nem nagyon kell!

Folytonos-folytonos transzformáció: Legyen X f.v.v. és $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffható és invertálható és $Y = T(X)$. Ekkor: Y f.v.v. és $f_Y(t) = f_X\left(T^{-1}(t)\right)\left|\frac{d}{dt}T^{-1}(t)\right|$.
Tipp: Ezt nagyon kell tudni!
Az ezzel kapcsolatos **feladatok** általában olyanok, hogy: adott egy F_X eloszlásfv-ű X f.v.v. (ha nem az eloszlásfv van megadva, hanem mondjuk a sűrűségfv, akkor abból kiszámíthatjuk az eloszlásfvt) és $Y = g(X)$, tehát pl.: $Y = X^2 - 1$. Keressük az F_Y eloszlásfv-t.
A megoldás menete: keressük az $F_Y(t) = P(Y < t)$ eloszlásfv-t. Y helyére beírjuk $g(X)$-et: $F_Y(t) = P(g(X) < t)$ és a zárójelen belüli kifejezést átrendezzük X-re, majd leolvassuk a kifejezés értékét az $F_X(t) = P(X < t)$ eloszlásfv felhasználásával. Mondjuk a fenti példában:
$F_Y(t) = P(X^2 - 1 < t) = P(X^2 < t + 1) = P\left(-\sqrt{t+1} < X < \sqrt{t+1}\right) = F_X\left(\sqrt{t+1}\right) - F_X\left(-\sqrt{t+1}\right)$.
Az alábbi két tétel a fentiek speciális esete:
(T) Ha $X \in U(0,1)$ f.v.v. és $F(y)$ egy szigorúan monoton növekvő eloszlásfv azon az intervallumon, ahol $0 < F(y) < 1$, akkor az $Y = F^{-1}(X)$ v.v. eloszlásfv-e éppen $F(y)$ lesz.
Vagyis a tétel az állítja, hogy ha a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású v.v-t behelyettesítünk egy egyértelműen invertálható eloszlásfv inverzének képletébe, akkor éppen egy ilyen eloszlású valószínűségi változót kapunk eredményül.
(T) Ha az X v.v. $F_X(t)$ eloszlásfv-e szigorúan monoton növekvő azon az intervallumon, ahol $0 < F_X(t) < 1$, akkor az $Y = F_X(X)$ v.v-ra teljesül, hogy: $Y \in U(0,1)$.
Vagyis ha egy a feltételenek megfelelő eloszlásfv-el rendelkező valószínűségi változót behelyettesítünk a saját eloszlásfüggvényébe, akkor éppen a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlást kapjuk eredményül.

A fenti tételek elméleti jelentősége az, hogy segítségükkel bármely ismert eloszlásfüggvényű v.v. szimulálható (pl. számítógép segítségével). A feladatokban időt nyerhetünk vele, ha nem kell végigvezetnünk a számítást, mert ésszrevesszük, hogy a fenti tételek valamelyike alkalmazható.

II.3. VÁRHATÓ ÉRTÉK

(D) Várható érték (0-körüli első momentum): Az X v.v. várható értékét $E\{X\}$-el jelöljük.
Az X d.v.v-nak létezik a várható értéke, ha $\sum_{\forall x_i} |x_i| P(X = x_i) < \infty$. Ekkor $E\{X\} = \sum_{\forall x_i} x_i P(X = x_i)$.
Az X f.v.v-nak létezik a várható értéke, ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$. Ekkor $E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$.
Szemléletesen: az egyes x értékekhez tartozó valószínűséget a 0-tól való előjeles távolság első hatványával (azaz x-el) súlyozzuk. Ezért nevezzük a várható értéket a 0-körüli első momentumnak. A várható érték fogalma erős párhuzamba állítható a tömegközéppont fizikai fogalmával.

(T) Legyen X v.v., $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $Y = g(X)$. Ekkor ha Y v.v. és:

1.) diszkrét esetben: ha $\sum_{\forall x_i} |g(x_i)| P(X = x_i) < \infty \to \exists E\{Y\} = \sum_{\forall x_i} g(x_i) P(X = x_i)$.

2.) folytonos esetben: ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty \to \exists E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx < \infty$.

(K) Ha az X v.v-nak létezik a várható értéke, akkor az Y=aX+b v.v-nak is létezik a várható értéke, és $E\{Y\} = aE\{X\} + b$. Szemléletesen: az $E\{\ \}$ várhatóérték-képzés lineáris operátor.

(T) Az $E\{\ \}$ operátor d.v.v-k esetén az összeadásra homomorf (művelettartó), azaz: ha X,Y d.v.v. és létezik a várható értékük, akkor: $E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$.

(D) Centralizált: Az X v.v. centralizáltja az $X^C = X - E\{X\}$ v.v., szemléletesen: „X középpontját a 0-ba toljuk". Triviális következmény, hogy a centralizált v.v. várható értéke mindig 0 ($E\{X^C\} = 0$).

(T) Markov-egyenlőtlenség: Ha $X \geq 0$ v.v. és $\exists E\{X\} \geq 0 \to \forall \delta > 0: P(X \geq \delta) \leq \frac{E\{X\}}{\delta}$.

II.4. Szórásnégyzet

(D) n-edik momentum: Az X v.v. ~án az $Y = X^n$ v.v. várható értékét értjük. $\mu_n\{X\} = E\{X^n\}$.

(D) Szórásnégyzet (a várható érték körüli második momentum):

Az X v.v-nak létezik a szórásnégyzete (varianciája), ha az $(X - E\{X\})^2$ v.v-nak létezik a várható értéke. X szórásnégyzetét $\sigma^2\{X\}$-el jelöljük. Tehát: $\sigma^2\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\}$.

Vagyis az X v.v. szórásnégyzete az X centralizáltjának a második momentuma.
Szemléletesen: az egyes x értékekhez tartozó valószínűséget a várható értéktől való előjeles távolság második hatványával (azaz $(x - E\{X\})^2$-el) súlyozzuk. Ezért nevezzük a szórásnégyzetet a várható érték körüli második momentumnak. A szórásnégyzet fogalma erős párhuzamba állítható a tehetetlenségi nyomaték fizikai fogalmával, ami épp a tömegközéppont körüli második momentum.

(T) A szórásnégyzet tulajdonságai:

1.) Ha X v.v. és $\exists \sigma^2\{X\} \to \forall a, b \in \mathbb{R}: \sigma^2\{aX + b\} = a^2 \sigma^2\{X\}$.

2.) $\sigma^2\{X\} = 0 \leftrightarrow P(X = E\{X\}) = 1$, vagyis csak a konstans v.v. szórásnégyzete 0.

(D) Szórás: Az X v.v. szórása a szórásnégyzetének pozitív négyzetgyöke: $\sigma\{X\} = +\sqrt{\sigma^2\{X\}}$.

(T) Steiner-tétel: $\forall a \in \mathbb{R}: \mu_2\{X - a\} = \sigma^2\{X\} + (E\{X\} - a)^2$ v. $\sigma^2\{X\} = E\{(X - a)^2\} - E\{X - a\}^2$.

Speciálisan $a = 0$ esetén: $\sigma^2\{X\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2$ (***általában ezzel számoljuk a szórásnégyzetet***).

Megjegyzés: ez a tétel egy az egyben megfelel a fizikából tanult Steiner-tételnek.

(K) Ha X v.v. és $\exists \sigma^2\{X\}$, akkor $\forall a \in \mathbb{R}: \sigma^2\{X\} \leq \mu_2\{X - a\}$, vagyis minden v.v-ra igaz, hogy egy tetszőleges érték körüli második momentuma akkor minimális, ha ez az érték épp a várható ertéke.

(D) Standardizált: Az X v.v. standardizáltja az $X^S = \frac{X^C}{\sigma\{X\}} = \frac{X - E\{X\}}{\sigma\{X\}}$ v.v., szemléletesen: „X középpontját a 0-ba toljuk és egységnyi szórásúra zsugorítjuk". Triviális következmény, hogy a standardizált v.v. várható értéke mindig 0 ($E\{X^S\} = 0$) és a szórásnégyzete mindig 1 ($\sigma^2\{X^S\} = 1$).

(T) Csebisev-egyenlőtlenség: Ha X v.v. és $\exists \sigma^2\{X\} < \infty \to \forall \varepsilon > 0: P(|X - E\{X\}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2\{X\}}{\varepsilon^2}$.

II.5. NEVEZETES VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

1.) Konstans d.v.v.

$\forall\omega\in\Omega:\ X(\omega)=c\ \rightarrow\ P(X=c)=1;\quad F_X(t)=\begin{cases}0,\ t\le c\\1,\ t>c\end{cases};\quad E\{X\}=c;\quad \sigma^2\{X\}=0$.

2.) Indikátor d.v.v. ($X\in I_A$)

Legyen $A\in F$ és $p=P(A)>0$. Ekkor az $X\in I_A$ az A-hoz tartozó indikátor v.v., ha:

$X(\omega)=\begin{cases}1,\ \omega\in A\\0,\ \omega\notin A\end{cases}\ \rightarrow\ P(X=1)=p;\quad P(X=0)=1-p;\quad E\{X\}=p;\quad \sigma^2\{X\}=p(1-p)$.

3.) Egyenletes eloszlású d.v.v.

Az $\Omega=\left\{\omega_{i\in\{1,\dots,n\}}\right\}$ és $P(A=\{\omega_i\})=\dfrac{1}{n}$ véletlen kísérlethez tartozó $X(\omega_i)=i$ d.v.v. n paraméterű egyenletes eloszlású d.v.v., amelyre:

$P(X=i)=\dfrac{1}{n};\quad F_X=\begin{cases}0,\ t\le 1\\\frac{k}{n},\ k<t\le k+1;\\1,\ t>n\end{cases}\quad E\{X\}=\dfrac{n+1}{2};\quad \sigma^2\{X\}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} i^2$

4.) Egyenletes eloszlású f.v.v. ($X\in U([a,b])$)

Az X f.v.v. az [a,b] intervallumon egyenletes eloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$F_X(x)=\begin{cases}0,\ x\le a\\\frac{x-a}{b-a},\ a<x\le b\\1,\ x>b\end{cases}$. Ekkor: $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},\ x\in(a,b)\\0,\ x\notin(a,b)\end{cases};\quad E\{X\}=\dfrac{a+b}{2};\quad \sigma^2\{X\}=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

5.) Binomiális eloszlású d.v.v. ($X\in B(n,p)$, ahol $n\ge 1$ és $p\in(0,1)$)

$\forall k\in\{1,\dots,n\}:\ p_k=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k};\quad E\{X\}=np;\quad \sigma^2\{X\}=np(1-p)$.

(T) $\max_{\forall k}\{P(X=k)\}=k^*=[(n+1)p]$, vagyis X értéke legnagyobb valószínűséggel k^*.

Tipikus esete(i): Legyen egy véletlen kísérletben $A\in F$ egy pozitív valószínűségű esemény ($p=P(A)$). Hajtsuk végre a kísérletet n-szer egymástól függetlenül, és jelölje X az A esemény bekövetkezésének számát a kísérletsorozatban!

6.) Poisson-eloszlású d.v.v. ($X\in Po(\lambda)$, ahol $\lambda>0$)

$\forall k\in\mathbb{N}:\ p_k=P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};\quad E\{X\}=\lambda;\quad \sigma^2\{X\}=\lambda$.

(T) Legyen $X_{n,p}\in B(n,p)$. Ekkor $\lim_{\substack{n\to\infty,\ p\to 0\\ np\to\lambda}} X_{n,p}=X\in Po(\lambda)$, vagyis a Poisson-eloszlás az n,p paraméterű binomiális eloszlás határesete, ha n tart végtelenbe, p tart 0-hoz, de úgy, hogy közben a szorzatuk λ.

Tipikus esete(i): Az előző tétel alapján olyan n szeres kísérletsorozatok, ahol az n nagyon nagy, ellenben a megfigyelt esemény valószínűsége nagyon kicsi. Pl.: öngyilkosságok száma.

7.) Geometriai eloszlású d.v.v. ($X\in G(p)$, ahol $p\in(0,1)$)

$\forall k\in\mathbb{Z}^+:\ p_k=P(X=k)=(1-p)^{k-1}p;\quad E\{X\}=\dfrac{1}{p};\quad \sigma^2\{X\}=\dfrac{1-p}{p^2}$.

(T) A geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága: $\forall m,k\in\mathbb{Z}^+:\ P(X=m+k\mid X>m)=P(X=k)$.

Szemléletesen azt jelenti, hogy az idő múlásával az esemény bekövetkezésének esélyei nem változnak, tehát ha már egy órája dobálom a kockát, attól annak az esélye, hogy mostanatól éppen harmadikra dobok fejet, nem változik.

Tipikus esete(i): Egy kísérletet addig hajtsunk végre, amíg a p valószínűségű A esemény be nem következik. X jelölje, hogy az A esemény hányadik kísérlet során következett be először. Pl.: addig dobjunk a kockával, amíg 6-ost nem dobunk.

8.) Exponenciális eloszlású f.v.v. ($X \in E(\lambda)$, ahol $\lambda > 0$**)**

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0 \\ 0, \ x \le 0 \end{cases}; \quad f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0 \\ 0, \ x \le 0 \end{cases}; \quad E\{X\} = \frac{1}{\lambda}; \quad \sigma^2\{X\} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(T) Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága: Az X f.v.v-ra teljesül, hogy

$\forall x, t > 0: \ P(X < x + t \mid X \ge x) = P(X < t) \leftrightarrow \exists \lambda > 0: \ X \in E(\lambda)$.

Vagyis a tétel azt állítja, hogy az exponenciális eloszlású az egyetlen f.v.v., amely örökifjú tulajdonságú, azaz annak a valószínűsége 0-ban, hogy X legfeljebb t-ig él ugyanannyi, mint annak a valószínűsége x-ben, hogy X legfeljebb x+t-ig él.
Szemléletesen: a túlélési kondíciók az idő múlásával nem változnak.
Tipikus esete(i): Berendezések élettartalmának vizsgálata, ahol λ a berendezés meghibásodási valószínűsége.

9.) Hipergeometriai eloszlású d.v.v. ($X \in Hg(N, F, n)$, ahol $F < N$ és $n \le \min\{F, N - F\}$**)**

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ p_k = P(X = k) = \frac{\binom{F}{k}\binom{N-F}{n-k}}{\binom{N}{n}}; \quad E\{X\} = n\frac{F}{N}; \quad \sigma^2\{X\} = n\frac{F}{N}\left(1 - \frac{F}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

(T) Ha $N \to \infty, \ F \to \infty$, akkor $Hg(N, F, n) \sim B\left(n, \frac{F}{N}\right)$.

Tipikus esete(i): Egy dobozban van N db golyó: ebből F db fehér és N-F db piros. Visszatevés nélkül kihúzunk n db golyót. Mennyi ezek között a fehér? Ilyen egyébként a lottóhúzás is: egy k-találatos szelvény kitöltésének a valószínűségét egy $X \in Hg(90, 5, 5)$ v.v. $P(X = k)$ értéke adja.

10.) Normális eloszlású f.v.v. ($X \in N(\mu, \sigma)$, ahol $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$**)**

$$f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad F_X(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt; \quad E\{X\} = \mu; \quad \sigma^2\{X\} = \sigma^2$$

Ha $X \in N(0,1)$, akkor standard normális eloszlású v.v-ról beszélünk, és:

$$f_X(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad F_X(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad E\{X\} = 0; \quad \sigma^2\{X\} = 1.$$

(T) A φ(x) Gauss-függvény tulajdonságai: páros ($\varphi(x) = \varphi(-x)$), inflexiós helyei a +1 és a -1, maximuma $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, határértéke a végtelenben $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ és $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

(T) $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right); \quad \Phi(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(\sigma x + \mu); \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right); \quad \varphi(x) = \sigma\varphi_{\mu,\sigma}(\sigma x + \mu)$

Tipikus esete(i): Akkor használjuk, ha a feladatban megadják, hogy normális eloszlásról van szó.

DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK:

Név	Jelölés	Eloszlás	Várható érték $E\{X\}$	Szórásnégyzet $\sigma^2\{X\}$
Konstans		$P(X=c)=1$	c	0
Indikátor	$X \in I_A$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Egyenletes		$P(X=i)=\frac{1}{n}, \quad i \in \{1,...,n\}$	$\frac{n+1}{2}$	
Binomiális	$X \in B(n,p)$ $n \geq 1$ és $p \in (0,1)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k \in \{0,1,...,n\}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$X \in Po(\lambda)$ $\lambda > 0$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$	λ	λ
Geometriai	$X \in G(p)$ $p \in (0,1)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$, $k \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergemetriai	$X \in Hg(N,F,n)$ $F < N$ és $n \leq \min\{F, N-F\}$	$P(X=k)=\frac{\binom{F}{k}\binom{N-F}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k \in \mathbb{N}$	$n\frac{F}{N}$	$n\frac{F}{N}\left(1-\frac{F}{N}\right)$

FOLYTONOS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK:

Név	Jelölés	Eloszlásfv. F_X	Sűrűségfv. f_X	$E\{X\}$	$\sigma^2\{X\}$
Egyenletes	$X \in U(a,b)$ $a < b$	$0, \quad x \leq a$ $\frac{x-a}{b-a}, \quad a < x < b$ $1, \quad x \geq b$	$\frac{1}{b-a}, \quad x \in (a,b)$ $0, \quad x \notin (a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	$X \in E(\lambda)$ $\lambda > 0$	$1-e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ $0, \quad x \leq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ $0, \quad x \leq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normális	$X \in N(\mu,\sigma)$ $\sigma > 0$	$\Phi_{\mu,\sigma}(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_{\mu,\sigma}(t)\,dt$	$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Std. normális	$X \in N(0,1)$	$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	0	1

III. VALÓSZÍNŰSÉGI VEKTORVÁLTOZÓK

III.1. VALÓSZÍNŰGSÉGI VÁLTOZÓK EGYÜTTES ELOSZLÁSA

(D) Valószínűségi vektorváltozó: Az $\underline{X}: \Omega \to R^p$ fv egy p-dimenziós valószívűségi vektorváltozó, ha $\forall \underline{t} = (t_1, ..., t_p) \in \mathbb{R}^p$: $A = \{\omega: X_i(\omega) < t_i, \ \forall i\} \in F$, azaz minden ilyen A megfigyelhető esemény. (Az A eseményt a t vektorhoz tartozó nívóeseménynek nevezzük.) Megjegyzés: A valószínűségi vektorváltozókat azért vezetjük be, hogy a v.v-k közötti összefüggéseket kényelmesen tudjuk kezelni. Innentől a valószínűségi vektorváltozók helyett a v.v.v. rövidítést használom.

(T) $\underline{X}$ v.v.v. $\leftrightarrow$ ha $\forall$ komponense v.v.

(D) Együttes eloszlás és eloszlásfv: Az $X_1, X_2, ..., X_p$ v.v-k együttes eloszlásfüggvénye, vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_p)$ v.v.v. eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}: \mathbb{R}^p \to [0,1]$ skalár-vektor fv., ahol $F_{\underline{X}}(\underline{t}) = P(A = \{\omega: X_i(\omega) < t_i, \ \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke $\underline{t}$-ben a $\underline{t}$-hez tartozó nívóesemény valószínűsége. Megjegyzés: Az eloszlás és az eloszlásfv elméletileg egy kicsit mást jelent, de gyakorlatilag ugyanaz, hiszen kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

(T) $F_{\underline{X}}$ tulajdonságai:

1.) $F_{\underline{X}}$ $\forall$ változójában monoton nő ($\forall \underline{u} \le \underline{v}$: $F_{\underline{X}}(\underline{u}) \le F_{\underline{X}}(\underline{v})$, ahol $\underline{u} \le \underline{v}$ jelentése: $\forall i$: $u_i \le v_i$).

2.) $F_{\underline{X}}$ $\forall$ változójában balról folytonos ($\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^p$: $\lim_{\underline{t} \to \underline{u} - \underline{0}} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = F_{\underline{X}}(\underline{u})$).

3.) Ha $\underline{X}$-nek *legalább egyik* komponensével a $-\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.

4.) Ha $\underline{X}$-nek *minden* komponensével a $+\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.

5.) Legyen T: $[\underline{a}, \underline{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ... \times [a_p, b_p)$ p-dimenziós tégla és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p-dimenziós bináris vektor. Ekkor: $P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^{\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i} F_{\underline{X}}(\underline{a}\underline{\varepsilon} + \underline{b}(\underline{1} - \underline{\varepsilon})) \ge 0$, vagyis a téglalap csúcsaihoz tartozó eloszlásértékek megfelelően előjelezett összege soha nem negatív. (Ez azért van így, mert ez az előjeles összeg éppen annak a valószínűsége, hogy a v.v.v. értéke a téglatesten belülre esik, ami nem lehet negatív, hiszen egy esemény valószínűsége.)

(D) Vetületi- vagy peremeloszlásfv: Ha $\underline{X} = (X_1, ..., X_p)$ egy p-dimenziós v.v.v. és $\underline{Y} \subset \underline{X}$ egy $\underline{X}$-nek tetszőleges $k < p$ komponenséből álló v.v.v. ($\underline{Y} = (X_{i_1}, ..., X_{i_k})$), akkor $\underline{Y}$ komponenseinek együttes eloszlásfüggvényét az $\underline{X}$ egy k-dimenziós vetületi eloszlásfüggvényének nevezzük.

(T) $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes vetületi eloszlásfüggvényét (Fordítva általában nem igaz!):

$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y}: t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y}: t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$, vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne az $\underline{Y}$-ban.

(D) Az $\underline{X}$ v.v.v. komponensei **páronként függetlenek**, ha $\forall i \ne j$: $F_{X_i, X_j}(t_i, t_j) = F_{X_i}(t_i) F_{X_j}(t_j)$, vagyis a bármely két komponens menti 1-dimenziós peremeloszlásfüggvények szorzata megegyezik a két komponens menti 2-dimenziós peremeloszlásfüggvénnyel.

(D) Az $\underline{X}$ v.v.v. komponensei **teljesen függetlenek**, ha $\forall \underline{Y} \subset \underline{X}$: $F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y}: t_i) = \prod_{\forall i: X_i \in \underline{Y}} F_{X_i}(t_i)$, vagyis a bármely $k < p$ komponens menti 1-dimenziós peremeloszlásfüggvények szorzata megegyezik a k komponens menti k-dimenziós peremeloszlásfüggvénnyel.

(D) Diszkrét v.v.v.: $\underline{X}$ diszkrét v.v.v. (röviden: d.v.v.v.), ha $\forall$ komponense d.v.v.

(D) Ha $\underline{X}$ p-dimenziós d.v.v.v. komponenseinek értékkészlete: $E_{\underline{X}} = \{\underline{x}_{\underline{i}}\}$, akkor

$r_{\underline{i}=(i_1,\dots,i_p)} = P(\underline{X} = \underline{x}_{\underline{i}})$ jelöli az $\underline{X}$ d.v.v.v. $\underline{x}_{\underline{i}}$ értékvektorához tartozó valószínűséget. Triviálisan igaz, hogy: $0 \le r_{\underline{i}} \le 1$ és $\sum_{\forall \underline{i}} r_{\underline{i}} = 1$.

(D) Folytonos v.v.v.: $\underline{X}$ folytonos v.v.v. (röviden: f.v.v.v.), ha $\exists f_{\underline{X}}(\underline{t})$ sűrűségfüggvénye.

(D) Az $\underline{X}$ f.v.v.v. sűrűségfv-e: az a Riemann-integrálható $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ fv., amelyre:

$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_{-\underline{\infty}}^{\underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{t})\,d\underline{t}$. Triviálisan igaz, hogy $\forall \underline{t}$: $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \ge 0$ és $\int_{-\underline{\infty}}^{\underline{\infty}} f_{\underline{X}}(\underline{t})\,d\underline{t} = 1$.

(D) Az $\underline{X}$ f.v.v.v. peremsűrűségfv-e: az $\underline{X}$ peremeloszlásához tartozó sűrűségfv-t úgy kapjuk meg, hogy az $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ sűrűségfv-t a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$ től $+\infty$ ig kiintegráljuk.
Az általános képlet csúnya és áttekinthetetlen, nem írom le csak a kétváltozós esetet:
Legyen egy 2-dimenziós f.v.v.v. sűrűségfv-e: $f_{X,Y}(u,v)$. Ekkor az X komponenshez tartozó

peremsűrűségfv-e: $f_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,dv$.

(T) Az $\underline{X}$ f.v.v.v. komponensei **páronként függetlenek** $\leftrightarrow$ ha
$\forall i \ne j$: $f_{X_i,X_j}(t_i,t_j) = f_{X_i}(t_i) f_{X_j}(t_j)$.

(T) Az $\underline{X}$ f.v.v.v. komponensei **teljesen függetlenek** $\leftrightarrow$ ha
$\forall \underline{Y} \subset \underline{X}$: $f_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \prod_{\forall i:\, X_i \in \underline{Y}} f_{X_i}(t_i)$.

III.2. NEVEZETES EGYÜTTES ELOSZLÁSOK

1.) Polinomiális eloszlású d.v.v.v. ($\underline{X} \in \mathrm{Pol}(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$, ahol $n, r \in \mathbb{Z}^+$, $p_i > 0$ és $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$**)**

Alkosson $A_i, \dots, A_r$ teljes eseményrendszert egy K véletlen kísérletben úgy, hogy $p_i = P(A_i) > 0$ legyen. Hajtsuk végre egymástól függetlenül n-szer a K kísérletet, és jelölje X_i az A_i esemény bekövetkezésének számát ebben a kísérletsorozatban. Ekkor az $\underline{X}$ v.v.v. polinomiális eloszlású: az X_i komponensek értékkészlete az n-től nem nagyobb természetes számok halmaza ($X_i \in \{0,1,\dots,n\}$) és az X_i értékek között szoros összefüggés van: összegük n ($\sum_{i=1}^{r} X_i = n$).

Továbbá: $P(\forall i:\ X_i = k_i) = n! \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i}}{k_i!}$, ahol $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Megjegyzés: A binomiális eloszlás a polinomiális eloszlás speciális esete, ahol r=2, a két esemény pedig A és ellentettje. Továbbá: $X_i \in B(n, p_i)$, vagyis a polinomiális eloszlású v.v.v. komponensei egyenként binomiális eloszlásúak.
Tipikus esete(i): Hétszer dobtunk a kockával, mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok között van legalább 3 hatos …

2.) Polihipergeometriai eloszlású d.v.v.v. ($\underline{X} \in \mathrm{PHg}(n, F_1, F_2, \dots, F_r)$, ahol $n, F_i \in \mathbb{Z}^+$; $n \le \min_{\forall i}\{F_i\}$**)**

Egy dobozban van F_i db c_i színű golyó. Ebből (visszatevés nélkül) kihúzunk n db-ot. Jelölje X_i a kíhúzott c_i színű golyók számát. Ekkor az $\underline{X}$ v.v.v. polihipergeometriai eloszlású, az X_i komponensek értékkészlete az n-től nem nagyobb természetes számok halmaza ($X_i \in \{0,1,\dots,n\}$) és az X_i értékek között szoros összefüggés van: összegük n ($\sum_{i=1}^{r} X_i = n$).

Továbbá: $P(\forall i:\ X_i = k_i) = \dfrac{\prod_{i=1}^{r}\binom{F_i}{k_i}}{\binom{N}{n}}$, ahol $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Megjegyzés: A polinomiális és a polihipergeometriai eloszlások bár nagyon hasonlítanak, lényeges különbség, hogy az elsőnél az n kísérletet egymástól függetlenül hajtottuk végre, mig itt minden kísérlet befolyásolja az utána következőket, hiszen visszatevés nélkül húzunk.
Tipikus esete(i): Mennyi a valószínűsége, hogy a 32 lapos kártyapakliból húzott 10 lap között pl. pontosan két 10-es és két ász van.

3.) D tartományon egyenletes eloszlású f.v.v.v. ($\underline{X} \in U(D)$)

Legyen $\underline{X}$ p-dimenziós f.v.v.v. és $D \subseteq \mathbb{R}^p$, ahol $m(D) < \infty$, vagyis a tartomány p-dimenziós térfogata véges. Ha $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{m(D)}, \text{ ha } \underline{x} \in D \\ 0, \text{ ha } \underline{x} \notin D \end{cases}$

4.) k-dimenziós normális eloszlású f.v.v.v. ($\underline{X} \in N_k(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$, ahol $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^k$; $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ poz. szemidef.)

Általánosan: $f_{\underline{X}}(\underline{t}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{t})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{x}-\underline{t})}$; $F_{\underline{X}}(\underline{t}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\tau})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\tau})} d\tau$.

Speciálisan 2-dimenziós esetre: $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$; $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, ahol $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Eloszlásfv-e: $F_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(u-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(u-\mu_1)(v-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dvdu$,

tehát a sűrűségfv-e: $f_{X,Y}(u,v) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(u-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(u-\mu_1)(v-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$,

továbbá megmutatható, hogy: $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$.

Tipikus feladat: $\underline{\mu}$ és $\underline{\underline{\Sigma}}$ kiszámítása adott sűrűségfv alapján.

Ha a sűrűségfv $f_{X,Y}(u,v) = \dfrac{1}{2\pi A} e^{-\frac{1}{2}\left(B(u-m_1)^2 + C(u-m_1)(v-m_2) + D(v-m_2)^2\right)}$ alakban adott (vagy ilyen alakra hozható), akkor: $\mu_1 = m_1$; $\mu_2 = m_2$; $\rho = \sqrt{\dfrac{A^2C^2}{4+A^2C^2}}$; $\sigma_1 = \dfrac{1}{(1-\rho^2)B}$; $\sigma_2 = \dfrac{1}{(1-\rho^2)D}$.

Másrészt az is igaz, hogy az A, B, C, D paraméterek közül bármely három meghatározza a negyediket. Tehát lehet olyan feladat (és szokott is lenni), hogy mondjuk A értéke nem ismert, B, C és D meg vannak adva, és ezekből kell kiszámolni akármit. Ilyenkor az együtthatók egyeztetésével a következő egyenletek írhatók fel: $(1-\rho^2)\sigma_1^2 = \dfrac{1}{B}$, $(1-\rho^2)\sigma_2^2 = \dfrac{1}{D}$, $(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2 = \dfrac{-2\rho}{C}$.

Az első két egyenlet szorzatának négyzetgyökét összeegyeztethetjük a 3. egyenlettel kapjuk, hogy: $\sqrt{\dfrac{1}{BD}} = \dfrac{-2\rho}{C} \rightarrow \rho = -\dfrac{C}{2\sqrt{BD}} \rightarrow (1-\rho^2) = 1 - \dfrac{C^2}{4BD}$. Ezt visszaírva az eredeti egyenletekbe megkapjuk ρ, σ_1 és σ_2 értékét, ezekből pedig $A = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$.

III.3. VALÓSZÍNŰSÉGI VEKTORVÁLTOZÓK TRANSZFORMÁCIÓI

(T) Legyen $\underline{X}$ olyan p-dimenziós f.v.v.v., hogy $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ sűrűségfv-e eltűnik a $D \subseteq \mathbb{R}^p$ tartományon kívül. Legyen továbbá $\underline{u}: D \to H\left(\subseteq \mathbb{R}^p\right)$ bijektív és differenciálható transzformáció. Ekkor az $\underline{Y} = \underline{u}(\underline{X})$ f.v.v.v. sűrűségfv-ét az alábbi módon számíthatjuk: $f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}\left(\underline{u}^{-1}(\underline{y})\right)\left|\det\left(\underline{\underline{J}}(\underline{y})\right)\right|$, ha $\underline{y} \in H$; 0 különben, ahol $\underline{\underline{J}}(\underline{y})$ az $\underline{u}$ leképezés Jacobi-mátrixa: $\underline{\underline{J}}(\underline{y}) = \left[j_{a,b}\right]$, ahol $j_{a,b} = \dfrac{\partial u_a^{-1}}{\partial y_b}$.

(T) Két f.v.v. összegének (különbségének) eloszlása: Legyen X és Y f.v.v. és jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ ezek együttes sűrűségfüggvényét. Ekkor a $Z = X \pm Y$ f.v.v. sűrűségfv-e: $f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, x \mp t)\,dt$.

Ha X és Y függetlenek is, akkor: $f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x \mp t)\,dt$, ami a két sűrűségfv konvolúciója.

Pl.: Normális eloszlások konvolúciója: Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor: $X + Y \in N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$, vagyis a várható értékek és a szórásnégyzetek összeadódnak.

(T) Két d.v.v. összegének eloszlása: Ha X és Y nemnegatív egészértékű d.v.v., akkor a $Z = X + Y$ szintén nemnegatív egészértékű d.v.v. eloszlása: $P(Z = k) = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} P(X = \alpha, Y = k - \alpha)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén. Ha X és Y függetlenek is, akkor: $P(Z = k) = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} P(X = \alpha) P(Y = k - \alpha)$.

Pl.: Poisson-eloszlások konvolúciója: Ha X és Y egymástól függetlenek és Poisson-eloszlásúak, azaz $X \in Po(\lambda)$, $Y \in Po(\mu)$, akkor: $X + Y \in Po(\lambda + \mu)$.

(T) Legyen $\underline{X}$ p-dimenziós d.v.v.v. és $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tetszőleges p-változós valós fv. Legyen továbbá $Y = g(\underline{X})$ d.v.v., ekkor: ha $\exists E\{Y\} \;\rightarrow\; E\{Y\} = \sum\limits_{\forall \underline{x}} g(\underline{x}) P(\underline{X} = \underline{x})$.

(T) Legyen $\underline{X}$ p-dimenziós f.v.v.v. és $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tetszőleges p-változós valós fv. Legyen továbbá $Y = g(\underline{X})$ f.v.v., ekkor: ha $\exists E\{Y\} \;\rightarrow\; E\{Y\} = \int\limits_{-\underline{\infty}}^{\underline{\infty}} g(\underline{x}) f_{\underline{X}}(\underline{x})\,d\underline{x}$.

(K) Tetszőleges $\underline{X}$ v.v.v. komponenseire teljesül: $E\left\{\sum\limits_{\forall i} X_i\right\} = \sum\limits_{\forall i} E\{X_i\}$.

(K) Ha X, Y független v.v-k és létezik a várható értékük, akkor $\exists E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$.

(T) Ha X, Y korrelálatlan v.v-k és létezik a szórásnégyzetük, akkor $\exists \sigma^2\{X \pm Y\} = \sigma^2\{X\} + \sigma^2\{Y\}$.

Megjegyzés: A fenti példák és ez utóbbi tételek használata gyakran megkönnyíti az életünket a feladatmegoldások során, tehát érdemes észben tartani őket!

A V.V.V-K TRANSZFORMÁCIÓIVAL KAPCSOLATOS FELADATOK MEGOLDÁSA:

Alapfeladat, sima egyváltozós: $\frac{1}{X} \in U(5,8)$, keressük az X eloszlásfv-ét és sűrűségfv-ét.

Abból indulunk ki, hogy $Y = \frac{1}{X} \in U(5,8)$, tehát $F_Y(t) = \frac{t-5}{3}$, ha $t \in (5,8)$. (Előtte 0, utána 1 természetesen.) Tehát: $F_Y(t) = \frac{t-5}{3} = P(Y < t) = P\left(\frac{1}{X} < t\right) = P\left(X > \frac{1}{t}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{t}\right)$, ahol $t \in (5,8)$ azaz: $\frac{1}{t} \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{5}\right)$. Innen: $1 - \frac{t-5}{3} = \frac{8-t}{3} = P\left(X < \frac{1}{t}\right) = F_X\left(\frac{1}{t}\right)$, vagyis $F_X(t) = \dfrac{8 - \frac{1}{t}}{3} = \dfrac{8t-1}{3t}$, $\quad t \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{5}\right)$.

Ezt deriválva kapjuk a sűrűségfv-t: $f_X(t)=\frac{8}{3}+\frac{1}{t^2}, \quad t\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{5}\right)$.

<u>*Konvolúciós:*</u> Legyenek $X,Y\in U(0,1)$ egymástól függetlenek és $Z=X+Y$. Kérdés: $f_Z(t)$. Valószínűgési változók összegét konvolúcióval számolunk, ehhez általános esetben kell az együttes sűrűségfüggvény, de mivel a két változó független, ezért $f_{X,Y}(u,v)=f_X(u)f_Y(v)$, vagyis:

$f_Z(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\tau,t-\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau)f_Y(t-\tau)d\tau$. Nyilván $f_X(t)=f_Y(t)=1, t\in(0,1)$, különben 0.

Ezért az integrálást tartományonként kell elvégezni:

$t(-\infty,0): f_Z(t)=0$, $t\in(0,1): f_Z(t)=\int\limits_0^t 1d\tau=t$, $t\in(1,2): f_Z(t)=\int\limits_t^2 1d\tau=2-t$, $t(2,\infty): f_Z(t)=0$.

Az integrálási határokat az dönti el, hogy az $f_{X,Y}(\tau,t-\tau)$ szorzat mikor 1, vagyis: $0<\tau,1-\tau<1$.

<u>*Várható értékes:*</u>

1.) $f_{X,Y}(u,v)=u+v, \quad u,v\in(0,1)$. Kérdés: $E\{X+Y\}$.

Tudjuk, hogy mindenkor: $E\{X+Y\}=E\{X\}+E\{Y\}$. Ezért kiszámoljuk a peremsűrűségfv-eket (ugyebár a másik változó szerinti integrálással):

$f_X(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dv=\int\limits_0^1 u+vdv=u[v]_0^1+\frac{1}{2}\left[v^2\right]_0^1=u+\frac{1}{2}$, hasonlóan $f_Y(v)=v+\frac{1}{2}$.

Innen: $E\{X\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} tf_X(t)dt=\int\limits_0^1 t^2+\frac{1}{2}tdt=\frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1+\frac{1}{4}\left[t^2\right]_0^1=\frac{7}{12}$, hasonoloan $E\{Y\}=\frac{7}{12}$.

Tehát: $E\{X+Y\}=E\{X\}+E\{Y\}=\frac{7}{12}+\frac{7}{12}=\frac{7}{6}$.

2.) $f_{X,Y}(u,v)=6u^2v, \quad u,v\in(0,1)$. Kérdés: $E\left\{\frac{Y}{X^2}\right\}$.

Csak a transzformációs képletre kell emlékezni. Legyen: $g(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha^2}$, ekkor $Z=\frac{Y}{X^2}=g(X,Y)$.

Ezért: $E\{Z\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u,v)f_{X,Y}(u,v)dudv=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{v}{u^2}6u^2vdudv=\int\limits_0^1 6v^2dv=2$.

III.4. KOVARIANCIA

(D) Kovariancia: Az X,Y v.v-k kovarianciája $\mathrm{cov}(X,Y)=E\{(X-E\{X\})(Y-E\{Y\})\}$, ha létezik.

Vagyis a kovariancia a centralizált v.v-k szorzatának a várható értéke: $\mathrm{cov}(X,Y)=E\{X^CY^C\}$.

(T) $\mathrm{cov}(X,Y)=E\{XY\}-E\{X\}E\{Y\}$. Megjegyzés: ***általában ezzel számolunk kovarianciát.***

(T) Ha X,Y függetlenek, akkor $\mathrm{cov}(X,Y)=0$. Visszafelé általában nem igaz!

(T) A kovariancia tulajdonságai:

1.) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$, vagyis a kovariancia kommutatív.

2.) $\mathrm{cov}(X,X)=\sigma^2\{X\}$, hiszen: $\mathrm{cov}(X,X)=E\left\{\left(X^C\right)^2\right\}=\mu_2\left\{X^C\right\}=\sigma^2\{X\}$.

3.) $\mathrm{cov}(\alpha X+\beta Y,Z)=\alpha\,\mathrm{cov}(X,Z)+\beta\,\mathrm{cov}(Y,Z)$.

Megjegyzés: Ezek a tulajdonságok (főleg 2. és 3.) gyakran felhasználhatók a feladatokban.

(T) $\sigma^2\{X\pm Y\}=\sigma^2\{X\}+\sigma^2\{Y\}\pm 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$.

(T) Schwarz-egyenlőtlenség: $|\mathrm{cov}(X,Y)|\le\sigma\{X\}\sigma\{Y\}$.

Megjegyzés: Analógia figyelhető meg a kovariancia és a síkbeli vektorok skaláris szorzása között:

$$\mathrm{cov}(X,Y) \qquad \langle \underline{x},\underline{y}\rangle$$

$$\sigma^2\{X\} \qquad \langle \underline{x},\underline{x}\rangle = |\underline{x}|^2$$

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \le \sigma\{X\}\sigma\{Y\} \qquad |\langle \underline{x},\underline{y}\rangle| \le |\underline{x}||\underline{y}|$$

De ez csupán egy érdekesség, nem kell tudni!

III.5. KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓ

(D) Korrelációs együttható: Az X,Y v.v-k korrelációs együtthatóján a standardizáltjuk kovarianciáját értjük: $R(X,Y) = \mathrm{cov}(X^S, Y^S) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma\{X\}\sigma\{Y\}}$.

A Schwarz-egyenlőtlenség triviális következménye, hogy $|R(X,Y)| \le 1$.

(D) Ha X,Y v.v-kra $R(X,Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy **X és Y korrelálatlanok**.

(T) $|R(X,Y)| = 1 \leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$, vagyis a két v.v. között lineáris kapcsolat áll fenn. Továbbá ekkor teljesül, hogy: $R(X,Y) = \mathrm{sgn}(a)$.

(D) Várhatóérték-vektor: Az $\underline{X}$ p-dimenziós v.v.v. ~a az $E\{\underline{X}\} = \left(E\{X_1\},...,E\{X_p\}\right)^T$ vektor.

(D) Kovarianciamátrix: Az $\underline{X}$ p-dimenziós v.v.v. ~a a $\underline{\underline{\Sigma}} = \left[\mathrm{cov}(X_i, X_j)\right]$ p×p-s mátrix.

(T) $\underline{\underline{\Sigma}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^p$: $\underline{a}^T \underline{\underline{\Sigma}}\, \underline{a} \ge 0$.

Pl.: 2-dimenziós normális eloszlás: Ha $\underline{X} \in N_2(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$, ahol $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ és $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, akkor $R(X_1, X_2) = \rho$. Továbbá teljesül, hogy X_1, X_2 függetlenek $\leftrightarrow \rho = 0$.

FELADATOK KOVARIANCIÁRA ÉS KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓRA:

Ezek a feladatok általában a kovariancia tulajdonságaira vonatkozó képletekre alapoznak! Pl.:
Feladat: Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek (vagyis $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$), $U = \frac{X+Y}{2}$, $V_\alpha = \alpha X + (1-\alpha)Y$. Mivel egyenlő $\mathrm{cov}(U, V_\alpha)$, ha $\alpha \in (0,1)$?
Megoldás: A kovariancia tulajdonságai alapján:

$$\mathrm{cov}(U, V_\alpha) = \mathrm{cov}\left(\tfrac{X+Y}{2}, \alpha X + (1-\alpha)Y\right) = \alpha\,\mathrm{cov}\left(\tfrac{X+Y}{2}, X\right) + (1-\alpha)\mathrm{cov}\left(\tfrac{X+Y}{2}, Y\right) =$$

$$= \tfrac{\alpha}{2}\mathrm{cov}(X,X) + \tfrac{\alpha}{2}\mathrm{cov}(Y,X) + \tfrac{1-\alpha}{2}\mathrm{cov}(X,Y) + \tfrac{1-\alpha}{2}\mathrm{cov}(Y,Y) = \tfrac{\alpha}{2}\sigma^2\{X\} + \tfrac{1-\alpha}{2}\sigma^2\{Y\}$$

III.6. REGRESSZIÓ

(D) D.v.v-k feltételes eloszlása: Legyenek X és Y d.v.v-k. Ekkor az $X_k = P(X = x_i \mid Y = y_k) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)}$ eloszlást az X-nek az $Y = y_k$ eseményre vett feltételes eloszlásának nevezzük. Ezen X_k eloszlások halmazát az X-nek az Y-ra vett feltételes eloszlásának nevezzük.
Vagyis az $X \mid Y$ feltételes eloszlás tulajdonképpen nem is eloszlás, hanem eloszlások halmaza. Azt mutatja meg, hogy az egyes $Y = y_k$ események bekövetkezése esetén (amelyek mellesleg teljes eseményrendszert alkotnak) X milyen eloszlást mutat. Tehát az Y v.v. ismeretében határozzuk meg az X eloszlását.

(D) D.v.v-k feltételes várható értéke (regressziója): Legyenek X és Y d.v.v-k. Ekkor az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén (regresszióján) az $E(X \mid Y)$ valószínűségi változót értjük, amelynek eloszlása: $P(E(X \mid Y) = i) = \sum_{\forall k: i = E\{X_k\}} P(Y = y_k)$.

Tehát míg a feltételes eloszlás eloszlások halmaza, addig a regresszió egy eloszlás, vagyis v.v., amely szemléletesen azt méri, hogy egy Y v.v. eloszlásának ismeretében hogyan következtethetünk az X v.v. várható értékére, vagyis Y alapján hogyan tudjuk megbecsülni X-et. Természetesen minél szorosabb az összefüggés X és Y között, annál jobb ez a becslés. Gyakorlati alkalmazása pl. amikor egy nehezen, vagy egyáltalán nem mérhető v.v-t szeretnénk „mérni" (ez az X), és ezt úgy érjük el, hogy egy másik, vele szoros kapcsolatban lévő, és könnyen mérhető v.v alapján (ez az Y) próbálunk következtetni. Ezt használják pl. az időjárás előrejelzésben is, ahol a elkövetkező napok időjárását szeretnék megbecsülni (ez az X, ami ugyebár nem mérhető), és ehhez az elmúlt napok időjárását veszik figyelembe (ez Y, amit viszont állandóan mérnek), hiszen ezek között azért vannak összefüggések. Minél szorosabbak ezek az összefüggések, annál pontosabbak az előrejelzések.
Megjegyzés: Fontos, hogy az $E(X \mid Y)$ egy jelölés, ami egy valószínűségi változót jelöl.

(D) F.v.v-k feltételes eloszlásfv-e: Legyen az X és Y f.v.v-k együttes eloszlásfv-e $F_{X,Y}(u,v)$. Ekkor az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes eloszlásfv-e:

$F_{X|Y}(u \mid v) = P(X < u \mid Y = v) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial v} F_{X,Y}(u,v)}{f_Y(v)}$, vagyis az együttes eloszlásfv. v szerinti parciális deriváltjának és a Y menti peremsűrűségfv-nek a hányadosa.

(D) F.v.v-k feltételes sűrűségfv-e: Legyen az X és Y f.v.v-k együttes eloszlásfv-e $F_{X,Y}(u,v)$, együttes sűrűségfv-e $f_{X,Y}(u,v)$. Ekkor az X-nek az Y-ra vett feltételes sűrűségfüggvénye:

$f_{X|Y}(u \mid v) = \dfrac{\partial}{\partial u} F_{X|Y}(u \mid v) = \dfrac{f_{X,Y}(u,v)}{f_Y(v)}$, vagyis az együttes sűrűségfv-nek és az Y menti peremsűrűségfv-nek a hányadosa.

(K) A definíció triviális következménye, hogy: $f_{Y|X}(v \mid u) = f_{X|Y}(u \mid v) \dfrac{f_Y(v)}{f_X(u)}$.

(D) F.v.v-k regressziója: Legyen az X és Y f.v.v-k. Ekkor X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén (regresszióján) az $E(X \mid Y) = r(Y)$ v.v-t értjük, ahol:

$r(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u f_{X|Y}(u \mid v)\,du = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} u f_{X,Y}(u,v)\,du}{f_Y(v)}$ az ún. regressziós görbe.

A diszkrét esetre írt magyarázat természetesen a folytonos esetre is vonatkozik. Itt elsősorban az okozhat problémát, hogy elég hasonló jelölések tömkelegét használjuk, amelyek azonban merően mást jelentenek, de gyakorlatilag (vagyis feladatok szintjén) csak az együttes és a peremsűrűségfv-ekkel való számolgatás az egész, ezért azokat ehhez jól kell tudni!

(T) A regresszió tulajdonságai:

1.) $E\{E(X \mid Y)\} = E\{X\}$. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy egy v.v. (X) várható értéke nem változik, ha azt (X-et) egy másik v.v-ra vett regressziójával ($E(X \mid Y)$-al) „közelítjük".

2.) Ha X, Y függetlenek, akkor $E(X \mid Y) = E\{X\}$ konstans v.v. Vagyis ha Y-nak nincs köze X-hez, akkor X-et úgy tudjuk közelíteni, hogy Y-tól függetlenül mindig $E\{X\}$-nek vesszük az értékét. Azaz ha semmilyen plussz információ nem áll rendelkezésünkre, akkor a várható érték a legjobb közelítés.

3.) A regresszió lineáris művelet: $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \mid Y) = \alpha_1 E(X_1 \mid Y) + \alpha_2 E(X_2 \mid Y)$.

4.) $E\left(g(Y)X \mid Y\right) = g(Y)E(X \mid Y)$.

5.) $E\left\{\left(X - E(X \mid Y)\right)^2\right\} \le E\left\{\left(X - f(Y)\right)^2\right\}$, vagyis az $E(X \mid Y)$ regresszió a lehető „legjobb" közelítése X-nek (a négyzetes eltérése minimális).

(D) Lineáris regresszió: A lehető „legjobb" (legkisebb négyzetes eltérésű) lineáris közelítés, vagyis: ha X és Y v.v-k, akkor az $a^*Y + b^*$ v.v. az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója, ha:

$E\left\{\left(X - a^*Y - b^*\right)^2\right\} \le E\left\{\left(X - aY - b\right)^2\right\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyzés: Bár a lineáris regresszió nem feltétlenül a lehető legjobb közelítést adja, de a regresszióval ellentétben a lineáris regresszió statisztikailag mérhető.

(T) Az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója az $a^*Y + b^*$ v.v, ahol:

$a^* = \dfrac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma^2\{Y\}} = R(X, Y)\dfrac{\sigma\{X\}}{\sigma\{Y\}}$ és $b^* = E\{X\} - a^*E\{Y\}$.

A lineáris regresszió számításához tulajdonképpen csak ezekra a képletekre van szükség!

Pl.: 2 dimenziós normális eloszlás regressziója: A jól ismert $\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_1, \sigma_2$ paraméterű 2 dimenziós normális eloszlás regressziója: $E(X \mid Y) = \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}Y + \mu_1 - \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2$, ami lineáris, hiszen:

$a^* = \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ és $b^* = \mu_1 - \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2$. Ez feladatokban előfordulhat, ezért esetleg célszerű lehet megjegyezni!

FELADATOK REGRESSZIÓRA:

A regresszióval kapcsolatos feladatokat alapvetően két csoportra lehet osztani: az egyikben a feltételes eloszlást és/vagy a regressziót kell kiszámolni más adatok alapján, míg a másikban a feltételes eloszlás alapján kell kiszámolni más adatokat. Ez utóbbinak különös ismertetőjele, hogy a feladat szövegéből „ki lehet hámozni", vagyis fel lehet írni a feltételes eloszlást. Nézzünk először erre egy példát:

<u>*Feladat:*</u> A 0 és 2 között az egyenletes eloszlás törvénye szerint kiválasztunk egy X számot. Ezután a 0 és X között szintén az egyenletes eloszlás törvénye szerint kiválasztunk egy Y számot. Mennyi a $f_{Y|X}(v \mid u)$ feltételes sűrűségfv? Mennyi a $P(Y > 1)$ valószínűség?

<u>*Megoldás:*</u> Tudjuk, hogy: $f_X(u) = \frac{1}{2}, \quad t \in (0, 2)$. Másrészt érezhetjük, hogy az Y-nak az X-re vonatkoztatott feltételes eloszlása a szövegből „kihámozható":

$F_{Y|X}(v \mid u) = P(Y < v \mid X = u) = \dfrac{v}{u} \quad 0 < v < u < 2$. Innen a feltételes sűrűségfv:

$f_{Y|X}(v \mid u) = \dfrac{\partial}{\partial v}F_{Y|X}(v \mid u) = \dfrac{1}{u}, \quad v < u < 2$, amiből az együttes sűrűségfv kiszámolható:

$f_{X,Y}(u, v) = f_{Y|X}(v \mid u)f_X(u) = \dfrac{1}{2u}, \quad 0 < v < u < 2$. Nyilvánvaló, hogy:

$$P(Y > 1) = \int_1^2\int_1^u \frac{1}{2u}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 1 - \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\left(1 - \left[\ln(u)\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \ln(2)\right) \approx 0.153$$

Némi magyarázat az integrálási határokra: ugye u mehet 1-től 2-ig, hiszen ha 1-től kisebb, akkor X 1-től kisebb, akkor Y nem lehetne 1-től nagyobb, ugyanakkor v 1-től mehet u-ig, hiszen Y-nak 1-nél nagyobbnak kell lennie, viszont nem lehet nagyobb X-nél, hiszen $Y \in U(0, X)$.

Nézzünk most egy példát a másik típusú feladatra:

Feladat: Legyen X, Y együttes sűrűségfv-e $f_{X,Y}(u,v)=u+v, \quad u,v\in(0,1)$. Mennyi az $E(Y\mid X)$?

Megoldás: Először felírjuk az Y-nak az X-re vett feltételes sűrűségfv-ét:

$$f_{Y|X}(v\mid u)=\frac{f_{X,Y}(u,v)}{f_X(u)}=\frac{u+v}{\int_0^1 u+v\,dv}=\frac{u+v}{u+0.5}.$$ Tudjuk, hogy

$$E(Y\mid X)=\int_{-\infty}^{\infty} v f_{Y|X}(v\mid X)dv=\int_0^1 v\frac{X+v}{X+\frac{1}{2}}dv=\frac{1}{X+\frac{1}{2}}\int_0^1 Xv+v^2dv=\frac{\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}}{X+\frac{1}{2}}$$

Feladat: Legyen X, Y együttes sűrűségfv-e $f_{X,Y}(u,v)=1, \quad u\in(0,1)$ és $0<v<2-2u$. Mennyi az $E(Y\mid X)$?

Megoldás: Most is először felírjuk az Y-nak az X-re vett feltételes sűrűségfv-ét:

$$f_{Y|X}(v\mid u)=\frac{f_{X,Y}(u,v)}{f_X(u)}=\frac{1}{\int_0^{2-2u} 1dv}=\frac{1}{2-2u},$$ $u\in(0,1)$ és $0<v<2-2u$. Innen:

$$E(Y\mid X)=\int_{-\infty}^{\infty} v f_{Y|X}(v\mid X)dv=\int_0^{2-2X} v\frac{1}{2-2X}dv=\frac{1}{2-2X}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{2-2X}=\frac{(2-2X)^2}{2(2-2X)}=1-X.$$

IV. Valószínűségi törvények

Ezt a témakört a jegyzet tömören, mégis érthetően elmagyarázza és szemlélteti, éppen ezért itt a teljesség igénye nélkül csak egy „rövid” összefoglalót készítek a definíciókról és tételekről, amolyan vizsga előtti gyors ismétlés jelleggel, a részletes magyarázat és a szemléltetés, valamint a példafeladatok megoldással együtt a jegyzetben megtalálhatóak. Másrészt ebből a témakörből a karakterisztikus fv-t kivéve nem nagyon szokott feladat előfordulni (esetleg a nagy számok törvényéhez, de az is csak ritkán). Ugyanakkor állítólag a szóbelin előszeretettel kérdeznek elméletet nagyrészt ebbőla témakörből, így aztán aki szóbelizni „szeretne”, az feltétlenül készüljön fel ezekből. (Állítólag megéri szóbelizni, ha az ember nagyjából tisztában van az anyaggal.)

IV.1. Valószínűgségi változók sorozatainak konvergenciája

Az alábbi definíciókban $\langle X_i\rangle: X_1,X_2,...,X_n,...$ és X v.v-k.

(D) X_n **1 valószínűséggel** konvergál X-hez, ha $P\left(\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\right\}\right)=1$. Jele: $X_n\xrightarrow{1v}X$.

(D) X_n **L_r normában** konvergál X-hez, ha $\lim_{n\to\infty}E\left\{|X_n-X|^r\right\}=0$. Jele: $X_n\xrightarrow{L_r}X$.

(D) X_n **sztochasztikusan** konvergál X-hez, ha $\forall\varepsilon>0:\lim_{n\to\infty}P\left(\left\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\right\}\right)=0$. Jele: $X_n\xrightarrow{st}X$.

(D) X_n **eloszlásban** konvergál X-hez, ha $\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$ minden olyan $t\in\mathbb{R}$, ahol $F_X(t)$ folytonos, vagyis $F_{X_n}(t)$ pontonként konvergál $F_X(t)$-hez. Jele: $X_n\xrightarrow{e}X$.

(T) $$\left.\begin{matrix}X_n\xrightarrow{L_1}X\\ X_n\xrightarrow{1v}X\end{matrix}\right\}\Rightarrow X_n\xrightarrow{st}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{e}X$$

IV.2. NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYEI

(T) Bernoulli-féle gyenge alak: Egy K véletlen kísérletben legyen $A \in F$ egy $P(A) = p$ pozitív valószínűségű esemény. Hajtsuk végre K-t egy véletlen kísérletsorozatban, és legyen X_i az A-nak az i-edik kísérletben való bekövetkezésének indikátor valószínűsége: $X_i \in I_A$. Ekkor az $r_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ relatív gyakoriságra teljesül, hogy: $r_n(A) \xrightarrow{st} P(A)$.

Megjegyzés: A **Borel-féle erős alak** azt állítja, hogy a fenti feltételekkel $r_n(A) \xrightarrow{1v} P(A)$ is teljesül.

(T) Csebisev-féle gyenge alak: Legyenek az $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ v.v-k páronként függetlenek és azonos eloszlásúak úgy, hogy létezzék $\mu = E\{X_i\}$ közös várható értékük és $d^2 = \sigma^2\{X_i\}$ közös és véges szórásnégyzetük. Ekkor a $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ v.v-sorozatra teljesül, hogy: $Z_n \xrightarrow{st} \mu$.

(T) Kolmogorov-féle erős alak: Legyenek az $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ v.v-k teljesen függetlenek, létezzék $\mu = E\{X_i\}$ közös várható értékük és szórásnégyzetükre teljesüljön a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^2\{X_i\}}{i^2} < \infty$ feltétel. Ekkor a $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ v.v-sorozatra igaz, hogy: $Z_n \xrightarrow{1v} \mu$.

IV.3. KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNY

(D) A $Z = X + iY$ **komplex értékű v.v. várható értéke** az $E\{Z\} = E\{X\} + iE\{Y\}$ komplex szám.

(D) Karakterisztikus fv.: Az X v.v. $\varphi_X(t)$ karakterisztikus fv-e az X sűrűségfv-ének Fourier-transzformáltja, vagyis: $\varphi_X(t) = E\{e^{iXt}\} = E\{\cos(Xt)\} + iE\{\sin(Xt)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)e^{itx}dx$.

(T) A karakterisztikus fv. tulajdonságai:

1.) $|\varphi_X(t)| \le 1$ és $\varphi_X(0) = 1$.

2.) $\varphi_X(t)$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

3.) $\varphi_X(t)$ pozitív szemidefinit függvény, vagyis $\forall n, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ és $\forall z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ esetén $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi_X(t_k - t_l) z_k \overline{z_l} \ge 0$.

4.) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

5.) Ha $X_1, ..., X_n$ teljesen függetlenek, akkor: $\varphi_{\sum_{\forall k} X_k}(t) = \prod_{\forall k} \varphi_{X_k}(t)$.

6.) Ha X első n momentuma létezik, akkor $\varphi_X(t)$ n-szer differenciálható és $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_k (it)^k}{k!} + o(t^n)$ ahol $\mu_k = E\{X^k\} = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$.

7.) Minden eloszlást egyértelműen meghatároz a karakterisztikus fv-e. Ha X f.v.v., akkor $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t)e^{-itx}dx$.

NÉHÁNY ELOSZLÁS KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNYE:

1.) Geometriai eloszlás: Ha $X \in G(p) \rightarrow \varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.

2.) Egyenletes eloszlás: Ha $X \in U(a,b) \rightarrow \varphi_X(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$. $a=-b$ esetén $\varphi_X(t) = \frac{\sin(bt)}{bt}$.

3.) Exponenciális eloszlás: Ha $X \in E(\lambda) \rightarrow \varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.

4.) Standard normális eloszlás: Ha $X \in N(0,1) \rightarrow \varphi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$.

5.) Normális eloszlás: Ha $X \in N(\mu,\sigma) \rightarrow \varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

IV.4. CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁS TÉTELEK

(T) Helly-tétel: $X_n \xrightarrow{e} X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$.

(T) Centrális határeloszlás tétel: Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ v.v-k teljesen függetlenek, azonos eloszlásúak és létezzék a szórásuk. Használjuk továbbá az alábbi jelöléseket: $\mu = E\{X_i\}$, $d = \sigma\{X_i\}$ és $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Ekkor Z_n standardizáltja $Z_n^S = \frac{Z_n - \mu}{d}\sqrt{n} = \frac{1}{d\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$ és teljesül, hogy: $Z_n^S \xrightarrow{e} N(0,1)$, tehát $\lim_{n\to\infty} P(Z_n^S < t) = \Phi(t)$.

(T) Moivre-Laplace-tétel: A centrális határeloszlás tétel speciális esete, amikor $X_i \in I_A$, $P(A) = p$. Ekkor $nZ_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \in B(n,p)$ és $\lim_{n\to\infty} Z_n^S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = N(0,1)$, vagyis ha egy végtelen kísérletsorozat során megfigyeljük az A eseményt, akkor a fenti Z_n v.v. standardizáltja a standard normális eloszláshoz fog tartani.

(K) Ha $X \in B(n,p)$, ahol n nagyon nagy, akkor az X v.v. standardizáltja jó közelítéssel a standard normális eloszlás lesz, vagyis: $X^S \approx N(0,1)$.

JELMAGYARÁZAT

(A) axióma
(D) definíció
(T) tétel
(K) következmény

MEGJEGYZÉSEK

Készítette: Gáthy Lajos II. évf. mű.inf. hallgató
Készült: a Ketskeméty-féle előadásokon elhangzottak és a jegyzet alapján (egy-két helyen a saját észrevételeimet is tartalmazza). A példafeladatok legnagyobb igyekezetem szerint ZH- és vizsgacentrikusak.

Az esetleges hibákért elnézést kérek!
Az észrevételeket, javaslatokat és hibajelzéseket szívesen várom az alone@sch.bme.hu címre.

Verzió: 2007. november 13.
A legfrissebb verziót keresd a weben: http://www.hszk.bme.hu/~gl551/