5. Nevezetes eloszlások

A most következő előadásban először a geometriai valószínűségek illetve folytonos valószínűségi változók egy paradoxonjáról lesz szó, majd különböző eloszlásokkal foglalkozunk, vegyesen diszkrét és folytonos kontextusban, ezzel is alkalmazva az előző két előadáson tanultakat.

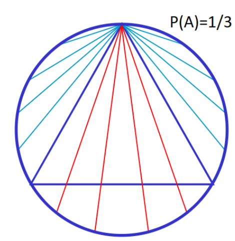
5.1. Bertrand-paradoxon

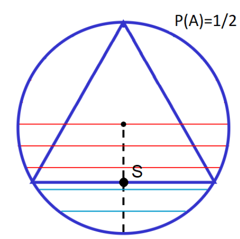
Folytonos valószínűségi változókat (illetve eloszlásukat) többféleképp megadhatunk. Történhet ez a sűrűségfüggvényük vagy az eloszlásfüggvényük segítségével, de van, hogy ennél közvetettebb információnk van csak a változóról. Bertrand paradoxonja[21] rávilágít, hogy mennyire nem nyilvánvaló feladat az utóbbi esetben meghatározni a valószínűségi változó eloszlását.

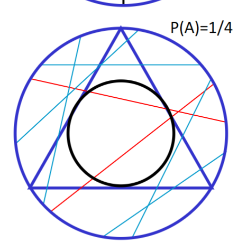
Bertrand-paradoxon

Válasszuk ki egy kör egy húrját véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írható szabályos háromszög egy oldala?

A paradoxon ellentmondása, hogy a feladatra adható olyan megoldás, amiből az $\frac{1}{3}$ válasz adódik, de olyan is, amiből $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{4}$. Hogyan történhet ez? Lássuk először a megoldásokat:







(1) Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen és egymástól függetlenül egy P és egy Q pontot a körvonalról, és legyen a húr az őket összekötő szakasz. Sorsoljuk ki először a P pontot, majd rajzoljunk a körbe egy olyan szabályos háromszöget, aminek csúcsa ez a P. Világos, hogy pontosan akkor kapunk a háromszög oldalánál hosszabb húrt, ha Q a háromszög másik két csúcsa közé esik. Így a keresett valószínűség $\frac{1}{3}$.

(2) Válasszuk ki egyenletesen véletlenszerűen egy sugarát a körnek, majd rajta egyenletesen véletlenszerűen (a sugár választástól függetlenül) egy P pontot. A húr legyen az, amelyik a sugárra merőleges, és a sugarat P pontban metszi. Sorsoljuk ki először a sugarat, majd rajzoljunk a körbe egy olyan szabályos háromszöget, aminek egyik oldala merőlegesen metszi a sugarat, jelölje a metszéspontot S. Látható, hogy pontosan akkor kapunk a háromszög oldalánál hosszabb húrt, ha a P pont közelebb van a kör középpontjához, mint S. Mivel S felezi a sugarat, így a keresett valószínűség $\frac{1}{2}$.

(3) Válasszunk ki egyenletesen véletlenszerűen egy P pontot a körlapon. Legyen a húr az, aminek éppen P a felezőpontja. Ilyen húr mindig csak egy van (hacsak P nem a középpont, de mivel ez nulla valószínűségű lehetőség, így ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk). Vegyünk egy szabályos háromszöget a körben, és nézzük ennek a beírható körét. A húr pontosan akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha P a kisebb körbe esik. Az előző esetben láttuk, hogy ha a nagy kör sugara r, akkor a kis kör sugara $\frac{r}{2}$. A keresett valószínűség pedig a két kör területének aránya, azaz $\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi \Big/ r^2\pi = \frac{1}{4}$.

A paradoxon feloldása, hogy a „véletlen húr” fogalma nem pontosan definiált. Függően attól, hogy melyik módszert alkalmazzuk a húr generálására, más-más eloszlást kapunk, ezért különböznek a valószínűségek.

[21] Ez ugyanaz a Joseph Bertrand, mint az első előadásban szereplő doboz paradoxon szerzője.

Feladat. Jelölje X_1, X_2 és X_3 a húr hosszát az egyes módszerek esetén, feltéve, hogy a kör sugara 1 egység. Mutassuk meg, hogy a valószínűségi változók sűrűségfüggvényei:

$$a)\ f_{X_1}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad b)\ f_{X_2}(x) = \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}}, \qquad c)\ f_{X_3}(x) = \frac{x}{2},$$

ha $x \in [0,2]$ és 0 egyébként.

5.2. Örökifjú tulajdonság

A példákban többször előforduló, nevezetes eloszlások a (diszkrét) geometriai eloszlás, illetve a (folytonos) exponenciális eloszlás. A két eloszlás közeli rokonságban van, ezért egyszerre tárgyaljuk őket.

5.2.1. Definíció. Egy X valószínűségi változó **geometriai eloszlás**ú p paraméterrel (ahol $p \in (0,1)$), ha

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

minden k pozitív egész esetén. Jelölés: $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

5.2.2. Példa. Cérnát próbálunk befűzni egy tűbe. Tegyük fel, hogy minden egyes próbálkozásnál 0,1 valószínűséggel járunk sikerrel, a korábbi próbálkozásoktól függetlenül. Ekkor a szükséges próbálkozások száma 0,1 paraméterű geometriai eloszlást követ.

Geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke:[22]

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}p =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)} = \sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = \frac{1}{p}.$$

5.2.3. Definíció. Egy Z valószínűségi változó **exponenciális eloszlás**ú λ paraméterrel ($\lambda > 0$ valós), ha

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad \text{azaz} \qquad F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölése: $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Ez valóban sűrűségfüggvény, hiszen egyrészt nemnegatív, másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} = 0 + e^{-0} = 1.$$

Egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[x(-e^{-\lambda x})\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-\lambda x})\mathrm{d}x = 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Az eloszlás főleg olyan szituációkban kerül elő, amikor sűrű, egymás utáni kísérletek valamelyikének sikerességét várjuk. A λ arányparaméter (angolul: rate) jelentése, hogy egység idő alatt átlagosan hány ilyen „siker” történik.

Egy eloszlás nem csak attól lesz nevezetes, hogy sok alkalmazás esetében felbukkan, hanem attól is, hogy speciális tulajdonságokkal bír. A fenti két eloszlás esetében ilyen tulajdonság az örökifjúság (angolul: memorylessness) is.

[22] A $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}$ sor értéke hatványsor deriválása segítségével is kiszámolható.

5.2.4. Definíció. Nevezzünk egy X valószínűségi változót **örökifjú**nak a $G \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha tetszőleges $s, t \in G$ esetén

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t), \tag{3}$$

illetve $\mathbb{P}(X \in G) = 1$, azaz X értéke 1 valószínűséggel a G halmazba esik.

Ha X-re, mint egy történés bekövetkezésének időpontjára gondolunk, a fenti egyenlet azt jelenti, hogy ha s-ig nem következett be a történés, akkor ugyanakkora eséllyel kell még legalább t időt várnunk, mint ha most kezdenénk el várni. Vagyis az idő nem változtatott semmit a történés bekövetkezési hajlandóságán.

Kérdés: Van-e egyáltalán ilyen valószínűségi változó, és ha igen, mi lehet az eloszlása?

5.2.5. Állítás. *Legyen X nemkonstans örökifjú valószínűségi változó a G halmazon.*

(1) Ha $G = \{1, 2, 3, \dots\}$, akkor X eloszlása geometriai.
(2) Ha $G = [0, \infty)$, akkor X eloszlása exponenciális.

Vagyis ez a két eloszlás egymás analógja. Azt fejezik ki, hogy meddig kell várni egy történésre, aminél az eltelt idő nem változtat a bekövetkezés esélyén. A különbség a két eset közt, hogy az első esetben az idő diszkrét, míg a másodikban folytonos módon van modellezve.

Bizonyítás. Bontsuk ki a feltételes valószínűség definícióját. Azt kapjuk, hogy a (3) egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s) \qquad (\forall s, t \in G).$$

Legyen először $G = \{1, 2, 3, \dots\}$, és jelölje p a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűséget. Ekkor $s = 1$ esetén az előző egyenlet segítségével tetszőleges t pozitív egészre azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t + 1) &= \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X > t) \cdot (1 - p) = \\ &= \mathbb{P}(X > t - 1) \cdot (1 - p)^2 = \dots = (1 - p)^{t+1}.\end{aligned}$$

Ebből viszont már adódik a változó diszkrét eloszlása:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = t) &= \mathbb{P}(X > t - 1) - \mathbb{P}(X > t) = (1 - p)^{t-1} - (1 - p)^t = \\ &= \big(1 - (1 - p)\big)(1 - p)^{t-1} = p(1 - p)^{t-1},\end{aligned}$$

ami épp a geometriai eloszlás definíciója. Probléma csak azzal lehet, ha $p \in \{0, 1\}$. Ha $p = 0$, akkor $\mathbb{P}(X = t) = 0$ minden $t \in \{1, 2, \dots\}$ esetén, amely egyenletek így nem határozzák meg X eloszlását. Viszont az örökifjúság definíciójában feltettük, hogy X értéke 1 valószínűséggel G-be esik, ami ellentmondás. Hasonlóan, ha $p = 1$, akkor X a konstans 1 valószínűségi változó, de feltettük, hogy X nem konstans, ez ellentmondás. Következésképp X valóban geometriai eloszlású.

Legyen most G a nemnegatív valós számok halmaza, és jelöljük $g(t)$-vel az $\ln \mathbb{P}(X > t)$ mennyiséget[23]. Ez a logaritmus értelmes (azaz $\mathbb{P}(X > t) \neq 0$), hacsak X nem konstans 0, amit viszont kizártunk. Ekkor a (3) egyenlet logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$g(t + s) = \ln \mathbb{P}(X > t + s) = \ln \mathbb{P}(X > t) + \ln \mathbb{P}(X > s) = g(t) + g(s),$$

vagyis g egy additív függvény a nemnegatív valós számokon. Szerencsére azt is tudjuk, hogy g monoton csökkenő, hiszen az eloszlásfüggvény $t \mapsto F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$ monoton növő, így $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ monoton csökkenő. De akkor a logaritmusa is monoton csökkenő kell legyen.

5.2.6. Lemma. *Ha $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény, amire $g(t + s) = g(t) + g(s)$ teljesül tetszőleges $s, t \in [0, \infty)$ esetén, akkor $g(t) = -\lambda t$, ahol $\lambda = -g(1) \geq 0$.*[24]

---

[23] Itt ln jelöli a természetes alapú logaritmust.

[24] A monotonitás nélkül nem igaz az állítás, valami szépségi feltételre szükség van (folytonos, vagy korlátos, Lebesgue-mérhető, ...). Bővebben lásd: Cauchy függvényegyenlete.

A lemmát nem bizonyítjuk. A lemma miatt $\ln \mathbb{P}(X > t) = g(t) = -\lambda t$, ahol $\lambda = -\ln \mathbb{P}(X > 1)$. Emiatt

$$\mathbb{P}(X \le t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

ahol $\lambda \neq 0$, különben $\mathbb{P}(X > t) = 1$ minden t-re teljesülne, ami lehetetlen. Nekünk $\mathbb{P}(X \le t)$ helyett az eloszlásfüggvényre, azaz $\mathbb{P}(X < t)$-re lenne szükségünk. Vegyük észre, hogy $t \mapsto \mathbb{P}(X \le t)$ folytonos, ezért $\mathbb{P}(X < t) = \lim_{s \nearrow t} \mathbb{P}(X \le s) = \mathbb{P}(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, ami épp az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. □

A geometriai és az exponenciális eloszlás közti kapcsolat abban is megnyilvánul, hogy a geometriai eloszlás kifejezhető az exponenciálisból.[25]

5.2.7. Állítás. *Ha az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $\lceil X \rceil$ geometriai eloszlású $1 - e^{-\lambda}$ paraméterrel.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathbb{P}\big(\lceil X \rceil = 0\big) = \mathbb{P}(-1 < X \le 0) = 0$. Továbbá tetszőleges k pozitív egész esetén

$$\mathbb{P}\big(\lceil X \rceil = k\big) = \mathbb{P}(k-1 < X \le k) = F_X(k) - F_X(k-1) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}),$$

ami a $p = 1 - e^{-\lambda}$ jelöléssel éppen $(1-p)^{k-1}p$, vagyis $\lceil X \rceil$ geometriai eloszlású $1 - e^{-\lambda}$ paraméterrel. □

5.3. Poisson-eloszlás

A Poisson-eloszlás egy alkalmazásokban sűrűn előkerülő diszkrét eloszlás. Intuitívan, olyankor bukkan fel, ha rengeteg nagyon kis valószínűségű, egymástól független eseményből vizsgáljuk, hogy hány következik be[26]. Ilyen például egy telefonközpontba beérkező hívások száma, vagy az egy adott órában születő gyerekek száma.

5.3.1. Definíció. Az X valószínűségi változó **Poisson-eloszlás**ú λ paraméterrel ($\lambda > 0$), ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

minden nemnegatív egész k-ra. Jelölése: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

Ez tényleg egy lehetséges valószínűségi eloszlás, azaz a valószínűségek összege 1, hiszen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda - \lambda} = 1.$$

A Poisson-eloszlású valószínűségi változó paramétere szemléletes jelentésű, ugyanis

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda,$$

vagyis a paraméter épp a változó várható értéke (vegyük észre, hogy ez nem teljesül sem a geometriai, sem az exponenciális eloszlásra).

---

[25] Megfordítva, az exponenciális eloszlás ún. határeloszlása a geometriainak, ha besűrítjük a geometriai lehetséges bekövetkezési időpontjait az $\frac{1}{n}$ többszöröseivé, $n \to \infty$ és $np \to \lambda$.

[26] A hasonlóság az exponenciális eloszlás hasonló leírásával nem véletlen, lásd még Poisson-folyamat, avagy [4], 8.4. fejezet.

5.3.2. Példa. Egy kaszkadőr egy évben átlagosan 2-szer sérül meg. Mi a valószínűsége, hogy idén 4-szer? Mivel egy kaszkadőrnek rengetegszer van alkalma megsérülni, amiket tekinthetünk függetlennek, így a Poisson-eloszlás jó közelítése a sérülések számának, amit jelöljünk Y-nal. A feltétel szerint $\lambda = 2$, így

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0{,}0902$$

az eredmény.

Azt, hogy rengeteg kis valószínűségű eseménynél a bekövetkezések száma Poisson-eloszlást közelít, be is bizonyíthatjuk. Ha n eseményről van szó, amik mind p valószínűségűek és egymástól függetlenek, akkor a bekövetkezések X száma $B(n; p)$ binomiális eloszlású. A bekövetkezések átlagos száma, ahogy korábban már láttuk, $n \cdot p$, jelölje most ezt λ. A következő állítás épp azt mutatja, hogy nagy n esetén $B(n; p)$ eloszlása körülbelül $\mathrm{Pois}(\lambda)$.

5.3.3. Állítás. *Legyen n pozitív egész, $\lambda \in (0, \infty)$, és jelölje $p_n = \frac{\lambda}{n}$-et. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

tetszőleges $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ esetén.

Bizonyítás. Fix k és n esetén

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Ebből $\frac{\lambda^k}{k!}$ nem fog változni, ha n tart végtelenhez, míg

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda} \qquad \text{és} \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1.$$

Így már csak az első tényezővel kell megküzdeni. Az pedig a következőképp egyszerűsíthető:

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n},$$

ami egy k tényezőjű szorzat, ahol az egyes $\frac{n-i}{n}$ alakú tagok egyenként mind 1-hez tartanak. Mivel csak n tart végtelenhez, de k rögzített, így a szorzat határértéke szintén 1. □

5.3.4. Példa. Egy magyarérettségiben kétszer akkora eséllyel van összesen 3 elírás, mint 1 elírás (a példa nem reprezentatív). Tegyük fel, hogy a hibák egymástól függetlenül, azonos eséllyel következnek be. Mekkora a valószínűsége, hogy egyáltalán nincs elírás a dolgozatban?

Jelölje X egy dolgozatban a hibák számát. Mivel csak korlátos mennyiségű hiba szerepelhet, így a feltételeinkből (függetlenség, azonos esélyek) az következne, hogy X binomiális eloszlású. Ugyanakkor mind a hibák maximális számát, mind egy hiba bekövetkezésének valószínűségét nehéz meghatározni (főképp a rendelkezésre álló információból).

Felhasználhatjuk viszont a fenti állítást, ami szerint X eloszlását Poisson-eloszlással közelíthetjük, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

A feltétel szerint

$$2 = \frac{\mathbb{P}(X = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \Big/ \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{6},$$

vagyis $\lambda = 2\sqrt{3}$. Ez azt jelenti, hogy átlagosan $2\sqrt{3}$ hiba bukkan fel az irományban. Innen a megoldás világos: $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{(2\sqrt{3})^0}{0!}e^{-2\sqrt{3}} = e^{-2\sqrt{3}} \approx 0{,}0313$.