

信号处理原理 讲义

熊泽恩(xze22@mails.tsinghua.edu.cn)

2024 年 10 月 28 日

目录

1 信号的基本概念与数学基础	4
1.1 信号的概念	4
1.2 信号的描述	5
1.3 信号的数学基础	7
1.3.1 欧拉 (Euler) 公式	7
1.3.2 函数分解	10
1.4 信号的基本运算	12
1.4.1 四则运算	12
1.4.2 波形变换	12
1.4.3 微分与积分运算	15
1.4.4 卷积运算	15
1.4.5 相关运算	18
1.5 奇异信号	20
1.5.1 单位斜变信号	20
1.5.2 单位阶跃信号	21
1.5.3 单位矩形脉冲信号	22
1.5.4 符号函数信号	23
1.5.5 单位冲激信号	24
1.6 习题课 1	28
2 信号的分解	42
2.1 信号的分解方法	42
2.2 函数的正交分解	43
2.2.1 标准正交函数集	43
2.2.2 函数的正交分解	44
2.3 信号的正交变换	45
2.3.1 信号的级数展开	45
2.3.2 函数的正交变换	45
2.4 特例: 周期函数的傅里叶级数	45
2.4.1 周期函数的正交分解	45
2.4.2 周期信号的傅里叶级数	49
2.5 非周期信号的傅里叶变换	52
2.5.1 非周期信号的傅里叶级数	52
2.5.2 非周期信号的傅里叶变换	53
2.6 梳理: 傅里叶变换和傅里叶级数之间的关系	55
2.6.1 现象一: 从 FS 到 FT	55
2.6.2 现象二: FS 与非周期信号	57
2.6.3 现象三: FT 与周期信号	57
2.7 实例: 典型非周期信号的傅里叶变换	58

2.7.1 矩形脉冲信号	58
2.7.2 冲激信号	59
2.8 傅里叶变换的性质	60
2.8.1 FT 是线性运算	60
2.8.2 FT 的反褶和共轭的性质	60
2.8.3 傅里叶变换及其逆变换的对偶性	60
2.8.4 FT 的尺度变换特性	61
2.8.5 FT 图像的面积	62
2.8.6 FT 的时移特性	62
2.8.7 FT 的频移特性	63
2.8.8 FT 的微分与积分特性	63
2.8.9 FT 的卷积特性	64
2.8.10 FT 时域上的相关性定理	65
2.8.11 FT 的帕斯瓦尔定理	65
2.9 采样与量化概念	65
2.9.1 时域采样和幅度量化	66
2.9.2 采样的频率与分辨率	66
2.9.3 采样的应用	66
2.10 采样与采样定理	67
2.10.1 采样的数学模型	67
2.10.2 采样与混叠	70
2.10.3 采样定理	71
2.10.4 采样定理的方法论思考	73

1 信号的基本概念与数学基础

这一章主要涉及信号的基本概念与数学基础。

1.1 信号的概念

定义 1.1.1 (信号). 信号是人对物理世界的一种观察。观察是人通过传感器对物理世界的一种测量。传感器是一种物理变化转换成另一种物理变化的装置。测量是指用一种物理量来表示另一种物理量。

信号是反映（或载有）信息的物理量，是系统直接进行加工、变换以实现通信的对象。信号是信息的表现形式，信息则是信号里所蕴含的内容

例 1.1.2 (传感器). 传感器的种类繁多。例如：

1. 光

- 数码相机：光能产生电信号。

2. 空气振动

- 麦克风：空气的振动能产生电信号。

3. 温度

- 热敏电阻：阻值随温度变化。
- 热电偶：由对温度反应不同的两种金属制成，温差导致电压。

除此之外，还有加速度传感器、压力传感器、流量传感器等。值得注意的是，耳朵（图 1）就是一种传感器。

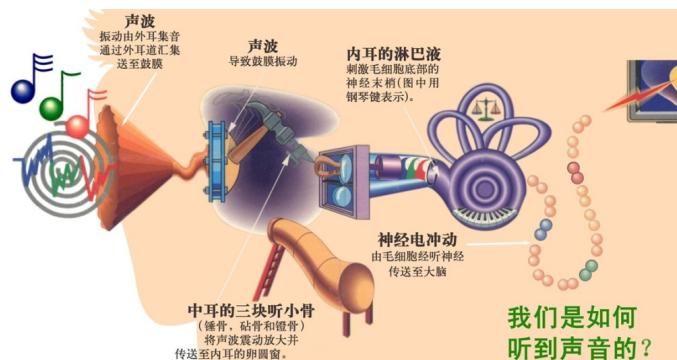


图 1: 耳朵是一种传感器

定义 1.1.3 (信号处理). 信号处理是对信号进行变换、分析和综合等处理过程的统称。信号处理的目的是

- 去伪存真：去除信号中冗余的和次要的成分。
- 特征抽取：把信号变成易于进行分析和识别的形式。
- 编码解码：把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码）。

例 1.1.4 (数字信号处理 (DSP) 系统). 由于数字系统的工作具有可预测性和可重复性，而模拟系统是由元器件搭建而成的电路，制造误差范围大，特性随温度（温度漂移）和时间变化（老化）。因此，**数字信号处理 (DSP) 系统**应运而生。

DSP 系统的特点有：

- 体积小，功耗低：数字系统通常由集成电路构成，这些电路可以在非常小的尺寸上集成大量的电子元件。这不仅减少了设备的体积，也降低了功耗，这对于移动终端的发展尤为重要。

- 有高度的灵活性：数字系统可以通过软件编程来实现多种功能，这使得它们非常灵活。修改程序中的一些语句就能修改系统的行为，而无需改变硬件。
- 模拟信号与数字信号的不同：
 - 模拟音频以模拟电压的幅度表示声音强弱。
 - 数字音频是有限数值表示的离散数字序列。

例如，修改“抽样频率”，就可以改变数字音频音高/音速。

1.2 信号的描述

信号的描述有两种方式：数学描述和波形描述。

定义 1.2.1 (数学描述). 信号的数学描述是指，使用具体的数学表达式，把信号描述为一个或若干个自变量的函数或序列的形式。

定义 1.2.2 (波形描述). 信号的波形描述是指，按照函数随自变量的变化关系，把信号的波形画出来。

注意. 在画波形描述时，需要写清横纵坐标标识，并标出原点。

例 1.2.3. 以下是信号的数学描述和波形描述的例子：

- 数学描述： $f(t) = \sin t, x(n) = a^n u(n)$ 。
- 波形描述： $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的示意图如图 2。

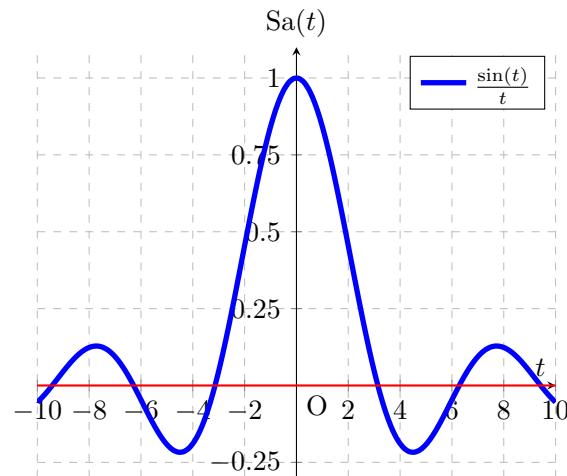


图 2: $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的波形描述

例 1.2.4 (时域波形与频谱图). 时域波形与频谱图如图 3 所示。

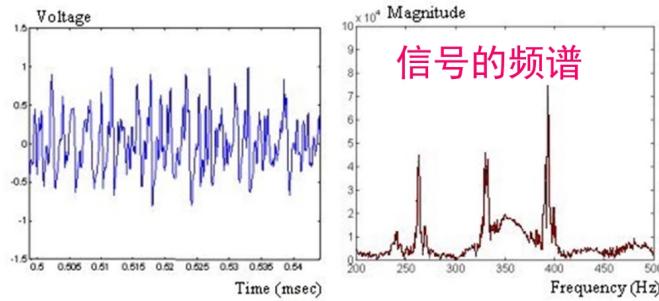


图 3: 左侧为时域波形, 右侧为频谱图

定义 1.2.5 (确定信号与随机信号). 任意给定一个自变量的值, 如果可以唯一确定其信号和取值, 则该信号是确定信号。否则, 如果取值是不确定的随机值, 则是随机信号。

定义 1.2.6 (周期信号). 如果存在正数 T , 使得对于任意 t 都有 $f(t) = f(t + T)$, 则称 $f(t)$ 为周期信号。周期信号的周期 T 是使得 $f(t) = f(t + T)$ 成立的最小正数。

注 1.2.7. 非周期信号可以看做是周期为无穷大的周期信号。

例 1.2.8 (正弦信号与余弦信号). 正弦信号与余弦信号是最常见的周期信号。它们的数学描述如下:

- 正弦信号: $f(t) = K \sin(\omega t + \theta)$ 。
- 余弦信号: $f(t) = K \cos(\omega t + \theta)$ 。

其中 $K > 0$ 为振幅, ω 为角频率, θ 为初相位。

例 1.2.9 (Sa 函数). Sa 函数的数学描述如下:

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

它有以下性质:

- $\text{Sa}(t)$ 是偶函数。
- $\text{Sa}(t)$ 的零点为 $t = k\pi, k \neq 0$ 。
- 过零区间: 除原点附近的过零区间宽度为 2π 外, 其他过零区间宽度均为 π 。
- $\int_{-\infty}^0 \text{Sa}(t) dt = \int_0^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi$ 。

注意. 一定要注意, $\text{Sa}(t)$ 在 $t = 0$ 处的取值是 1, 而不是 0。 $\text{Sa}(t)$ 的零点不包括 $t = 0$ 。

例 1.2.10 (指数信号). 指数信号是一种常见的非周期信号。它的数学描述如下:

$$f(t) = K e^{\alpha t}.$$

其中 $K > 0$ 为振幅, α 为参数。对于 α 的符号而言:

- 若 $\alpha > 0$, 则信号随时间增强。
- 若 $\alpha = 0$, 则信号为直流信号。
- 若 $\alpha < 0$, 则信号随时间减弱。

对于 α 的绝对值大小而言:

- 若 α 的绝对值大, 则信号变化速度快。

- 若 α 的绝对值小，则信号变化速度慢。

注 1.2.11. 指数信号微分或积分后仍然是指数信号。

1.3 信号的数学基础

1.3.1 欧拉 (Euler) 公式

定义 1.3.1 (实值信号与复值信号). 如果信号的取值是实数，则称为**实值信号**，简称**实信号**。如果信号的取值是复数，则称为**复值信号**，简称**复信号**。

定理 1.3.2 (欧拉公式). 对于任意的 $\theta \in \mathbb{R}$ ，都有以下的恒等式成立：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

特别地，当 $\theta = \pi$ 时，有 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。

证明. (欧拉公式的泰勒级数法证明) 分别将 $e^x, \sin x, \cos x$ 进行泰勒 (Taylor) 展开，得：

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

考虑到 $i^2 = -1$ ，因此可以将 $\cos x$ 和 $i \sin x$ 写成以下形式：

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i^2)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}, \\ i \sin x &= i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i^2)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

推论 1.3.3. 由欧拉公式可得，对于任意的 $\theta \in \mathbb{R}$ ：

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \end{aligned}$$

例 1.3.4 (复值信号的图示). 如果将 $e^{i\varphi}$ 看成一个复平面上的向量, 则它的模长为 1, 辐角主值为 φ , 如图 4 所示。

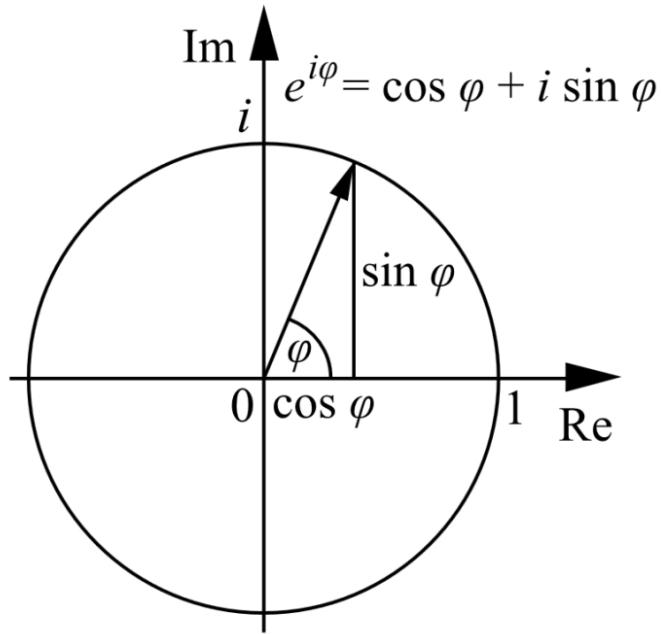


图 4: $e^{i\varphi}$ 在复平面上的表示

如果使 φ 随着时间 t 的变化而变化, 则画出三维图像 (纵轴为时间) 如图 5 所示。

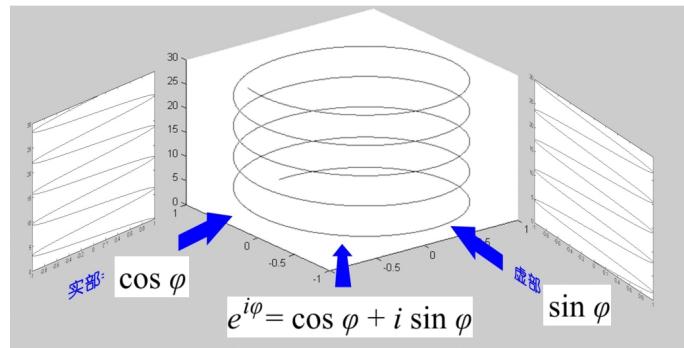


图 5: $e^{i\varphi}$ 随时间的变化的在三维空间中的轨迹

例 1.3.5 (复值信号在电磁场中的应用). 由于电场和磁场互相垂直, 所以可以用复值信号的实数部分和虚数部分分别表示电场与磁场信号。

证明. (欧拉公式的微分法证明) 设有函数

$$f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}.$$

则

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{(-\sin x + i \cos x)e^{ix} - (\cos x + i \sin x)ie^{ix}}{e^{2ix}} \\ &= \frac{e^{ix}(-\sin x + i \cos x - i \cos x + \sin x)}{e^{2ix}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 为常函数, 故 $f(x) = f(0) = 1$ 。此即 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 。 ■

定义 1.3.6 (复指数信号). 形如 $f(t) = Ke^{st}$, 其中 $K \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$ 为参数, $t \in \mathbb{R}$ 为自变量, 这样的信号被称为复指数信号。

性质 1.3.7 (复指数信号与正余弦信号之间的关系). 不妨设 $s = \sigma + i\omega$, 其中 $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ 。则复指数信号

$$\begin{aligned}f(t) &= Ke^{st} \\ &= Ke^{(\sigma+i\omega)t} \\ &= Ke^{\sigma t} \cdot e^{i\omega t} \\ &= Ke^{\sigma t} \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t).\end{aligned}$$

固定 K, σ, ω 中的两个, 做出第三个关于 t 的变化图像如下:

- 固定 $\sigma = 0.2, \omega = 1$, K 变化: 图 6。
- 固定 $K = 1, \omega = 1$, σ 变化: 图 7。
- 固定 $K = 1, \sigma = 0.2$, ω 变化: 图 8。

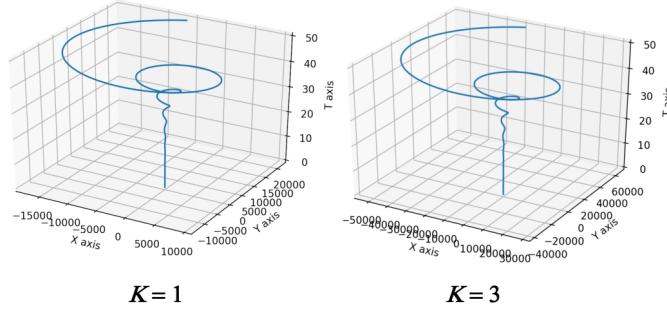


图 6: 固定 $\sigma = 0.2, \omega = 1$, K 变化

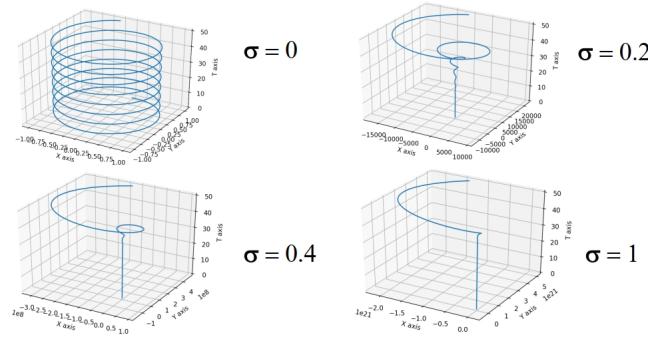
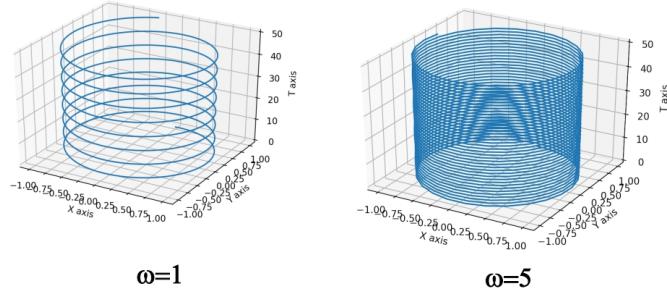


图 7: 固定 $K = 1, \omega = 1$, σ 变化

图 8: 固定 $K = 1, \sigma = 0.2, \omega$ 变化

1.3.2 函数分解

定义 1.3.8 (正交基). 设 V 为欧式空间, 非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$ 。

1. 如果它们两两正交, 则称之为正交向量组。一个较为显然的事实是, n 维欧式空间中正交向量组所含向量个数 $\leq n$ 。
2. n 维欧式空间中, 由 n 个向量构成的正交向量组称为**正交基**。
3. 由单位向量构成的正交基称为**标准正交基**。

例 1.3.9. 在标准欧式空间 \mathbb{R}^3 中, 向量组

$$\beta_1 = (0, 1, 0), \quad \beta_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \beta_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

是一个标准正交基。这是因为

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_1 \cdot \beta_3 = \beta_2 \cdot \beta_3 = 0,$$

且

$$\|\beta_1\| = \|\beta_2\| = \|\beta_3\| = 1.$$

定义 1.3.10 (正交函数与正交函数集). 在 $[t_1, t_2]$ 区间上定义的非零函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$, 若满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \varphi_2^*(t) dt = 0,$$

则称函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 为在 $[t_1, t_2]$ 区间上的**正交函数**。

在 $[t_1, t_2]$ 区间上定义的非零函数序列 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, 其中任意两个函数 $\varphi_i(t)$ 与 $\varphi_j(t)$, 均满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ k_i, & i = j, \end{cases}$$

其中 k_i 为非零常数, 则称函数序列 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 为区间 $[t_1, t_2]$ 上的**正交函数集**。 n 可以为有限值, 也可以为正无穷。

注意. 在证明正交函数、正交函数集时, 需要注意以下几点:

- 在说明正交性时, 一定要强调是在某个区间上的正交性。
- 在说明正交函数集时, 除了证明不等两个函数的内积为 0 外, 还要证明相等的函数的内积不为 0。

例 1.3.11 (三角函数集). 设 $\omega_0 > 0$, 则

$$\{1, \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \cos(2\omega_0 t + \varphi_2), \dots, \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)\}$$

是在 $[0, \frac{2\pi}{\omega_0}]$ 区间上的正交函数集。

证明. 整个证明分为四部分: 首先, 1 与 $\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ 正交。

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} 1 \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) dt = 0.$$

其次, $\cos(k_1\omega_0 t + \varphi_{k_1})$ 与 $\cos(k_2\omega_0 t + \varphi_{k_2})$, 在 $k_1 \neq k_2$ 的条件下正交。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos(k_1\omega_0 t + \varphi_{k_1}) \cos(k_2\omega_0 t + \varphi_{k_2}) dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2} (\cos((k_1\omega_0 t + \varphi_{k_1}) + (k_2\omega_0 t + \varphi_{k_2})) + \cos((k_1\omega_0 t + \varphi_{k_1}) - (k_2\omega_0 t + \varphi_{k_2}))) dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2} (\cos((k_1+k_2)\omega_0 t + \varphi_{k_1} + \varphi_{k_2}) + \cos((k_1-k_2)\omega_0 t + \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2})) dt \\ &= \left(\frac{1}{2(k_1+k_2)\omega_0} \sin((k_1+k_2)\omega_0 t + \varphi_{k_1} + \varphi_{k_2}) + \frac{1}{2(k_1-k_2)} \sin((k_1-k_2)\omega_0 t + \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

再次, 1 与自身不正交。

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} 1 \cdot 1 dt = \frac{2\pi}{\omega_0} \neq 0.$$

最后, $\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ 与自身不正交。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos^2(k\omega_0 t + \varphi_k) dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1 + \cos(2k\omega_0 t + 2\varphi_k)}{2} dt \\ &= \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k\omega_0} \sin(2k\omega_0 t + 2\varphi_k) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= \frac{\pi}{\omega_0} \neq 0. \end{aligned}$$

因此, $\{1, \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \cos(2\omega_0 t + \varphi_2), \dots, \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)\}$ 是在 $[0, \frac{2\pi}{\omega_0}]$ 区间上的正交函数集。 ■

例 1.3.12 (指数函数集). 设 $\omega_0 > 0$, 则

$$\{e^{in\omega_0 t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

是在区间 $[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}]$ 上的正交函数集。

证明. 任取 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。若 $m \neq n$, 则 $e^{im\omega_0 t}$ 和 $e^{in\omega_0 t}$ 在区间 $[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}]$ 上正交, 这是因为

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} e^{im\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} e^{i(m-n)\omega_0 t} dt = \frac{e^{i(m-n)\omega_0 t}}{i(m-n)\omega_0} \Big|_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} = 0.$$

若 $m = n$, 则 $e^{im\omega_0 t}$ 和 $e^{in\omega_0 t}$ 在区间 $[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}]$ 上不正交, 这是因为

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} e^{im\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} 1 dt = \frac{2\pi}{\omega_0} \neq 0.$$

因此 $\{e^{in\omega_0 t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是在区间 $[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}]$ 上的正交函数集。 ■

定义 1.3.13 (完备的正交函数集). 如果在区间 $[t_1, t_2]$ 上, 除了正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 之外, 不存在函数 $x(t)$, 满足 $0 < \int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt < +\infty$, 使得

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_i^*(t)dt = 0, \quad \forall i,$$

则称此正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 为区间 $[t_1, t_2]$ 上的完备的正交函数集。

注 1.3.14. 事实上, 指数函数集 $\{e^{in\omega_0 t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 在区间 $[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}]$ 上是完备的正交函数集。

1.4 信号的基本运算

1.4.1 四则运算

定义 1.4.1. 信号的四则运算是指, 对信号进行加、减、乘、除等运算。四则运算后的信号在任意一点的取值定义为原信号在同一点处函数值作相同四则运算的结果。

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(t) &= f_1(t) + f_2(t), \\ (f_1 - f_2)(t) &= f_1(t) - f_2(t), \\ (f_1 \cdot f_2)(t) &= f_1(t) \cdot f_2(t), \\ \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(t) &= \frac{f_1(t)}{f_2(t)}. \end{aligned}$$

注意. 四则运算中的乘法不能用星号 * 表示, 因为 * 表示卷积运算。

1.4.2 波形变换

定义 1.4.2 (时移运算). 信号的时移运算是指, 将原信号 $f(t)$ 沿横轴平移 b 个单位, 得到新信号 $f(t-b)$ 。其中, 实参数 b 决定平移方向和位移量。

- $b > 0$ 时, 信号向右平移。
- $b < 0$ 时, 信号向左平移。

注意. 可以按照“左加右减”的口诀来记忆时移运算的方向。设有 $b > 0$, 则 $f(t+b)$ 表示信号向左平移 b 个单位, $f(t-b)$ 表示信号向右平移 b 个单位。

例 1.4.3. 假设有原信号 $f(t)$, 则其时移信号 $f(t+8)$ 和 $f(t-9)$ 如图 9 所示。

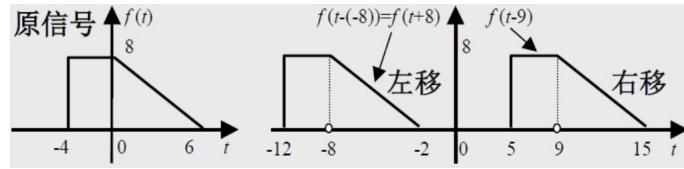


图 9: 信号的时移运算

定义 1.4.4 (反褶运算). 信号的反褶运算是指, 将原信号 $f(t)$ 按照纵轴对称翻转过来, 得到新信号 $f(-t)$ 。

例 1.4.5. 如图 10 所示, 假设有原信号 $f(t)$, 则其反褶信号为 $f(-t)$ 。

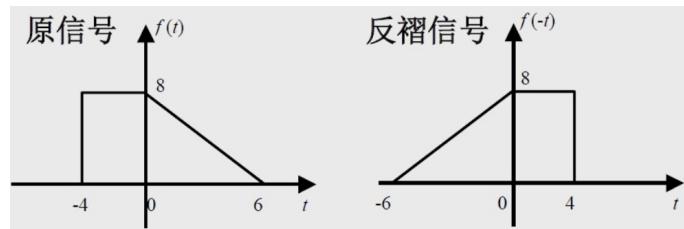


图 10: 信号的反褶运算

定义 1.4.6 (压扩运算). 信号的压扩运算是指, 将原信号 $f(t)$ 沿横轴缩放 a 倍, 得到新信号 $f(at)$ 。其中, 实参数 a 决定缩放方向和缩放倍数。当 $a < 0$ 时, 信号需要先进行反褶运算, 再进行压扩运算。

- $0 < |a| < 1$ 时, 信号在横轴方向上缩小。
- $|a| > 1$ 时, 信号在横轴方向上放大。

例 1.4.7. 如图 11 所示, 假设有原信号 $f(t)$, 则其压扩信号 $f(2t)$ 和 $f(-0.5t)$ 如图所示。

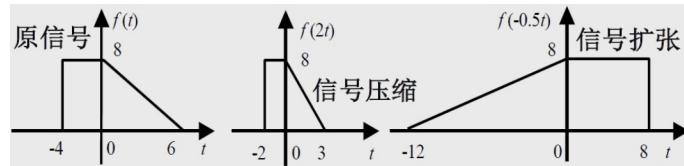


图 11: 信号的压扩运算

例 1.4.8. 已知信号 $f(t)$ 如图 12 所示, 请画出 $y(t) = 3f\left(1 - \frac{t}{2}\right) - 1$ 的图形。

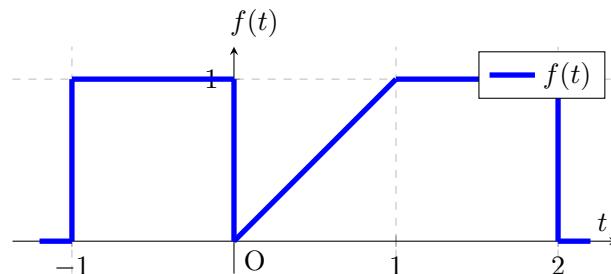


图 12: $f(t)$ 的波形描述

解. 首先, 对 $f(t)$ 进行时移运算, 得到 $f(1+t)$ 的波形如图 13 所示。

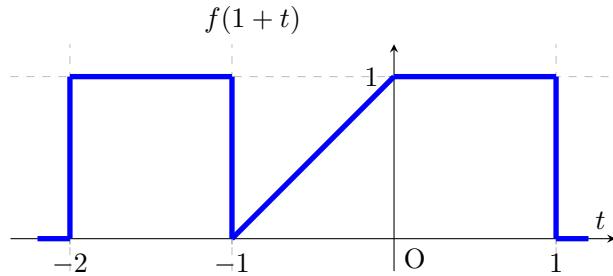


图 13: $f(1+t)$ 的波形描述

其次, 对 $f(1+t)$ 进行反褶和压扩运算, 得到 $f(1-\frac{t}{2})$ 的波形如图 14 所示。

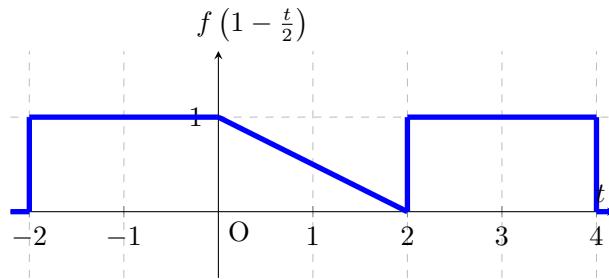


图 14: $f(1-\frac{t}{2})$ 的波形描述

再次, 对 $f(1-\frac{t}{2})$ 进行纵轴方向的缩放和平移, 得到 $3f(1-\frac{t}{2})-1$ 的波形如图 15 所示。

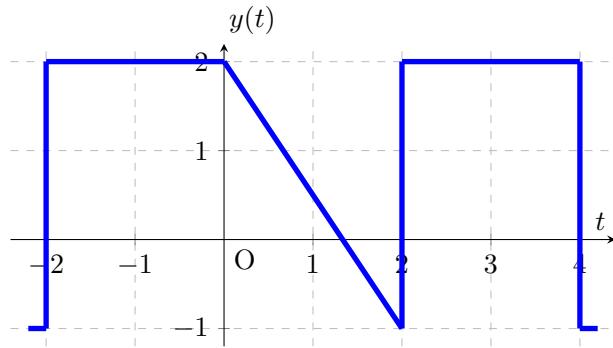


图 15: $3f(1-\frac{t}{2})-1$ 的波形描述

注 1.4.9. 假设有原信号 $y = f(t)$, 我们需要画出 $y = Af(\omega t + \varphi) + B$ 的图像时, 可以按照以下步骤进行:

1. 画出 $y = f(t + \varphi)$ 的图像。
2. 画出 $y = f(|\omega|t + \varphi)$ 的图像。若 $\omega < 0$ 则再进行反褶 (关于 y 轴进行对称)。
3. 画出 $y = Af(\omega t + \varphi) + B$ 的图像。

注意. 记得标注坐标轴的原点、标注横轴和纵轴的刻度和标识。记得画 $f(t) = 0$ 对应的 $y(t)$ 图像（在上例中，对应的是 $(-\infty, -2]$ 和 $[4, +\infty)$ 上的图像 $y = -1$ 。

1.4.3 微分与积分运算

定义 1.4.10 (信号的能量与功率). 信号的能量和功率是描述信号强度的两个重要指标。

- 当信号为连续信号时，信号的能量定义为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt,$$

信号的功率定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt.$$

- 当信号为离散信号时，信号的能量定义为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2,$$

信号的功率定义为

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2.$$

定义 1.4.11 (能量信号与功率信号). 如果信号的能量是有限的，则称为能量有限信号，简称能量信号。如果信号的功率是有限的，则称为功率有限信号，简称功率信号。

1.4.4 卷积运算

定义 1.4.12. 设 $f(t), g(t)$ 为两个连续时间信号函数，则它们的卷积定义为

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

若 $f(n), g(n)$ 为两个离散时间信号函数， f, g 是 \mathbb{Z} 上的离散序列，则它们的卷积定义为

$$(f * g)(n) = f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n - k)g(k).$$

注 1.4.13. 两个信号的卷积是否存在是有条件的：

- f, g 均为可积函数。
- f, g 卷积运算的结果是有界的。

注意. 一个信号的反褶信号在 t 轴滑动过程中，它与另外一个信号重合部分相乘得到的新信号的面积随 t 的变化曲线，就是所求的两个信号的卷积的波形，如图 16 所示。

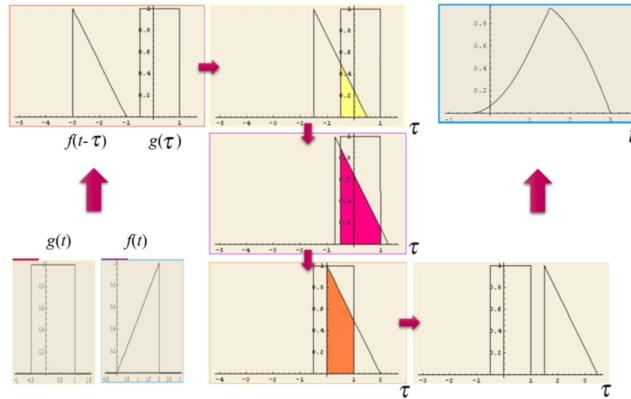


图 16: 卷积运算的解释

需要注意的是，卷积不是求图形相交部分的面积，而是求相乘结果的函数的面积。

性质 1.4.14 (卷积运算的交换律). 卷积运算具有交换律:

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1.$$

卷积运算的交换律可以通过变换积分变量的方式来证明。

证明.

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)f_2(a)da \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(b)f_2(t-b) \cdot (-db) \quad (b=t-a) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-b)f_1(b)db \\ &= (f_2 * f_1)(t). \end{aligned}$$

性质 1.4.15 (卷积运算的分配律). 卷积运算具有分配律:

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3.$$

卷积运算的分配律通常用于并联系统的分析。

卷积运算的分配率可以利用积分运算的线性性来证明。

证明.

$$\begin{aligned} (f_1 * (f_2 + f_3))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)(f_2(a) + f_3(a))da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)f_2(a)da + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)f_3(a)da \\ &= (f_1 * f_2)(t) + (f_1 * f_3)(t) \\ &= (f_1 * f_2 + f_1 * f_3)(t). \end{aligned}$$

性质 1.4.16 (卷积运算的结合律). 卷积运算具有结合律:

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3).$$

卷积运算的结合律通常用于串联系统的分析。

证明.

$$\begin{aligned} ((f_1 * f_2) * f_3)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a)f_2(b-a)da \right] f_3(t-b)db \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(b-a)f_3(t-b)db \right] da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(c)f_3(t-a-c)dc \right] da, \quad (c = b - a) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a)(f_2 * f_3)(t-a)da \\ &= (f_1 * (f_2 * f_3))(t). \end{aligned}$$

■

性质 1.4.17 (卷积的微分性质). 卷积的微分满足以下性质: 两个信号卷积的微分等于其中任一信号的微分与另一信号的卷积, 即

$$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{d}{dt} [f_2(t)] = \frac{d}{dt} [f_1(t)] * f_2(t),$$

其中 f_1, f_2 为 \mathbb{R} 上连续可导函数。

证明.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \cdot f_2(t-a)da \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \cdot \frac{d}{dt} [f_2(t-a)] da. \end{aligned}$$

记 $g(t) = \frac{d}{dt} [f_2(t)]$, 则 $g(t-a) = \frac{d}{dt} [f_2(t-a)]$ 。因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \cdot \frac{d}{dt} [f_2(t-a)] da = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \cdot g(t-a)da = f_1(t) * g(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt} [f_2(t)].$$

同理, 由卷积运算的交换律可以证明 $\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} [f_1(t)] * f_2(t)$ 。因此, 命题得证。 ■

性质 1.4.18 (卷积的积分性质). 卷积的积分满足以下性质: 两个信号卷积的积分等于其中任一信号的积分与另一信号的卷积, 即

$$\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda)d\lambda = f_1(t) * \left(\int_{-\infty}^t f_2(\lambda)d\lambda \right) = \left(\int_{-\infty}^t f_1(\lambda)d\lambda \right) * f_2(t),$$

其中 f_1, f_2 为 \mathbb{R} 上连续可导函数。

证明.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) f_2(\lambda - a) da \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^t f_2(\lambda - a) d\lambda \right] da.\end{aligned}$$

记 $g(t) = \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda$, 则 $g(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} f_2(\lambda') d\lambda' = \int_{-\infty}^t f_2(\lambda-a) d\lambda$, $\lambda = \lambda' + a$ 。因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^t f_2(\lambda - a) d\lambda \right] da = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) g(t-a) da = f_1(t) * g(t) = f_1(t) * \left(\int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right).$$

同理, 由卷积运算的交换律可以证明 $\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda = \left(\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right) * f_2(t)$ 。因此, 命题得证。 ■

推论 1.4.19. 设 f_1, f_2 为 \mathbb{R} 上的 n 次可微函数, 则

$$(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t), \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

特别地, 当 $n < 0$ 时, 记 $f^{(n)}(t)$ 表示对 $f(t)$ 进行 n 次积分运算, 则

$$(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t), \quad m = n, n+1, \dots, 0.$$

也就是说, 卷积运算的求导次数可以被分配到两个函数上, 分别求导后再进行卷积运算; 积分运算的次数也可以被分配到两个函数上, 分别积分后再进行卷积运算。

证明. 只证明 $n > 0$ 的情况, $n < 0$ 的情况的证明与之类似。使用数学归纳法证明。

当 $n = 1$ 时, 由卷积的微分性质即可得证。假设 $n = k$ 时结论成立, 即

$$(f_1 * f_2)^{(k)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(k-m)}(t), \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}(f_1 * f_2)^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt} [(f_1 * f_2)^{(k)}(t)] \\ &= \frac{d}{dt} [f_1^{(m)}(t) * f_2^{(k-m)}(t)] \\ &= f_1^{(m+1)}(t) * f_2^{(k-m)}(t) \\ &= f_1^{(m)}(t) * f_2^{(k-m+1)}(t).\end{aligned}$$

因此, 由数学归纳法可知, 对于任意的 $n \geq 0$, 结论均成立。 ■

1.4.5 相关运算

定义 1.4.20. 两个信号的相关运算定义为

$$R_{f_1, f_2}(t) = R(f_1(t), f_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2^*(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau + t) f_2^*(\tau) d\tau.$$

可以看出, f_1 和 f_2^* 在乘法运算时有一个相对平移量 t 。

注 1.4.21. 相关运算和卷积运算有一定的联系: $R_{f_1, f_2}(t) = f_1(t) * f_2^*(-t)$, 但也有一定的区别: 相关运算中的第二个信号不需要反褶, 但需要取共轭。

性质 1.4.22. 信号的相关运算与顺序有关。考虑 $R_{f_2, f_1}(t)$:

$$R_{f_2, f_1}(t) = R(f_2(t), f_1(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1^*(\tau - t) d\tau.$$

对比 $R_{f_1, f_2}(t)$, 可以发现

$$\begin{aligned} R_{f_2, f_1}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) f_2^*(a - t) da \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a) f_2(a - t) da \right]^* \\ &= R_{f_1, f_2}^*(-t). \end{aligned}$$

注意.

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - a) f_2(a) da, \\ f_1(-t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a - t) f_2(a) da \\ &\neq \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(-t - a) f_2(a) da. \end{aligned}$$

一个比较容易的方法, 是记 $g(t) = f_1(-t)$, 这样 $g(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - a) f_2(a) da = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a - t) f_2(a) da$, 就不会记错了。

例 1.4.23 (自相关运算). 自相关运算是指函数自己与自己求相关。用自相关函数可以检测准周期信号的准周期, 如图 17 所示。

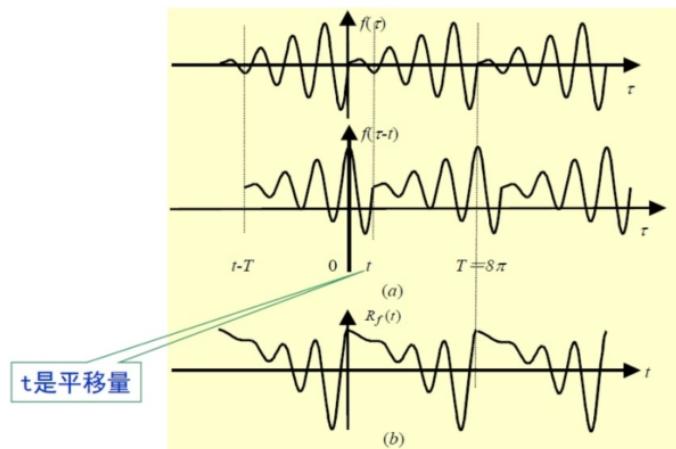


图 17: 函数的自相关运算

例 1.4.24 (卷积的物理意义). 设 $g(x, y)$ 表示图像, $f(x, y)$ 表示卷积核。则如图 18 和图 19 所示,

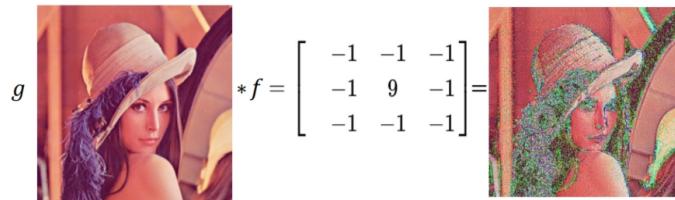


图 18: 卷积的物理意义(1)

为何“积”？“积”的过程中，我们得到了一个叠加值，我们通过定义 f ，使得叠加值包含图像的特定信息，例如边缘信息，平滑处理。

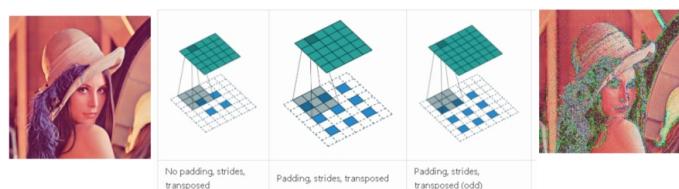


图 19: 卷积的物理意义(2)

注意. 卷积的定义中，为何要对 f 做反褶？为了数学上的便利性，反褶后卷积可以满足交换律；另一方面，在后续的学习中，我们会发现时域的卷积在频域上有很简洁的形式。

1.5 奇异信号

1.5.1 单位斜变信号

定义 1.5.1 (单位斜变信号). 单位斜变信号的数学表达式为

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$

信号图像如图 20 所示。

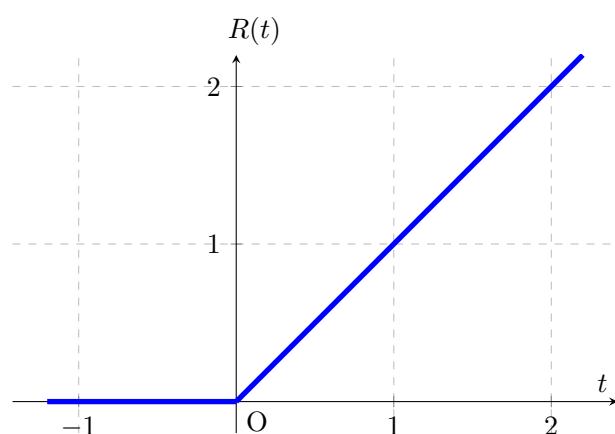


图 20: 单位斜变信号

定义 1.5.2 (截顶的单位斜变信号). 截顶的单位斜变信号的数学表达式为

$$R_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \tau, & t > \tau. \end{cases}$$

信号图像如图 21 所示。

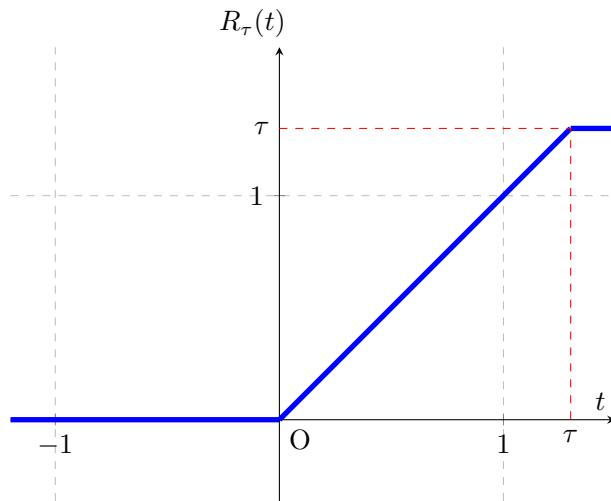


图 21: 截顶的单位斜变信号

1.5.2 单位阶跃信号

定义 1.5.3 (单位阶跃信号). 单位阶跃信号的数学表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

信号图像如图 22 所示。

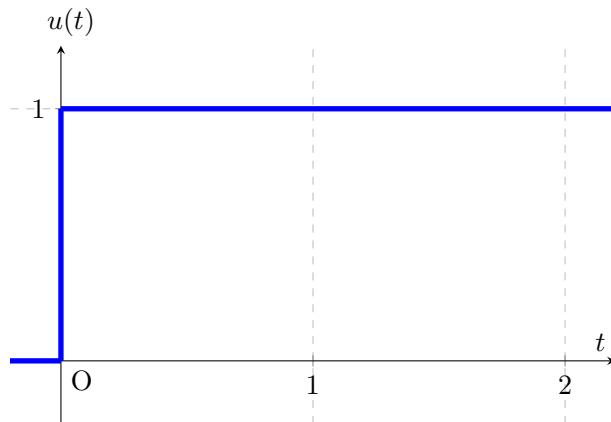


图 22: 单位阶跃信号

性质 1.5.4 (单位阶跃信号与单位斜变信号的关系). 单位斜变信号是单位阶跃信号的积分, 即

$$R(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau.$$

单位阶跃信号是单位斜变信号的微分, 即

$$u(t) = \frac{dR(t)}{dt}.$$

1.5.3 单位矩形脉冲信号

定义 1.5.5 (单位矩形脉冲信号). 单位矩形脉冲信号的数学表达式为

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 1, & |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

信号图像如图 23 所示。

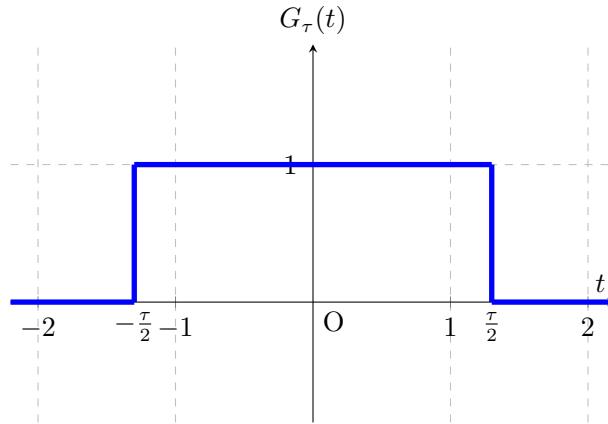


图 23: 单位矩形脉冲信号

其中, 脉高是指脉冲信号的高度, 脉宽是指脉冲信号的宽度。

性质 1.5.6 (单位矩形脉冲信号与单位阶跃信号的关系). 单位矩形脉冲信号是两个单位阶跃信号的差, 即

$$G_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

注 1.5.7. 不必再用分段的形式来表示信号, 可以使用矩形脉冲信号来表示。其他信号与矩形脉冲信号相乘时, 只有在矩形脉冲信号对应的区间内, 其他信号的信息才被保留下, 其余范围都是零。

用矩形脉冲信号和乘法运算, 可以截取信号的特定区间片段。所以, 单位矩形脉冲信号也被称为“窗函数”。如图 24 所示。

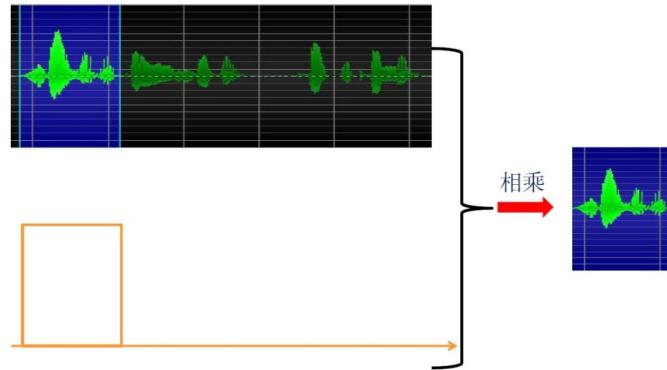


图 24: 窗函数的截取功能

1.5.4 符号函数信号

定义 1.5.8 (符号函数信号). 符号函数信号的数学表达式为

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

信号图像如图 25 所示。

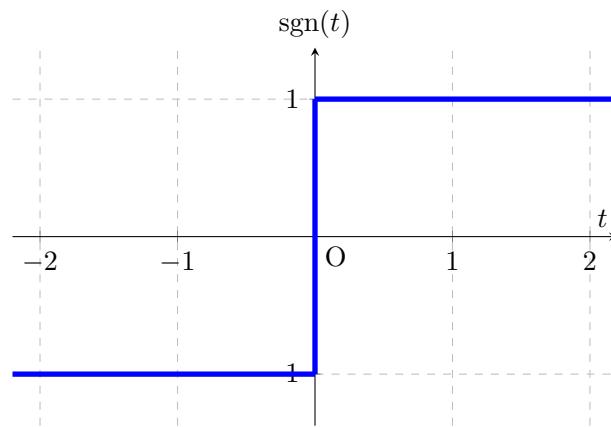


图 25: 符号函数信号

符号函数信号通常用于表示自变量的符号特性。

性质 1.5.9 (符号函数信号与单位阶跃信号的关系). 由 $\operatorname{sgn}(t) + 1 = 2u(t)$ 可得,

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1.$$

1.5.5 单位冲激信号

定义 1.5.10 (单位冲激信号的狄拉克定义式). 设冲激信号有一个总的冲激强度, 它在整个时间域上的积分等于该强度值, 而在除冲激点之外的其他点的函数取值为零。定义单位冲激信号 $\delta(t)$ 为满足以下条件的信号:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq t_0). \end{cases}$$

这也被称为 $\delta(t)$ 的狄拉克定义式。更一般地, 可以定义冲激点在 t_0 , 强度为 E 的冲激信号为

$$\delta_{E,t_0}(t) = E \cdot \delta(t - t_0),$$

它满足

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{E,t_0}(t) dt = E, \\ \delta_{E,t_0}(t) = 0 \quad (t \neq t_0). \end{cases}$$

信号图像如图 26 所示。在冲激点处画一条带箭头的线, 线的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致。

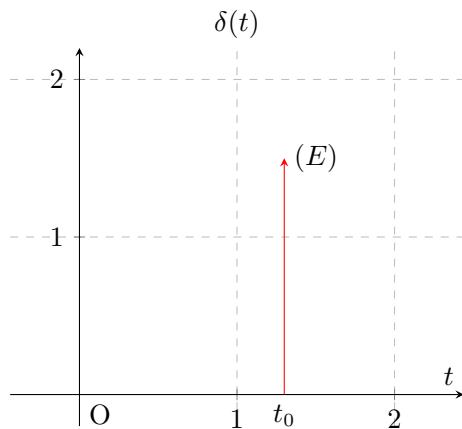


图 26: 单位冲激信号

单位冲激信号通常用于描述自然界中那些发生后持续时间很短的现象。

定义 1.5.11 (单位冲激信号的极限定义式). 设 $G_\tau(t)$ 是一个单位矩形脉冲信号, 其脉宽为 τ , 则

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{G_\tau(t)}{\tau},$$

即单位冲激信号是单位矩形脉冲信号的极限。

注 1.5.12. 更一般地, 设位于 $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ 上的信号 $f_\tau(t)$ 的脉冲宽度为 τ , 若能保证

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f_\tau(t) dt = 1, \quad \forall \tau > 0,$$

即始终保持单位面积, 则

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f_\tau(t)}{\tau},$$

即单位冲激信号是信号 $f_\tau(t)/\tau$ 的极限。 $f_\tau(t)$ 可以是矩形脉冲、三角脉冲等。

性质 1.5.13 (冲激函数的搬移抽样特性). 对于任意的信号 $f(t)$ 而言, 都有 $f(t) * \delta(t) = f(t)$ 。更一般地, 一个函数与单位冲激函数的卷积, 等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置, 即

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0),$$

运算前后的信号如图 27 所示。

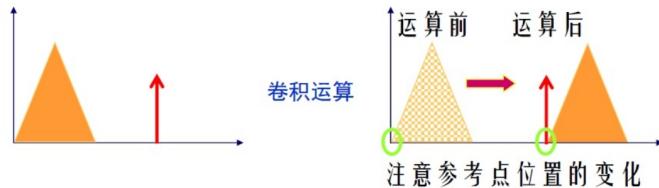


图 27: 冲激函数的搬移抽样特性

证明.

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\delta(t - t_0 - a)da,$$

而 $\delta(t - t_0 - a)$ 只有在 $a = t - t_0$ 时非零。因此

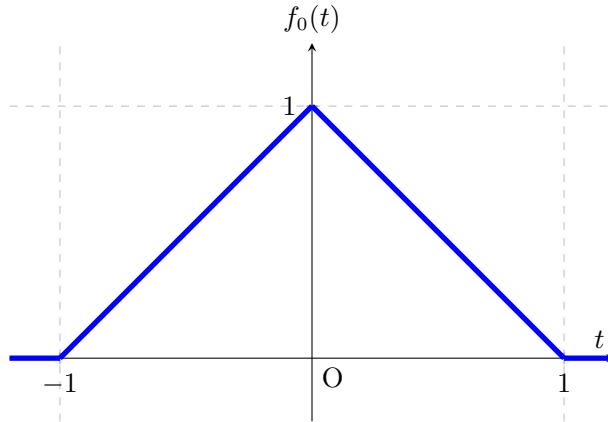
$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0)\delta(t - t_0 - a)da \\ &= f(t - t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0 - a)da \\ &= f(t - t_0). \end{aligned}$$

习题 1.5.14. 已知某信号 $f_0(t)$ 是一个关于纵轴对称的三角波, 设它的底边长为 2, 高为 1。试绘出信号 $f(t)$ 的波形, 其中 $f(t)$ 的定义为:

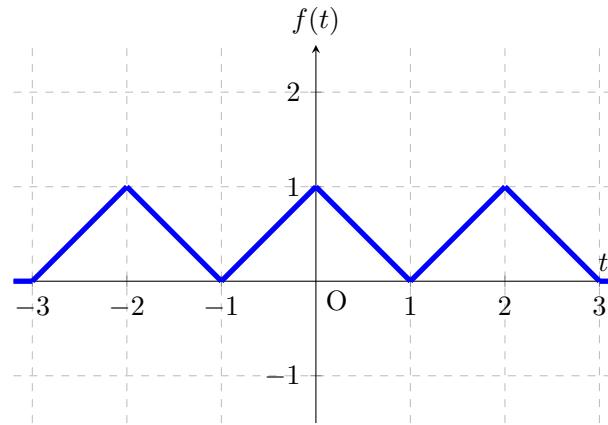
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t) * \delta(t - 2n).$$

并回答以下问题: $f(t)$ 是否为周期信号? 如是, 其周期为多少?

解. 易知 $f_0(t)$ 的图像如图 28 所示。

图 28: 三角波 $f_0(t)$

而 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t) * \delta(t - 2n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t - 2n)$, 画出 $f(t)$ 的图像如图 29 所示。

图 29: 信号 $f(t)$

由图可知, $f(t)$ 是一个周期信号, 其周期为 2。

性质 1.5.15 (从函数到值的映射关系). 冲激函数能从检验函数中筛选出零点处的函数值。对于任意的函数 $f(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0).$$

上式只是借用了积分的形式, 表达的意思是: 冲激函数对测试函数分配 (或赋予) 一个数的过程, 所以不能按普通的积分运算来考虑。之所以借用积分的形式, 是因为它形式上与积分运算的相应性质一致, 且普通积分运算实际上也是产生一个“值”。

性质 1.5.16 (冲激函数的性质总结). 冲激函数 $\delta(t)$ 具有以下性质:

1. (对称性) $\delta(t)$ 为偶函数, 即 $\delta(t) = \delta(-t)$ 。
2. (时域压扩性) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), a \neq 0$ 。

3. (积分) 积分值为 1 还是 0, 取决于积分区间是否包含原点, 即:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1, & t > 0, \\ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 0, & t < 0. \end{cases}$$

即: $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$ 。单位冲激函数的积分是单位阶跃函数。

4. (抽样特性) 也称“筛选特性”, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$ 。

例 1.5.17 (抽样信号). 定义冲激串信号为

$$\Delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s),$$

其中 T_s 是抽样周期。冲激串信号是很多冲激信号的叠加。假设有信号 $f(t)$, 则其对应的抽样信号 $f_s(t)$ 为

$$f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s).$$

如图 30 所示。

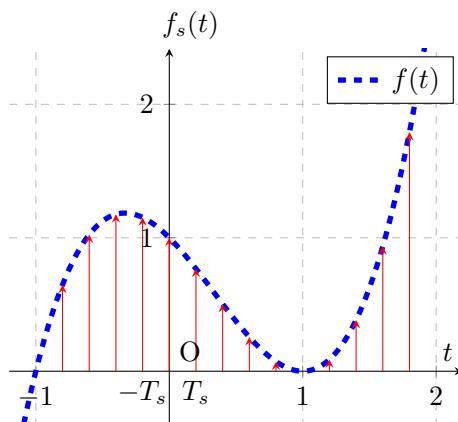


图 30: 抽样信号

注意. 冲击信号、冲激串和抽样信号之间的关系如图 31 所示:

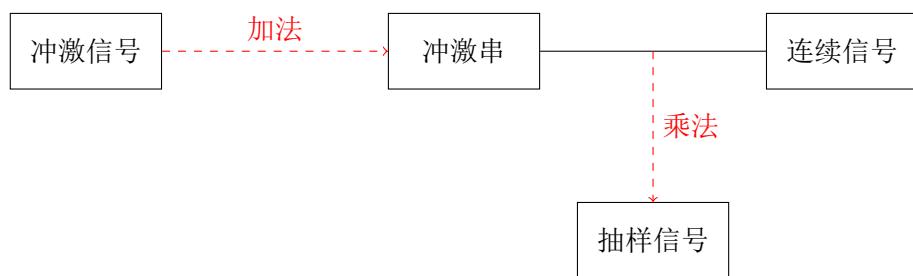


图 31: 冲击信号、冲激串和抽样信号之间的关系

1.6 习题课 1

习题 1.6.1. 根据如图 32 所示信号 $f(t)$ 作答, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

- (1) 写出 $g_1(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) * u(t)$ 的表达式, 并绘出波形。其中, $u(t)$ 为单位阶跃函数。
- (2) 绘出 $g_2(t) = f(t) * \delta(t - 2) + f(2t)$ 的波形。

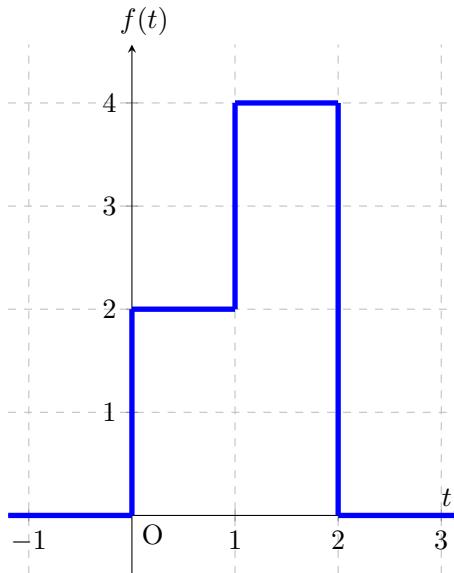


图 32: 习题 1.6.1

解. (1) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f\left(\frac{t}{2}\right) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{a}{2}\right) u(t-a) da \\ &= \int_{-\infty}^t f\left(\frac{a}{2}\right) da. \end{aligned}$$

(a) 当 $t \leq 0$ 时, $g_1(t) = \int_{-\infty}^t 0 da = 0$ 。

(b) 当 $0 < t \leq 2$ 时, $g_1(t) = \int_{-\infty}^0 0 da + \int_0^t 2 da = 0 + 2t = 2t$ 。

(c) 当 $2 < t \leq 4$ 时, $g_1(t) = \int_{-\infty}^0 0 da + \int_0^2 2 da + \int_2^t 4 da = 0 + 4 + 4(t-2) = 4t - 4$ 。

(d) 当 $t > 4$ 时, $g_1(t) = \int_{-\infty}^0 0 da + \int_0^2 2 da + \int_2^4 4 da + \int_4^t 0 da = 0 + 4 + 8 + 0 = 12$ 。

因此 $g_1(t)$ 的表达式为

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2t, & 0 < t \leq 2, \\ 4t - 4, & 2 < t \leq 4, \\ 12, & t > 4. \end{cases}$$

绘制波形如图 33 所示。

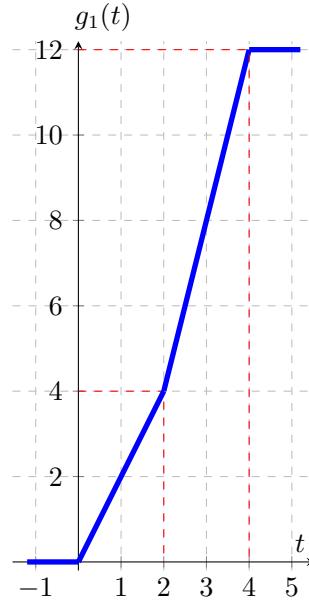


图 33: 习题 1.6.1(1) 波形

(2) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_2(t) &= f(t) * \delta(t - 2) + f(2t) \\ &= f(t - 2) + f(2t). \end{aligned}$$

- (a) 当 $t \leq 0$ 时, $g_2(t) = 0 + 0 = 0$ 。
- (b) 当 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 时, $g_2(t) = 0 + 2 = 2$ 。
- (c) 当 $\frac{1}{2} < t \leq 1$ 时, $g_2(t) = 0 + 4 = 4$ 。
- (d) 当 $1 < t \leq 2$ 时, $g_2(t) = 0 + 0 = 0$ 。
- (e) 当 $2 < t \leq 3$ 时, $g_2(t) = 2 + 0 = 2$ 。
- (f) 当 $3 < t \leq 4$ 时, $g_2(t) = 4 + 0 = 4$ 。
- (g) 当 $t > 4$ 时, $g_2(t) = 0 + 0 = 0$ 。

因此 $g_2(t)$ 的表达式为

$$g_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2, & 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ 4, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \\ 0, & 1 < t \leq 2, \\ 2, & 2 < t \leq 3, \\ 4, & 3 < t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

绘制波形如图 34 所示。

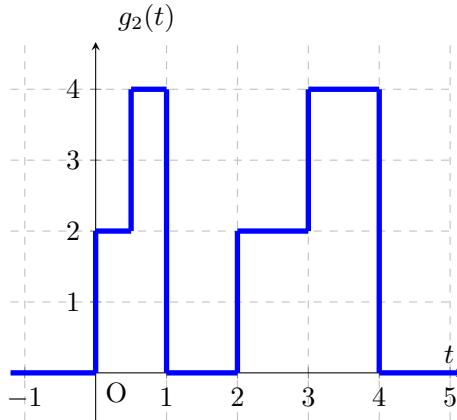


图 34: 习题 1.6.1(2) 波形

习题 1.6.2. 根据如图 35 所示信号 $f(t)$ 作答, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

- (1) 写出 $g_1(t) = f(t) * \text{sgn}(t)$ 的表达式, 并绘出波形。
- (2) 绘出 $g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - 2n)$ 的波形。

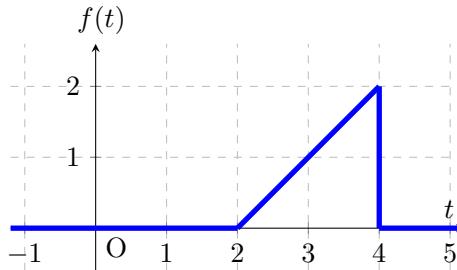


图 35: 习题 1.6.2

解. (1) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f(t) * \text{sgn}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \text{sgn}(t-a) da \\ &= \int_{-\infty}^t f(a) da - \int_t^{+\infty} f(a) da. \end{aligned}$$

- (a) 当 $t \leq 2$ 时, $g_1(t) = \int_{-\infty}^t 0 da - \left(\int_t^2 0 da + \int_2^4 (a-2) da + \int_4^{+\infty} 0 da \right) = 0 - (0 + 2 - 0) = -2$ 。
- (b) 当 $2 < t \leq 4$ 时, $g_1(t) = \left(\int_{-\infty}^2 0 da + \int_2^t (a-2) da \right) - \left(\int_t^4 (a-2) da + \int_4^{+\infty} 0 da \right) = (0 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2) - (2t - \frac{1}{2}t^2 + 0) = t^2 - 4t + 2$ 。
- (c) 当 $t > 4$ 时, $g_1(t) = \left(\int_{-\infty}^2 0 da + \int_2^4 (a-2) da + \int_4^t 0 da \right) - \left(\int_t^{+\infty} 0 da \right) = (0 + 2 + 0) - 0 = 2$ 。

因此 $g_1(t)$ 的表达式为

$$g_1(t) = \begin{cases} -2, & t \leq 2, \\ t^2 - 4t + 2, & 2 < t \leq 4, \\ 2, & t > 4. \end{cases}$$

绘制波形如图 36 所示。

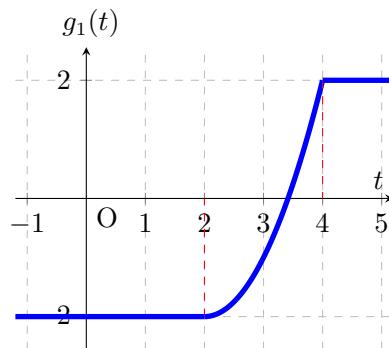


图 36: 习题 1.6.2(1) 波形

- (2) 由题意可得 $g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - 2n)$, 这等价于将 $f(t)$ 沿 t 轴左右平移偶数格后叠加。因此 $g_2(t)$ 为周期函数, 波形图如图 37 所示。

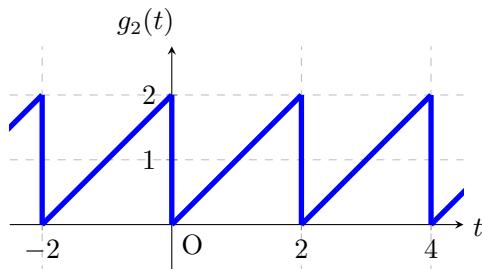


图 37: 习题 1.6.2(2) 波形

习题 1.6.3. 根据如图 38 所示信号 $f(t)$ 作答, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

- (1) 写出 $g_1(t) = f(t) * G_1(t)$ 的表达式, 并绘出波形。其中, $G_1(t)$ 为脉高和脉宽均为 1 的矩形脉冲信号。
- (2) 绘出 $g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - 2n)$ 的波形。

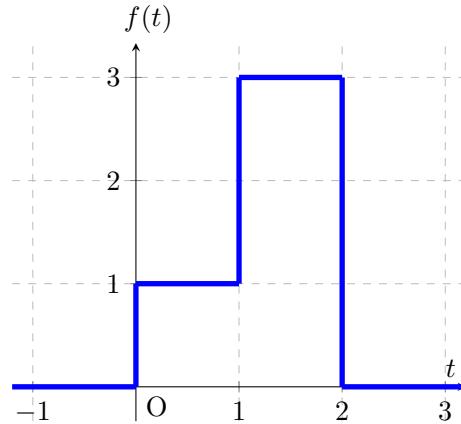


图 38: 习题 1.6.3

解. (1) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f(t) * G_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)G_1(t-a)da \\ &= \int_{t-1/2}^{t+1/2} f(a)da \end{aligned}$$

- (a) 当 \$t \leq -\frac{1}{2}\$ 时, \$g_1(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} 0 da = 0\$。
- (b) 当 \$-\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2}\$ 时, \$g_1(t) = \int_{t-1/2}^0 0 da + \int_0^{t+1/2} 1 da = t + \frac{1}{2}\$。
- (c) 当 \$\frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2}\$ 时, \$g_1(t) = \int_{t-1/2}^1 1 da + \int_1^{t+1/2} 3 da = 2t\$。
- (d) 当 \$\frac{3}{2} < t \leq \frac{5}{2}\$ 时, \$g_1(t) = \int_{t-1/2}^2 3 da + \int_2^{t+1/2} 0 da = \frac{15}{2} - 3t\$。
- (e) 当 \$t > \frac{5}{2}\$ 时, \$g_1(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} 0 da = 0\$。

因此 \$g_1(t)\$ 的表达式为

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\frac{1}{2}, \\ t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2}, \\ 2t, & \frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{15}{2} - 3t, & \frac{3}{2} < t \leq \frac{5}{2}, \\ 0, & t > \frac{5}{2}. \end{cases}$$

绘制波形如图 39 所示。

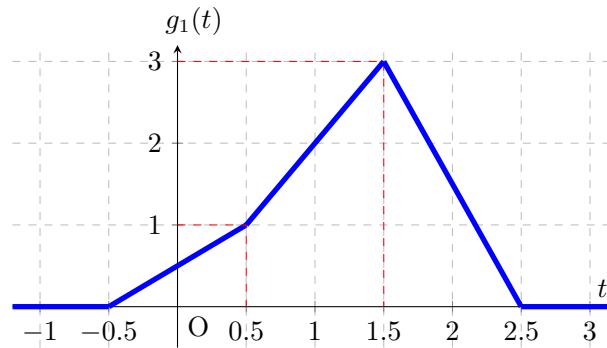


图 39: 习题 1.6.3(1) 波形

(2) 由题意可得 $g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - 2n)$, 这等价于将 $f(t)$ 沿 t 轴左右平移偶数格后叠加。因此 $g_2(t)$ 为周期函数, 波形图如图 40 所示。

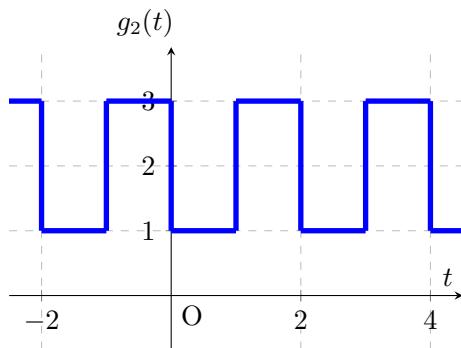


图 40: 习题 1.6.3(2) 波形

习题 1.6.4. 根据如图 41 所示信号 $f(t)$ 作答, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

- (1) 绘出 $g_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - 2n)$ 的波形。
- (2) 绘出 $g_2(t) = f(t) * f(t)$ 的波形。

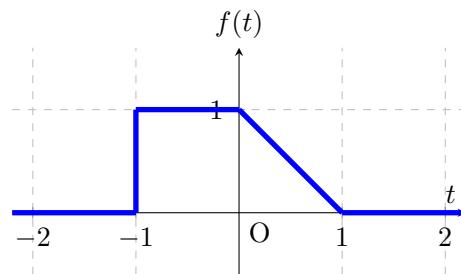


图 41: 习题 1.6.4

解. (1) 由题意可得 $g_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - 2n)$, 这等价于将 $f(t)$ 沿 t 轴左右平移偶数格后叠加。因此 $g_1(t)$ 为周期函数, 波形图如图 42 所示。

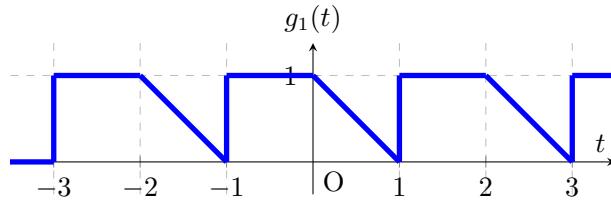


图 42: 习题 1.6.4(1) 波形

(2) 由题意可得

$$\begin{aligned}
 g_2(t) &= f(t) * f(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)f(t-a)da \\
 &= \int_{t-1}^t (1-t+a)f(a)da + \int_t^{t+1} f(a)da.
 \end{aligned}$$

(a) 当 $t \leq -2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 g_2(t) &= \int_{t-1}^t (1-t+a) \cdot 0 da + \int_t^{t+1} 0 da \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

(b) 当 $-2 < t \leq -1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 g_2(t) &= \int_{t-1}^t (1-t+a) \cdot 0 da + \int_t^{-1} 0 da + \int_{-1}^{t+1} 1 da \\
 &= 0 + 0 + t + 2 \\
 &= t + 2.
 \end{aligned}$$

(c) 当 $-1 < t \leq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 g_2(t) &= \int_{t-1}^{-1} (1-t+a) \cdot 0 da + \int_{-1}^t (1-t+a) \cdot 1 da + \int_t^0 1 da + \int_0^{t+1} (1-a)da \\
 &= 0 + \left(\frac{1}{2}a^2 + (1-t)a \right) \Big|_{a=-1}^{a=t} - t + \left(-\frac{1}{2}a^2 + a \right) \Big|_{a=0}^{a=t+1} \\
 &= \left(-\frac{1}{2}t^2 + t \right) - \left(t - \frac{1}{2} \right) - t + \left(-\frac{1}{2}(t+1)^2 + \frac{1}{2} \right) \\
 &= -t^2 - t + 1.
 \end{aligned}$$

(d) 当 $0 < t \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \int_{t-1}^0 (1-t+a) \cdot 1 \, da + \int_0^t (1-t+a)(1-a) \, da + \int_t^1 (1-a) \, da + \int_1^{t+1} 0 \, da \\
&= \int_{t-1}^0 (1-t+a) \, da + \int_0^t (-a^2 + ta - (t-1)) \, da + \int_t^1 (1-a) \, da + 0 \\
&= \left(\frac{1}{2}a^2 + (1-t)a \right) \Big|_{a=t-1}^{a=0} + \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}ta^2 - (t-1)a \right) \Big|_{a=0}^{a=t} + \left(-\frac{1}{2}a^2 + a \right) \Big|_{a=t}^{a=1} \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{6}t^3 - t^2 + t \right) + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}t^2 + t \right) \\
&= \frac{1}{6}t^3 - t + 1.
\end{aligned}$$

(e) 当 $1 < t \leq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \int_{t-1}^1 (1-t+a)(1-a) \, da + \int_1^t (1-t+a) \cdot 0 \, da + \int_t^{t+1} 0 \, da \\
&= \int_{t-1}^1 (-a^2 + ta - (t-1)) \, da + 0 + 0 \\
&= \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}ta^2 - (t-1)a \right) \Big|_{a=t-1}^{a=1} \\
&= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{6}t^3 - t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{2}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{6}t^3 + t^2 - 2t + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(f) 当 $t > 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \int_{t-1}^t (1-t+1) \cdot 0 \, da + \int_t^{t+1} 0 \, da \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此 $g_2(t)$ 的表达式为

$$g_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -2, \\ t+2, & -2 < t \leq -1, \\ -t^2 - t + 1, & -1 < t \leq 0, \\ \frac{1}{6}t^3 - t + 1, & 0 < t \leq 1, \\ -\frac{1}{6}t^3 + t^2 - 2t + \frac{4}{3}, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

绘制波形如图 43 所示。

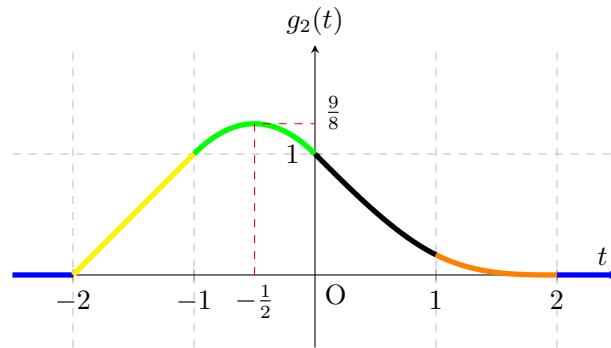


图 43: 习题 1.6.4(2) 波形

习题 1.6.5. 根据如图 44 所示信号 $f(t)$ 作答, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

(1) 绘出 $g_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+1) * \delta(t-2n)$ 的波形。

(2) 绘出 $g_2(t) = f(2t) * \text{sgn}(t+1)$ 的波形。

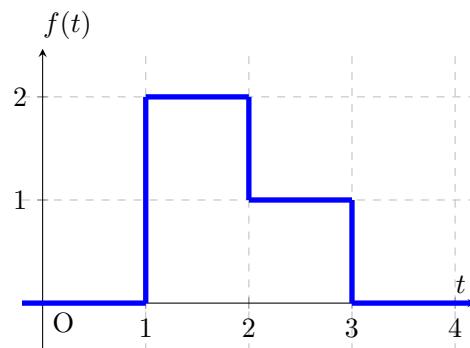


图 44: 习题 1.6.5

解. (1) 由题意可得 $g_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+1-2n)$, 这等价于将 $f(t)$ 沿 t 轴左右平移奇数格后叠加。因此 $g_1(t)$ 为周期函数, 波形图如图 45 所示。

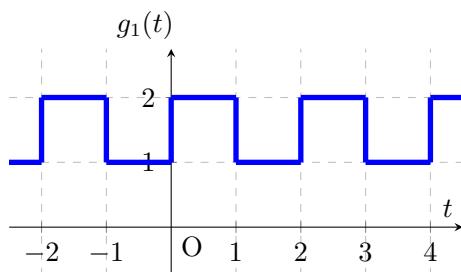


图 45: 习题 1.6.5(1) 波形

(2) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_2(t) &= f(2t) * \operatorname{sgn}(t+1) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(2a) \operatorname{sgn}(t-a+1) da \\ &= \int_{-\infty}^{t-1} f(2a) da - \int_{t-1}^{+\infty} f(2a) da. \end{aligned}$$

(a) 当 $t \leq -\frac{1}{2}$ 时, $g_2(t) = \int_{-\infty}^{t+1} 0 da - \left(\int_{t+1}^{1/2} 0 da + \int_{1/2}^1 2 da + \int_1^{3/2} 1 da + \int_{3/2}^{+\infty} 0 da \right) = 0 - (0 + 1 + \frac{1}{2} + 0) = -\frac{3}{2}$ 。

(b) 当 $-\frac{1}{2} < t \leq 0$ 时, $g_2(t) = \left(\int_{-\infty}^{1/2} 0 da + \int_{1/2}^{t+1} 2 da \right) - \left(\int_{t+1}^1 2 da + \int_1^{3/2} 1 da + \int_{3/2}^{+\infty} 0 da \right) = (0 + 2t + 1) - (-2t + \frac{1}{2} + 0) = 4t + \frac{1}{2}$ 。

(c) 当 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 时, $g_2(t) = \left(\int_{-\infty}^{1/2} 0 da + \int_{1/2}^1 2 da + \int_1^{t+1} 1 da \right) - \left(\int_{t+1}^{3/2} 1 da + \int_{3/2}^{+\infty} 0 da \right) = (0 + 1 + t) - (\frac{1}{2} - t + 0) = 2t + \frac{1}{2}$ 。

(d) 当 $t > \frac{1}{2}$ 时, $g_2(t) = \left(\int_{-\infty}^{1/2} 0 da + \int_{1/2}^1 2 da + \int_1^{3/2} 1 da + \int_{3/2}^{t+1} 0 da \right) - \int_{t+1}^{+\infty} 0 da = (0 + 1 + \frac{1}{2} + 0) - 0 = \frac{3}{2}$ 。

因此 $g_2(t)$ 的表达式为

$$g_2(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2}, & t \leq -\frac{1}{2}, \\ 4t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < t \leq 0, \\ 2t + \frac{1}{2}, & 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}, & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

绘制波形如图 46 所示。

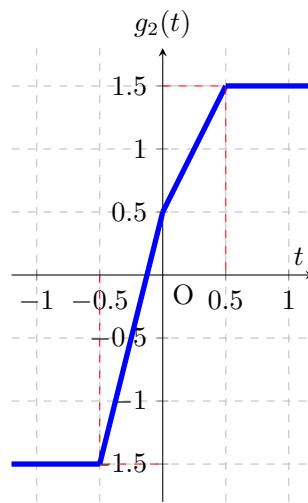


图 46: 习题 1.6.5(2) 波形

习题 1.6.6. 根据如图 47 所示信号 $f(t)$ 作答, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

- (1) 绘出 $g_1(t) = f(3t) + f(t) * \delta(t - 2)$ 的波形。
 (2) 绘出 $g_2(t) = f(2t) * f(-t)$ 的波形。

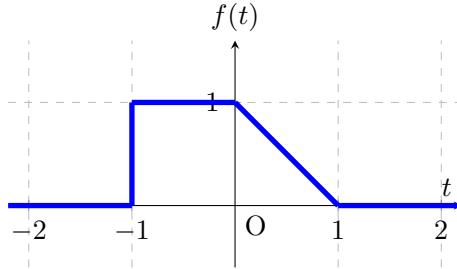


图 47: 习题 1.6.6

解. (1) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f(3t) + f(t) * \delta(t - 2) \\ &= f(3t) + f(t - 2). \end{aligned}$$

因此, $g_1(t)$ 可以看作是 $f(t)$ 沿 t 轴左右平移 2 格后, 叠加 $f(3t)$ 的波形。绘制波形如图 48 所示。

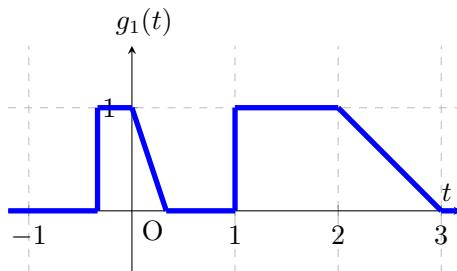


图 48: 习题 1.6.6(1) 波形

(2) 由题意可得

$$\begin{aligned} g_2(t) &= f(2t) * f(-t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(2a)f(a-t)da \\ &= \int_{t-1}^t f(2a)da + \int_t^{t+1} (1+t-a)f(2a)da. \end{aligned}$$

(a) 当 $t \leq -\frac{3}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^t 0 da + \int_t^{t+1} (1+t-a) \cdot 0 da \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) 当 $-\frac{3}{2} < t \leq -1$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^t 0 \, da + \int_t^{-1/2} (1+t-a) \cdot 0 \, da + \int_{-1/2}^{t+1} (1+t-a) \cdot 1 \, da \\ &= 0 + 0 + \left(-\frac{1}{2}a^2 + (t+1)a \right) \Big|_{a=-1/2}^{a=t+1} \\ &= \frac{1}{2}(t+1)^2 - \left(-\frac{1}{8} - \frac{t+1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

(c) 当 $-1 < t \leq -\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^t 0 \, da + \int_t^{-1/2} (1+t-a) \cdot 0 \, da + \int_{-1/2}^0 (1+t-a) \cdot 1 \, da + \int_0^{t+1} (1+t-a)(1-2a) \, da \\ &= \int_{t-1}^t 0 \, da + \int_t^{-1/2} 0 \, da + \int_{-1/2}^0 (1+t-a) \, da + \int_0^{t+1} (2a^2 - (2t+3)a + t+1) \, da \\ &= 0 + 0 + \left(-\frac{1}{2}a^2 + (t+1)a \right) \Big|_{a=-1/2}^{a=0} + \left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{2t+3}{2}a^2 + (t+1)a \right) \Big|_{a=0}^{a=t+1} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{8} - \frac{t+1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3}(t+1)^3 - \frac{2t+3}{2}(t+1)^2 + (t+1)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

(d) 当 $-\frac{1}{2} < t \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^{-1/2} 0 \, da + \int_{-1/2}^t 1 \, da + \int_t^0 (1+t-a) \cdot 1 \, da + \int_0^{1/2} (1+t-a)(1-2a) \, da + \int_{1/2}^{t+1} (1+t-a) \cdot 0 \, da \\ &= 0 + t + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}a^2 + (t+1)a \right) \Big|_{a=t}^{a=0} + \left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{2t+3}{2}a^2 + (t+1)a \right) \Big|_{a=0}^{a=1/2} + 0 \\ &= t + \frac{1}{2} + 0 - \left(\frac{1}{2}t^2 + t \right) + \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{24} \right) \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{17}{24}. \end{aligned}$$

(e) 当 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^{-1/2} 0 \, da + \int_{-1/2}^0 1 \, da + \int_0^t (1-2a) \, da + \int_t^{1/2} (1+t-a)(1-2a) \, da + \int_{1/2}^{t+1} (1+t-a) \cdot 0 \, da \\ &= 0 + \frac{1}{2} + (a-a^2) \Big|_{a=0}^{a=t} + \left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{2t+3}{2}a^2 + (t+1)a \right) \Big|_{a=t}^{a=1/2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} + t - t^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{2t+3}{8} + \frac{t+1}{2} \right) - \left(\frac{2}{3}t^3 - (2t+3)2t^2 + t(t+1) \right) \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{17}{24}. \end{aligned}$$

(f) 当 $\frac{1}{2} < t \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^0 1 \, da + \int_0^{1/2} (1-2a) \, da + \int_{1/2}^t 0 \, da + \int_t^{t+1} (1+t-a) \cdot 0 \, da \\ &= 1-t + (-a^2 + a) \Big|_{a=0}^{a=1/2} + 0 + 0 \\ &= 1-t + \frac{1}{4} \\ &= -t + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

(g) 当 $1 < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^{1/2} (1-2a) \, da + \int_{1/2}^t 0 \, da + \int_t^{t+1} (1+t-a) \cdot 0 \, da \\ &= (-a^2 + a) \Big|_{a=t-1}^{a=1/2} + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{4} - (-(t-1)^2 + (t-1)) \\ &= t^2 - 3t + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(h) 当 $t > \frac{3}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \int_{t-1}^t 0 \, da + \int_t^{+\infty} (1+t-a) \cdot 0 \, da \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此, $g_2(t)$ 的表达式为

$$g_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{8}, & -\frac{3}{2} < t \leq -1, \\ -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{19}{24}, & -1 < t \leq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{17}{24}, & -\frac{1}{2} < t \leq 0, \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{17}{24}, & 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ -t + \frac{5}{4}, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \\ t^2 - 3t + \frac{9}{4}, & 1 < t \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & t > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

绘制波形如图 49 所示。

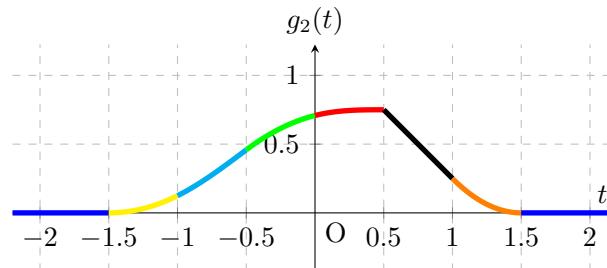


图 49: 习题 1.6.6(2) 波形

2 信号的分解

这一章主要涉及傅里叶变换 (Fourier transform)。假设我们有一个信号 $y = f(t)$, 我们希望能将其变成 $y' = F(\omega)$ 的形式。我们可以考虑将 $f(t)$ 展开为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$$

的形式, 找出 $\varphi_n(t) = e^{in\omega_i t}$ 中的常数 w_i 。这说明 $\varphi_n(t)$ 中含有关于 w_i 的信息。这样, 统计 $f(t)$ 在频率域 (ω) 上的分布, 我们就得到了 $F(\omega)$ 。

2.1 信号的分解方法

信号有多种方法可以进行分解:

- 直流分量 + 交流分量
- 偶分量 + 奇分量
- 实部分量 + 虚部分量
- 脉冲分量
- 基于正交分量的分解

定义 2.1.1 (信号的直流/交流分解). 设 $f(t)$ 为一个信号, 定义其直流分量为

$$f_{AC} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} f(t) dt,$$

其交流分量为

$$f_{AC}(t) = f(t) - f_{DC}.$$

定义 2.1.2 (信号的奇/偶分解). 设 $f(t)$ 是一个信号, 定义其奇分量为

$$f_o(t) = \text{Od}[f(t)] = \frac{f(t) - f(-t)}{2},$$

其偶分量为

$$f_e(t) = \text{Ev}[f(t)] = \frac{f(t) + f(-t)}{2}.$$

定义 2.1.3 (信号的实部/虚部分解). 设 $f(t)$ 是一个信号, 定义其实部分量为

$$f_r(t) = \text{Re}[f(t)] = \frac{f(t) + f^*(t)}{2},$$

其虚部分量为

$$f_i(t) = \text{Im}[f(t)] = \frac{f(t) - f^*(t)}{2i}.$$

定义 2.1.4 (信号的脉冲分解). 信号的脉冲分解是指, 信号可以近似地被表示为一组矩形脉冲的和的形式。设 $f(t)$ 是一个信号, 定义其在 t_1 处的矩形脉冲可以表示为如图 50 所示的函数:

$$f_{t_1}(t) = f(t_1)[u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t_1)],$$

则 $f(t)$ 可以表示为

$$f(t) \approx \sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f_{t_1}(t) = \sum_{t_1=-\infty}^{+\infty} f(t_1)[u(t-t_1) - u(t-t_1-\Delta t_1)].$$

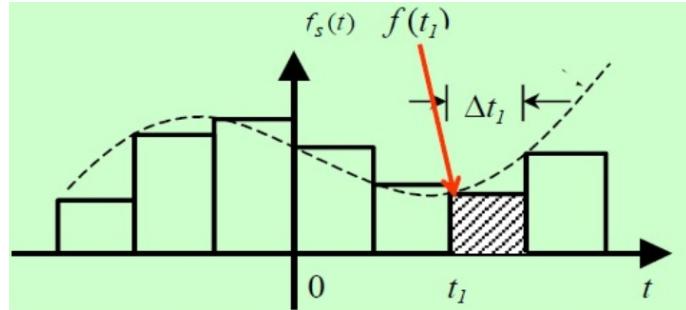


图 50: $f(t)$ 的脉冲分解

注意. 信号的直流/交流分解、奇/偶分解、实部/虚部分解的结果是唯一的，脉冲分解是结果是近似的。

2.2 函数的正交分解

2.2.1 标准正交函数集

定义 2.2.1 (平方可积函数). 令 $x(t)$ 为一实函数, 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < +\infty,$$

则称 $x(t)$ 为平方可积函数, 并记作 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 。即, $L^2(\mathbb{R})$ 表示所有平方可积函数组成的函数空间。

定义 2.2.2 (内积). 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为两个函数, 定义它们在区间 $[t_1, t_2]$ 上的内积为

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt.$$

注 2.2.3. 回忆第 1 章中正交函数与正交函数集的定义, 可以发现, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上正交, 是指它们在 $[t_1, t_2]$ 上互不含有对方的分量。函数 f_1 和 f_2 在 $[t_1, t_2]$ 上正交的充要条件是它们的内积为零。即,

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

定义 2.2.4 (标准函数集). 如果在区间 $[t_1, t_2]$ 上, 函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 满足

$$\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_i^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_i(t)\|^2 dt = 1,$$

则称此函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 为标准函数集。

定义 2.2.5 (标准正交函数集). 若正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 是一个标准函数集, 则称之为标准正交函数集。

2.2.2 函数的正交分解

定义 2.2.6 (函数的正交分解). 当函数 $f(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 区间具有连续的一阶导数和逐段连续的二阶导数时, $f(t)$ 可以用完备的正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 来表示, 即

$$f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \varphi_i(t),$$

其中 c_i 为常数, 则称此表示为函数 $f(t)$ 的正交分解。

值得注意的是, c_i 可以显式地表达为

$$c_i = \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} = \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{k_i} = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i^*(t) dt,$$

而 k_i 为 $\varphi_i(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上与自己的内积, 即

$$k_i = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_i^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_i(t)\|^2 dt.$$

定理 2.2.7 (帕斯瓦尔定理). 用一个正交函数集来准确地表示一个信号时, 这信号的能量等于相应的正交函数各分量的能量之和。即, 设 $f(t)$ 为一个信号, 将用正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 来表示, c_i, k_i 定义如上, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{+\infty} \|c_i\|^2 k_i.$$

这被称为帕斯瓦尔 (Parseval) 定理。

证明. 由于 $\{\varphi_i(t)\}$ 是一个正交函数集, 故有

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

而 $f(t)$ 的正交分解为 $f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \varphi_i(t)$, 故有

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \varphi_i(t) \right\|^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{+\infty} \|c_i \varphi_i(t)\|^2 dt + \sum_{i,j \geq 1, i \neq j} \|c_i c_j^* \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\| \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{+\infty} \|c_i\|^2 \cdot \|\varphi_i(t)\|^2 dt + 0 \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \|c_i\|^2 k_i. \end{aligned}$$

注意. 在推导的过程中, 对于内积运算, 别忘了取共轭。例如上述证明中的 c_j^* 。

2.3 信号的正交变换

2.3.1 信号的级数展开

定义 2.3.1 (信号的级数展开). 考虑使用一组函数 $\{\varphi_i(t)\}$, 将信号 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 展开成级数, 即

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \varphi_i(t),$$

这一形式称为信号 $x(t)$ 的级数展开。

通常, 展开系数 c_i 使用信号 $x(t)$ 的某种积分形式来确定。这一积分公式 (即求展开系数的公式) 称之为信号变换。

2.3.2 函数的正交变换

定义 2.3.2 (函数的正交变换). 若信号级数展开的基函数 $\{\varphi_i(t)\}$ 为标准完备正交函数集, 则积分变换

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_i^*(t) dt$$

称为信号 $x(t)$ 的正交变换, 亦称为 **Karhunen-Loeve 变换**。

注意. 如果信号为符合狄义赫利 (Dirichlet) 条件的周期函数, 则正交分解的系数 c_i 的形式会很漂亮。

2.4 特例: 周期函数的傅里叶级数

注 2.4.1. 周期信号通常可以被表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT),$$

其中 $f_0(t)$ 是一个周期为 T 的函数。

2.4.1 周期函数的正交分解

定义 2.4.2 (狄义赫利条件). 设有一信号 $f(t)$, 若它满足以下条件:

- (1) $f(t)$ 间断点的个数有限,
 - (2) $f(t)$ 极值点的个数有限,
 - (3) $f(t)$ 绝对积分数值有限,
- 则称 $f(t)$ 满足**狄义赫利条件**。

性质 2.4.3. 满足狄义赫利条件的周期函数 都可以在一组完备的正交基函数上展开成为无穷级数。

定义 2.4.4 (傅里叶级数展开). 如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集, 则周期函数展成的级数就是傅里叶级数。相应的级数通常被称为**三角形式傅里叶级数**和**指数形式傅里叶级数**。

注意. 回忆三角函数集和指数函数集的定义:

- 三角函数集: $\{1, \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \cos(2\omega_0 t + \varphi_2), \dots, \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)\}$, 即 $\{1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$, 其中 n 取遍 \mathbb{N}^+ 。
- 指数函数集: $\{e^{in\omega_0 t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 。

请注意，三角函数集中的 n 是正整数，而指数函数集中的 n 是整数。

定义 2.4.5 (三角形式傅里叶级数). 设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T_0 , 令 $\omega_0 = 2\pi/T_0$, 函数集 $\{1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$ 是一组完备的正交函数集, 其中 n 取遍 \mathbb{N}^+ 。则 $f(t)$ 可以被展开成三角函数的无穷级数形式:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t),$$

系数 a_n 和 b_n 统称为三角形式的傅里叶级数系数, 简称为傅里叶系数。

引理 2.4.6. 设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T_0 , 令 $\omega_0 = 2\pi/T_0$, 函数集 $\{1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$ 是一组完备的正交函数集, 其中 n 取遍 \mathbb{N}^+ 。则

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \begin{cases} T_0/2, & m = n \neq 0, \\ T_0, & m = n = 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \\ \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \begin{cases} T_0/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= 0. \end{aligned}$$

证明. 首先证明 $\cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)$ 的积分:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_0} (\cos((m+n)\omega_0 t) + \cos((m-n)\omega_0 t)) dt \\ &= \begin{cases} T_0/2, & m = n \neq 0, \\ T_0, & m = n = 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

然后证明 $\sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t)$ 的积分:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_0} (\cos((m-n)\omega_0 t) - \cos((m+n)\omega_0 t)) dt \\ &= \begin{cases} T_0/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

最后证明 $\cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t)$ 的积分:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_0} (\sin((m+n)\omega_0 t) - \sin((m-n)\omega_0 t)) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

命题得证。 ■

推论 2.4.7. 傅里叶系数 a_n 和 b_n 的表达式为:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

证明. 已知 $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$, 则等式两边同时在 $[t_0, t_0 + T_0]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{t_0}^{t_0+T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= T_0 \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot 0 \\ &= T_0 \cdot a_0. \end{aligned}$$

因此, 有 $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt$.

同理, 在等式左右两侧乘上 $\cos(n\omega_0 t)$ 之后再在 $[t_0, t_0 + T_0]$ 上积分, 可得 $a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$. 在等式左右两侧乘上 $\sin(n\omega_0 t)$ 之后再在 $[t_0, t_0 + T_0]$ 上积分, 可得 $b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$. 命题得证。 ■

注 2.4.8. 常用的正交函数集的基本函数, 除正弦型函数(含复指数函数)外, 还有勒让德函数(Legendre function)、贝塞尔函数(Bessel function)、沃尔什函数(Walsh function)等, 不一一列举。

定义 2.4.9 (复指数形式傅里叶级数). 由欧拉公式可以得到 $\cos(n\omega_0 t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t})/2$, 以及 $\sin(n\omega_0 t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t})/2\mathrm{i}$. 因此, 我们可以将三角函数形式的傅里叶级数改写为:

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t} + \frac{a_n + ib_n}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} \right).$$

记 $F(\cdot)$ 为一个函数, 则 a_0, a_n, b_n 可以看做是 (n, ω_0) 对应的函数值。则

$$f(t) = F(0) + \sum_{i=1}^{+\infty} (F(n\omega_0) + F(-n\omega_0))$$

再记 $F_n = F(n\omega_0)$, 则可将 $f(t)$ 表示为复指数形式的傅里叶级数:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t},$$

其中 $F_n = (a_n - ib_n)/2$ 为复指数形式的傅里叶级数系数。

性质 2.4.10. 复指数形式傅里叶级数的系数 F_n 的表达式为:

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t} dt.$$

证明. (方法一)

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - \frac{i}{2} \cdot \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)(\cos(n\omega_0 t) - i \sin(n\omega_0 t)) dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)e^{-in\omega_0 t} dt.
 \end{aligned}$$

命题得证。 ■

证明. (方法二) 由级数展开的定义, 在函数集 $\{e^{in\omega_0 t}\}$ 上展开, 有

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \\
 &= \frac{1}{k_n} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)e^{-in\omega_0 t} dt.
 \end{aligned}$$

而 k_n 可以计算如下:

$$\begin{aligned}
 k_n &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{in\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt \\
 &= T_0.
 \end{aligned}$$

因此 $F_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)e^{-in\omega_0 t} dt$. ■

性质 2.4.11. 对偶信号序列的傅里叶级数而言, F_n 是偶对称的实数序列, 对奇信号序列的傅里叶级数而言, F_n 是奇对称的纯虚序列。

证明. 考虑关系式 $F_n = (a_n - ib_n)/2$:

- 对于偶信号序列而言, $a_n \neq 0, b_n = 0$, 所以 F_n 只有直流分量和余弦项。
- 对于奇信号序列而言, $a_n = 0, b_n \neq 0$, 所以 F_n 只有正弦项。

命题得证。 ■

推论 2.4.12 (帕斯瓦尔定理的推论). 周期信号的平均功率等于傅里叶级数展开各谐波分量有效值的平方和。也就是说, 时域和频域的能量守恒。

证明. 由帕斯瓦尔定理知,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \|f(t)\|^2 dt &= \|a_0\|^2 \cdot k_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \|a_i\|^2 k_{\cos,i} + \sum_{i=1}^{+\infty} \|b_i\|^2 k_{\sin,i} \\
 &= T_0 \cdot \|a_0\|^2 + \frac{T_0}{2} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} (\|a_i\|^2 + \|b_i\|^2).
 \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \|f(t)\|^2 dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \left(T_0 \cdot \|a_0\|^2 + \frac{T_0}{2} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} (\|a_i\|^2 + \|b_i\|^2) \right) \\
 &= \|a_0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} (\|a_i\|^2 + \|b_i\|^2) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|F_n\|^2.
 \end{aligned}$$

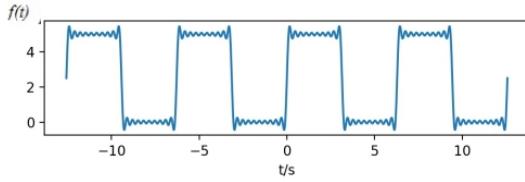
命题得证。 ■

2.4.2 周期信号的傅里叶级数

定义 2.4.13. 由于 $F_n \in \mathbb{C}$ ，所以它谱线并不方便在二维平面上表示，因此 F_n 可以从两个角度来表示：一个是 $|F_n|$ ，即为幅度谱，另一个是 $\varphi_n = \arg(F_n)$ ，即为相位谱。

周期信号的傅里叶级数可视化如图 51 所示。

信号 $f(t)$ 举例：



该信号傅里叶频谱的几何直观：

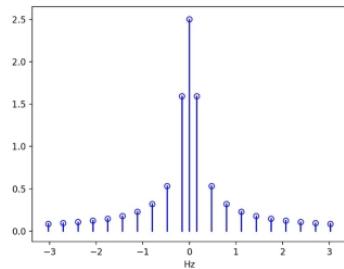


图 51: 周期信号的傅里叶级数

性质 2.4.14 (周期信号的傅里叶频谱特点). 周期信号的傅里叶频谱有以下特点：

- 仅在一些离散的频率点 $n\omega_0, n \in \mathbb{Z}$ 上有值。
- 离散间隔为 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ 。
- F_n 是双边谱，即 $F_n = F_{-n}$ ，因此正负频率的频谱幅度相加才是实际幅度。
- 信号的功率为 $\sum_{-\infty}^{+\infty} \|F_n\|^2$ 。

例 2.4.15 (周期矩形脉冲信号的傅里叶级数). 设周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲宽度为 τ ，脉冲幅度为 E ，重复周期为 T_0 。图像如图 52 所示。

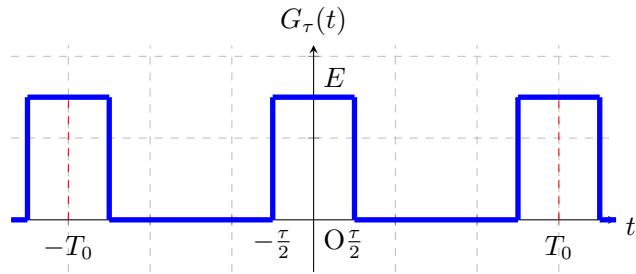


图 52: 周期矩形脉冲信号

则其在频域上的图像如图 53 所示。

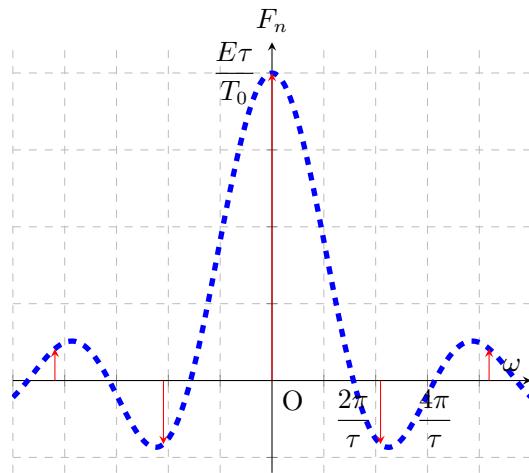


图 53: 周期矩形脉冲信号的频谱

- 谱线包络线为 Sa 函数。
- 频谱谱线的间隔为 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 。
- 谱线包络线过零点位置为 $\omega_k = 2k\pi/\tau$, 其中 $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$ 。

注意. 这里一般不考虑 $\omega_{-k}, k > 0$ 的情况。

定理 2.4.16. 周期为 T_0 , 脉冲宽度为 τ , 脉冲幅度为 E 的周期矩形脉冲信号, 谱线包络线则为

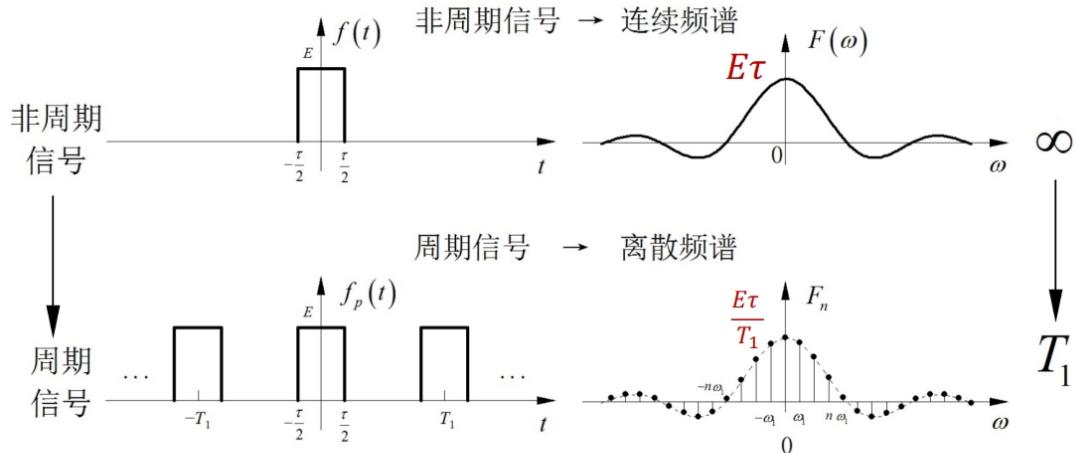
$$\frac{E\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right).$$

证明.

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cdot e^{-in\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{E}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{E}{T_0} \cdot \frac{1}{-in\omega_0} \cdot (e^{-in\omega_0 t}) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
 &= \frac{E}{T_0} \cdot \frac{1}{-in\omega_0} \cdot (e^{-in\omega_0 \tau/2} - e^{in\omega_0 \tau/2}) \\
 &= \frac{E}{T_0} \cdot \frac{1}{-in\omega_0} \cdot (-2i \sin(\frac{n\omega_0 \tau}{2})) \\
 &= \frac{E\tau}{T_0} \sin(n\omega_0 \tau/2) \\
 &= \frac{E\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right).
 \end{aligned}$$

注 2.4.17. 非周期信号，在频率域上则为连续频谱；周期信号，在频率域上则为离散频谱。它们之间的转换关系，可以由下图 54 描述。

• 单位矩形脉冲信号的FS



• 周期矩形脉冲信号的FS

图 54: 周期信号与非周期信号的频谱

性质 2.4.18 (周期矩形脉冲信号的特点). 在频域，能量主要集中在第一个零点以内！

实际上，在允许一定失真的条件下，可以要求一个通信系统只把 $|\omega| \leq 2\pi/\tau$ 频率范围内的各个频率分量传送过去，而舍弃 $|\omega| \geq 2\pi/\tau$ 的分量。

常把 $-2\pi/\tau \leq \omega \leq 2\pi/\tau$ 这段频率范围成为矩形信号的频带宽度，简称带宽。带宽只和脉冲的脉宽有关，而与脉高和周期均无关。

性质 2.4.19 (周期信号的频谱谱线的特点). 周期信号的频谱谱线的间隔为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

周期信号的频谱谱线的长度为 $|F_n|$, 其中

$$F_n = F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

注意. 由于复指数完备正交函数集中含有正负项, 故周期矩形脉冲信号的谱线为双边谱。对于 $n\omega_0$ 这一频率的频谱而言, 频谱幅度为

$$|F_n| + |F_{-n}| = 2|F_n| = \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2).$$

一定要注意, 它并不是 $|F_n|$ 。

习题 2.4.20. 已知 $f(t) = \sin t \cos 2t + 5 \cos 3t \sin 4t$, 求该函数的傅里叶级数。

解. 由三角函数的和差化积公式, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} (\sin 3t - \sin t) + \frac{5}{2} (\sin 7t + \sin t) \\ &= 2 \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t + \frac{5}{2} \sin 7t. \end{aligned}$$

此即为该函数的傅里叶级数。

2.5 非周期信号的傅里叶变换

2.5.1 非周期信号的傅里叶级数

我们已经掌握了周期信号的傅里叶展开, 那么如何处理非周期信号的傅里叶展开呢? 非周期信号可以看成是周期 T_0 趋于无限大的周期信号, 因此我们可以将非周期信号的傅里叶展开看成是周期信号的极限情况。

性质 2.5.1 (非周期信号频谱性质). 非周期信号的谱线间隔趋于 0, 变成了连续频谱, 谱线长度趋于 0。

证明. 当 $T_0 \rightarrow +\infty$ 时, $\omega_0 = 2\pi/T_0 \rightarrow 0$, 谱线间距变密直至为 0。 ω 变为连续域。此时

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \rightarrow 0,$$

谱线高度变矮直至为 0。 ■

注 2.5.2. 从物理意义着手: 既然是信号, 那么它必定会有能量; 无论怎样, 能量一定是守恒的。因此, 频率域一定会以某种形式存在。

从数学角度思考: 无限多无穷小量的和, 在极限意义下, 可能等于一个有限值。谱线高度变矮直至为 0, 只是说每个分量变成了无穷小量, 但没有说总和 (信号) 为 0。

2.5.2 非周期信号的傅里叶变换

有没有更优的非周期信号傅里叶频谱的定义方式？有，那就是傅里叶变换。

定义 2.5.3 (非周期信号的傅里叶变换). 设 $f(t)$ 是一个非周期信号，其傅里叶变换定义为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

反之，想要恢复时域信号， $f(t)$ 可以通过逆变换得到：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

这里的 \mathcal{F} 和 \mathcal{F}^{-1} 分别称为傅里叶变换和傅里叶逆变换。

注 2.5.4. 傅里叶变换存在的充分条件：时域信号 $f(t)$ 绝对可积。

定义 2.5.5 (傅里叶频谱). 信号的傅里叶变换一般为复值函数，写成

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\phi(\omega)}. \quad (3)$$

其中， $|F(\omega)|$ 称为幅度频谱密度函数， $\phi(\omega)$ 称为相位频谱密度函数。

例 2.5.6. 设 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = R(\omega) + iX(\omega)$ ，其中 $R(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 分别是 $F(\omega)$ 的实部和虚部。则：

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \\ X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

可以发现：

- $R(\omega) = R(-\omega)$ ，频谱实部是偶对称的。
- $X(\omega) = -X(-\omega)$ ，频谱虚部是奇对称的。
- $\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$ ，频谱相位是奇对称的。

性质 2.5.7 (傅里叶变换的性质). 傅里叶变换具有以下性质：

- (唯一性) 如果两个函数的傅里叶变换（或逆变换）相等，那么这两个函数必定相等。
- (可逆性) $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \iff \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$ 。

习题 2.5.8. 写出函数

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

的傅里叶变换，其中 $a > 0$ 。

解.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\
 &= \left. \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right|_0^{+\infty} \\
 &= 0 - \frac{1}{-(a+i\omega)} \\
 &= \frac{1}{a+i\omega}.
 \end{aligned}$$

因此, $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}.$$

习题 2.5.9. 已知

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \tau, \\ \tau, & \tau \leq t \leq 2\tau, \\ 0, & t < 0 \text{ 或 } t > 2\tau, \end{cases}$$

求 $f(t)$ 的傅里叶变换, 其中 $\tau > 0$ 。

解.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\tau} te^{-i\omega t} dt + \int_{\tau}^{2\tau} \tau e^{-i\omega t} dt \\
 &= \left. \frac{(1+i\omega t)e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right|_0^{\tau} + \left. \frac{\tau e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{\tau}^{2\tau} \\
 &= \frac{1+i\omega\tau}{\omega^2} e^{-i\omega\tau} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{\tau e^{-2i\omega\tau}}{-i\omega} - \frac{\tau e^{-i\omega\tau}}{-i\omega} \\
 &= \frac{1+i\omega\tau}{\omega^2} e^{-i\omega\tau} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{i\tau}{\omega} e^{-2i\omega\tau} - \frac{i\tau}{\omega} e^{-i\omega\tau} \\
 &= \frac{i\tau}{\omega} e^{-2i\omega\tau} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega\tau} - \frac{1}{\omega^2}.
 \end{aligned}$$

因此, $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{i\tau}{\omega} e^{-2i\omega\tau} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega\tau} - \frac{1}{\omega^2}.$$

2.6 梳理：傅里叶变换和傅里叶级数之间的关系

	FS	FT
被分析对象	周期信号	非周期信号
频率定义域	离散频率，谐波频率处	连续频率，整个频率轴
函数值意义	频率分量的数值	频率分量的密度值

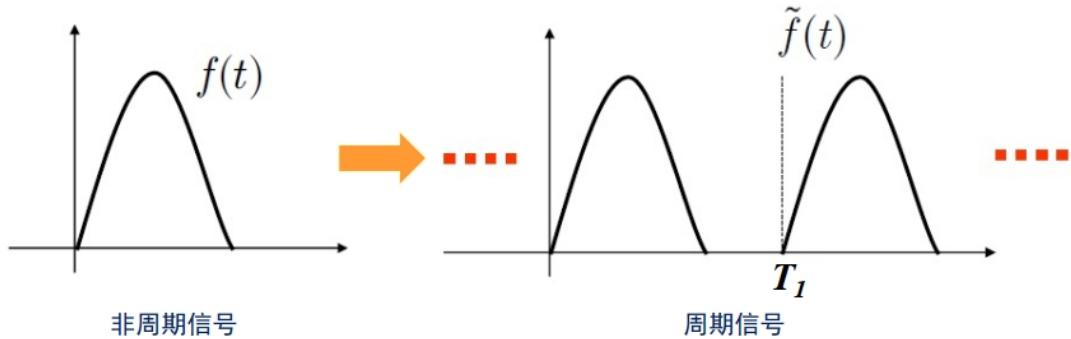


图 55: FS 与 FT 的关系

后续讨论均基于以上图 55。右侧的周期信号 $\tilde{f}(t)$ 是左侧非周期信号 $f(t)$ 以 T_1 为周期重复的结果。

2.6.1 现象一：从 FS 到 FT

定理 2.6.1 (FS 与 FT 的关系). 设有一个定义在 $[0, T_1]$ 上的非周期信号 $f(t)$, 将其以周期 T_1 重复, 得到周期信号 $\tilde{f}(t)$ 。则 $\tilde{f}(t)$ 的 FS 系数 F_n 与 $f(t)$ 的 FT $F(\omega)$ 之间有如下关系:

$$F_n = \frac{F(n\omega_1)}{T_1},$$

其中 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 。

证明. 由于

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-in\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt, \end{aligned}$$

且 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$, 因此

$$F_n = \frac{F(n\omega_1)}{T_1}.$$

命题得证。 ■

以上定理说明，周期信号的第 n 个谐波分量系数 F_n ，对应频率为 $n\omega_1$ ，系数值等于非周期信号 $f(t)$ 的频谱密度函数 $F(\omega)$ 在频率 $n\omega_1$ 处的函数值除以 T 。

若以不同的周期对信号 $f(t)$ 进行周期重复，则对这些不同的周期信号，它们 FS 系数都与信号 $f(t)$ 的 FT 有关！

定义 2.6.2 (谐波). 谐波是指频率为基波频率的整数倍的辅波或分量。

例 2.6.3 (准周期信号的 FT). 以语音的浊音（元音）和清音（部分辅音）为例。元音都是浊音，是准周期信号，一些辅音（除 m、n、l、r 外）是清音，是非周期信号。对这两种信号进行频谱分析，可以得到如下结果：

- 辅音

辅音的频率特征-FT变换

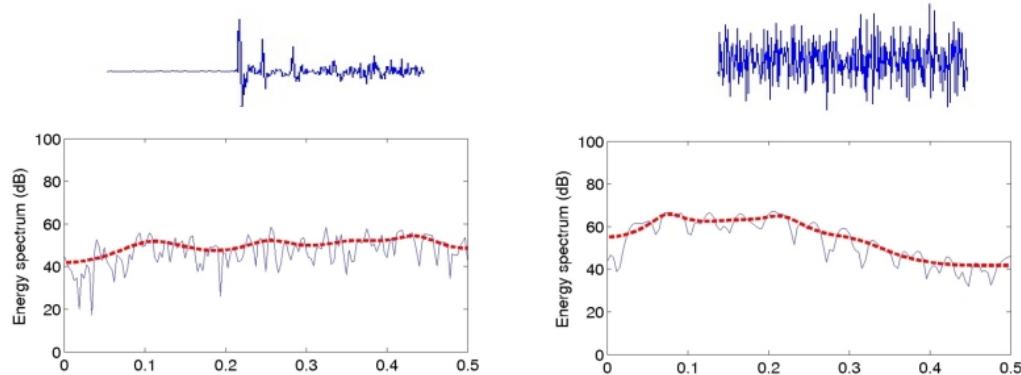


图 56: 辅音信号的频谱

- 辅音无谐波结构
- 几乎平坦的谱包络，无明显的共振峰
- 元音

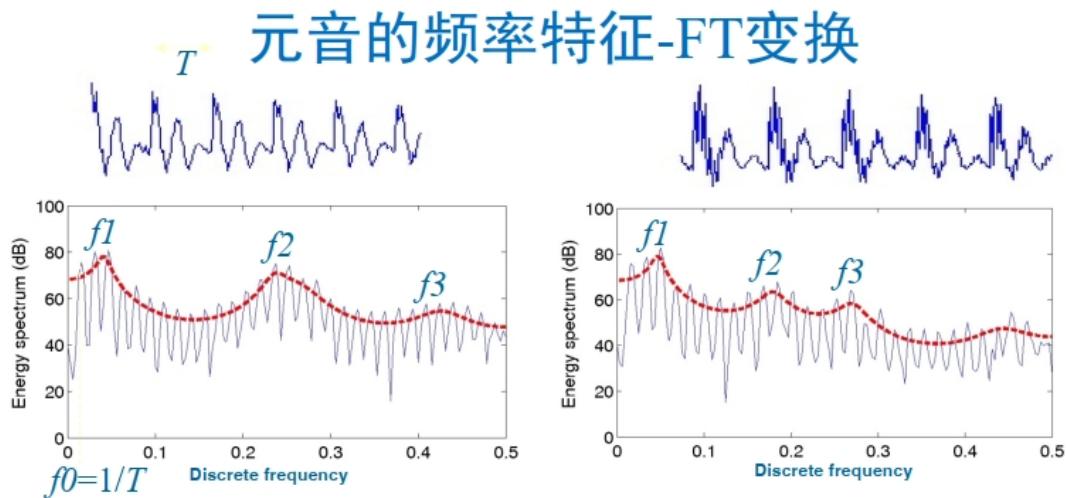


图 57: 元音信号的频谱

- 元音可以清楚地看到信号的周期性
- 基频 $f_0 = 1/T$
- 具有谐波结构
- 谱包络有明显的共振峰

2.6.2 现象二：FS 与非周期信号

FS 是函数正交分解的一种，因此它也可用于对非周期信号在特定区间上的一段进行展开（分解）。若 $f(t)$ 是非周期信号，则分解区间被限制为 $(t_0, t_0 + T_1)$ ，即 FS 仅在区间 $(t_0, t_0 + T_1)$ 内成立：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{in\omega_1 t}, \quad t \in (t_0, t_0 + T_1),$$

其中 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 。

2.6.3 现象三：FT 与周期信号

定理 2.6.4. 求证：

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

（提示：傅里叶变换无法求解，试试傅里叶逆变换。）

证明. 由于

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \\ &= e^{i\omega_0 t}, \end{aligned}$$

两边同时进行傅里叶变换，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] &= \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)]] \\ &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

命题得证。 ■

例 2.6.5 (余弦信号与正弦信号的 FT). 利用上述结论，我们可以求解余弦信号和正弦信号的 FT：

- 余弦信号的 FT

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right] \\ &= \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)). \end{aligned}$$

- 正弦信号的 FT

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right] \\ &= i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)). \end{aligned}$$

2.7 实例：典型非周期信号的傅里叶变换

2.7.1 矩形脉冲信号

定理 2.7.1. 设有一个脉高为 E , 脉宽为 τ 的矩形脉冲信号 $f(t) = EG_\tau(t)$, 则其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[EG_\tau(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right),$$

其幅度谱为 $|F(\omega)| = E\tau|\text{Sa}(\omega\tau/2)|$ 。 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的图像分别如图 58a 和 58b 所示。

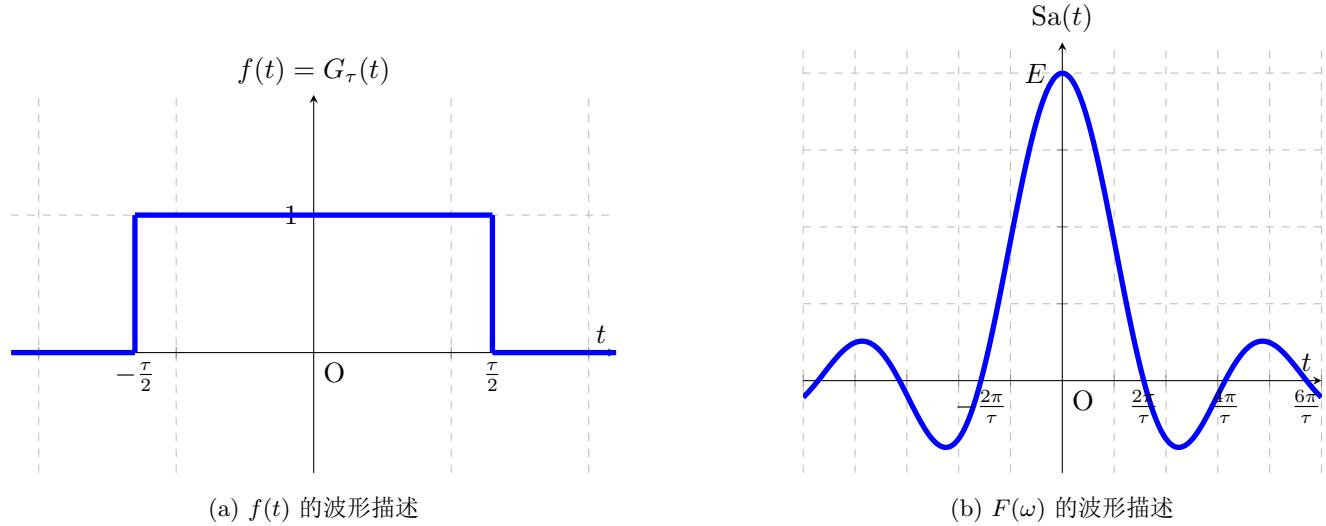


图 58: 矩形脉冲信号及其傅里叶变换

证明. 由傅里叶变换的定义, 有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} EG_\tau(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= E \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= E \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{E}{-i\omega} (e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}) \\ &= \frac{E \cdot (-2 \sin(\omega\tau/2))}{-i\omega} \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

命题得证。 ■

性质 2.7.2 (矩形脉冲信号的 FT 的特点). 矩形脉冲信号的 FT 具有以下特点:

- FT 为 Sa 函数, 原点处函数值为矩形脉冲的面积 $E\tau$ 。
- FT 的零点为 $\omega = 2k\pi/\tau (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$ 。
- 频域的能量集中在第一个过零点区间, $[-2\pi/\tau, 2\pi/\tau]$ 。
- 带宽为 $B_\omega = 4\pi/\tau$, 只与脉宽有关, 与脉高无关。

2.7.2 冲激信号

定理 2.7.3. 设有一个冲激信号 $f(t) = E\delta(t)$, 则其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[E\delta(t)] = E.$$

证明. 由傅里叶变换的定义, 有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E\delta(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= Ee^{-i\omega \cdot 0} \\ &= E. \end{aligned}$$

命题得证。 ■

注 2.7.4. 上述结论也可以由矩形脉冲信号的极限情况得到。

当脉宽 τ 逐渐变窄时, 其频谱必然展宽。可以想象: $\delta(t)$ 积分为 1, 因此需要 $E\tau = 1$ 。若 $\tau \rightarrow 0$, 这时矩形脉冲就变成了 $\delta(t)$, 其相应频谱 $F(\omega)$ 必定等于常数 1。

定义 2.7.5 (均匀谱). 冲激函数的频谱等于常数, 即在整个频率范围内频谱是均匀分布的。

显然, 在时域中变化异常剧烈的冲激函数中包含了幅度相等的所有频率分布。因此, 这种频谱常被称为均匀谱, 或白色谱。

定理 2.7.6 (常数的傅里叶变换). 常数信号 $f(t) = E$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[E] = 2\pi \cdot E\delta(\omega).$$

特别地, $\mathcal{F}[1/2\pi] = \delta(\omega)$, $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$ 。这说明, 直流信号的傅里叶频谱是位于零点的冲激函数。

反之, 冲激信号 $F(\omega) = E\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换为

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[E\delta(\omega)] = \frac{E}{2\pi}.$$

这说明, 频谱零点处的冲激函数来自信号的直流分量。

证明. 由于 $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, 故当 $\omega_0 = 0$ 时, 有

$$F[1] = 2\pi\delta(\omega).$$

又因为傅里叶变换是线性的, 故有

$$F[E] = E \cdot F[1] = 2\pi \cdot E\delta(\omega).$$

反之, 由傅里叶逆变换的定义, 有

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[E\delta(\omega)] = \frac{E}{2\pi}.$$

命题得证。 ■

2.8 傅里叶变换的性质

2.8.1 FT 是线性运算

性质 2.8.1. 设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是两个信号, a 和 b 是两个常数, 且 $F(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分别是 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的 FT, 则有

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega).$$

这说明, 对一个信号求 FT, 等于对其分量(分信号)求 FT 然后再组合。

注 2.8.2. FT 是线性运算, 是因为 FT 既有齐次性, 又有叠加性。齐次性是指 $\mathcal{F}[af(t)] = a\mathcal{F}[f(t)]$, 叠加性是指 $\mathcal{F}[f(t) + g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] + \mathcal{F}[g(t)]$ 。

2.8.2 FT 的反褶和共轭的性质

性质 2.8.3. 设信号 $f(t)$ 的 FT 为 $F(\omega)$, 则进行反褶和共轭操作后的信号的 FT 对应关系如下:

操作	时域	频域
反褶	$f(-t)$	$F(-\omega)$
共轭	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
反褶且共轭	$f^*(-t)$	$F^*(\omega)$

2.8.3 傅里叶变换及其逆变换的对偶性

注意到 FT 和 IFT 在形式上极为相似:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

所以, 我们可以尝试从这个切入点入手, 来研究 FT 和 IFT 之间的关系。

引理 2.8.4 (FT 和 IFT 的变换核之间的关系). FT 与 IFT 的变换核函数是共轭对称的, 即

$$(e^{-i\omega t})^* = e^{i\omega t}, \quad (e^{i\omega t})^* = e^{-i\omega t}.$$

证明. 由共轭的定义, 我们有

$$\begin{aligned} (e^{-i\omega t})^* &= (\cos \omega t - i \sin \omega t)^* = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}, \\ (e^{i\omega t})^* &= (\cos \omega t + i \sin \omega t)^* = \cos \omega t - i \sin \omega t = e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

命题得证。 ■

这说明, FT 和 IFT 的变换核之间是共轭对称的。因此, IFT 可以由 FT 来完成:

定理 2.8.5. 设 $f(t)$ 是一个信号, 其 FT 为 $F(\omega)$, 则有

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \{\mathcal{F}_\omega[F^*(\omega)]\}^*.$$

其中 $\mathcal{F}_\omega(\cdot)$ 表示以 ω 为自变量求 FT, 结果为 t 的函数。

证明. 根据 IFT 的定义, 我们有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

由于 FT 和 IFT 的变换核之间是共轭对称的, 我们有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) (e^{-i\omega t})^* d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\}^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \{\mathcal{F}_\omega[F^*(\omega)]\}^*. \end{aligned}$$

命题得证。 ■

性质 2.8.6. 设 $f(t)$ 是一个信号, 其 FT 为 $F(\omega)$, 则有

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega).$$

注意, 这里的 $F(t)$ 的自变量为 t , 而 $f(-\omega)$ 的自变量为 ω 。

证明. 由傅里叶逆变换的定义, 有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

令 $t = -\omega$, 且把积分哑元换为 t , 则有

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\mathcal{F}[F(t)]}{2\pi}.$$

命题得证。 ■

推论 2.8.7. 当 $f(t)$ 为偶函数或奇函数时, FT 的对应关系为:

- 若 $f(t)$ 是偶函数, 则 $F(t) \iff 2\pi f(\omega)$ 。
- 若 $f(t)$ 为奇函数, 则 $F(t) \iff -2\pi f(\omega)$ 。

2.8.4 FT 的尺度变换特性

性质 2.8.8. 设 $f(t)$ 是一个信号, 其 FT 为 $F(\omega)$, 则有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

这说明, 信号的压扩变换对函数的影响是相反的, 同时幅度也会变化。

证明. 根据 FT 的定义, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt.$$

令 $u = at$, 则有 $du = adt$, 且 $t = u/a$, 则有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

带绝对值是因为在 $a < 0$ 的情况下, 积分上下限会发生变化。命题得证。 ■

2.8.5 FT 图像的面积

性质 2.8.9. 当 $f(t), F(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分存在时, 有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega.$$

这说明, $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 所覆盖的面积, 分别等于 $F(0)$ 和 $2\pi f(0)$ 。

证明. 根据 FT 的定义, 有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i \cdot 0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i \cdot 0 \omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega.$$

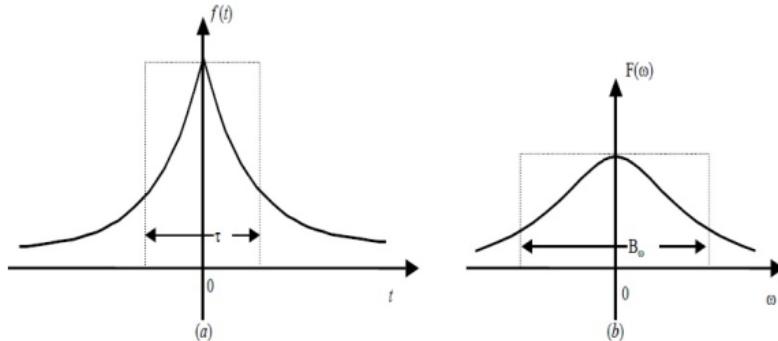
命题得证。 ■

定义 2.8.10 (等效脉宽与等效带宽). 不妨设 $f(0)$ 与 $F(0)$ 分别为各自函数的最大值, 则定义信号的等效脉宽与等效带宽为

$$\tau = \frac{F(0)}{f(0)},$$

$$B_f = \frac{f(0)}{F(0)}.$$

例 2.8.11. 如图 59 所示为偶双边指数信号 $f(t) = e^{-a|t|}$ 及其频谱。图中标明了等效脉宽 τ 与等效带宽 B_ω 。



偶双边指数信号 $f(t) = e^{-a|t|}$ 频谱 $F(\omega) = 2a/(a^2 + \omega^2)$

图 59: 等效脉宽与等效带宽

2.8.6 FT 的时移特性

性质 2.8.12. 设信号 $f(t)$ 的 FT 为 $F(\omega)$, 则有

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-i\omega t_0}.$$

时域延时, 频域则是相位变化, 不影响幅度谱, 只在相位谱上叠加一个线性相位。

与尺度变换结合，可以得到 $f(at - t_0)$ 的 FT 为

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\omega t_0}.$$

因为 $f(at - t_0)$ 可以看做是 $f(t)$ 先向右平移 t_0/a 个单位，再压扩 a 倍得到的。

注 2.8.13. 人耳通过相位信息差异，可以判定声音的远近变化。但声音信号的相位变化不影响内容上的理解。

2.8.7 FT 的频移特性

性质 2.8.14. 设信号 $f(t)$ 的 FT 为 $F(\omega)$ ，则有

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0).$$

这说明，频域上的频移会导致时域上的相位变化。相位增加，频谱右移。

与尺度变换结合，可以得到当 $a \neq 0$ 时， $\frac{1}{|a|} e^{i\omega_0 t/a} f(t/a)$ 的 FT 为

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{|a|} e^{i\omega_0 t/a} f(t/a)\right] = F(a\omega - \omega_0).$$

注 2.8.15. 理论上，时域信号乘以一个复指数信号，原信号的频谱将被搬移到复指数信号的频率处。实际应用中，利用欧拉公式，通过乘以正弦或余弦信号，也可以达到频谱搬移的目的。

本质上，这都是因为 $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 。

注意. 有关 FT 的波形运算的小结如下，设 $f(t) \iff F(\omega)$:

- 反褶: $f(-t) \iff F(-\omega)$ 。
- 平移: $f(t - t_0) \iff F(\omega)e^{-i\omega t_0}$, $F(\omega - \omega_0) \iff f(t)e^{i\omega_0 t}$ 。

即，时域延时，幅度谱不变；频谱搬移，通过在时域乘以复指数信号实现。

2.8.8 FT 的微分与积分特性

性质 2.8.16 (微分特性). 设 $f(t)$ 是一个信号，其 FT 为 $F(\omega)$ ，则有

- (时域微分)

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = i\omega F(\omega)$$

- (频域微分)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{d}{dt} F(\omega)\right] = -it f(t)$$

性质 2.8.17 (积分特性). 设 $f(t)$ 是一个信号，其 FT 为 $F(\omega)$ ，则有

- (时域积分)

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$$

- (频域积分)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda) d\lambda\right] = \frac{f(t)}{-it} + \pi f(0) \delta(t)$$

2.8.9 FT 的卷积特性

定理 2.8.18 (时域卷积定理). 设有信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 则有

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2(t)].$$

证明. 根据卷积的定义, 有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

对上式两边同时求 FT, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega(t+\tau)} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \right] \\ &= \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2(t)]. \end{aligned}$$

命题得证。 ■

定理 2.8.19 (频域卷积定理). 设有信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 则有

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)].$$

证明. 不妨设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的 FT 分别为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 。根据卷积的定义, 有

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) F_2(\omega - \eta) d\eta.$$

对上式两边同时求 IFT, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) F_2(\omega - \eta) d\eta \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - \eta) e^{i\omega t} d\omega \right] d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{i(\omega+\eta)t} d\omega \right] d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] e^{i\eta t} d\eta \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\eta) e^{i\eta t} d\eta \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)] \cdot \mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)] \\ &= 2\pi f_1(t) \cdot f_2(t). \end{aligned}$$

对上式两边同时求 FT，有

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \mathcal{F}[2\pi f_1(t) \cdot f_2(t)],$$

即

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

命题得证。 ■

例 2.8.20. 若信号在截取时，是使用“与矩形脉冲函数”相乘来实现的，即，设有信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t) = G_\tau(t)$ ，则

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1(t)] * \tau \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right).$$

矩形信号边缘的跳变将引起原信号的频谱会产生畸变。

2.8.10 FT 时域上的相关性定理

定理 2.8.21. 设信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的 FT 分别为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ ，则有

$$\mathcal{F}[R_{f_1, f_2}(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}^*[f_2(t)].$$

特别地，若 $f_2(t)$ 为实偶函数，则 $\mathcal{F}[R_{f_1, f_2}(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$ 。

自相关的 FT 定义为

$$\mathcal{F}[R_f(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}^*[f(t)] = \|\mathcal{F}[f(t)]\|^2.$$

这说明信号自相关函数与其幅度谱平方，是一对傅里叶变换对。

证明. 由相关运算和 FT 的时域卷积定理，以及 FT 的共轭性质，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R_{f_1, f_2}(t)] &= \mathcal{F}[f_1(t) * f_2^*(-t)] \\ &= \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2^*(-t)] \\ &= \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}^*[f_2(t)]. \end{aligned}$$

命题得证。 ■

2.8.11 FT 的帕斯瓦尔定理

定理 2.8.22. 设 $f(t)$ 是一个时域上的信号，其傅里叶变换为 $F(\omega)$ ，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(\omega)\|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(2\pi f)\|^2 df.$$

这说明，信号的能量在时域和频域上是守恒的。

2.9 采样与量化的概念

定义 2.9.1 (采样). 把模拟信号变成数字信号时，每隔一个时间间隔在模拟信号波形上抽取一个幅度值，这称之为采样。这是在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程。

采样的时间间隔称为采样周期 T_s ，其倒数称为采样频率 $f_s = 1/T_s$ 。 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 称为采样角频率。

注 2.9.2. 在不发生混淆的情况下， ω_s 可简称为采样频率。

2.9.1 时域采样和幅度量化

时域采样和幅度量化是数字信号处理的两个基本步骤，如图 60a、60b 和 60c 所示。

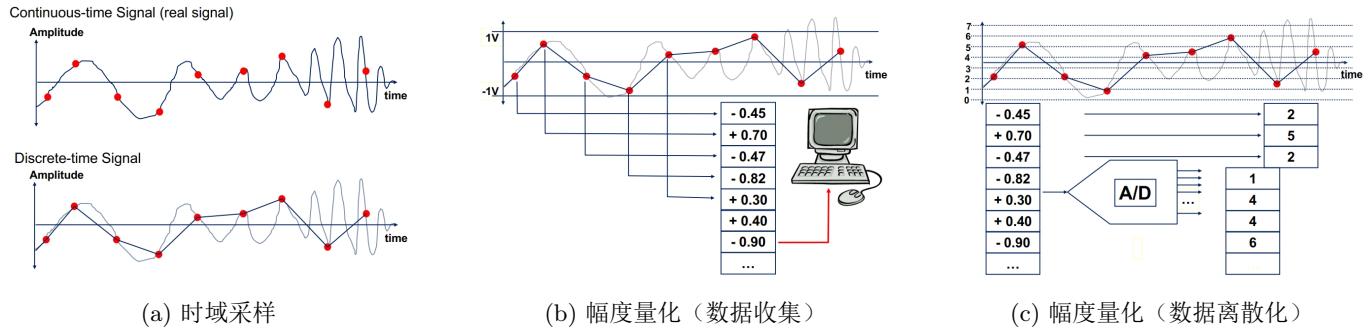


图 60: 时域采样和幅度量化

2.9.2 采样的频率与分辨率

采样的频率与分辨率会影响到信号的还原质量。

- 采样频率升高，信号的还原质量会提高；但需要更大的存储空间（带宽）和成本。
- 采样分辨率升高，也能提高信号的还原质量；但需要更大的存储空间（精度）和成本。

如图 61a 和 61b 所示。

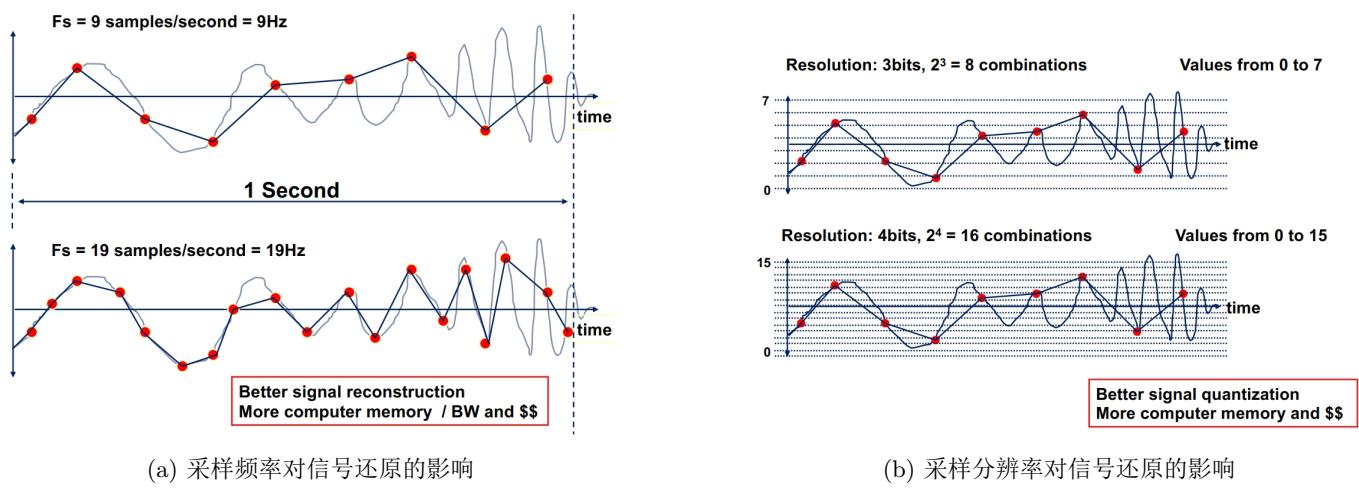


图 61: 采样频率与分辨率

2.9.3 采样的应用

在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如照片、屏幕的画面等等。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号。

例 2.9.3 (CCD 芯片的光显微图). CCD 芯片用 VLSI 技术制造。被分为许多微小区，当光成像在 CCD 芯片上时，就在这些空间离散的像素点上被采样，而生成了离散空间图像信号，如图 62 所示。

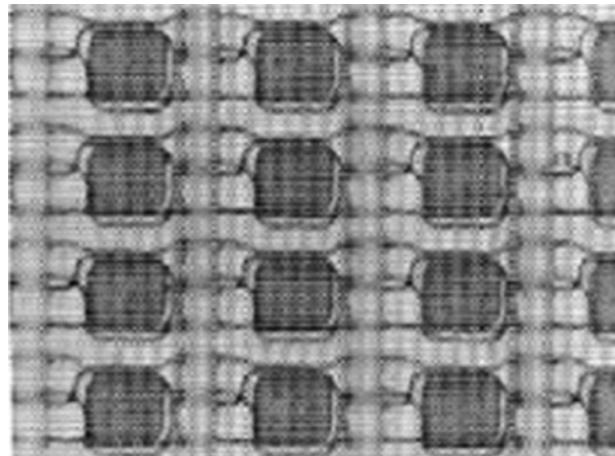


图 62: CCD 芯片的光显微图

2.10 采样与采样定理

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系时，我们最关心什么？

- 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息？
- 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号？

2.10.1 采样的数学模型

性质 2.10.1. 在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

例 2.10.2. 如图 63 所示，三个信号在 $t = -3T, -2T, -T, 0, T, 2T, 3T$ 处取样相等，但 $x_1(t) \neq x_2(t) \neq x_3(t)$ 。

对一维连续时间信号采样的例子：

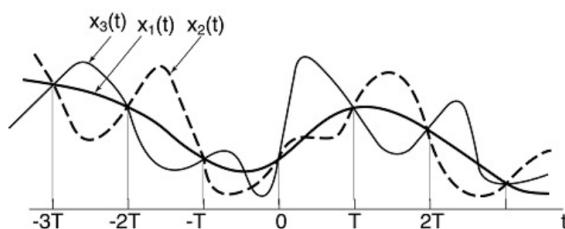


图 63: 采样不能唯一地代表原来的连续时间信号

定义 2.10.3. 采样的数学模型如图 64 所示，其中 $p(t)$ 是采样脉冲， $P(i\omega)$ 是 $p(t)$ 的傅里叶变换。

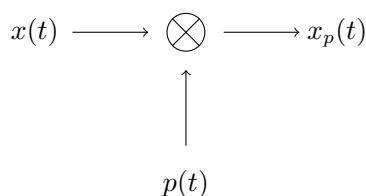


图 64: 采样的数学模型

- 在时域上, $x_p(t) = x(t)p(t)$ 。
- 在频域上, $X_p(i\omega) = \frac{1}{2\pi} X(i\omega) * P(i\omega)$ 。

当采样为冲激串采样 (理想采样) 时,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s),$$

$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s),$$

其中 T_s 为采样间隔。

例 2.10.4. 如图 65 所示, 为利用冲激串进行采样的信号 $x(t)$ 、 $p(t)$ 与 $x_p(t)$, 其中采样间隔 $T_s = T$ 。

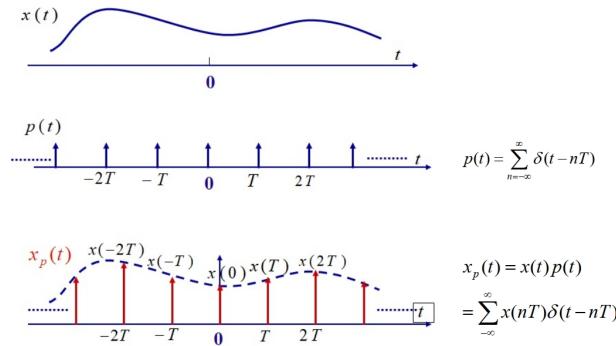


图 65: 冲激串采样的信号 $x(t)$ 、 $p(t)$ 与 $x_p(t)$

性质 2.10.5. 冲激串信号 $p(t)$ 的傅里叶频谱 $\mathcal{F}[p(t)] = P(i\omega)$ 为

$$P(i\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T_s}n).$$

证明. ■

性质 2.10.6. 冲激串采样后的信号 $x_p(t)$ 的频谱 $\mathcal{F}[x_p(t)] = X_p(i\omega)$ 为

$$X_p(i\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(i(\omega - k\omega_s)).$$

证明. 由采样的数学模型知

$$\begin{aligned} X_p(i\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(i\omega) * P(i\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(i\omega) * \left(\frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T_s}k) \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(i\omega) * \delta(\omega - \frac{2\pi}{T_s}k) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(i(\omega - k\omega_s)), \end{aligned}$$

其中 $\omega_s = 2\pi/T_s$, 为采样频率。 ■

注 2.10.7. 由此可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以 ω_s 为周期进行延拓。

例 2.10.8. 如图 66 所示，为利用冲激串进行采样的信号 $X(i\omega)$ 、 $P(i\omega)$ 与 $X_p(i\omega)$ ，其中采样频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 。

例：

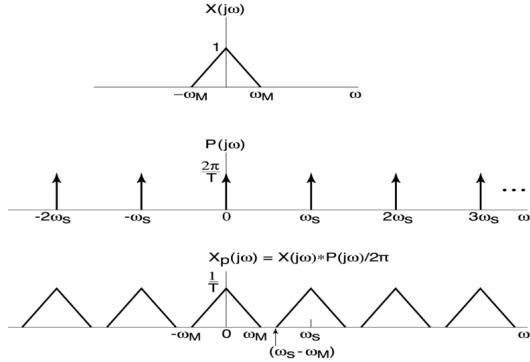


图 66：冲激串采样的信号 $X(i\omega)$ 、 $P(i\omega)$ 与 $X_p(i\omega)$

习题 2.10.9. 现有信号 $f(t) = e^{-t^2/20}$ 。为分析某时刻下的“局部频谱”，可选合适的窗函数 $w(t, t_0)$ ，并截取 $f(t)$ 在 t_0 附近的信号，即 $f_w(t, t_0) = f(t) \cdot w(t, t_0)$ 。

(a) 求信号 $f(t)$ 的 FT。

(b) 现不妨取窗函数 $w(t, t_0) = e^{-(t-t_0)^2/2}$ 。试分析 $t_0 = 0$ 时刻下对应的“局部频谱”，即求 $f_w(t, 0)$ 的 FT。

(c) 画出信号 $f(t)$ 的频谱图与信号 $f(t)$ 在 $t_0 = 0$ 时刻下的“局部频谱”图，并进行对比。

(提示：若 $x, c \in \mathbb{R}$ ，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ic)^2} dx = \sqrt{\pi}$ 。)

解. (a) 不妨记 $f(t)$ 的 FT 为 $F(\omega)$ 。由傅里叶变换的定义知

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/20} e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-5\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+10i\omega)^2}{20}} dt \\ &= 2\sqrt{5\pi} e^{-5\omega^2}. \end{aligned}$$

(b) 不妨记 $f_w(t, 0)$ 的 FT 为 $F_w(\omega, 0)$ 。由题知

$$f_w(t, 0) = f(t) \cdot w(t, 0) = e^{-t^2/20} e^{-t^2/2} = e^{-\frac{11}{20}t^2}.$$

因此，其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F_w(\omega, 0) &= \mathcal{F}[f_w(t, 0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_w(t, 0) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{11}{20}t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-\frac{5}{11}\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{11}{20}(t+\frac{10i\omega}{11})^2} dt \\ &= \frac{2}{11} \sqrt{55\pi} e^{-\frac{5}{11}\omega^2}. \end{aligned}$$

(c) 画出两者的频谱图如 67 所示。

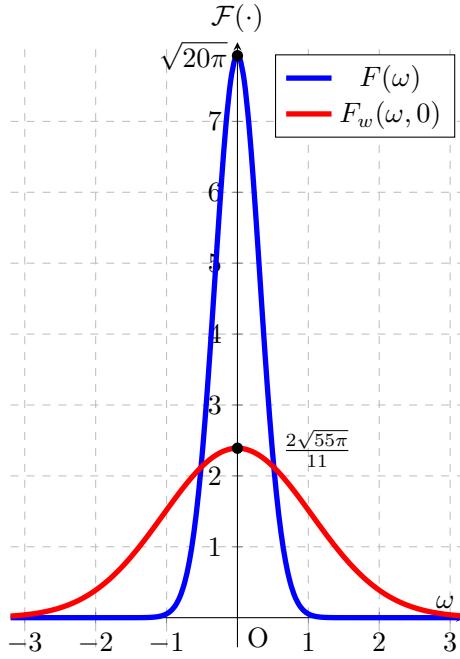


图 67: 频谱图像对比

可以看出, 这两个频率谱在 $\omega = 0$ 处均有峰值, 但 $F(\omega)$ 的峰值更高, 为 $F_w(\omega, 0)$ 的 $\sqrt{11}$ 倍。同时, $F_w(\omega, 0)$ 比 $F(\omega)$ 更加“平缓”, 即 $F_w(\omega, 0)$ 的峰值附近的值相对于峰值更小。

2.10.2 采样与混叠

定义 2.10.10 (混叠). 当采样周期变大时, 频谱的周期会变小。此时, 离散信号的谱会发生相互重叠的现象。这种现象称为混叠。

例 2.10.11. 如图 68a 和 68b 所示, 当采样频率 T_s 变大时, 信号 $F_s(\omega)$ 会发生混叠。

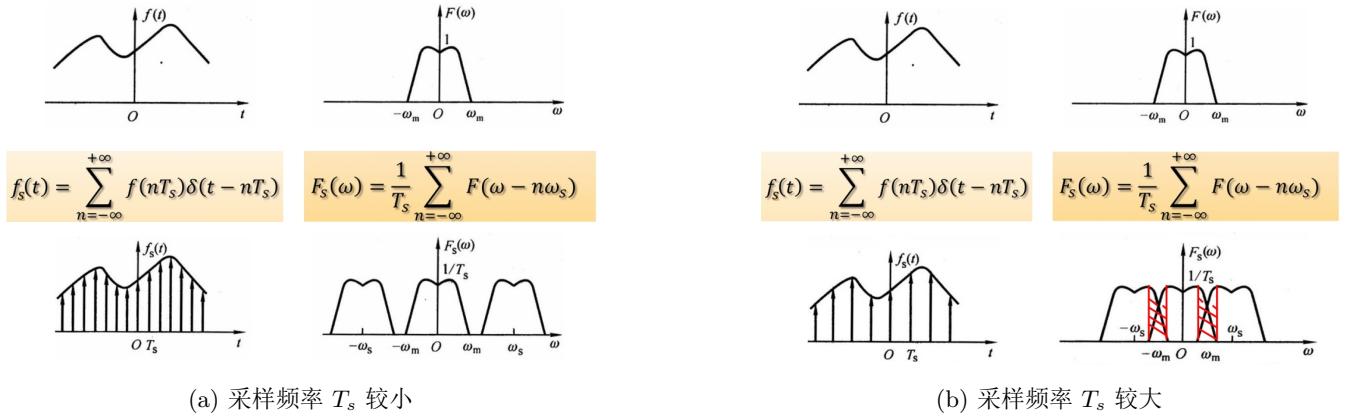


图 68: 混叠现象

例 2.10.12. 设如图 69 所示的模拟音频信号高频截止频率为 $f_M = 5 \text{ kHz}$, 采样频率为 6 kHz 。问: 抽样后信号频谱与原信号频谱在 2 kHz 处有什么差异?

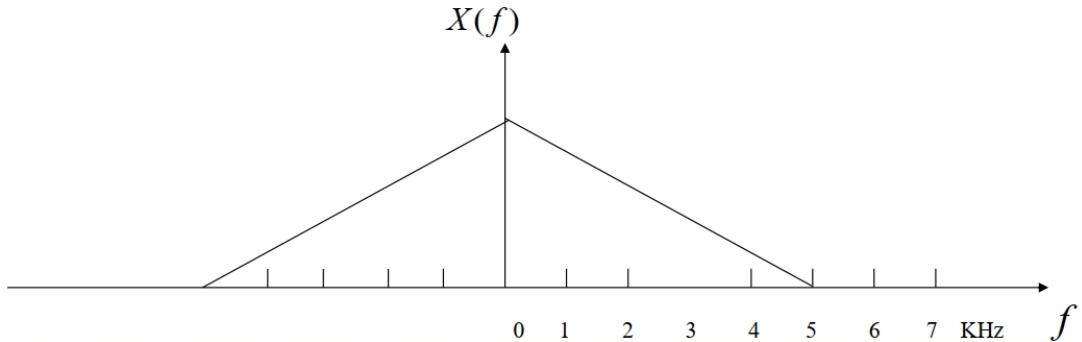


图 69: 模拟音频信号的频谱

解. 采样后的频谱相当于原信号的频谱以 6 kHz 为周期进行叠加。在 2 kHz 处的频谱为原 2 kHz 处的频谱与 4 kHz 处的频谱的叠加。画出采样后的频谱如图 70 所示。

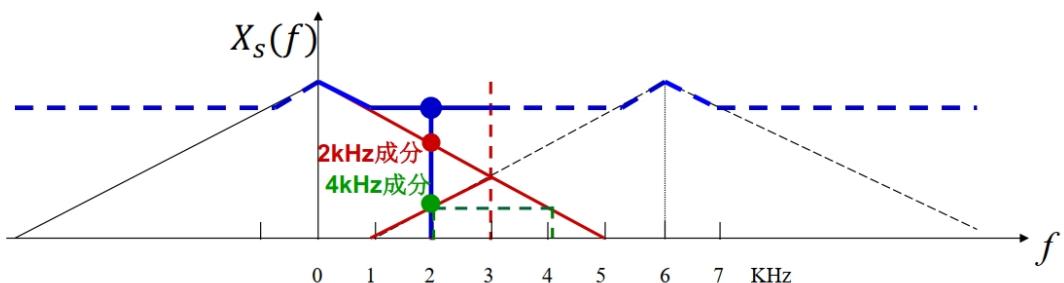


图 70: 抽样后信号的频谱

注 2.10.13. 思考: 混叠对音频质量会产生什么影响?

注 2.10.14. 思考: 如何防止混叠?

2.10.3 采样定理

要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号, 就意味着要能够从 $X_p(i\omega)$ 中不失真地分离出 $X(i\omega)$ 。这就要求 $X(i\omega)$ 在周期性延拓时不能发生频谱的混叠。为此必须要求:

1. $x(t)$ 必须是带限的, 最高频率为 ω_M 。

2. 采样间隔 (周期) 不是任意的, 必须保证采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 。

在满足上述要求时, 可以通过理想低通滤波器从 $X_p(i\omega)$ 中不失真地分离出 $X(i\omega)$ 。

定理 2.10.15 (Nyquist 采样定理). 设 $x(t)$ 是带限信号, 其最高频率为 ω_M 。如果以 $\omega_s > 2\omega_M$ 的频率进行采样, 则 $x(t)$ 可以唯一地由其样本 $x(nT_s)$ 决定, 其中 $T_s = 2\pi/\omega_s$ 。

例 2.10.16 (采样定理的图示). 如图 71 所示为两种不同的采样频率 ω_s 下的采样效果。其中 ω_c 为过渡带的截止频率。

- 当 $\omega_s > 2\omega_M$ 时, 采样后的频谱不会发生混叠, 过渡带将两个周期的频谱分开。
- 当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时, 采样后的频谱会发生混叠, 过渡带处两个周期的频谱混合在一起。

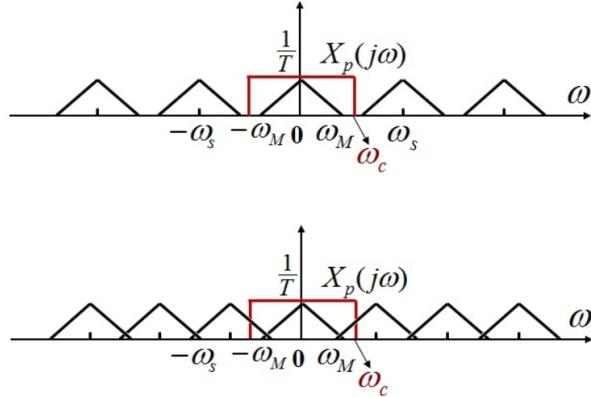


图 71: 采样定理的图示

例 2.10.17. 在工程实际应用中, 理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带, 也就是如图 72a 所示中的 $\omega_c \in (\omega_M, \omega_s - \omega_M)$ 。因此, 实际采样时, ω_s 必须大于 $2\omega_M$ 。

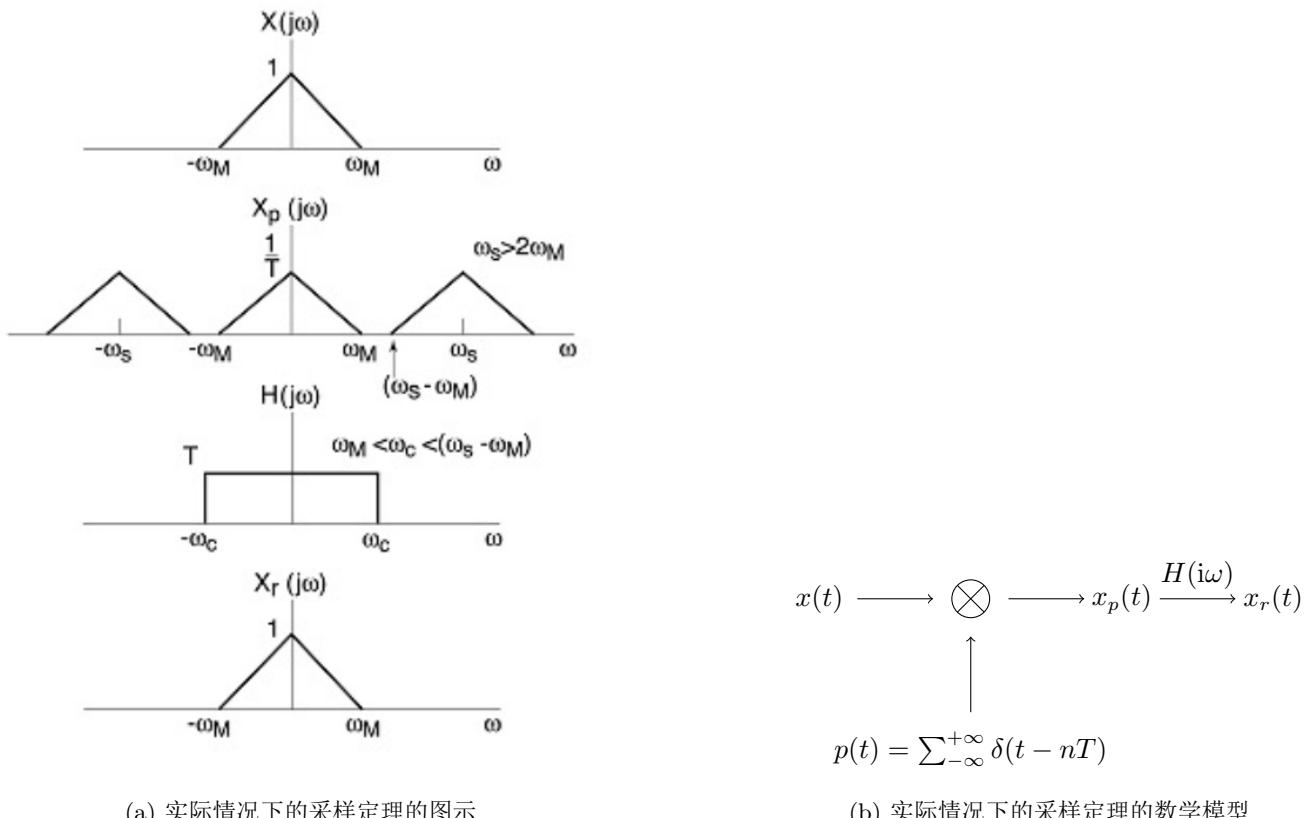
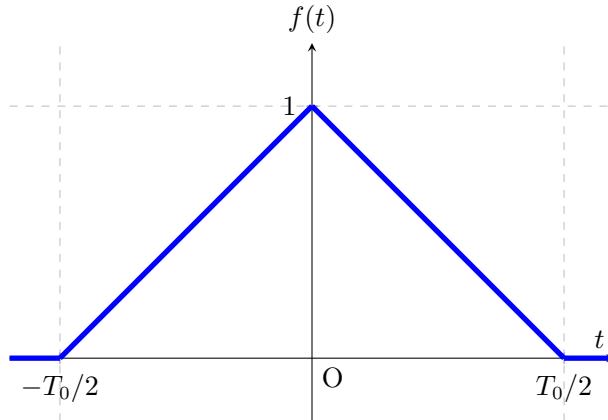


图 72: 实际情况下的采样定理

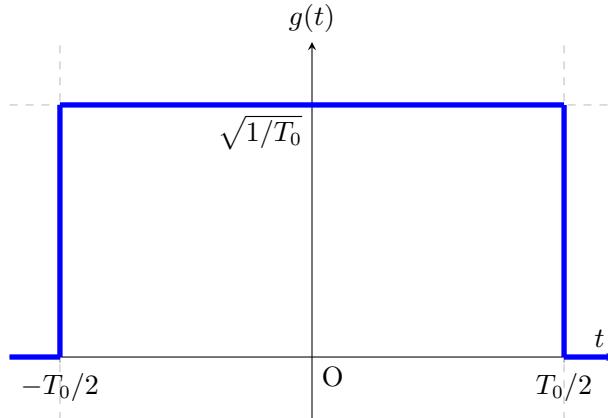
性质 2.10.18 (三角脉冲的傅里叶变换). 设 $f(t)$ 为 $[T_0, T_0]$ 上的三角脉冲信号, 如图 73 所示。

图 73: 三角信号 $f(t)$

则其傅里叶变换为

$$H(i\omega) = T_0 \cdot \text{Sa}^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right).$$

证明. 三角脉冲可以表示为两个矩形脉冲的卷积。记 $g(t)$ 为 $[-T_0/2, T_0/2]$ 上的矩形脉冲信号，脉宽 $\tau = T_0$ ，脉高 $E = \sqrt{1/T_0}$ ，如图 74 所示。

图 74: 矩形脉冲信号 $g(t)$

因此， $f(t) = g(t) * g(t)$ 。由卷积定理知

$$\begin{aligned} H(i\omega) &= G(i\omega) \cdot G(i\omega) \\ &= \left(E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right)^2 \\ &= T_0 \cdot \text{Sa}^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right). \end{aligned}$$

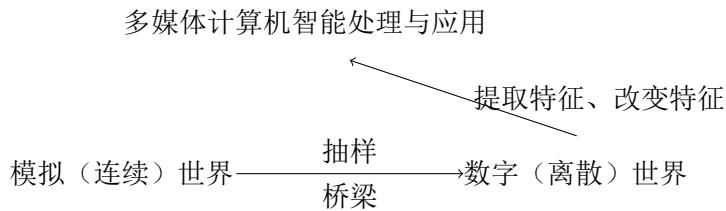
■

2.10.4 采样定理的方法论思考

关键科学问题

局部如何选择，才能全面体现整体的变化规律？

信号处理：抽样定理对抽样频率的约束。



例 2.10.19. 设模拟音频信号高频截止频率为 10 kHz。若抽样频率为 16 kHz，则抽样后信号频谱与原信号频谱在 12 kHz 处有什么差异？

例 2.10.20. 模拟信号（实信号）频率在 850 kHz 到 900 kHz。若采样频率为 200 kHz，则采样后信号频谱在 20 kHz 处与原信号有什么差异？（要求：文字说明幅度的变化；如果有混叠发生，请说明混叠对应的原频谱）