מבוא למערכות לומדות - חורף 22/23

236756

HW5 dry

לוי הורביץ

313511602

<u>שאלה 1</u>

1.1

$$f(X_i = x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & else \end{cases}$$

1.2

$$L(x_1, \dots, x_{10}; \theta) = \Pr(x_1, \dots, x_{10}; \theta) = \prod_i Pr(x_i \mid \theta) \overset{1.1.}{=} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{10}$$

1.3

$$\frac{dL(x_1, \dots, x_{10}; \theta)}{d\theta} = \frac{dPr(x_1, \dots, x_{10}; \theta)}{d\theta} = \frac{d\left(\frac{1}{\theta}\right)^{10}}{d\theta} = -10 \cdot \frac{1}{\theta^{11}} \ne 0$$

$$\leftrightarrow \frac{dL(x_1, \dots, x_{10}; \theta)}{d\theta} \ne 0$$

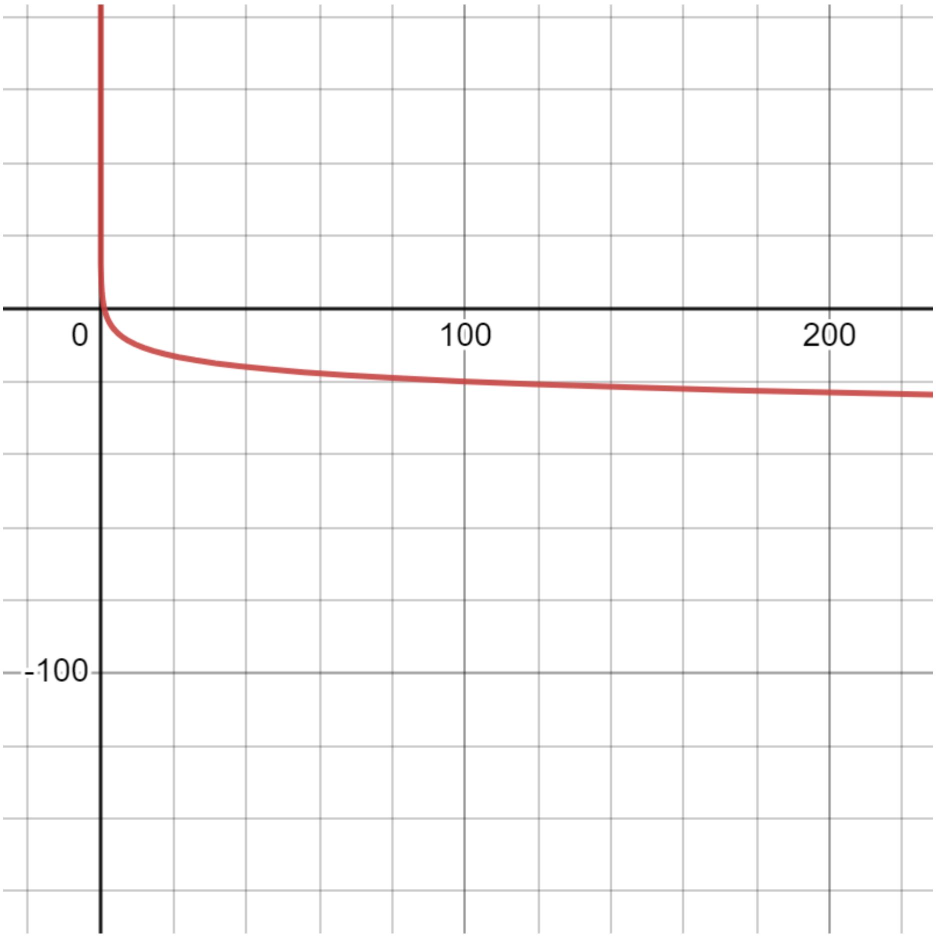
אבל נשים לב שכאשר תטא שואף לאין סוף, נקבל:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{dL(x_1, \dots, x_{10}; \theta)}{d\theta} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{-10}{\theta^{11}} = 0$$

1.4

הגרף של הפונקציה:

$$\log(x_1, \dots, x_{10}; \theta) = \log\left(\frac{1}{\theta^{10}}\right) = -10\log(\theta)$$



1.5

הפונקציה:

$$LE = -10\log\theta$$

נגזור את הפונקציה ע"מ למצוא מקסימום:

$$\frac{dLE}{d\theta} = -\frac{10}{\theta} \neq 0 \quad (\theta > 0)$$

הנגזרת שונה מ 0 לכן זה יקשה עלינו למצוא נקודת קיצון אבל נשים לב
שהשיפוע של הפונקציה שלילי, לכן נחפש את הערך תטא הקטן ביותר
שמתאפשר על ציר איקס כדי לקבל את הערך ההסתברותי הגדול ביותר ונקבל:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max\{x_1, \ldots x_{10}\}$$

שאלה 2

2.1

נפתח את הנוסחה הרקורסיבית ונציב בה את הדברים הידועים לנו מהגדרת השאלה. כמו כן נשתמש באבחנה הכתובה בשאלה שמכיוון ש-$\sigma \equiv ReLU$ וגם $\alpha \in \mathbb{R}_+$ אז מתקיים: $\sigma(\alpha \cdot z) = \alpha \cdot \sigma(z)$.

$$F_{\alpha\cdot\theta}(x) = \alpha \cdot w^{(L)^T} h^{(L-1)}(x) =$$

$$= \alpha \cdot w^{(L)^T} \cdot \sigma\left(\alpha \cdot w^{(L-1)^T} h^{(L-2)}(x)\right) =$$

$$= \alpha^2 \cdot w^{(L)^T} \cdot \sigma\left(w^{(L-1)^T} h^{(L-2)}(x)\right) =$$

$$= \alpha^2 \cdot w^{(L)^T} \cdot \sigma\left(w^{(L-1)^T} \cdot \sigma\left(\alpha \cdot w^{(L-2)^T} h^{(L-3)}(x)\right)\right) =$$

$$= \alpha^3 \cdot w^{(L)^T} \cdot \sigma\left(w^{(L-1)^T} \cdot \sigma\left(w^{(L-2)^T} h^{(L-3)}(x)\right)\right) =$$

$$= \cdots =$$

$$= \alpha^L \cdot w^{(L)^T} \cdot \sigma\left(w^{(L-1)^T} \cdot \sigma\left(\dots \cdot \sigma(w^{(1)^T} x) \dots\right)\right) =$$

$$= \alpha^L \cdot F_\theta(x)$$

ולכן, נבחר: $c = \alpha^L$ ובכך הוכחנו את הדרוש.

2.2

אנו בעצם צריכים למצוא את הגבול הבא. נשתמש גם בטענה שהוכחנו בסעיף הקודם ובאריתמטיקה של גבולות.

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{1 + e^{-F_{\alpha\cdot\theta}(x)}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{1 + e^{-\alpha^L \cdot F_\theta(x)}} = \frac{1}{2}$$