

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Vallée-Poussin Ш. Ж. де ла.* Курс анализа бесконечно малых/ Пер. с франц. под ред. и с прим. Г. М. Фихтенгольца. Л.; М.: ГИТИ, 1933, Т. I—II.
2. *Burkhill J. C.* Charles Joseph de la Vallée Poussin.— J. London Math. Soc., 1964, vol. 39, p. 165—175.
3. *Vallée Poussin C. de la.* Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Р.: Gauthier-Villars, 1916.
4. *Lusin N.* Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Р.: Gauthier-Villars, 1930; то же: *Н. Н. Лузин.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях/Пер. Н. К. Барри, ред., предисловие, прим. Л. В. Келдыш и П. С. Новикова. М.: Гостехиздат, 1953; *Н. Н. Лузин.* Собр. соч. Дескриптивная теория множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. II, с. 9—269.
5. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.
6. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв. М.: Наука, 1976.
7. *Vallée Poussin C. de la.* Sur l'intégrale de Lebesgue.— Trans. Amer. Math. Soc., 1915, vol. 16, p. 435—501.
8. *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentables analytiquement.— J. math. pures et appl. Sér. 6, 1905, vol. 1, p. 139—216.
9. *Новиков П. С., Келдыш Л. В.* Комментарии к работам Н. Н. Лузина.— В. кн.: *Н. Н. Лузин.* Собр. соч. Дескриптивная теория множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. II, с. 725—739.
10. *Borel É.* Leçons sur la théorie des fonctions. 2e éd. Р.: Gauthier—Villars, 1914.

## ВОСПОМИНАНИЯ О МОЛОДЫХ ГОДАХ И О ВОЗНИКНОВЕНИИ МОСКОВСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Д. Е. Меньшов

*От редакции.* В основу текста «Воспоминаний» чл.-корр. АН СССР Д. Е. Меньшова легла магнитофонная запись его беседы с А. П. Юшкевичем в марте 1980 г. в санатории АН СССР «Узкое». Текст записи, переписанный с ленты Е. И. Славутиным и отредактированный А. П. Юшкевичем, был в ноябре того же года дополнен и проверен Д. Е. Меньшовым. В беседе участвовал также С. С. Демидов. «Воспоминания» публикуются в форме вопросов и ответов, какую они имели вначале; вопросы и ответы помечены буквами *B.* и *O.*

Редакция благодарна академикам П. С. Александро-

ву и А. Н. Колмогорову, которые частично познакомились с согласия Д. Е. Меньшова, с его текстом и внесли в него несколько уточнений.

*B.* — Дмитрий Евгеньевич. Вы один из очень немногих ныне здравствующих математиков, являющихся свидетелями и участниками становления Московской школы теории функций. С Вашей стороны весьма любезна готовность рассказать, что Вы помните о жизни Математического отделения Московского университета в 10-е и 20-е годы нашего столетия. Быть может, Вы сперва расскажите о своих гимназических годах?

*O.* — Я родился в Москве 18 (6) апреля 1892 г. Мой отец, Евгений Титович Меньшов, уроженец Тулы, был врачом Ново-Екатерининской больницы, что около Петровских ворот<sup>1</sup>, а заодно врачом Лазаревского института восточных языков, находившегося в Армянском переулке<sup>2</sup>. Он умер в 1904 г., 52 лет от роду. Мать, Александра Николаевна, была из дворянской семьи Татищевых. Она свободно говорила по-французски и обучила меня этому языку еще в детстве. Все же, когда я оказался в 1927 г. в Париже, то заметил, что мое произношение отличается некоторым акцентом и постарался от него избавиться. Скончалась моя мать 62 лет в декабре 1918 г.

Среднее образование я получил в гимназии при Лазаревском институте. Арифметика была мне скучна, а вот алгебра и геометрия заинтересовали. Отчасти я был этим обязан преподавателю обоих предметов В. Н. Седашеву, который умер от туберкулеза. Сменивший его учитель сильно уступал Седашеву, но мои склонности уже определились. В последнем, восьмом классе я изучил очень полную и строго написанную «Алгебру» И. М. Билибина, вышедшую третьим и последним изданием в 1899 г.; Билибин был директором Петербургского реального училища<sup>3</sup>.

Кроме математики и физики меня занимала грамматика французского, немецкого и латинского языков, кото-

<sup>1</sup> Эта больница теперь называется 24-й Клинической.— *Примеч. ред.*

<sup>2</sup> Ныне в этом здании помещается Институт Востоковедения.— *Примеч. ред.*

<sup>3</sup> О И. М. Билибине см. в книге: Лачков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. М.: Учпедгиз, 1951.— *Примеч. ред.*



Д. Е. Меньшов

рые входили в гимназическую программу, и даже армянского, хотя этим языком я не овладел. Но математика стояла на первом месте.

Когда в 1911 г. я окончил гимназию, встал вопрос о выборе высшего учебного заведения. В то время окончившие университет математики шли главным образом в учителя, а меня это совершенно не устраивало, так как я чувствовал, что не сумею следить за дисциплиной учащихся. Я решил пойти в Инженерное училище<sup>4</sup>, думая, что там все-таки буду достаточно подробно знакомиться с высшей математикой. Я выдержал конкурсный экзамен, но через полгода убедился, что и это меня не устраивает, что я там как бы задыхаюсь. Через полгода я оттуда ушел, и в течение еще полугода нигде не учился, но стал самостоятельно изучать дома главным образом анализ и частично дифференциальную геометрию.

*B.* — По каким книгам?

---

<sup>4</sup> Московское инженерное училище.

*O.* — Был такой курс К. А. Пессе<sup>5</sup>, написанный для технических училищ повышенного типа<sup>6</sup>. Затем по какому-то другому курсу, не помню уже по какому, усвоил основы аналитической геометрии. В общем я изучил таким образом значительную часть того, что преподается на первом и втором курсе Математического отделения Университета.

Тогда я предполагал, что после окончания университета буду зарабатывать па жизнь частными уроками. Революции я в то время, конечно, не предвидел. Это был еще только 1911 г.

*V.* — И в самом деле, будучи уже студентом, я стал давать частные уроки.

*V.* — Когда же Вы поступили в Московский университет?

*O.* — Осеню 1912 г., причем без вступительных экзаменов, которых в те времена не было. Достаточно было иметь гимназический аттестат зрелости. Желающих поступить было не так много.

*V.* — Какова была тогда обстановка в университете? Кто были Ваши первые лекторы, профессора?

*O.* — На первом курсе анализ читал профессор Л. К. Лахтин, а аналитическую геометрию и высшую алгебру — профессор К. А. Андреев. Лахтин читал очень четко, ясно, но материала давал немного, во всяком случае меньше, чем я уже знал. В общем, его изложение было довольно близко по содержанию к учебнику Пессе.

*V.* — Каков был уровень строгости курса Л. К. Лахтина? Когда я слушал введение в анализ у того же Л. К. Лахтина в 1923 г., изложение было довольно упрощенное, быть может, применительно к уровню подготовки многих тогдашних студентов.

*O.* — Нет, в мои студенческие годы Лахтин читал лекции достаточно строго, конечно, по тем временам. В них не доказывались многие теоремы, которые считались очевидными и которые теперь доказываются на первом же курсе

---

<sup>5</sup> Основные биографические сведения о большинстве упоминаемых в «Воспоминаниях» лиц читатель может найти в книге: *Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики*. Киев: Радянська школа, 1979. В отдельных случаях указаны и другие биографические источники.— Примеч. ред.

<sup>6</sup> *Пессе К. А. Курс дифференциального и интегрального исчисления*. СПб., 1891.

(например, существование максимума и минимума у функции, непрерывной на отрезке; обращение непрерывной функции, имеющей на концах отрезка разные знаки, внутри отрезка в нуль и т. п.). По содержанию курс Л. К. Лахтина был даже более сжатый в сравнении с учебником Поссе, и я узнал из него мало нового. Все же я с удовольствием все прослушал по второму разу. Помню, что определение предела Лахти давал с ё и δ, чего у Поссе не было. Правда, такие определения предела я прочитал раньше в учебнике Билибина.

*В.* — Существовали ли семинарские упражнения?

*О.* — Конечно, они были. Вел их, кажется, А. А. Дмитровский, который еще долго преподавал (впоследствии в звании доцента) в Университете.

*В.* — Заинтересовали ли Вас лекции по механике и другим предметам?

*О.* — В то время было вольное посещение лекций. По физике и по химии я прослушал только по одной лекции. Но сдавать экзамены по этим предметам, как и по механике, было обязательно. Добавлю, что первая же лекция по физике представилась мне скучной, и я больше не слушал этот курс, который читал К. П. Яковлев и который был небогат новыми идеями. О теории относительности в курсе не было и речи. А ведь шел 1912 г., теория же эта — я имею в виду специальную теорию относительности, была создана в 1905 г.

*В.* — Я прослушал несколько лекций того же К. П. Яковlevа в 1924 г. По-видимому, он читал в том же духе, что и десятью годами ранее.

Изучали ли Вы что-либо сверх обязательной программы?

*О.* — Поскольку все, что читалось на лекциях первого курса, я уже знал, я стал штудировать первый том известного курса анализа Э. Гурса, который незадолго перед тем, в 1911 г., вышел в русском переводе А. И. Некрасова под редакцией нашего профессора Б. К. Младзеевского. Здесь я нашел и неизвестные мне вещи, например доказательство теоремы о существовании неявной функции. В прослушанном мною университетском курсе она не доказывалась.

На втором году обучения я впервые прослушал один из курсов профессора Д. Ф. Егорова, именно его лекции по дифференциальной геометрии. Читал он очень точно и четко, но нетемпераментно. Писал на доске так же четко,

как говорил. Я слушал у него и другие курсы, например теорию чисел и вариационное исчисление.

В.— Когда Вы стали участвовать в семинаре Д. Ф. Егорова?

О.— Этот семинар, существовавший к тому времени уже ряд лет, я стал посещать во втором семестре второго курса, т. е. в первом полугодии 1914 г.

Желающих работать в семинаре Егоров распределил на шесть групп. Две группы изучали теорию расходящихся рядов, одна группа — теорию рядов измеримых функций, главным образом, ортогональные ряды. Остальные темы я не помню. Я участвовал в группе, изучавшей теорию функциональных рядов, в основном ортогональных рядов, там мы познакомились с теоремой Фишера—Рисса. Попасть в эту группу желающих было очень много, так что Егоров принял далеко не всех и оставшихся перевел в другие группы. Я был принят в названную группу, так как на экзамене по дифференциальной геометрии воспользовался теоремой о неявной функции, что произвело на экзаменовавшего меня Егорова хорошее впечатление и он убедился, что я серьезно интересуюсь математикой. В этой же группе были Д. К. Казаринов, М. Орбек<sup>7</sup>, Л. И. Поливанов, который потом переехал в Нижний Новгород (ныне Горький), А. Я. Хинчин и еще некоторые другие студенты<sup>8</sup>.

Д. Ф. Егоров указал нам основную литературу для чтения, прежде всего первый том известного курса Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена, в мелком шрифте содержащем обширный круг сведений по теории функций действительного переменного (русский перевод 3-го французского издания вышел в 1922 г.), а затем различные статьи Ф. Рисса и других математиков. Трудностей с языками у меня не было: французский и немецкий я достаточно изучил в гимназии, а английский — самостоятельно еще до поступления в университет.

<sup>7</sup> О М. Орбеке, французском подданном, окончившем Московский университет в 1916 г. и уехавшем затем во Францию, см.: Историко-математические исследования, 1977, вып. XXIII, с. 336.— Примеч. ред.

<sup>8</sup> Ср. о семинаре Д. Ф. Егорова воспоминания П. С. Александрова, начавшего в нем работу весной 1914 г.: Александров П. С. Страницы автобиографии.— Усп. мат. наук, 1979, т. 34, вып. 6(210), с. 232.— Примеч. ред.

Помимо посещения лекций по математике, я ежедневно по шесть часов занимался ею дома, причем перемежал два часа занятий с двухчасовыми прогулками. В то время я проработал вторые тома курсов Гурса и Валле-Пуссеца.

*В.* — Как проходили занятия Вашего семинара?

*О.* — Каждая группа собиралась на квартире одного из участников, мои, в частности, у Орбека, жившего на Пречистенке (ныне улица Кропоткина). Мы обсуждали вместе все трудные вопросы. Если что-нибудь было не понятно, мы могли обратиться к Д. Ф. Егорову. Одн раз в неделю Егоров обязательно принимал каждую группу у себя на квартире. Но, по-моему, фактически трудных вопросов у нас не было. Скорее мы ставили и обсуждали с руководителем различные вопросы сверх того, что было нам задано. Подготовив таким образом сообща доклад, мы сами намечали докладчика. В моей группе делал доклад С. Н. Кузьмин. Это был исключительно хороший докладчик, который, вероятно, потом стал прекрасным лектором, но мне неизвестно, вел ли он какую-либо творческую работу. Позднее он был профессором втузов в Москве.

*В.* — Вы сами выступали с докладами?

*О.* — На этом семинаре я еще не выступал с докладами. Тогда я вообще не умел хорошо рассказывать.

Продолжаю далее. Каждый доклад, — всего их было по числу групп шесть, делался на собрании всех групп вместе. Кроме студентов присутствовали и начинающие молодые ученые, например И. И. Привалов и В. В. Степанов. Когда я был на втором курсе, Привалов, окончивший университет в 1913 г., проходил первый год занятий в качестве оставленного при университете для подготовки к профессорскому званию, — это примерно соответствовало нашей аспирантуре. Когда я был на первом курсе, я просыпал от товарищей, что Привалов — самый выдающийся молодой математик в Московском университете. Познакомился я с Приваловым, когда приехал Н. Н. Лузин. Знакомство стало близким, и я нередко бывал у Привалова дома. Степанов, окончивший университет годом ранее Привалова, заканчивал такую подготовку. При университете в то время оставляли на два года, в течение которых следовало сдать магистерские экзамены и подготовить магистерскую диссертацию. Присутствовали на собраниях семинара и многие другие университетские профессора и преподаватели математики.

Доклад на собрании групп проходил в университете-

ском здании. Обстановка была довольно официальной, особенно оживленного обсуждения докладов я не помню; аудитория была пассивной. Все они были тщательно подготовлены и обсуждены с руководителем. Задавались только отдельные вопросы, а делать какие-либо дополнения было не принято.

Добавлю, что темы докладов Д. Ф. Егоров от года к году несколько разнообразил, сохраняя те же формы работы.

*В.— Расскажите, пожалуйста, о Вашем первом знакомстве с Н. Н. Лузиным.*

*О.— Н. Н. Лузин вернулся из заграничной командировки весной 1914 г., а увидели мы его впервые в сентябре, с началом нового учебного года. Он стал читать факультативный курс теории функций действительного переменного. Слушать его было очень интересно, а еще интереснее были беседы с ним, в которые он охотно вступал со студентами.*

Читал он этот курс вполне гладко и очень увлекательно. Не знаю, готовился ли он специально к этим лекциям: ведь он как раз занимался теорией функций. Быть может, перед лекциями он просто припоминал, что будет рассказывать; для этого не требовалось много времени. Но если по ходу изложения он встречался с каким-либо пробелом в памяти, то просто восполнял его, хотя иногда с некоторым напряжением. Соображал на ходу он довольно быстро, хотя нельзя сказать, что очень быстро. Иногда он привлекал на помощь и слушателей, особенно при чтении специальных курсов, это был интересный педагогический прием, активизировавший слушателей. Однако в том первом курсе, который я слушал оченью 1914—1915 уч. года, никаких пробелов и запинок не было.

Замечательны были не только лекции Н. Н. Лузина, но и последующие за ними беседы в университете и на его квартире. Помню, что ему пришла мысль организовать семинар, посвященный сравнению двух интегралов — Данжуа и Бореля. Я стал усиленно над этим вопросом думать и вскоре решил поставленный вопрос, установив, что интеграл Данжуа более общий, чем интеграл Бореля. Н. Н. Лузин сказал, что тема мною исчерпана, так что незачем организовывать особый семинар по данному вопросу.

Н. Н. Лузин в своей диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд», защищенной и изданной в 1915 г.,

указал, что функция, интегрируемая по Борелю, интегрируемая и в смысле Данжуа, причем высказал предположение, что интегралы в смысле Бореля и Данжуа эквивалентны. Я, однако, привел пример функции, не интегрируемой по Борелю, но интегрируемой по Данжуа. Этот пример приведен в моей первой научной работе «Взаимоотношения между определениями интеграла Borel'я и Denjoy», вскоре напечатанной в 30 томе «Математического сборника» за 1916 г.

*B.* — Насколько помню, теорией интеграла Данжуа занимался тогда же А. Я. Хинчин?

*O.* — До сих пор я говорил об интеграле Данжуа в узком смысле слова, введенном в 1912 г. Мой соавтор А. Я. Хинчин дал важные обобщения понятия интеграла Данжуа. О своем обобщении он впервые объявил в печати в «Comptes rendus» Парижской академии наук в 1916 г.; впоследствии это обобщение получило название интеграла Данжуа—Хинчина. При построении своего обобщения А. Я. Хинчин применил введенное им осенью 1914 г. понятие асимптотической производной, сведения о которой впервые привел в упомянутой диссертации 1915 г. Н. Н. Лузин. Тогда это более широкое понятие производной называли еще просто обобщенной производной. А. Я. Хинчин получил этот свой результат в ответ на вопрос, поставленный профессором Б. К. Младзеевским в одной лекции по теории функций действительного переменного, прочитанной в 1904 г. (об этом говорится в диссертации Н. Н. Лузина). Младзеевский не работал творчески в этой области, но наряду с Д. Ф. Егоровым, был одним из первых инициаторов московских исследований по теории функций и в 1901 г. прочитал первый курс по этому вопросу в Московском университете. Добавлю, что заметку, озаглавленную уже «Sur la dérivation asymptotique» А. Я. Хинчин напечатал в парижских «Comptes rendus» в 1917 г.

*B.* — Как развивались дальше Ваши взаимоотношения с Н. Н. Лузиным?

*O.* — Когда я занялся поставленным Н. Н. Лузиным вопросом, он пригласил меня к себе домой. Жил он в то время вместе со своими родителями в Токаревском подворье, где-то поблизости от начала Пятницкой улицы. Подворье представляло собой нечто вроде гостиницы, постояльцы которой нередко проживали здесь подолгу. Сам Н. Н. Лузин занимал одну комнату, а его родители, ко-

торых я видел только мельком, другую. Вскоре умерла мать Н. Н. Лузина, и вслед за нею отец, и осенью 1915 г. Лузин снял комнату на Арбате, д. 25, кв. 8, у вдовы врача А. Г. Малыгиной, сдававшей комнату. На дочери своей квартирохозяйки, Н. М. Малыгиной, Лузин впоследствии женился. В этой квартире он прожил многие годы, до Второй мировой войны. При первых же личных встречах с Лузиным мы подолгу увлеченно беседовали по вопросам теории функций.

Вот в это время вокруг Н. Н. Лузина образуется небольшое еще ядро будущей Московской школы теории функций действительного переменного. Со старшими представителями ее, И. И. Приваловым и В. В. Степановым, он был близок уже ранее, а в 1914—1915 гг. к его кругу примкнули тогда еще студенты П. С. Александров, А. Я. Хинчин и я, а также В. С. Фёдоров, М. Я. Суслин и еще несколько человек; потом, уже после Октябрьской революции число их значительно увеличилось. Непринужденный, дружеский характер встреч и собеседований с Н. Н. Лузиным сохранялся у многих из нас долгие годы.

На общем университетском семинаре по теории функций обстановка была, как я упоминал, гораздо более официальной и даже торжественной, а сами собрания более многочисленными. Об одном из них, состоявшемся в октябре 1915 г., рассказывает в своих воспоминаниях П. С. Александров, сделавший тогда доклад о полученном им незадолго перед тем замечательном результате о мощности<sup>9</sup> множеств, измеренных по Борелю, или короче *B*-множеств.

Из предыдущего рассказа, видно, что в 1914—1916 гг. младшие представители Московской школы теории функций уже получили и частью опубликовали свои первые открытия. К уже перечисленным результатам добавлю построенный мною пример тригонометрического ряда с коэффициентами, не равными нулю, сходящийся к нулю почти всюду, — в позднейшей терминологии пример *M*-множества меры нуль.

Таким образом, я внес свой первый вклад в изучение проблемы единственности разложения функций в тригонометрический ряд, восходящий к работам немецких мате-

<sup>9</sup> См.: Александров П. С. Страницы автобиографии.— Указ. соч., с. 234—235.— Примеч. ред.

матиков Э. Гейне и Г. Кантора 1870-х годов и живо интересовавшей тогда, да и потом многих специалистов по теории функций действительного переменного.

Н. Н. Лузин отнесся к моему результату с большим интересом: летом 1916 г. я жил у родственников в Тульской губернии, а Н. Н. Лузин гостила в Казани в семье профессора механики А. Л. Лаврентьева, отца недавно скончавшегося М. А. Лаврентьева, также ставшего уже после Октябрьской революции членом «Лузитании», так прозвали группу товарищей и учеников Лузина. Я послал Лузину письмо со своим примером. В ответе Лузин поздравил меня и писал, что считает мой результат неожиданным. Я и сам думал так и даже просил Лузина проверить, не ошибся ли я. Слишком уж странным казался тогда этот пример. По предложению Лузина я изложил свой пример со всеми требуемыми доказательствами в статье *«Sur l'unicité du développement trigonométrique»*, напечатанной в *«Comptes rendus»* в 1916 г.; Н. Н. Лузин помог мне при редактировании французского текста и послал со своей рекомендацией парижскому академику Ж. Адамару, которому направлял для представления в этот журнал и уже упомянутые статьи, и другие статьи моих товарищей. От Адамара проблематика теории функций действительного переменного была далека, но он вполне доверял Лузину. Помню, что в ответном письме Адамар выразил удовлетворение тем, что в Москве ведется серьезная научная работа, и было видно, что он высоко ценит роль Н. Н. Лузина в ее организации. Любопытно, что статьи в *«Comptes rendus»* строго не должны были превосходить некоторого размера, а у меня получилось немножко больше. Но в то время — это был разгар первой мировой войны, — отношение к России и русским во Франции было особенно хорошее и мою статью не сократили.

В одно время со мной послал для *«Comptes rendus»* свою работу о мощности борелевских множеств *«Sur la puissance des ensembles mesurables B»* П. С. Александров, напечатанную в том же 1916 г. Для вывода своей основной теоремы о том, что всякое несчетное *B*-множество содержит совершенное подмножество и, значит, имеет мощность континуума, П. С. Александров применил так называемую теперь *A*-операцию, получившую вскоре же приложения, чрезвычайно важные для дальнейшего развития теории множеств, а также для топологии. Подробно изложить

все доказательство теоремы о мощности  $B$ -множеств в короткой заметке П. С. Александрова для «Comptes rendus» было невозможно, но идейное влияние ее оказалось очень велико. Не знаю, дал ли П. С. Александров где-либо вывод своей теоремы со всеми подробностями (такой вывод можно найти в позднейших курсах теории функций). В моей заметке, как и в заметках А. Я. Хинчина, можно было дать более детальное позложение доказательств.

*B.* — Выделил ли Адамар в своих письмах Лузину какую-либо из присланных ему статей особо?

*O.* — Насколько знаю, нет. Он и не мог бы сделать этого, не будучи специалистом по теории функций. На мой взгляд, наиболее результативной была работа П. С. Александрова.

Мне хотелось бы отметить еще один момент. К обобщению интеграла Данжуа, данному А. Я. Хинчиным, независимо пришел сам А. Данжуа. Разница во времени представления и появления их работ по этому вопросу была очень невелика. Адамар писал, что приоритет хронологически принадлежит Хинчину. Не знаю, быть может, это было сделано только из вежливости. Во всяком случае, никаких споров здесь не возникло и оба математика имеют, полагаю, в данном случае равные заслуги.

*B.* — Из Вашего рассказа, кажется, следует, что первые задачи перед молодыми членами Московской школы поставил Н. Н. Лузин.

*O.* — В основном так оно и было, правда, одна задача (обобщение понятия производной) восходит к курсу лекций Б. К. Млодзеевского. Естественно, что мы на первых порах еще не умели самостоятельно ставить вопросы в области математики, которой только начинали заниматься. Лично мои работы представляли собой ответы на вопросы Н. Н. Лузина. Самостоятельно я научился ставить перед собой вопросы с 1923 г. П. С. Александров и А. Я. Хинчин в этом меня опередили.

*B.* — Не поделитесь ли Вы своими воспоминаниями о М. Я. Суслине?

*O.* — С ним я встретился впервые, кажется, осенью 1915 г. После того, как П. С. Александров опубликовал свою работу о  $B$ -множествах, он к этой теме не возвращался. Он говорил мне, что решение проблемы об их мощности потребовало от него чрезвычайного напряжения. Кроме того, он полагал, что все главное в теории  $B$ -множеств теперь уже сделано. После того, как  $B$ -множества были

введены в 1898 г. Борелем, их теория была довольно подробно разработана в мемуаре Лебега «Sur la représentation des fonctions analytiques», напечатанном в 1905 г. Конечно, Александров изучал этот мемуар, изучал его и я. Первую часть мемуара я прочитал еще до того, как познакомился с Н. Н. Лузиным, она довольно легкая и написана совершенно ясно. Поскольку теория *B*-множеств меня непосредственно не интересовала, я вторую часть изучать не стал. Между тем оказалось, что в этой части имелась несомненная оплошность. М. Я. Суслин глубоко заинтересовался и мемуаром Лебега и статьей П. С. Александрова в «Comptes rendus», тщательно разобрал вторую часть мемуара и обнаружил в ней следующую ошибку. Лебег утверждал, по существу, что в математике не существует точечных множеств, кроме борелевских. Суслин, при помощи введенной в статье Александрова операции над множествами, о которой я сказал ранее, эффективно построил множества, не являющиеся *B*-множествами и назвал их *A*-множествами. Этую букву *A* он взял потому, что применил в своей конструкции операцию, изобретенную Александровым. Насколько помню, Суслин не сделал доклад о своем замечательном открытии, но сперва лишь рассказывал о нем в частных беседах. Н. Н. Лузин проверил результат Суслина, высоко оценил его и предложил написать о нем статью. Эта статья «Sur une définition des ensembles mesurables *B* sans nombres transfinis», напечатанная в «Comptes rendus» за 1917 г., содержит и несколько существенных предложений о свойствах *A*-множеств. Посыпая работу Суслина в Париж, Лузин заодно письменно известил Лебега об ошибке в его мемуаре 1905 г., найденной автором работы. Лебег ответил, что лишь теперь узнал о допущенной им никогда глупой ошибке, и что сейчас этим вопросом больше не занимается. Его письмо было выдержано в этой части в щутливом тоне; заканчивалось оно пожеланием нам успеха и в науке, и в войне. Не знаю, сохранилось ли это письмо.

*A*-множества, по предложению П. С. Александрова часто именуются теперь суслинскими. К сожалению, сам Суслин, скончавшийся в 1919 г., не смог принять участия в дальнейшей разработке теории *A*-множеств и, если получил какие-либо новые результаты, то не успел их опубликовать. В дальнейшем теория *A*-множеств была глубоко разработана Н. Н. Лузиным, польским математиком В. Серпинским, который в то время находился в Москве,

немецким математиком Ф. Хаусдорфом и многими другими учеными.

Таковы были начальные плоды деятельности первых учеников и последователей Н. Н. Лузина. Как видно, он сильно стимулировал наши исследования, вводя в близкую ему проблематику теории функций, поощряя нас к самостоятельной работе и содействуя быстрейшему выходу в свет наших первых статей. При этом он неизменно держался с нами почти как равный, выделяясь только большой эрудицией и особого рода сообразительностью, как я уже говорил не очень быстрой, но весьма глубокой и проникновенной, своего рода пробивной способностью или проницательностью. Правда, некоторые наши результаты оказывались для него неожиданными и опровергали его первоначальные предположения.

*B.— А как работал Н. Н. Лузин?*

*O.— Работал он с упоением, сидел часто ночами. Конечно, при таком стиле занятий он чрезвычайно переутомлялся. Когда он достигал желательных результатов, наступали периоды долгой усталости и научной пассивности. У меня была другая манера научной работы, более регулярная и ровная. Всю жизнь я соблюдал примерно тот же режим, в каком я изучал математику в юности. Я никогда себя не перегружал и мне доставляло удовольствие постепенное преодоление препятствий и трудностей.*

Я рассказал, пожалуй, недостаточно о Д. Ф. Егорове. Личный научный вклад его в теорию функций ограничился одной важной теоремой о сходящейся последовательности почти всюду измеримых функций и так называемой теоремой Егорова. Зато его семинар по теории функций сыграл огромную роль на первом этапе формирования Московской школы теории функций. Первая специальность Егорова была дифференциальная геометрия и здесь ему принадлежат существенные открытия. А вообще он был чрезвычайно широко образованным математиком, внимательно следил за развитием математики в странах Западной Европы и содействовал появлению в Москве ряда новых направлений. Достаточно сказать, что учениками его были, среди других, Н. Н. Лузин и И. Г. Петровский. Д. Ф. Егоров читал лекции по очень широкому кругу наук, в том числе, кроме ранее названных, по дифференциальным уравнениям с частными производными, интегральным уравнениям, теории инвариантов и т. д. Наконец, Егоров помогал ряду математиков на их жиз-

ненном пути. О себе могу рассказать, что когда в 1916 г. я окончил университет, он содействовал моему оставлению при университете. С этим нужно было торопиться, иначе меня бы мобилизовали — ведь шла война. Здесь и сыграл решающую роль Д. Ф. Егоров, который, очевидно, считал, что я нужнее в университете, чем в армии. Он приложил огромные усилия, чтобы меня отстоять. Тут же была составлена программа магистерских экзаменов, ну а научную работу я уже вел.

Мне, конечно, приходилось встречаться в то время и с другими математиками, однако о них я мало что могу рассказать. Так, я был знаком с С. С. Бюргенсом, окончившим университет еще в 1906 г. Это был очень культурный математик и близкий товарищ Н. Н. Лузина. Вначале казалось, что Бюргенс ученый почти такого же масштаба, как Лузин, но это не оправдалось. Более всего известны его работы по дифференциальной геометрии.

Возвращаюсь к своему жизненному пути. Вслед за Великой Октябрьской Социалистической революцией наступило несколько лет гражданской войны и войны с иностранными интервентами. Продовольственное, да и топливное положение в Москве, уже подорванное империалистической войной, стало очень тяжелым, многие студенты покинули университет, и ряд математиков временно уехали работать, как тогда выражались, в провинцию, где открывались новые высшие школы.

По совету Н. Н. Лузина я занялся было тогда проблемой сходимости ортогональных рядов функций с интегрируемым квадратом. Кое-что у меня получалось, но трудные материальные условия в Москве мешали научным занятиям. Я поехал в 1919 г. в крупный текстильный центр Иваново-Вознесенск, но тут же получил приглашение в Нижегородский университет, которое, по совету Лузина, принял. Вскоре, однако, я убедился, что в Нижнем Новгороде (ныне Горький) условия для моей научной работы неблагоприятны, и Лузин отозвал меня обратно в Иваново, где я до 1922 г. преподавал в Педагогическом, а затем в Политехническом институте. Эти институты открылись в 1918 г.

Вообще математическая жизнь в Иванове тогда очень оживилась. Здесь работал сам Н. Н. Лузин, часто выезжавший и в Москву, А. Я. Хинчин, В. С. Фёдоров, окончивший Московский университет в 1915 г., и еще несколько ученых. Недолго работал здесь и М. Я. Суслин,

вскоре уехавший к себе на родину в Саратовскую губернию. В Иванове мы, ученики Лузина, часто собирались и образовали нечто вроде математического общества. Сам Лузин, помнится, в этих собраниях не участвовал.

Покинули тогда Москву и еще некоторые математики. Так, И. И. Привалов, опубликовавший в 1918 г. диссертацию «Интеграл Коши», в которой, развивая работы Н. Н. Лузина и свои собственные, блестяще применил методы теории функций действительного переменного к актуальным задачам теории аналитических функций, несколько лет проработал в Саратовском университете и вернулся в Москву в 1922 г. Замечу тут же, что В. С. Фёдоров, занявшийся аналогичной тематикой, так и остался в Иванове. П. С. Александров ненадолго вообще отошел от математики и уехал из Москвы, но уже осенью 1920 г. возвратился в Московский университет. Д. Ф. Егоров и В. В. Степанов из Москвы не выезжали.

Сравнительно недолгое время, проведенное в Иванове, было для меня временем очень интенсивной научной работы. Именно тогда я получил все свои основные результаты по общей теории ортогональных рядов.

Между тем Математическое отделение Московского университета окончили ряд блестящих математиков, пополнивших ряды нашей школы теории функций: в 1919—П. С. Александров, в 1921 г.—Н. К. Бари, в 1922 г.—М. А. Лаврецьев и Л. А. Люстерник и т. д. Когда я в 1922 г. вернулся в Москву и вновь приступил к работе в университете, где мне прежде всего поручили чтение факультативного курса теории тригонометрических рядов, я нашел здесь огромную, исполненную энергии школу так называемой «Лузитании». Я назвал сейчас только немногих ее молодых представителей, составлявших, вместе с моими сверстниками, главное ядро. Несколько особняком был А. Н. Колмогоров. Ему было тогда всего 19 лет и университет он окончил позднее: в 1925 г., но он сразу произвел на меня — и не только на меня — сильнейшее впечатление. Хотя у него еще не было ни одного опубликованного результата и его первые статьи по теории рядов Фурье—Лебега были напечатаны в 1923—1924 гг., мне было ясно, что это самый сильный математик, какого я когда-либо встречал. Вообще, он являлся наиболее крупным в мире молодым математиком той поры. По существу, А. Н. Колмогоров не нуждался в руководстве. Колмогоров не был в числе прямых учеников Н. Н. Лузина,

а занимался с В. В. Степановым. В 1925—1929 гг. (в аспирантуре) официальным руководителем А. Н. Колмогорова был Н. Н. Лузин, которого во время его заграничной командировки заменял я. Вообще же А. Н. Колмогоров шел им самим выбранным путем. Конечно, некоторые работы он готовил совместно с другими математиками. Одно время он заходил ко мне каждую неделю, и в ходе наших бесед возникла одна совместная работа.

Расскажу об этом сотрудничестве немного подробнее. В одной статье, напечатанной в 1923 г., я доказал, что для любой функции  $w(n)$ , растущей медленнее, чем  $\lg^2 n$ , существует ортогональная система функций  $\varphi_n(x)$  и числа  $c_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), для которых ряд Фурье  $\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x)$  расходится всюду, хотя ряд  $\sum_1^\infty w(n)c_n^2$  сходится. При этом система функций  $\varphi_n(x)$  не была ограниченной в совокупности. Возникла мысль, что теорема верна и для функций, ограниченных в совокупности. Мы с Колмогоровым занялись вопросом совместно и нашу работу можно сравнить с прорытием туннеля сквозь гору, ведущимся с двух концов, причем встреча происходит где-то посередине. У каждого из нас кое-что получалось, а кое-что нет, но вдвоем мы нашли полное решение, доказав существование расходящегося ряда Фурье и в случае ограниченной системы ортогональных функций  $\varphi_n(x)$ . Нашу статью, озаглавленную «Sur la convergence des séries des fonctions orthogonales», я послал Г. Вейлю, который поместил ее в «Mathematische Zeitschrift» за 1927 г. Редактировал статью А. Н. Колмогоров. Он умел это делать лучше меня. Попутно, используя один мой прием, он доказал, что в любом тригонометрическом ряде функции с интегрируемым квадратом можно переставить члены так, что получится ряд, сходящийся почти всюду. Он решил поместить теорему в нашей общей статье, причем хотел даже, поскольку применил мой прием, считать теорему общей. На это я заявил: «Я Вашу теорему не доказывал и доказательства ее не знаю, так что пишите отдельную работу». Он ответил: «Отдельная работа не выйдет, да я и не собираюсь ее написать». Тогда мы приняли компромиссное решение. Теорему мы поместили в совместной работе, а в сноске написали, что доказана она Колмогоровым. А. Н. Колмогоров мне рассказал неполное доказательство, на что я

обратил его внимание. В ответ он сказал: «Ах, да, я полного доказательства не дал, но это можно сделать». Насколько мне известно, такое полное доказательство Колмогоров не опубликовал.

Проблемой сходимости ортогональных рядов занимались многие, и моя совместная с А. Н. Колмогоровым статья повлекла за собой ряд исследований. Упомянутую теорему Колмогорова уже после второй мировой войны полностью доказал польский математик З. Загорский, а вскоре затем П. Л. Ульянов распространил ее на любые полные ортогональные системы.

Среди названных ранее молодых математиков Московской школы теории функций особо выделялся своим дарованием еще П. С. Урысон, приступивший в 1920—1921 гг. вместе со своим другом П. С. Александровым к исследованиям по теоретико-множественной топологии. Об этом подробно рассказано в воспоминаниях П. С. Александрова<sup>10</sup>. Здесь хочу сказать только, что первый результат в этой области, полученный в Москве, как утверждает сам П. С. Александров, принадлежит мне. В ноябрьские дни 1917 г. я доказал следующую теорему. Как известно, канторовой кривой называется замкнутое связное множество без внутренних точек. Спрашивается, может ли быть на плоскости несчетное множество попарно непересекающихся канторовых кривых? Некоторые математики полагали, что их может быть только счетное множество, я же доказал, что их может быть множество мощности континуума. Соответствующая статья «Sur un ensemble de courbes cantoriennes» увидела свет в 32 т. польского журнала «Prace Mat.-Fiz.» за 1922 г. Содействие в ее публикации оказал В. Серпинский, в 1915 г. интернированный в России как австро-венгерский подданный. Д. Ф. Егорову и Б. К. Младзеевскому удалось исхлопотать Серпинскому право жительства в Москве, где он стал свидетелем и в некоторой степени соучастником создания Московской школы теории функций. В 1918 г. Серпинский вернулся в Польшу, именно, в Варшавский университет и здесь стал одним из организаторов и руководителей Польской математической школы, идеально тесно связанной с Московской школой теории функций, а также журнала «Fundamenta mathematicae», начавшего выходить

<sup>10</sup> П. С. Александров. Страницы автобиографии. — Усп. мат. наук, 1979, т. 34, вып. 6 (210); 1980, т. 35, вып. 3 (213). — Примеч. ред.

в 1920 г.; этот журнал вначале был посвящён главным образом теории функции и в нем появилось немало статей советских ученых. Из польских математиков, активно работавших тогда в области теории функций и смежных областях назову еще в алфавитном порядке А. Зигмунда, С. Качмажа, К. Куратовского, И. Марцинкевича, А. Райхмана, С. Сакса — этот список далек от полноты. Так вот, Серпинский вспомнил как-то, что вскоре после Октябрьской революции Н. Н. Лузин показал ему мою статью о канторовых кривых и, когда это стало возможным, предложил послать для публикации в польский журнал, что я и сделал. Впрочем, сказанным и ограничились мои занятия топологией. Создателями большой советской топологической школы явились П. С. Александров и преждевременно скончавшийся П. С. Урысон.

Скажу отдельно еще о Н. К. Бари, которую считаю одной из самых сильных в мире математиков женщин, уступавшую, быть может, только знаменитой Эмми Нётер. Бари некоторое время занималась проблемой единственности тригонометрических рядов, одной из первых, какие я изучал в начале своей научной деятельности. С Н. К. Бари у меня неизменно были очень хорошие товарищеские отношения. Она была весьма общительна и пользовалась всеобщей симпатией окружающих. Характер ее отличался большим благородством. Н. Н. Лузин высоко ценил ее математическое дарование и личные достоинства. У меня с Н. К. Бари есть две общие статьи об интегrale Лебега—Стильеса и свойствах абсолютно-непрерывных функций, напечатанных в «*Comptes rendus*» в 1924 г. и в «*Annali di mathematica*» за 1927 г.

Ко всему сказанному о молодых представителях «Лузитании», начавших свою творческую работу, когда я был еще в Иванове, хочу добавить, что с некоторыми из них я познакомился еще до возвращения в Москву. Это произошло в Петрограде (Ленинграде) в июне 1921 г. на конференции в честь столетия со дня рождения П. Л. Чебышева, куда приехали из Москвы Н. Н. Лузин со многими учениками. Состоявшаяся таким образом встреча двух школ, в то время существенно различавшихся по своим интересам, оказала немалое влияние на дальнейшее развитие математики в Советском Союзе.

*B.* — Расскажите, пожалуйста, о своей работе по возвращении в Москву из Иванова.

*O.* — Я уже сказал, что вернулся в Московский универ-

ситет в 1922 г., почти в одно время с И. И. Приваловым. Некоторое время я преподавал также — вел практические упражнения — по совместительству в Лесотехническом институте, где тогда читали лекции Н. Н. Лузин и О. Ю. Шмидт. В научной области мои интересы расширились. Кроме теории ортогональных рядов я стал заниматься теорией конформных отображений. В 1923 г. я познакомился с одной статьей датского математика Гаральда Бора, брата знаменитого математика, в которой автору удалось ослабить достаточные условия конформности отображения при растяжении фигур. Я нашел более слабые условия при повороте фигур, что было, по-видимому, труднее. Заметку на эту тему я послал Г. Бору, который ответил, что в моей постановке задача действительно трудная, что он безуспешно пытался ее решить и что он переслал мою статью «Sur la représentation conforme des domaines plans» в «Mathematische Annalen», где она и была напечатана в 95 томе за 1926 г. Потом я еще более ослабил найденные мною условия. Я продолжал заниматься тем же вопросом во время парижской командировки 1927 г., в августе 1928 г. сделал на эту тему доклад на Международном математическом конгрессе в Болонье, а закончил работу над этой проблемой уже в Москве. Так возникла целая серия статей и заметок, печатавшаяся с 1926 по 1933 г. Затем я окончательно возвратился к теории тригонометрических и общих ортогональных рядов.

*B.* — Каковы Ваши впечатления от упомянутой Парижской поездки?

*O.* — В Париж я поехал в январе 1927 г. на годичный срок в качестве стипендиата Рокфеллеровского фонда. Такие стипендии предоставляются специальным научным комитетом ученым не старше 35 лет; мне было тогда 34 года. Стипендия составляла 100 долларов в месяц, тогда этого вполне хватало на жизнь: ведь доллар в то время не был так обесценен, как ныне. Жил я в Париже в небольшом отеле «Parisiana» близ Пантеона, в д. 4 по улице Турнэфора. Там обычно останавливался Н. Н. Лузин, который мне рекомендовал эту гостиницу. Здесь устроились приехавший вскоре после меня, только на более короткий срок М. А. Лаврентьев, а также приехавшие весной того же года Н. Н. Лузин с женой.

По приезде в Париж я прежде других математиков посетил А. Данжуа. Он сказал, что хорошо энтаст мои работы и у нас сразу установились дружеские отношения. А. Дан-

жуа был очень дружен с Н. Н. Лузиным. Впрочем, этот талантливый французский математик в то время мало работал творчески.

Тут же я стал регулярно посещать известный семинар Ж. Адамара в Collège de France. Здесь ставились и обсуждались доклады по самым разнообразным вопросам математики и ее приложений. Например, один французский ученый сделал на нем сообщение о работах Э. Шредингера по квантовой механике. Сам я выступил на семинаре с двумя докладами о своих работах — по теории конформных отображений и по теории ортогональных рядов. При этом я убедился, что Адамар действительно мало знаком с современной теорией функций: он попросил меня напомнить определение меры множества. Упрекать за это Адамара нельзя: ему было тогда 62 года, и он продолжал научную работу в выбранных им ранее классических областях анализа. Встречался я с П. Монтелем, занимавшимся теорией функций комплексного переменного; но у него, естественно, установился более тесный контакт с М. А. Лаврентьевым, с которым его связывали общие научные интересы. Разумеется, я посетил также Э. Бореля и А. Лебега, но они оба уже не работали творчески; был и у Фреше, занятого далекими от моих проблемами. Все это были, что называется, визиты вежливости. Некоторое время я слушал лекции по дифференциальной геометрии Э. Картана. Однако это была совсем далекая от меня область, к тому же приехал я в середине учебного года, когда половина курса была прочитана. Зато мне удалось получить запись лекций Картана, которую я передал в Москве профессору С. П. Финикову, издавшему их перевод. Вообще же я в Париже очень много работал, читал новейшую литературу и подготовил материалы для ряда статей.

Часть лета 1927 г. Н. Н. Лузин с женой и я, а также приехавшая тогда во Францию Н. К. Бари, провели, по приглашению А. Данжуа, с его семьей на о. Олерон. Как я сказал уже, Данжуа и Лузина связывали глубокое взаимное уважение и дружба. И другие французские математики весьма уважали Лузина, например, Адамар или Лебег, как это видно из его предисловия к французскому изданию книги Лузина по теории *A*-множеств<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> См.: Историко-математические исследования, вып. XXIII. с. 341—342. В этом выпуске опубликованы сохранившиеся письма Н. Н. Лузина к А. Данжуа (с. 314—348), а в XXIV вып. обзор писем А. Данжуа к Н. Н. Лузину (с. 362—368). — Примеч. ред.

Подведя итог нашей беседе, хочу прежде всего сказать, что развитие теории функций действительного переменного успешно продолжалось и далее, как в метрическом, так и в дескриптивном направлениях. При этом школа вышла за пределы Московского университета и приобрела всесоюзный характер. Не менее успешно расцвело уже не раз упоминавшееся другое направление — применение методов теории функций действительного переменного в области комплексного переменного.

Вместе с тем, уже в первом пятилетии 20-х годов от школы теории функций отделяются новые направления, вскоре оформляющиеся в большие самостоятельные школы (например, топологическая школа); одновременно теоретико-функциональные методы и идеи получают все более широкое и плодотворное приложение в других областях математики — теории чисел, теории вероятностей, вариационном исчислении, теории дифференциальных уравнений и т. д. и т. п. Но это уже предмет истории советской математики, а не моих личных воспоминаний. Заканчивая же свои воспоминания, отнюдь не полные и ограниченные первыми 10—12 годами моей научной работы, я хочу сказать, что, как видно, моя научная жизнь оказалась тесно связанной с ранним этапом возникновения и становления Московской школы теории функций, главными вдохновителями и организаторами которой были Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин.