

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Задача составления «Курса Анализа» для высших технических школ есть одна из самых трудных и, вместе с тем, одна из наиболее привлекательных проблем для лиц, интересующихся распространением математических знаний: Трудность этой проблемы вырастает из тех заданий, в которых она должна решиться.

С одной стороны, намечаемый круг читателей обуславливает помещение в книге лишь самых необходимых сведений из анализа, без которых не может обойтись ни один инженер.

С другой стороны, самое изложение этих сведений не может рвать с современным состоянием математических знаний, отставая от него на половину или на три четверти века ¹⁾.

Составление всякого курса анализа должно следовать по равнодействующей этих двух почти взаимно исключających друг друга требований. Отсюда — трудность проблемы.

Каждый составитель руководства анализа знает на опыте ту силу искушения, которую ему приходится преодолевать, чтобы не подпасть под преобладающее влияние одного из перечисленных требований. И, в самом деле, здесь для составителя нужна большая осторожность.

Во-первых, негармоничное подчинение составителя первому требованию неизбежно влечет чрезмерное упрощение текста, переходящее порою в прямое его опрощение. Следуя этому пути, встречаются, прежде всего, тот класс учебников анализа, в которых говорят о непрерывных функциях таким языком, как если бы они всегда имели производную ²⁾, и где обращаются

¹⁾ Чтобы убедиться в справедливости сказанного, достаточно представить себе, что в текущем году появился перевод книги Duhamel'я — *Cours d'Analyse Infinitésimale*, т. I и II. Несмотря на то, что даваемые в ней сведения не выходят за пределы знаний современного инженера, и несмотря на прекрасное и осторожное изложение автора, указанная книга не имела бы ни малейшего успеха именно ввиду несоответствия ее теоретической части текста современному состоянию математического знания: хотя *формулы и факты* остаются в настоящее время теми же самыми, как и во время Duhamel'я, однако *объяснения* к этим формулам и фактам уже изменились, и это одно делает эту книгу в настоящее время уже непригодной к текущему употреблению.

²⁾ Замалчивание непрерывной кривой без касательной есть сокрытие, умышленно или по неведению, *математического факта*, в настоящее время (после работ Helge von Koch, Bieberbach, Denjoy etc.) совершенно наглядного. Замечу, что на памяти ныне живущих понятие равномерной сходимости ряда считалось недоступным, по своей сложности, для университетского преподавания и включалось лишь в программу магистрантских испытаний.

с бесконечными пределами определенного интеграла так, как если бы пределы эти были числами, хотя это влечет уже к фактическим ошибкам счисления. На этом же пути, спускаясь несколькими ступенями ниже, встречаются учебники, в которых пишут знаки многозначных функций, не упоминая о том, какое именно значение принимается за основное, и где разлагают функции в ряды, не указывая на то, где именно пригодны эти разложения. Дальнейшее следование по этому пути приводит к учебникам с явственно выраженным распадом теоретического содержания. В книжках этого рода, обычно весьма тонких по объему, авторы стараются тем не менее удержать всю совокупность фактов, ценою удаления соединительной логической ткани между ними, не замечая, что именно эта операция и делает их книги непреодолимо трудными для учащихся, предоставленных своей одной лишь механической памяти, так как является удаленным именно то самое, что скрепляло эти факты и могущественно помогало памяти. Книжки этого рода обычно кажутся весьма привлекательными для учащихся, еще не знакомых с той истиной, что, чем толще учебник математического анализа, тем он скорее будет прочтен и усвоен; но уже очень скоро наступает разочарование и охлаждение к книге или к предмету.

Во-вторых, также негармоничное подчинение составителя второму требованию обычно приводит к тому, что написанный составителем учебник имитирует университетский курс анализа. Часто бывает, что такая книга не удовлетворяет ни инженеров, ни учащихся университетов, будучи слишком теоретичной для первых и слишком недостаточной для вторых. Чтобы понять, почему это происходит, достаточно обратить внимание на самый процесс составления таких руководств. Обычно при этом исходят от какого-нибудь университетского курса анализа, гарантирующего научность и логичность изложения, и затем подвергают его осторожному процессу сокращения, удаляя из него *факты*, ненужные для инженера, и оставляя, с легкой модификацией, теоретические пояснения и взаимные связи нужных фактов. Но при этом оставлении части теоретического материала представляется почти невозможным сохранить чувство меры: сила логической связи фактов в действительно научном курсе является настолько непреодолимой, что составитель, принужденный следовать ходу логической мысли, продолжает двигаться в этом направлении, так сказать, по инерции и неизбежно вводит вещи, уже в самом деле чуждые для инженера. Именно вследствие этой причины, почти во всех хороших учебниках для высших технических школ мы находим доказательство иррациональности числа $e = 2,71828...$, искушившее составителей своею краткостью и легкостью, но совершенно излишнее для инженера, которому нужны только три его десятичных знака. Другою причиною этого слишком близкого следования университетскому курсу является, по видимому, недостаточно длительный опыт составителей в их личной работе над основами анализа, вследствие чего в учебник проскальзывают многие весьма затруднительные для учащихся рассуждения только потому, что составителю они кажутся совершенными в научном отношении, хотя ближайшее рассмотрение их часто обнаруживает, что в смысле их строгости они немногое стоят и всегда могут быть заменены другими, более интуитивными и

столь же научными. в учебниках рудимен

Таким образом, несмотря на относительнейшим образом с лиза и поэтому, как срок своего обращен Случай элементов Ел подтверждением этой

Современное у функций действител самое понятие стро что постоянное *выи* и для специально в служить теорема Ис это — лишь о безук к более ясному или считать более ясно речию. Именно сов равноценными, в с казались совершен сделал важный п употреблении нем считавшихся ранее

Предлагаемы *менты Диффере* интересную и сча мянутых обопх т направлена ниже культурную и дейс ного вкуса спец совершенно прав образы, смело мож самообразования. анализа, но еще тонкими замечан катных местах внимание авторе

¹⁾ Как на при тие выпуклости и т является теория ра интересной, но уде

²⁾ Обычно тс мкнутых кривых к дення из системы теорем, обычно на

столь же научными. Этою же причиною может быть объяснено сохранение в учебниках рудиментарных понятий и теорий ¹⁾).

Таким образом, учебник анализа для высших технических школ, несмотря на относительную инвариантность излагаемых им фактов, всегда теснейшим образом связан с текущими научными взглядами на основы анализа и поэтому, как бы совершенно он ни был написан, имеет определенный срок своего обращения, не превышающий длительности жизни этих взглядов. Случай элементов Евклида можно, повидимому, в настоящее время считать подтверждением этого.

Современное учение об основах анализа, раскрывающееся в теории функций действительного переменного, в настоящее время подверглось критике, самое понятие строгости математических доказательств, при чем оказалось, что постоянное *выполнение* абсолютно-строгих доказательств недостижимо и для специально научных трактатов. Классическим примером тому может служить теорема Jordan'a ²⁾. Все, о чем можно говорить в этом отношении, это — лишь о безукоризненной редукции сложного к более простому и неясного к более ясному или, точнее, к тому, что мы в данный момент соглашаемся считать более ясным или, по крайней мере, не могущим привести к противоречию. Именно современная критика математических доказательств и сделала равноценными, в смысле строгости, такие рассуждения, которые еще недавно казались совершенно неравноправными в отношении их научности. Этим сделан важный шаг по пути освобождения педагогики от принудительного употребления немногих форм математических доказательств, несправедливо считавшихся ранее единственно-строгими.

Предлагаемый вниманию русского общества учебник Грэнвиля — *Элементы Дифференциального и Интегрального Ичисления* представляет интересную и счастливую попытку гармонического согласования вышеупомянутых обоих требований. Это есть именно та из редких книг, которая направлена инженерам, но которая совмещает с простотою изложения столь культурную и действительно научную его форму, что не оскорбляет изощренного вкуса специалиста-математика и, вызывая в уме своего читателя совершенно правильные, в современном смысле, математические понятия и образы, смело может быть рекомендована и одиноко занимающемуся, в целях самообразования. Автор этой книги не только тонкий знаток современного анализа, но еще и выдающийся педагог. Книга его вся испещрена такими тонкими замечаниями и обращениями к учащемуся, делаемыми в самых деликатных местах рассуждений, что обнаруживает непрерывно устремленное внимание автора на ум читателя и держащуюся на-стороже постоянную

¹⁾ Как на пример таковых достаточно указать на исчезающее, правда, теперь понятие выпуклости и вогнутости кривой *по отношению к оси абсцисс*. Другим примером является теория раскрытия всех видов неопределенности, некогда бывшая, без сомнения, интересной, но удерживаемая в настоящее время в учебниках лишь по традиции.

²⁾ Обычно то, что называют *теоремой Jordan'a*, есть лишь редукция свойства замкнутых кривых к свойству замкнутых многоугольников. Но таковое, для своего вывода из системы аксиом Геометрии, требует около трех десятков предварительных теорем, обычно никогда не даваемых.

готовность направить его по надлежащему руслу там, где для читателя есть опасность, вследствие двусмысленности символики Бесконечно-Малых, пойти в ложном направлении. Достаточно просто взглянуть на текст и примечания автора [«учащийся не должен забывать, что...» (стр. 69); «необходимо напомнить, что...» (83); «под этим символом подразумевается, что...» (стр. 94); «слово *очевидно* в этом месте употреблено...» (стр. 123); «термин *немного меньше...*» (стр. 125); «читатель должен дать себе ясный отчет...» (стр. 145); «читатель не должен забывать, что *и* не есть подлинная сумма...» (стр. 224), и т. д. (см. также стр. 35, 46, 96, 147, 173, 215, 248)], чтобы убедиться в справедливости сказанного.

Я не хочу этим сказать, что предлагаемый учебник уже достиг степени идеала: в нем еще есть вещи, подлежащие изменению (вроде исключения неопределенных форм, удержанных по традиции английским автором, и т. д.), каковы и будут произведены в следующих изданиях. Я желал бы только указать, что решение, найденное автором, в самом деле правильно для современной высшей технической школы: это обнаруживается и большою гибкостью учебника, обслуживающего, с одной стороны, высшую английскую школу и, с другой стороны, имеющего редкий успех в настоящее время у учащихся русской школы, несмотря на известную всем педагогам вступительную их подготовку.

Задачник, соединенный с текстом, еще более увеличивает ценность книги, служа ведению практических упражнений.

Лично на мне лежал лишь общий просмотр хода рассуждений текста. Все детали текста, равно как испытание правильности ответов всех задач, путем систематического их перерешения — выполнены моим ассистентом Николаем Петровичем Тарасовым, которому и выражаю глубокую благодарность.

Профессор Николай Лузин.

Для удобства

1. Бином Н

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

Пишут так:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

где C_n^k есть число

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.

3. В полном

если	b^2 —
»	b^2 —
»	b^2 —

4. В приве

имеем:

Элементы диф