

Bewegungen im unendlichen Tonraum: Techniken dynamischer Stimmungen

Levin Eric Zimmermann

levin.eric.zimmermann@posteo.eu

10. Oktober 2018 (rev. 9. April 2021)

1 Der unendliche Tonvorrat

1985 hielt Gerhard Klösch in Salzburg einen Vortrag mit dem Titel *Der unendliche Tonvorrat der reinen Stimmung und seine Realisierung durch relationale Notenschrift und Schiebetastatur*. Im Vortrag beschrieb Klösch zwei Skalen, die vom Modell der Oberton- und Untertonreihe abgeleitet seien. Auf die Skalen übertrug er anschließend “das Rechenschieber-Prinzip” [2, S. 218], sodass zwei Skalen gegeneinander verschoben werden konnten. Die Darstellung ist eine Möglichkeit Skalenbildungen und Modulationen in reiner Stimmung zu visualisieren. Klösch schlug plastische Nachbildungen der Skalen als Lehrmaterialien für den Harmonielehreunterricht vor. Im Gegensatz zum chromatischen Klavier, seien die harmonischen Beziehungen und Bewegungen damit einfacher nachzuvollziehen. Anhand des Rechenschieber-Prinzips werde die (theoretische) Unendlichkeit der Tonhöhen deutlich ¹. Die *relationale Notenschrift* war Klöschs Versuch, die komplexen Verhältnisse innerhalb einer Stimmung mit variablen Tonvorrat zu notieren. Ähnlich wie die *Extended Helmholtz-Ellis II Pitch Notation* ² von Marc Sabat und Wolfgang von Schweinitz agierte sie vorwiegend mithilfe verschiedener Zeichen für die verschiedenen Kommata der einzelnen Primzahlen und ihren Kombinationen [2].

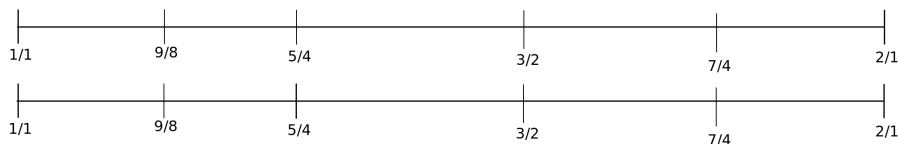


Abbildung 1: Zwei identische, übereinanderliegende Skalen

¹Für das Frequenzverhältnis $\frac{p}{q}$ gilt, $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$. Da die Menge natürlicher Zahlen \mathbb{N} unendlich groß ist, gibt es auch unendlich viele Frequenzverhältnisse $\frac{p}{q}$.

²<http://www.marcsabat.com/pdfs/notation.pdf>

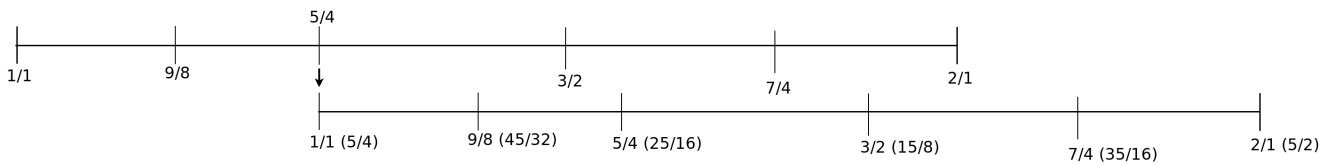


Abbildung 2: Zwei verschobene Skalen ("Rechenschieber-Prinzip" [2, S. 218])

2 Jenseits der Theorie

Ich möchte an Klösch und andere Theoretiker:innen anknüpfen und die spekulativen Texte durch Beschreibungen konkreter Verfahren in der kompositorischen Praxis ergänzen. Das Versprechen der Unendlichkeit der Töne soll nicht als akademische Strenge verstanden werden, sondern in Musik integriert werden. Komponist:innen wie Ben Johnston oder Wendy Carlos haben in ihren Arbeiten aufgezeigt, wie das möglich sein kann. Der folgende Text ist keine Analyse genannter Arbeiten, sondern mein eigener Versuch weitläufige Bewegungen innerhalb eines Tonraumes zu definieren.

Meine Absicht ist es einen Raum für Diskussionen zu eröffnen und Ideen und Denkweisen, die ich für wertvoll empfand, mit Interessierten zu teilen. Ich beginne mit einer Klassifizierung von Modulationen und mehreren Modulationstechniken in reiner Stimmung. Die Voraussetzung für Transformationen zwischen zwei getrennten lokalen Tonmengen (=Modulationen) sind positive Einzelglieder. In den anschließenden *Formale Grammatiken* und *Genetische Algorithmen* ist diese Voraussetzung aufgehoben. Jeder Rest eines lokalen Tonvorrates ist verschwunden. Stattdessen gibt es Intervallmengen, die aussagen, wie sich im Tonraum fortbewegt werden darf. Vor der Zusammenfassung befindet sich ein Abschnitt über Möglichkeiten der Realisation. Der Begriff der Unendlichkeit - der wort-wörtlich verstanden unmöglich musikalisch real werden kann - begreife ich als Metapher für den Versuch eines globalen *Nicht-Stehen-Bleibens*. In meiner Vorstellung ist Klöschs Tonsatz flüchtig, fluide, flexibel. Manchmal verwende ich zur besseren Anschaulichkeit Noten in vierteltöniger Approximation.

3 Modulationen

"Modulation is, I believe, the most interesting territory for the use of ratios in new music." [4, S. 14]

Modulationen sind die einfachste Form einer Bewegung im Tonraum. Lokal wird weiterhin innerhalb eines abgeschlossenen, begrenzten, repetitiven Tonvorrates argumentiert, während global größere Bewegungen entwickelt werden können. Ab bestimmten Geschwindigkeiten der

Modulationen verwischt die Grenze zwischen dem modulierten und dem zu modulierendem Tonvorrat. Ist diese Grenze verschwunden, mag es sinnvoll sein, nicht länger im Modell der Modulation zu argumentieren.

3.1 Klassifizierung von Modulationen

Ich schlage drei Dimensionen vor, nach denen Modulationen klassifiziert werden könnten:

1. *transponierend / mutierend*: Während eine transponierende Modulation die harmonische Struktur des Modus bewahrt, verändert sie sich in einer mutierenden Modulation.
2. *perfekt / imperfekt*: In einer imperfekten Modulation unterscheidet sich die Intonation verschiedener Transpositionen einer Skala. Die Unterschiede beeinflussen nicht die harmonischen Funktionen der Skala.
3. *kontinuierlich / diskontinuierlich*: Bei einer kontinuierlichen Modulation gibt es frequenzgleiche Tonhöhen zwischen dem moduliertem und dem zu modulierendem Tonvorrat. In diskontinuierlichen Modulationen fehlen diese gemeinsamen Töne.

In Tabelle 1 finden sich Beispiele für Kombinationen der Parameter. Die Dimensionen sind nicht diskret, sondern fließend. Eine Modulation von Dur zu Moll verändert die Skala, aber weniger radikal als die Modulation einer Ganztonskala in eine phrygische Kirchentonleiter. Je *mutierender*, *imperfekter* und *diskontinuierlicher* eine Modulation ist, desto größer und gröber ist die Veränderung. Umgekehrt wird der Effekt fließender, kleiner und unmerklich. Neben allgemeinen Kategorien von Modulationen, kenne ich einige Formen, deren besondere Eigenschaften sich unzureichend in den vorgestellten Dimensionen beschreiben lassen. Diese werden im Folgenden dargestellt.

Tabelle 1: Beispiele für Kombinationen der einzelnen Dimensionen

<i>transponierend-perfekt-kontinuierlich</i>	Modulation einer Dur-Tonleiter in eine andere Dur-Tonleiter in gleichstufiger Stimmung. Der Grundton der zweiten Tonleiter entspricht einem Ton der ersten Tonleiter.
<i>mutierend-perfekt-kontinuierlich</i>	Modulation einer Dur-Tonleiter in eine Moll-Tonleiter in gleichstufiger Stimmung. Der Grundton der zweiten Tonleiter entspricht einem Ton der ersten Tonleiter.
<i>transponierend-imperfekt-kontinuierlich</i>	Modulation einer Dur-Tonleiter in eine andere Dur-Tonleiter in mitteltöniger oder anderer historischer, nicht-gleichstufiger Stimmung. Der Grundton der zweiten Tonleiter entspricht einem Ton der ersten Tonleiter.
<i>mutierend-imperfekt-kontinuierlich</i>	Modulation einer Dur-Tonleiter in eine Moll-Tonleiter in mitteltöniger oder anderer historischer, nicht-gleichstufiger Stimmung. Der Grundton der zweiten Tonleiter entspricht einem Ton der ersten Tonleiter.
<i>transponierend-perfekt-diskontinuierlich</i>	Wendy Carlos verwendete für ihr Stück <i>Just Imaginings</i> eine 12-tönige Skala in reiner Stimmung. Ein wichtiges Element in diesem Stück ist eine Modulation der Skala durch den gesamten Quintenzirkel, bis die Ausgangsskala wieder erreicht wird. Das ist möglich, weil die Modulationen zwischen den einzelnen Skalen in gleichstufigen Quinten vollzogen werden [1]. Wären die Quinten rein, könnte nicht mehr zur Ausgangsskala zurückgekehrt werden. Weil die Modulation gleichstufig ist, während die Skala rein intoniert wird, ist das Modulationsintervall nicht in der zu modulierenden Skala enthalten. Die Modulation ist <i>diskontinuierlich</i>

3.2 Symmetrien und Geschlossenheit

Die erste Gruppe umfasst Tonmengen mit besonders symmetrischen Modulationen. Die Modulationen sind von endlicher Anzahl und entsprechen mehr einer Erweiterung des stabilen Tonvorrates (wie der 12-tönigen Chromatik) als der Vision einer fluiden Unendlichkeit. Verschiedene Verschaltungen dieser Verfahren haben allerdings das Potenzial größere Bewegungen zu skizzieren. Ich stelle zwei Beispiele für diese Gruppe vor:

- I. • **Definition:** Die Menge I enthält n Intervalle der Form $\frac{p}{q} = k_I * \prod_{i=1}^m (R_i^{x_i})$, $R \in \mathbb{P}$, $x \geq 0$, $k_I = j_I^z$, $z > 0$, $j \in \mathbb{P}$, $m \geq 0$. Die Menge \mathbb{P} ist die Menge aller Primzahlen. Aufgrund der Bedingung $x \geq 0$ sind alle Intervalle g_I von I *otonale* Intervalle ³. $\neg I$ ist die reziproke Menge von I (*utonale* Menge). Die Transformation $f(X)$ multipliziert jedes Element der Menge X mit j_X^{-2z} , sodass $k_{f(I)} = k_{\neg I}$ und $k_{f(\neg I)} = k_I$. Die Intervallstruktur zwischen Elementen der Menge X wird durch die Funktion $f(X)$ nicht verändert.
- **Beispiel:** Für $k_I = 11^1$ sei eine Menge $I = \{\frac{11}{8}, \frac{33}{32}, \frac{55}{32}, \frac{77}{64}, \frac{165}{128}, \frac{231}{128}, \frac{385}{256}\}$ gegeben. Abbildung 3 bis 6 visualisieren jeweils den Tonraum der einzelnen Skalen als Permutationsmatrizen nach Jacques Bertin. Das Verfahren bedingt 26 Töne, die auf vier verschiedenen heptatonischen, komplementären Skalen verteilt sind (I , $\neg I$, $f(I)$ und $f(\neg I)$).

Die Konstante k , die sich durch alle Intervalle zieht, erlaubt die Konstruktion von Transformationsmengen zwischen einer *otonalen* Skala und ihrer *utonalen* Umkehrung. Die Transformationsmengen ermöglichen sanfte, *kontinuierliche* Modulationen zwischen I und $\neg I$. Je größer z in $j^z = k$ ist, desto größer wird die Distanz zwischen den Modulationen. Falls Skalen *otonaler* und *utonaler* Mischverhältnisse verwendet werden (dh. falls $\infty \geq b \geq -\infty$), kann es je nach Inhalt der Menge I zu mehreren Überschneidungen zwischen I , $\neg I$, $f(I)$ und $f(\neg I)$ kommen, sodass die Modulationen *kontinuierlicher* werden. In Extremfällen kann das zu einer Verarmung der Mengen führen. Ein Beispiel dafür wäre die Menge $I = \{(3^1 * 5^1), (3^1 * 5^{-1})\}$ mit $k_I = 3^1$: $\neg I = \{(3^{-1} * 5^{-1}), (3^{-1} * 5^1)\}$, $f(I) = \{(3^{-1} * 5^1), (3^{-1} * 5^{-1})\}$, $f(\neg I) = \{(3^1 * 5^{-1}), (3^1 * 5^1)\}$, sodass $I = f(\neg I)$ und $\neg I = f(I)$.

³Die Begriffe “*otonal*“ und “*utonal*“ wurden von Harry Partch eingeführt. Intervalle seien *otonal* / *utonal*, falls sie sich als (oktavierte) Verhältnisse des Grundtones zu einem Partialton der *harmonischen* / *subharmonischen* Reihe beschreiben ließen.

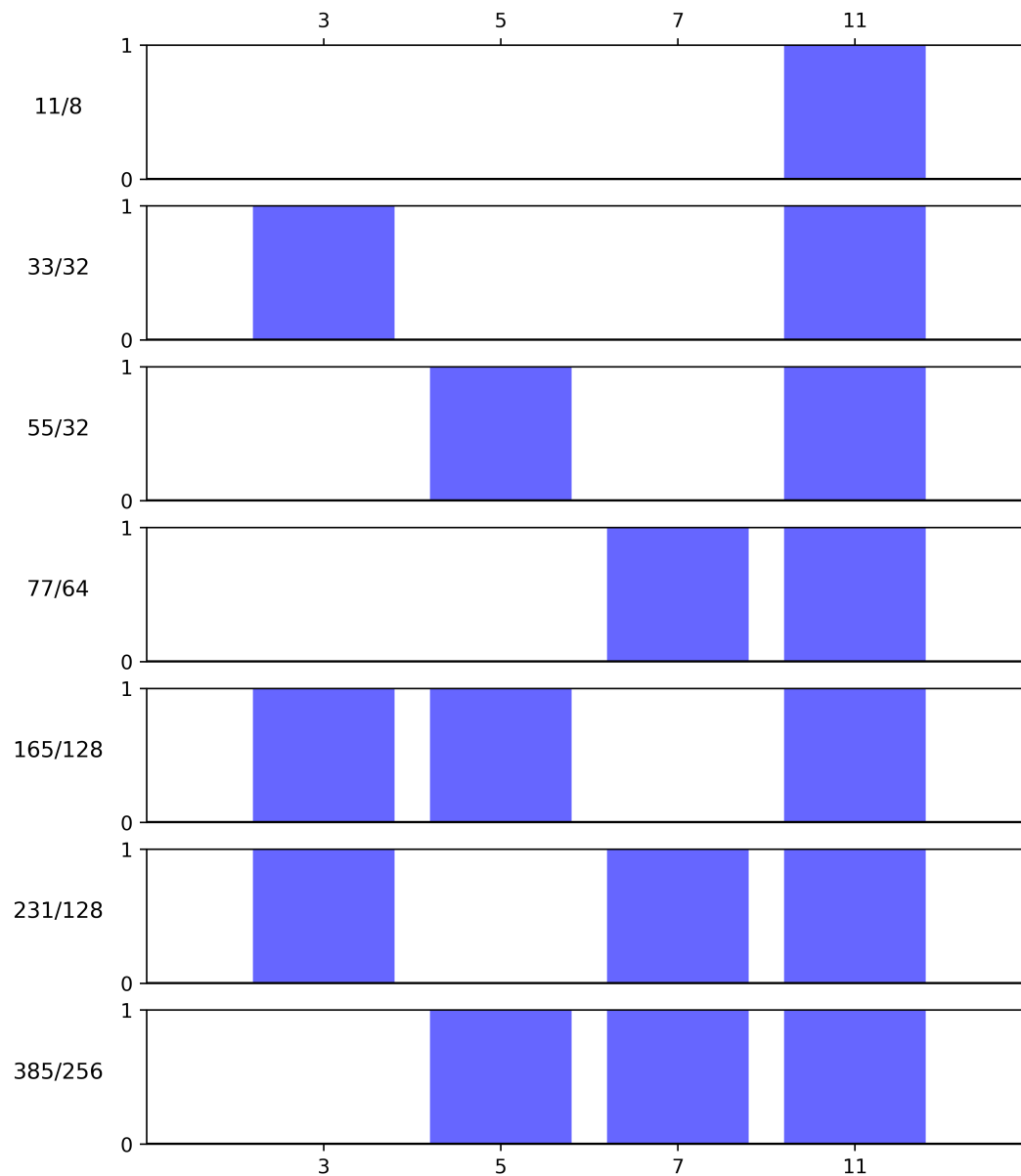


Abbildung 3: Permutationsmatrix von I .

Jede horizontale Leiste repräsentiert eine bestimmte Tonhöhe. Neben jeder Leiste ist die repräsentierte Tonhöhe als Bruch notiert. Farbige Balken symbolisieren Exponenten einer bestimmten Primzahl. Die x-Achse ist mit den Primzahlen beschriftet. Die Größe der Exponenten kann an der y-Achse abgelesen werden. Blaue Balken symbolisieren positive Exponenten. Rote Balken symbolisieren negative Exponenten. Ist kein Balken zu sehen, entspricht der Exponent 0.

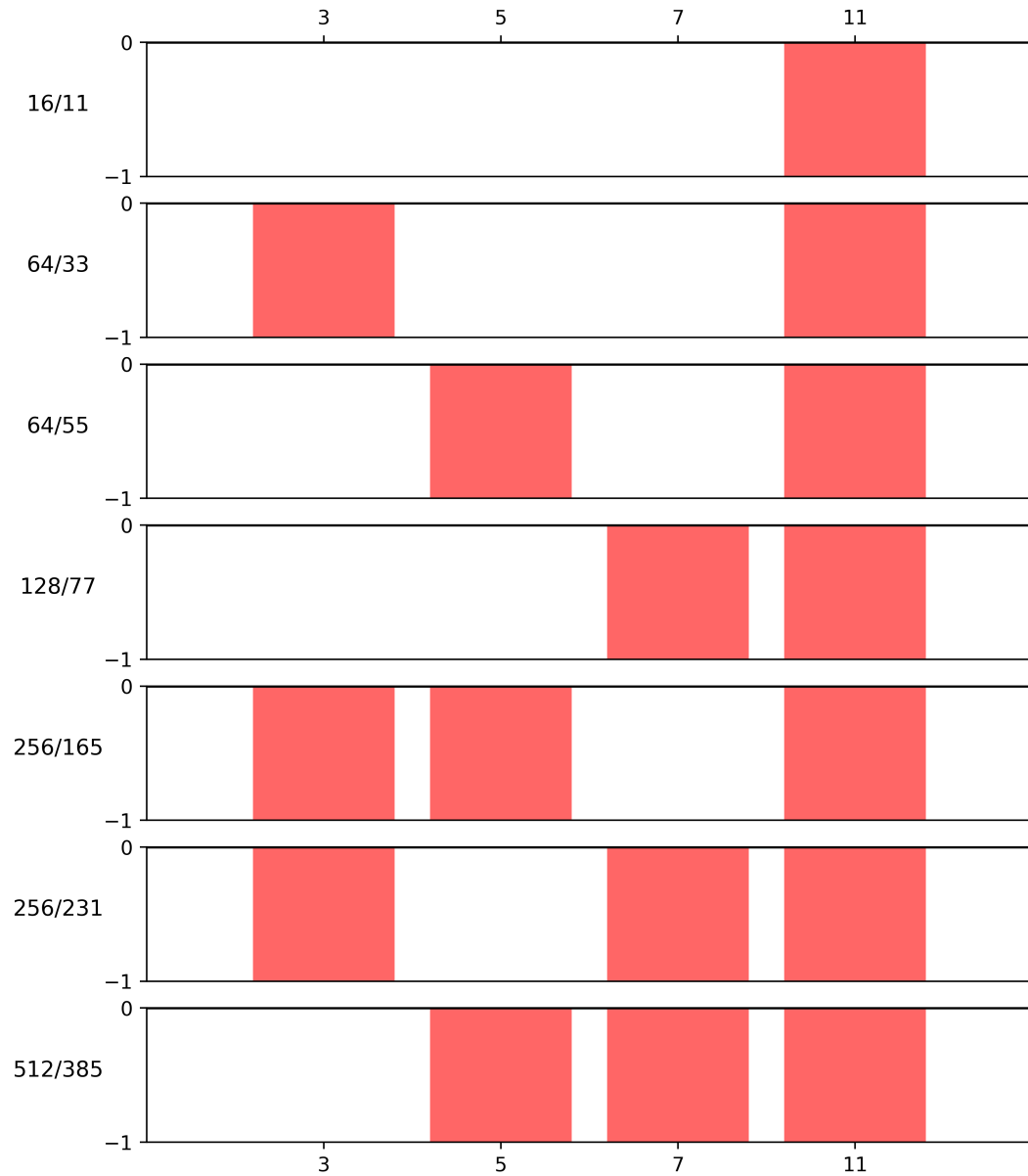


Abbildung 4: Permutationsmatrix von $\neg I$

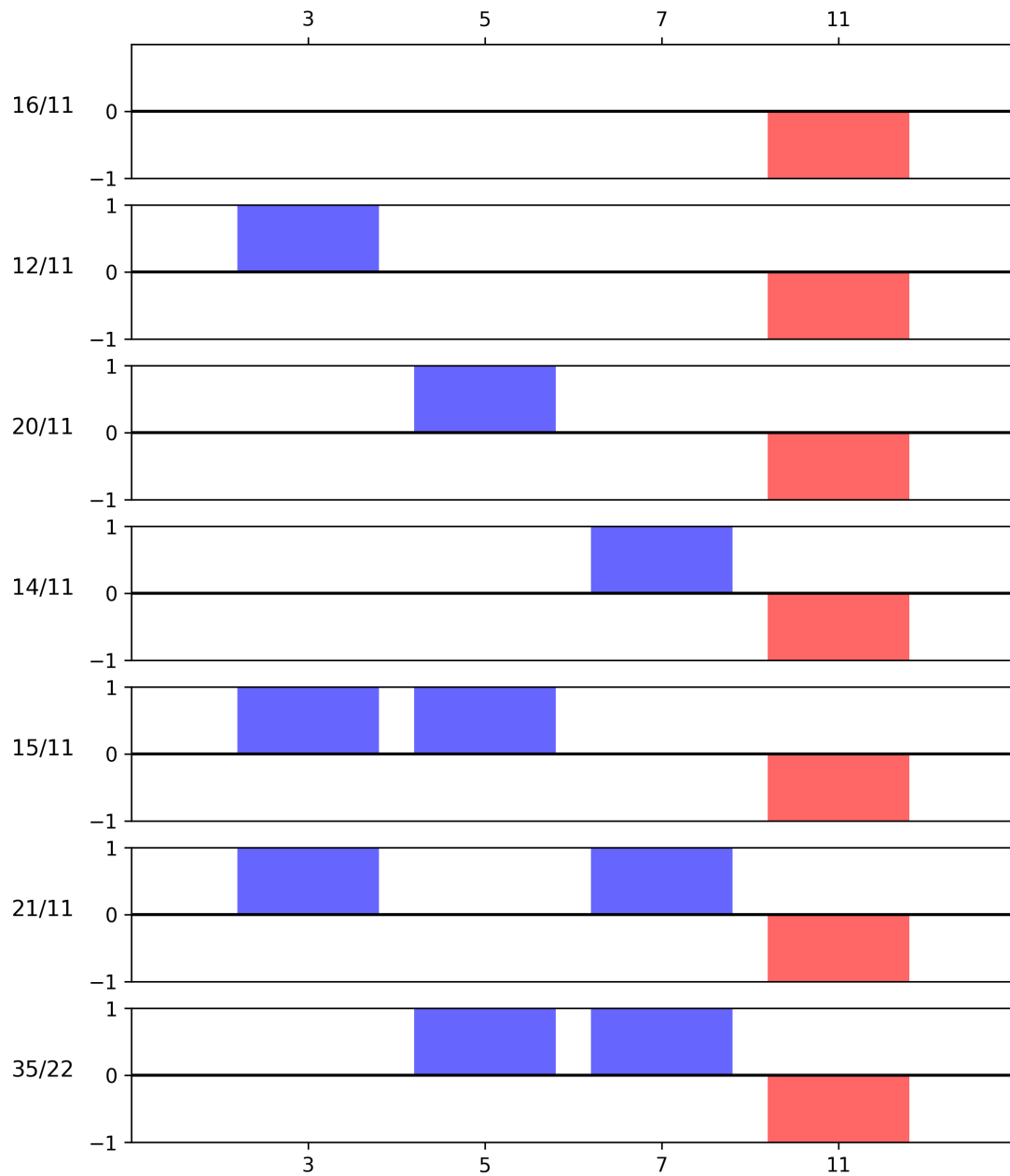


Abbildung 5: Permutationsmatrix von $f(I)$

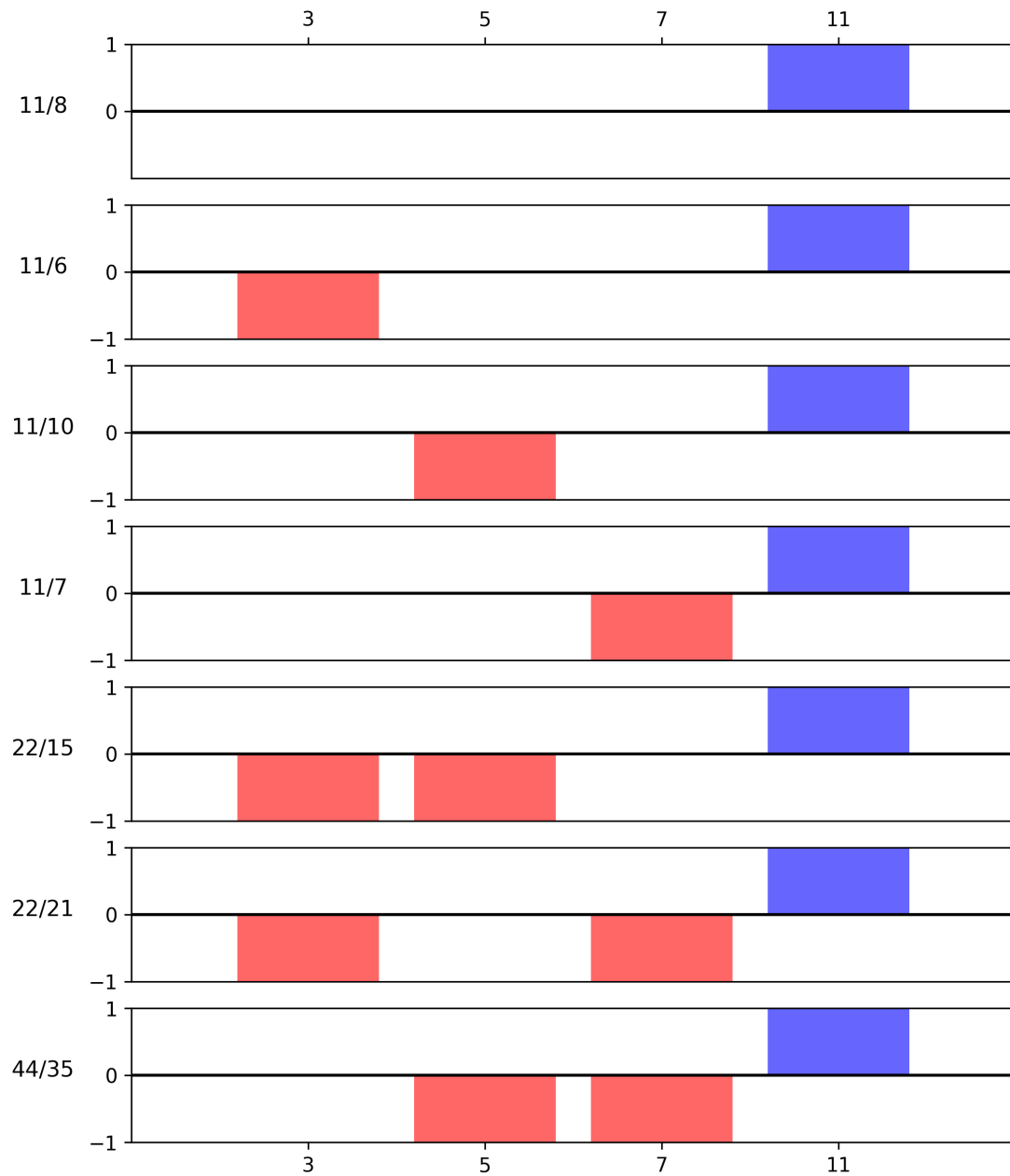


Abbildung 6: Permutationsmatrix von $f(-I)$

2. • **Definition:** Die Menge P enthält n verschiedene Primzahlen für $n \geq 3$. Die Menge S beinhaltet alle $\binom{n}{n-1}$ möglichen Kombinationen aus P . In H sind $m = n - 1$ verschiedene Harmonien enthalten. Zur Konstruktion einer Harmonie h wird jeweils ein Element s der Menge S verwendet. Drei verschiedene Verfahren generieren Tonhöhen für die resultierende Harmonie:

- (a) Das Produkt $\prod(s)$ aller Elemente der Menge s
- (b) Die Produkte der Elemente aller $\binom{n-1}{n-2}$ möglichen Kombinationen aus s
- (c) $\frac{\prod(s)}{\prod(P-s)}$

- **Beispiel:** Für $P = \{3, 7, 11, 13\}$ ($n = 4$) enthält die Menge H vier verschiedene, fünfstimmige Harmonien mit insgesamt 14 verschiedenen Tönen. Die Harmonie $h_0 = \{w_0, w_1, w_{02}, w_3, w_4\}$ des Elementes $i_0 = \{3, 7, 11\}$ besteht aus:

- (a) $w_0 = (3 * 7 * 11)$
- (b) $w_1 = (3 * 7), w_2 = (3 * 11), w_3 = (7 * 11)$
- (c) $w_4 = \frac{(3*7*11)}{13}$

Abbildung 7 visualisiert die symmetrische Struktur der verschiedenen Harmonien und Tonhöhen. Die Pfeile sind beschriftet mit der Differenz zwischen benachbarten Tonhöhen, woran deutlich wird, dass alle Harmonien die gleiche Intervallstruktur haben. Ebenfalls gut ersichtlich ist die Verbindung zwischen den verschiedenen Harmonien: Jede Harmonie teilt mit jeder anderen Harmonie einen gemeinsamen Ton.

Jede Harmonie h in H enthält $n - 1$ Submengen, in denen für jedes Element e_c einer Submenge c gilt $k_c \in e_c$. Aufgrund der weitgehend otonalen Struktur jeder Harmonie h in H und der Konstanten k in c können aus jeder Submenge drei weitere Harmonien generiert werden $(\neg I, f(I), f(\neg I))$. Die gesamte Anzahl verschiedener Tonhöhen t bei Erzeugung jeder komplementären Harmonie jeder Subharmonie beträgt $t = 4n^2 - 2n + 2 * \binom{n}{2}$. Für $n = 3$ gibt es 36 verschiedene Tonhöhen. Für $n = 4$ gibt es 68 verschiedene Tonhöhen.

Ich gehe von einem großem Bestand ähnlicher Symmetrien aus. Beide Methoden entdeckte ich durch das Variieren einer *common-product-set-scale*, die vom Stimmungstheoretiker Erv Wilson entwickelt wurde ⁴. Aufgrund der gleichmäßigen Konstruktionsweise dieser Skalen (alle $\binom{n}{k}$ mögliche Kombinationen aus n verschiedenen Zahlen) sind diese per Definition reich an erweiterbaren Symmetrien.

3.3 Manipulationen von Exponenten

Die zweite Gruppe umfasst Operationen, die sich aus dem Vektormodell von Intervallen ergeben.

Beispiel: Der Vektor $v = [-1, -1, 0, 1]$ entspricht dem Frequenzverhältnis $r = \frac{7}{6}$, denn $2^{-1} * 3^{-1} * 5^0 * 7^1 = \frac{7}{6}$.

⁴<http://www.anaphoria.com/wilsoncps.html>

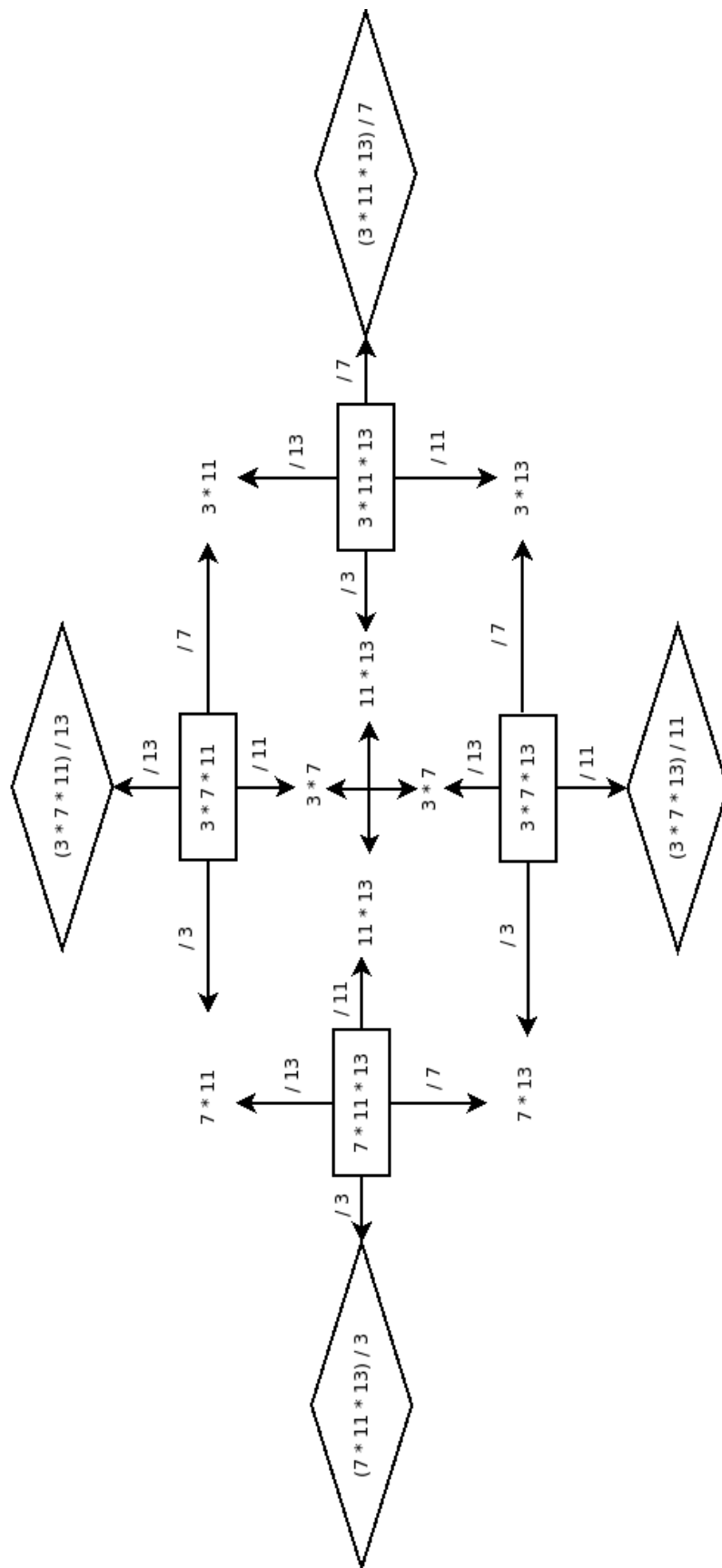


Abbildung 7: Vier strukturgleiche, verschobene Tonmengen

Tabelle 2 zeigt vektortypische Operationen, die auf Tonhöhe übertragen wurden. Zwei weniger typische Verfahren sind:

- *Zersetzen von Intervallen*: Das Generieren neuer Vektoren aus einzelnen Elementen e eines Vektors v für die gilt $e > 0$, zB. $\frac{7}{6} = 2^{-1} * 3^{-1} * 5^0 * 7^1 \rightarrow (\frac{1}{2} = 2^{-1}, \frac{1}{3} = 3^{-1}, \frac{7}{1} = 7^1)$. Auf eine Oktave normalisiert: $(\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4})$.
- *Verschiebung des Vektors*: Das Generieren neuer Vektoren, indem der gesamte Vektor n -Stellen nach rechts oder links verschoben wird. Für diese Operation kann es sinnvoll sein die Primzahl 2 zu ignorieren.
Beispiel: $v_0 = [0, 1, 0]$ ($\frac{5}{4}$) transformiert mit $n = 1$ zu $v_1 = [0, 0, 1]$ ($\frac{7}{4}$) und mit $n = -1$ zu $v_2 = [1, 0, 0]$ ($\frac{3}{2}$).

Die letzte Methode erlaubt das Modulieren beliebiger Abschnitte in andere Modi. Beispielsweise seien die Vektoren $v_0 = [0]$, $v_1 = [1]$, $v_2 = [2]$, $v_3 = [3]$ und die Melodie $M = [v_0, v_1, v_2, v_3, v_2, v_1, v_3, v_2, v_1, v_2]$ gegeben. Die Primzahl 2 werde ignoriert, sodass das erste Element eines Vektors der Exponent für die Primzahl 3 sei.



Dieselben Vektoren um $n = 2$ verschoben, ergebe $([0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 0, 2], [0, 0, 3])$. Während die Struktur der Vektoren sich nur marginal verändert hat, ist das Erscheinungsbild der Notation sehr verschieden:



Tabelle 2: Vektoroperationen angewandt auf Tonhöhe

<i>Addition und Subtraktion</i>	Entspricht der Multiplikation und Division auf der Ebene der Frequenzverhältnisse. Erlaubt eine effizientere Berechnung in Computersystemen.
<i>Summe des Betrags</i>	Die Summe $s = \sum_{i=1}^n e_i $ der Beträge jedes Elements e_i des Vektors v gibt ein einfaches Maß für seine Komplexität. Weil dieses Maß alle Primzahlen identisch gewichtet, sagt es weit weniger über die tatsächliche Wahrnehmung aus als zB. Barlows Harmonizitätsformel.
<i>Seltenheit</i>	Anzahl von Elementen e für die gilt $e = 0$ dividiert mit der Länge des Vektors. Je größer die Seltenheit des Vektors v ist, desto... <ol style="list-style-type: none"> 1. näher an $\frac{1}{1}$ ist der Vektor bei einem niedrigen Wert für $s = \sum_{i=1}^n e_i$. 2. größer sind die Exponenten von wenigen, spezifischen Primzahlen bei einem hohen Wert für $s = \sum_{i=1}^n e_i$.
<i>Dichte</i>	umgekehrte Aussage zur Seltenheit.
<i>Skalarprodukt</i>	Das n -te Skalarprodukt eines Intervalls i erzeugt ein Intervall, dessen Exponenten n mal größer sind als entsprechende Exponenten des ursprünglichen Intervalls. Skalarprodukte sind Möglichkeiten repetitive Skalen wie die pythagoräische Tonleiter zu erklären, die nach diesem Modell aus normalisierten Produkten eines Intervalls (zB. $\frac{3}{2}$) bestehen.
<i>Punktprodukt</i>	Das Punktprodukt zwischen zwei verschiedenen Intervallen berechnet die Summe aller Produkte von Exponenten der gleichen Primzahl. Ein Wert gegen null zeigt an, dass beide Intervalle keine gemeinsamen Primzahlen teilen oder dass beide $\frac{1}{1}$ entsprechen. Ein negativer Wert zeigt das Bestehen gemeinsamer Primzahlen an, deren Exponenten allerdings unterschiedliche Richtungen haben ($b_0 > 0, b_1 < 0$). Ein positiver Wert zeigt das Bestehen gemeinsamer Primzahlen an, deren Exponenten die gleiche Richtung haben (entweder $b_0 > 0$ und $b_1 > 0$ oder $b_0 < 0$ und $b_1 < 0$).



Abbildung 8: Ausschnitt aus *studaço II*

In einer Kanonstudie verwendete ich ähnliche Strukturen. Abbildung 8 zeigt einen zweiktaktigen Ausschnitt. In Takt 1 spielt...

- Instrument 0 die Melodie M rückwärts und invers [Primzahl 7].
- Instrument 1 die Melodie M vorwärts [Primzahl 3].
- Instrument 2 die Melodie M vorwärts und invers [Primzahl 7].
- Instrument 3 die Melodie M rückwärts [Primzahl 3].

Auffällig ist Instrument 4, dessen Melodie sich strukturell grundlegend von den anderen Instrumenten unterscheidet. Die Tonhöhen der Melodie entstehen durch die Addition zeitgleich erklingender Vektoren der anderen Stimmen. Jedes Mal wenn Instrument 0 - 3 einen Ton spielt, wird die Summe aller gegenwärtig erklingender Töne neu berechnet. Der Rhythmus von Instrument 4 ist deshalb ein Summationsrhythmus aus den Rhythmen der anderen Stimmen. Die Operation darf nicht mit einer Ringmodulation verwechselt werden. Ringmodulationen agieren auf der Frequenzebene, während die Addition der Vektoren ein Verfahren des harmonischen Tonraumes ist.

Ähnlich wie Ringmodulationen sind die vektorbasierten Verfahren allerdings sehr abstrakt. Die verschiedenen Manifestierungen des Melodie \mathcal{M} lassen nicht auf den gleichen Ursprung schließen. Das Problem ist die Differenz zwischen theoretischem Modell und musikalischer Praxis innerhalb der reinen Stimmung. Es ist nicht eindeutig, was die Frequenzverhältnisse bedeuten. Ihr Ursprung wird über die harmonischen Reihe unendlich dünner Saiten oder Luftsäulen erklärt. David Lewin schrieb in seinem Buch *Generalized Musical Intervals and Transformations*:

“Personally, I am convinced that our intuitions are highly conditioned by cultural factors. In particular, I do not think that the acoustics of harmonically vibrating bodies provide in themselves an adequate basis for grounding those intuitions. For instance, when we write $\text{int}(C_4, F\#_4) = 45/32 (= 2^{-5}3^25)$, I do not believe that we are intuiting a common partial frequency $F\#_9$ for both C_4 and $F\#_4$, a partial which is intuited forthwith in some harmonic space as both the 32nd partial of $F\#_4$ and the 45th partial of C_4 . Nor do I believe that we intuit a path in harmonic space which corresponds directly to a compound series of individual multiplications and divisions by 2, 3, and 5. That is, if we take the 5th partial of the 3rd partial of the 3rd partial of C_4 , and then find the frequency of which that is the 2nd partial, and then find the frequency of which that is the 2nd partial, continuing on in this way and so arriving eventually at $F\#_5$, I do not believe that the way of getting from C_4 to $F\#_4$ which we have intellectually reconstructed in harmonic space is in any sense an intuition of distance or gesture being measured by the composite ratio $45/32 = 5$ times 3 times 3 divided by 2 divided by 2 and so on.“ [3, 17f]

Lewin argumentiert, dass Hörer:innen westlicher Musiksozialisierung die Beziehung $C_4 - F\#_4$ zuerst mithilfe des tonalen Zusammenhanges verstehen werden: C_4 als Grundton, $F\#_4$ als Terz der Doppeldominanten. Sie würden die Bewegung in verschiedene, einfachere Wege zerlegen: $\frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ [3, S. 18]. Ich halte diese Vorstellung von Bewegung für naheliegend, da die Wahrnehmung einer fallenden Quinte oder einer steigenden großen Terz viel greifbarer, praktischer und präsenter im auditiv-musikalischen Gedächtnis der Musiker:innen und Hörer:innen abgespeichert ist, als die eleganten theoretischen Modelle von komplizierten Obertonstrukturen oder Produkte n-ter Potenzen verschiedener Primzahlen.

4 Formale Grammatiken

Um die von Lewin vorgeschlagenen Intervallaufteilungen systematisch darzustellen, mögen formale Grammatiken verwendet werden. Dafür ersetzt man die aufgegebene Menge T , welche einen diskreten Vorrat an Tonhöhen beschreibt, mit einer neuen Menge I , welche einen diskreten Vorrat an Intervallen enthält. Während die erste Menge T positive Einzelglieder beschreibt, umfasst die Menge I Transformationen, dh. keine Variablen, sondern Funktionen. Mit Kombinationen von Elementen der Menge I können melodische Verläufe beschrieben werden, unabhängig vom Ausgangspunkt. Um die Intervalle in Tonhöhen zu transformieren, können sie akkumuliert werden. Einzelne Elemente der Menge I können durch zwei andere Elemente der Menge I substituiert werden; zB. ist eine fallende große Sekunde dasselbe wie das Produkt aus einer steigenden Quarte und einer fallenden großen Sexte ($\frac{9}{16} = \frac{4}{3} * \frac{27}{32}$). Natürlich kann dieselbe Sekunde auch mit einer steigenden Quarte, einer fallenden großen Sekunde und einer fallenden Quinte beschrieben werden ($\frac{9}{16} = \frac{4}{3} * \frac{9}{16} * \frac{3}{4}$). Die zweite Möglichkeit ist allerdings komplexer, da sie die Sekunde nicht in zwei, sondern bereits in drei verschiedene Intervalle zersetzt. Für jede diskrete Anzahl von Elementen, die ein anderes Element substituieren, gibt es eine endliche Anzahl von Lösungen. Zur Generierung dieser Lösungen, kann von einfachen Produktionsregeln ausgegangen werden, welche alle die Form $A = B * C$ haben. Diese Produktionsregeln können gewonnen werden, indem überprüft wird, welche Kombinationen von zwei Elementen B und C als Produkt jeweils dem dritten Element A entsprechen. Zuletzt ist noch ein Startsymbol notwendig; dh. das Element dessen Substitute gefunden werden sollen. In der ersten Generation werden alle Lösungen berechnet, welche das Startsymbol in zwei andere Elemente zersetzt. Mit jeder weiteren Generation wird ein Element der vorherigen Lösungen in zwei weitere Elemente zersetzt, sodass die Größe der resultierenden Substitute jeweils um eins steigt. Abbildung 9 zeigt den schematischen Aufbau des Zersetzungsprozesses für eine Menge $I = \{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{8}, \dots\}$, den Produktionsregeln $P = \{\frac{2}{1} = \frac{3}{2} * \frac{4}{3}, \frac{3}{2} = \frac{5}{4} * \frac{6}{5}, \frac{3}{2} = \frac{4}{3} * \frac{9}{8}, \dots\}$, dem Startsymbol $S = \frac{2}{1}$ und G Generationen. Während bei Lewin ein komplexeres Intervall in mehrere einfachere zerlegt wird, wird hier ein einfacheres Intervall in komplexere unterteilt.

Die Reihenfolge der Intervalle ist wichtig. Dafür vergleicht man die drei folgenden melodischen Zersetzungen von $\frac{9}{8}$ und ihre akkumulierte Form mit dem Ausgangspunkt $\frac{1}{1}$. Alle drei beinhalten die gleichen Intervalle, allerdings in unterschiedlicher Reihenfolge:

1. Intervalle: $(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{6}{5})$
 Akkumulation: $(\frac{1}{1} - \frac{3}{2} - \frac{9}{8} - \frac{15}{16} - \frac{9}{8})$
2. Intervalle: $(\frac{6}{5} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2} - \frac{3}{4})$
 Akkumulation: $(\frac{1}{1} - \frac{5}{6} - \frac{1}{1} - \frac{3}{2} - \frac{9}{8})$

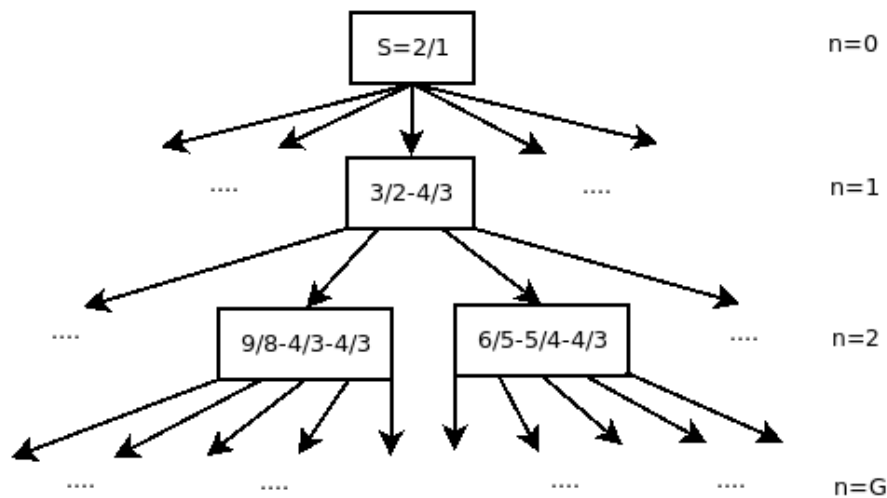


Abbildung 9: Schematischer Aufbau des Zersetzungsprozesses

3. Intervalle: $(\frac{3}{2} - \frac{5}{6} - \frac{3}{4} - \frac{6}{5})$
 Akkumulation: $(\frac{1}{1} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4} - \frac{15}{16} - \frac{9}{8})$

Ich glaube nur die letzte Reihenfolge ist eine eigenständige Form von Intervallzerlegungen des Intervalls $\frac{2}{3}$. Im ersten Beispiel wurde die geforderte Strecke bereits ab dem dritten Ton zurück gelegt. Das zweite Beispiel kehrt verfrüht zum Ausgangspunkt zurück. Eine mögliche Unterteilung des ersten Beispiels wäre $(\frac{3}{2} - \frac{3}{4})$ und $(\frac{5}{6} - \frac{6}{5})$, wobei diese jeweils Substitute für $\frac{2}{8}$ und $\frac{1}{1}$ wären ($\frac{2}{8} = \frac{3}{2} * \frac{3}{4}$ und $\frac{1}{1} = \frac{5}{6} * \frac{6}{5}$). Das zweite Beispiel könnte die gleiche Struktur wie Beispiel 1 beinhalten, allerdings in umgedrehter Reihenfolge.

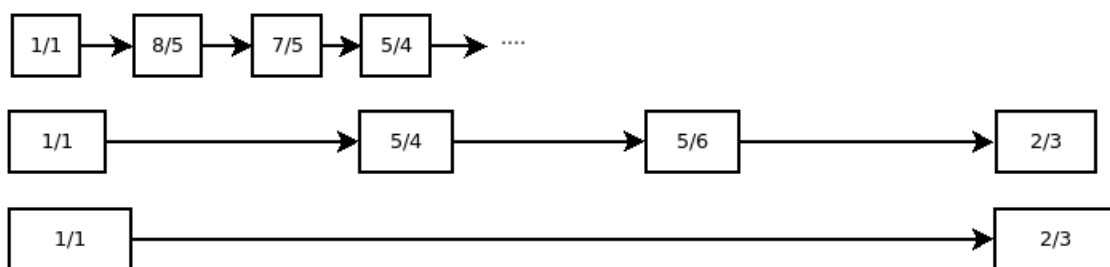


Abbildung 10: Unterteilung einer globalen melodischen Bewegung in lokale Einheiten

Das vorgestellte Modell ermöglicht komplexe, lokale melodische Bewegungen mithilfe von vereinfachten globalen Bewegungen zu erklären und vice versa. Ein Stück könnte beispielsweise mit einem bestimmten Ton anfangen und mit einem anderen Ton, der eine Quarte ($\frac{2}{3}$) tiefer wäre, enden. Abbildung 10 skizziert eine solche Unterteilungslogik. Die einzelnen Schritte könnten die submelodische Bewegungen der Modulationsintervalle zwischen verschiedenen

Tonmengen beschreiben. Umgekehrt hilft die hierarchische Logik des Modells über melodische Bewegungen Informationen zu gewinnen, um einen *bottom-up*-Prozess zu starten: Die gewonnenen Daten können genutzt werden, um Varianten und Mutationen der Bewegung zu generieren. Das Generieren verschiedener Lösungen kann aufgrund der einfachen und logischen Struktur des Modells automatisiert werden. Entscheidend für die Lösungsmenge ist die Ausgangsmenge I . Die Ausgangsmenge kann empirisch gewonnen werden, oder systematisch, indem alle Intervalle generiert werden, die sich aus der Kombination von maximal n verschiedenen Primzahlen der Menge P mit dem maximalen Exponenten $\pm m$ und der maximalen Differenz zwischen zwei Exponenten im gleichen Intervall $\pm o$ ergeben. Clarence Barlow differenzierte zwischen verschiedenen Mengen von Intervallen, indem er von einem bestimmten Grenzwert ausging, der die minimal-erlaubte Harmonizität eines Intervalls in der entsprechenden Menge bestimmte ⁵. In größeren Prozessen könnte der Grenzwert der Toleranz entsprechen, die definiert, welche schlechte Lösungen lokal akzeptiert werden, wenn global bessere Harmonizitätswerte entstehen.

⁵<http://clarlow.org/wp-content/uploads/2016/10/On-MusiquanticsA4.pdf>

5 Genetische Algorithmen

Weil mithilfe von Harmonizitätswerten quantitative Aussagen über Tonhöhebeziehungen getroffen werden können, kann eine melodische oder harmonische Bewegung als Optimierungsproblem verstanden werden. Simultane Stimmen in individuellen Rhythmen vergrößern die Lösungsmenge zu einer Komplexität, die *brute-force*-Suchalgorithmen unmöglich machen. Problem-unabhängige Metaheuristiken wie Genetische Algorithmen ermöglichen den Umgang mit diesen riesigen Lösungsmengen. Die Funktionsweise dieser Algorithmen lässt sich grob umschreiben mit:

1. Randomisiertes Erzeugen eines einzelnen Individuums oder einer Population mehrerer Individuen
2. Berechnen eines Fitness-Wertes für jedes Individuum
3. Generieren einer neuen Generation von Individuen über das Alterieren oder Filtern bestimmter Individuen der vorhergehenden Generation
4. Wiederholen der Punkte 2 und 3 bis ein Individuum mit gewünschtem Wert gefunden wurde oder n -Iterationen durchlaufen sind

Die genauen Details unterscheiden sich von Implementierung zu Implementierung. Das Design von Metaheuristiken ist komplex und eine Aufgabe für Ingenieur:innen. Weil die Algorithmen Problem-unabhängig sind, müssen Anwender:innen sie nicht selbst programmieren. Es muss allerdings eine Funktion definiert werden, die die Fitness-Werte für ein Individuum berechnet. Die Funktion kann einen Wert (*single objective*) oder mehrere Werte (*multi objective*) zurückgeben. Für die konkrete Umsetzung verwende ich die Python-Bibliothek *pygmo* ⁶.

Beispiel 1: Die Menge I enthält alle Intervalle, die sich aus maximal zwei Primzahlen der Menge $P = \{2, 3, 7\}$ mit dem maximalen Exponenten $m = \pm 3$ und der maximalen Differenz zwischen zwei Exponenten $o = \pm 1$ zusammensetzen lassen. Es gibt zwei Stimmen. Die erste Stimme hat den Rhythmus $r_0 = [\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$. Die zweite Stimme hat den Rhythmus $r_1 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Die erste Stimme fängt bei $\frac{1}{1}$ an und legt den melodischen Weg $\frac{5}{4}$ zurück und die zweite Stimme fängt bei $\frac{5}{4}$ an und legt den melodischen Weg $\frac{6}{5}$ zurück. Die Fitnessfunktion besteht aus drei Werten:

1. Betrag der Harmonizität nach Barlow [maxima]
2. Wiederholungen desselben Tones [minima]
3. Anzahl der melodischen Bewegungen i für die gilt $i > 400ct$ [minima]

Gesucht sind die Tonhöhen zwischen Start- und Endton der einzelnen Stimmen.

In Tabelle 3 sind vier verschiedene Ausgaben aufgelistet. Weil der Algorithmus randomisierte Bestandteile enthält, unterscheiden sich Werte bei mehrfachen Durchläufen. Komponist:innen

⁶<https://esa.github.io/pagmo2/>

können zwischen verschiedenen Lösungen wählen, die alle den gewünschten Eigenschaften entsprechen.

Beispiel 2: Die Menge I enthält alle Intervalle, die sich aus maximal zwei Primzahlen der Menge $P = \{2, 3, 7, 11\}$ mit dem maximalen Exponenten $m = \pm 3$ und der maximalen Differenz zwischen zwei Exponenten $o = \pm 1$ zusammensetzen lassen. Es gibt zwei Stimmen. Die erste Stimme hat den Rhythmus $r_0 = [\frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$. Die zweite Stimme hat den Rhythmus $r_1 = [\frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$. Die erste Stimme wiederholt melodisch eine Periode von vier verschiedenen Intervallen, die die Abstände zum nächsten Ton bestimmen. Die Periode der zweiten Stimme besteht aus drei Intervallen. Die erste Stimme beginnt mit dem Ton $\frac{1}{1}$ und die zweite Stimme mit $\frac{2}{3}$. Die Fitnessfunktion fragt nach drei Eigenschaften:

1. Betrag der Harmonizität nach Barlow [maxima]
2. Wiederholungen desselben Tones [minima]
3. Differenz in *cent* zwischen dem ersten und dem letzten Ton derselben Stimme [minima]

Gesucht sind die Intervallperioden der einzelnen Stimmen.

Das zweite Beispiel nutzt Genetische Algorithmen, um unmögliche Objekte zu erzeugen. Periodische Intervallwiederholungen (mathematische Akkumulationen) verbieten die Rückkehr zum gleichen Ton. Aufgrund der Mehrdeutigkeit der Tonhöhenwahrnehmung (*hoch und tief / Intervalle und Harmonie*) ist es aber möglich zu einem extrem ähnlichen Ton zu gelangen; eine Tonhöhe deren Frequenz mit der Frequenz der Ausgangstonhöhe nahezu übereinstimmt.

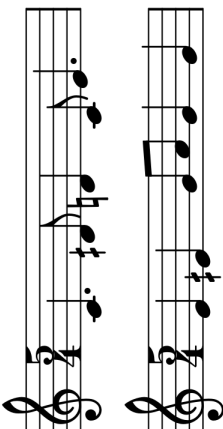
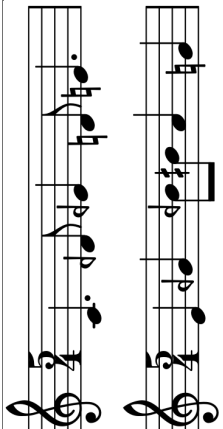
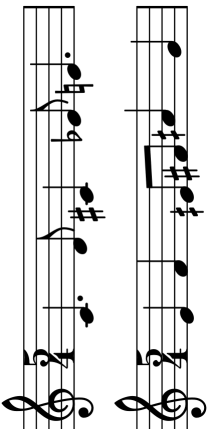
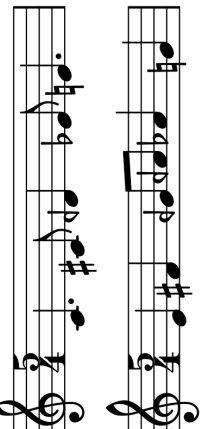


Das Notenbild der zweiten Stimme erweckt den Eindruck, dass die erste Tonhöhe der letzten Tonhöhe entspräche (f_3). Vergleicht man jedoch die Notation mit den tatsächlichen Frequenzverhältnissen kann man sehen, dass die harmonischen Funktionen der beiden f_3 sich unterscheiden:

$$[\frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \frac{5929}{6912}, \frac{343}{432}, \frac{343}{486}, \frac{2033647}{3981312}, \frac{117649}{124416}, \frac{117649}{139968}, \frac{697540921}{1146617856}, \frac{40353607}{71663616}, \frac{40353607}{80621568}, \frac{239256535903}{330225942528}, \frac{13841287201}{20639121408}]$$

Die Differenz zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{13841287201}{20639121408}$ beträgt 10.27 cents. Das Beispiel ist eine doppelt so gute Annäherung wie die Wolfsquinte (23.46 cents). Mehr Versuche und Veränderungen der Parameter können zu besseren Ergebnissen führen. Im Gegensatz zur gleichstufig-temperierten Stimmung findet der Kompromiss nicht mit jedem Intervall erneut statt (−2 cents), sondern geschieht nur im allerletzten Schritt.

Tabelle 3: Verschiedene Ausgabewerte eines Genetischen Algorithmus

Tonhöhen	Intervalle	Fitness	Notation
<p>1. $\frac{1}{1}, \frac{125}{108}, \frac{500}{441}, \frac{50}{49}, \frac{5}{4}$</p> <p>2. $\frac{5}{4}, \frac{96}{1323}, \frac{250}{147}, \frac{75}{49}, \frac{3}{2}$</p>	<p>1. $\frac{125}{108}, \frac{48}{49}, \frac{9}{10}, \frac{49}{40}$</p> <p>2. $\frac{25}{24}, \frac{512}{441}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \frac{49}{50}$</p>	<p>• 0.165</p> <p>• 1</p> <p>• 0</p>	
<p>1. $\frac{1}{1}, \frac{35}{32}, \frac{175}{144}, \frac{10}{9}, \frac{5}{4}$</p> <p>2. $\frac{5}{4}, \frac{35}{24}, \frac{175}{96}, \frac{35}{18}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}$</p>	<p>1. $\frac{35}{32}, \frac{10}{9}, \frac{32}{35}, \frac{2}{8}$</p> <p>2. $\frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{16}{15}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}$</p>	<p>• 0.144</p> <p>• 1</p> <p>• 0</p>	
<p>1. $\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{25}{24}, \frac{75}{64}, \frac{5}{4}$</p> <p>2. $\frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{125}{96}, \frac{25}{18}, \frac{125}{72}, \frac{3}{2}$</p>	<p>1. $\frac{9}{8}, \frac{25}{27}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}$</p> <p>2. $\frac{16}{15}, \frac{125}{128}, \frac{16}{15}, \frac{5}{4}, \frac{108}{125}$</p>	<p>• 0.131</p> <p>• 1</p> <p>• 0</p>	
<p>1. $\frac{1}{1}, \frac{25}{24}, \frac{625}{576}, \frac{75}{64}, \frac{5}{4}$</p> <p>2. $\frac{5}{4}, \frac{25}{18}, \frac{625}{432}, \frac{25}{384}, \frac{25}{16}, \frac{3}{2}$</p>	<p>1. $\frac{25}{24}, \frac{25}{24}, \frac{27}{25}, \frac{16}{15}$</p> <p>2. $\frac{10}{9}, \frac{25}{24}, \frac{9}{8}, \frac{24}{25}, \frac{24}{25}$</p>	<p>• 0.173</p> <p>• 1</p> <p>• 0</p>	

6 Realisation

Zur musikalischen Realisation der theoretisch berechneten Tonverhältnisse können (1) elektronische Klangerzeuger oder (2) Instrumente verwendet werden.

6.1 Elektronische Realisierung

Digitale Software und analoge Synthesizer ermöglichen eine schnelle, flexible Generierung von Mikrotönen. Experimente werden in wenigen Sekunden hörbar, wodurch eine Feedback-Schleife entsteht, mit der empirisches Komponieren möglich wird. Moderne Software wie das freie Mutabor 4 der TU Dresden⁷ oder das proprietäre MTS-ESP von ODDSound⁸ ermöglichen benutzerfreundlichen Zugang zu dynamischen Stimmungssystemen. Bei der Verwendung von synthetischen Klangerzeugern mag allerdings die Gefahr bestehen die Aufmerksamkeit für feine Intonation zu verlieren, falls parallel Prozesse komplexer Klangfarben-Transformationen statt finden. Vielleicht ist das die Ursache für das Favorisieren von klangfarbenarmen Sinusoiden in der Arbeit von Komponist:innen mit einem ausgeprägtem Interesse für Intonation (La Monte Young, Chiyoko Szlavnic, Roman Pfeifer).

6.2 Instrumentale Realisierung

Es sind verschiedene Wege der instrumentalen Umsetzung denkbar:

1. Spezielle Spieltechniken, die mikrotonale Verschiebungen auf temperierten Instrumenten ermöglichen und Harmonische oder Mehrklänge erzeugen

Mir ist kein Verfahren bekannt, dass eine hohe Anzahl differenzierter Intonationen in einem Stück (>100) mit dieser Methode gewinnt.

2. Instrumenten ohne Bünde und Intonation per Gehör (Streicher, Gesang)

Ben Johnstons Streichquartette sind beeindruckte Beispiele dafür. Musiker:innen müssen lernen, verschiedene, potenziell unbekannte Intervalle und Kombinationen von diesen intonieren zu können, was einen großen Probeaufwand impliziert. Zudem muss eine spezifische Notation erlernt werden, die die Frequenzverhältnisse zwischen Komponierenden und Interpretierenden kommunizieren kann.

3. Umstimmen traditioneller Instrumente (Harfe, Cembalo, Clavichord, Klavier)

Tonhöhen könnten asymmetrisch auf Instrumente verteilt werden, sodass...

- (a) die Gesamtzahl der verschiedenen Tonhöhen mit der Anzahl von Instrumenten steigen würde.

⁷<http://www.math.tu-dresden.de/~mutabor/index.html.de>

⁸<https://oddsound.com/mtsespmini.php>

- (b) die Instrumente aufgrund der Beziehung ihrer Stimmung zum gesamten, globalen Tonraum des Ensembles bestimmte Funktionen innerhalb des Stückes einnehmen könnten.

4. Bauen experimenteller Musikinstrumente, die auf die mikrotonalen Bedingungen der Kompositionen angepasst sind

Saiteninstrumente mit verschiebbaren Stegen lassen sich innerhalb eines Stückes umstimmen. Wenn 120 Bund-Markierungen pro Oktave angezeigt werden, gibt es eine maximale Abweichung von ± 5 cents zum gewünschten Intervall (falls sich das Instrument nicht zusätzlich verstimmt). Weil das Verschieben der Stege zu anderen Bünde mechanisch erfolgt, ist es nicht notwendig, dass die Musiker:innen die genau Intonation oder das genaue Intervall zu hören gelernt haben. In Abbildung 11 ist der Ausschnitt eines Stückes für ein solches experimentelles Instrument und eine bundlose E-Gitarre zu sehen. Die Tonhöhennotation zeigt an, welche der 21-Saiten angeschlagen wird. Die fett gedruckten Zahlen markieren die Saite, welche umgestimmt werden soll, während die erste Zahl dahinter jeweils anzeigt, um wie viele Bünde der Steg nach oben (+) oder nach unten (-) verschoben wird. Die dritte Zahl ist die Nummer des Bundes, auf dem der Steg stehen sollte, nachdem er verschoben wurde.

Abbildung 11: Ausschnitt aus einer Partitur für ein Saiteninstrument mit bewegbaren Stegen und einer bundlosen E-Gitarre

7 Zusammenfassung

1. Modulationen lassen sich in drei Dimensionen kategorisieren:

- (a) Intervallstruktur

- (b) Intonation
 - (c) Übergang
2. Um zwischen einer otonalen Skala und ihrer Umkehrung kontinuierliche Modulationen zu ermöglichen, können zwei Transformationsmengen erzeugt werden. Dafür muss eine Konstante k in jeder Tonhöhe der otonalen Skala enthalten sein.
 3. Aus verschiedenen Kombinationen von Primzahlen kann man einen Tonraum definieren, der transponierende, perfekte und kontinuierliche Modulationen zwischen allen beinhalteten Harmonien ermöglicht.
 4. Vektorbasierte Operationen erzeugen mutierende, perfekte und diskontinuierliche Modulationen. Die gewonnenen Modulationen sind aufgrund der Beschaffenheit der Frequenzverhältnisse-Wahrnehmung sehr abstrakt.
 5. Formale Grammatiken erklären Bewegungen im tonalen Raum als Dekompositionen einfacher Intervalle. Mit *top-down* und *bottom-up* Ansätzen generieren Formale Grammatiken Bewegungen.
 6. Werden harmonische und melodische Einheiten quantitativ beschrieben, lassen sich komplexe und kreative Varianten mit Metaheuristiken wie Genetischen Algorithmen erzeugen.
 7. Die Realisation einer großen Menge verschiedener Tonhöhen in demselben Stück kann zusätzliche Techniken erfordern, als das allgemeine Verwenden von Mikrotönen sowieso schon impliziert.

Literatur

- [1] Wendy Carlos. "Tuning: At the Crossroads". In: *Computer Music Journal* 11. Microtonality (1987), S. 29–43.
- [2] Gerhard Klösch. "Mikrotöne: Bericht über das internationale Symposium Mikrotonforschung, Musik mit Mikrotönen, Ekmelische Musik, 10. - 12. Mai 1985 in Salzburg". In: Edition Helbing, 1986. Kap. Der unendliche Tonvorrat der reinen Stimmung und seine Realisierung durch relationale Notenschrift und Schiebetastatur, S. 211–225.
- [3] David Lewin. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Oxford University Press, 2007.
- [4] Daniel J. Wolf. "The Ratio Book". In: Royal Conservatory The Hague, 1999. Kap. Why ratios are a Good / Bad Model of Intonation, S. 211–225.

Abbildungsverzeichnis

I	Zwei identische, übereinanderliegende Skalen	I
2	Zwei verschobene Skalen (“Rechenschieber-Prinzip“ [2, S. 218])	2
3	Permutationsmatrix von I	6
4	Permutationsmatrix von $\neg I$	7
5	Permutationsmatrix von $f(I)$	8
6	Permutationsmatrix von $f(\neg I)$	9
7	Vier strukturgleiche, verschobene Tonmengen	11
8	Ausschnitt aus <i>studajo II</i>	14
9	Schematischer Aufbau des Zersetzungsprozesses	17
10	Unterteilung einer globalen melodischen Bewegung in lokale Einheiten . .	17
11	Ausschnitt aus einer Partitur für ein Saiteninstrument mit bewegbaren Stegen und einer bundlosen E-Gitarre	23