

# 1 提升部分文献阅读

## 1.1 请总结论文：优化过程中处理 H 自由度的不同操作方式。内容包括：具体处理方式，实验效果，结论。

Zichao Zhang, et al. “On the comparison of gauge freedom handling in optimization-based visual-inertial state estimation” . In: IEEE Robotics and Automation Letters 3.3 (2018)

Introduction:

相对于有 7 DoF 的单目 VO 系统，VIO 系统有 4 DoF，本文首次对基于优化的 VIO 状态估计中处理尺度 Gauge 自由度的不同方法进行了比较分析及实验，结果表明 (i) 三种方法的精度和计算时间相似，free gauge approach 略快;(ii) 从 free gauge approach 估计得到的协方差似乎有很大的不同，但实际上和其它两种方法密切相关。

### 1.1.1 3 种处理方式

**1.Fixed gauge** 在一个较小的参数空间中进行优化，在这个空间中不存在不可观测的状态，因此 Hessian 是可逆的。相当于 Solution 需要强制满足硬约束 (hard constraint)。

**2.Gauge prior** 类似于 optimization 增加 regularization 项 (来产生一个可逆的 Hessian)，不满足的话会使得想要优化的目标函数增大 (penalty)，使得 Solution 更加倾向于满足软约束 (soft constraint)。

**3.Free Gauge** 使用奇异 Hessian 的伪逆 pseudo inverse，同时隐式地提供额外的约束 (更新量的范数最小)，使得解唯一。

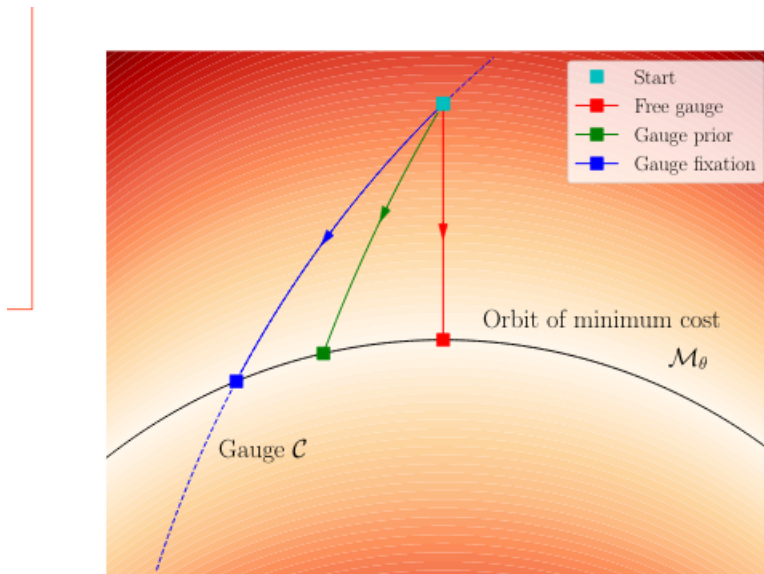


Fig. 2: Illustration of the optimization paths taken by different gauge handling approaches. The gauge fixation approach always moves on the gauge  $\mathcal{C}$ , thus satisfying the gauge constraints. The free gauge approach uses the pseudoinverse to select parameter steps of minimal size for a given cost decrease, and therefore, moves perpendicular to the isocontours of the cost (1). The gauge prior approach follows a path in between the gauge fixation and free gauge approaches. It minimizes a cost augmented by (11), so it may not exactly end up on the orbit of minimum visual-inertial cost (1).

图 1: 三种处理方法比较，背景为参数空间，蓝线 C 为保证 Gauge 一直不变的线，黑线 M 表示 Cost 最小的线，即最后的解

需要注意的是在 rotation parametrization 中, 通过式 (1) 中每个  $\delta\phi^q$  的  $z$  轴分量设为 0 并不能保证  $R^Q$  的 yaw 角固定, 因为每次的  $z'$  轴并不与原来的  $z$  轴重合, 相当于还是会绕着  $z$  轴旋转。只有通过式 (2), 左乘的  $\Delta\phi_0$  等效于之前的连乘的角度, 再将  $z$  轴分量设为 0 后再一次性更新  $R_0$ , 这样就保证了绕  $z$  轴没有旋转。

$$R^Q = \prod_{q=0}^{Q-1} \text{Exp}(\delta\phi^q) R^0 \quad (1)$$

$$R_0 = \text{Exp}(\Delta\phi_0) R_0^0 \quad (2)$$

### 1.1.2 方法细节

1) gauge fixation 是通过在 optimization 中固定第一个相机 pose 的位置和 yaw 角, 相当于将对应的 Jaccobi 设置为 0, 即  $J_{p_0} = 0$ ,  $J_{\Delta\phi_{0z}} = 0$

2) gauge prior 是添加了惩罚项式 (3), 通常将  $\Sigma_0^P = \sigma_0^2 I$ , 则式 (3) 等价于  $w^p \|r_0^p\|^2$ , 其中 weight  $w^p = 1/\sigma_0^2$ , weight 较大时趋向于 fixation, 趋于 0 时, 为 free gauge, 在文章中 V 部分的 A 里详细讨论了不同的 weight 对 accuracy 和 computational effort 的影响, 得到了一个比较合适的 weight (如  $10^5$ )

$$\|r_0^P\|_{\Sigma_0^P}^2, \quad \text{where} \quad r_0^P(\theta) \doteq (p_0 - p_0^0, \Delta\phi_{0z}) \quad (3)$$

3) free gauge 则让参数在优化过程中自由变化, 采用 Moore-Penrose pseudo inverse 或者类似 LM 算法中那样添加阻尼因子, 以此解决求解过程中的奇异性问题。

### 1.1.3 实验效果比较

i) **accuracy** 下表列出了 50 个试验的平均 RMSEs。省略了 gauge prior 的结果, 因为它们与 gauge fixation 在小数点后 8 位以内的结果相同。可以看出, free gauge 和 gauge fixation 之间只有很小的差异, 在所有的仿真配置下中, 两者的精度差不多。

TABLE II: RMSE on different trajectories and 3D points configurations. The smallest errors (e.g., **p** gauge fixation vs. **p** free gauge) are highlighted.

Configuration	Gauge fixation			Free gauge		
	<b>p</b>	<b><math>\phi</math></b>	<b>v</b>	<b>p</b>	<b><math>\phi</math></b>	<b>v</b>
<i>sine plane</i>	0.04141	0.1084	<b>0.02182</b>	0.04141	0.1084	0.02183
<i>arc plane</i>	<b>0.02328</b>	0.6987	0.01303	0.02329	0.6987	0.01303
<i>rec plane</i>	<b>0.01772</b>	0.1668	0.01496	0.01774	0.1668	<b>0.01495</b>
<i>sine random</i>	0.03932	0.0885	0.01902	<b>0.03908</b>	<b>0.0874</b>	<b>0.01886</b>
<i>arc random</i>	0.02680	0.6895	0.01167	<b>0.02678</b>	0.6895	<b>0.01166</b>
<i>rec random</i>	<b>0.02218</b>	0.1330	0.009882	0.02220	0.1330	<b>0.009881</b>

Position, rotation and velocity RMSE are measured in m, deg and m/s, respectively.

ii) **computational effort** 收敛时间和迭代次数如下图 Fig.7 所示。gauge prior 和 gauge fixation 的计算成本几乎相同。free gauge 比其他两种方法稍微快一些。除了 sine 轨迹外, free gauge 的迭代次数更少, 收敛时间更短。需要注意的是, gauge fixation 由于优化中变量的数量较少, 单次迭代使用的时间最少 (见 TABLE I)。

TABLE I: Three gauge handling approaches considered. ( $n = 9N + 3K$  is the number of parameters in (2))

	Size of parameter vec.	Hessian (Normal eqs)
Fixed gauge	$n - 4$	inverse, $(n - 4) \times (n - 4)$
Gauge prior	$n$	inverse, $n \times n$
Free gauge	$n$	pseudoinverse, $n \times n$

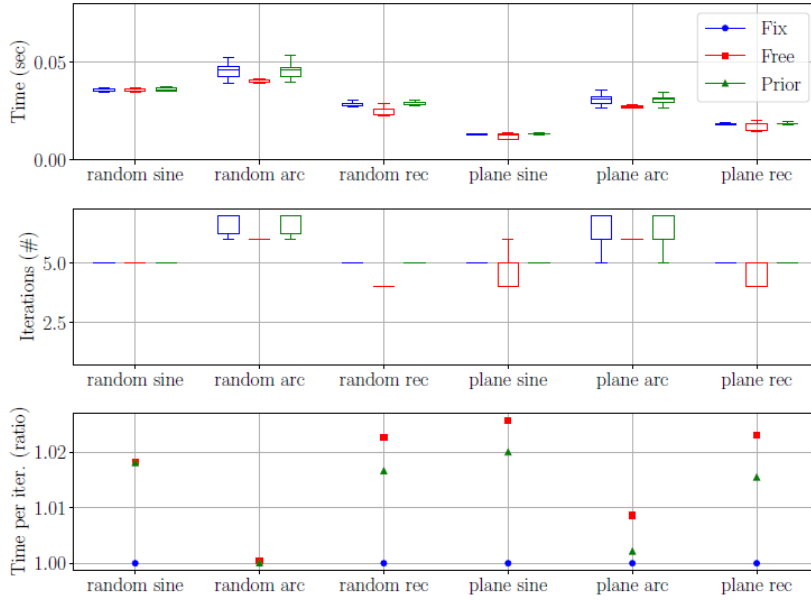


Fig. 7: Number of iterations, total convergence time and time per iteration for all configurations. The time per iteration is the ratio with respect to the gauge fixation approach (in blue), which takes least time per iteration.

iii) **Covariance** (gauge prior 在权重较大时, 等效于 fixation, 所以接下来只讨论了 fixation 和 free 的协方差) 协方差可以理解为 averages of squared perturbations of the estimated parameter. 然后这个 perturbation 可以在参数空间分解为, 1) 沿着  $M$ (相同 Cost) 曲线的切线和 2) 沿着  $C$ (相同 Gauge) 曲线的切线方向两个分量, 但是具有几何意义的只有沿着  $C$  的切线方向的 perturbation, 因为  $M$  方向的即使加入微扰, 还是在  $M$  曲线上, 也只是相当于在 null space 里变化, 没有改变 Cost, 也就没有几何变化, 所以我们关注的只有  $Cov(\theta_C)$ , 但是这两个分量不是正交的, 因此还要投影到沿着  $C$  的切线方向上。具体的操作如下图所示, i) 先乘以  $\partial\theta_C/\partial\theta$  将  $\theta$  变换到  $\theta_C$  (即  $C$  和  $M$  的交点, 同时满足 Gauge fixation condition 和 Cost 不变) 上 ii) 再将这个量投影到  $C$  的切线方向上

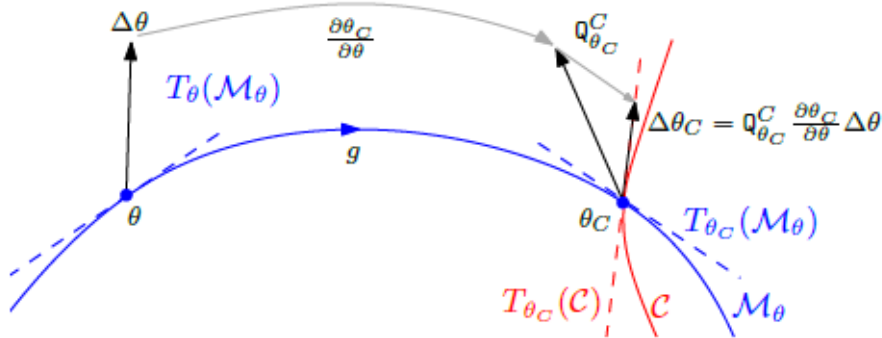


Fig. 8: Illustration of the covariance transformation in the parameter space.  $\mathcal{M}_\theta$  is the subspace that contains all the parameters that are equivalent to free gauge estimation  $\theta$  (i.e., different by a 4-DoF transformation).  $C$  is that subspace that contains all the parameters that satisfy the gauge fixation condition (10). We first transform  $\theta$  to the gauge fixation estimation  $\theta_C$  along  $\mathcal{M}_\theta$ , together with the perturbation  $\Delta\theta \mapsto (\partial\theta_C/\partial\theta)\Delta\theta$ . Then we project the perturbation onto the tangent space to the gauge  $T_{\theta_C}(C)$ , parallel to the  $\mathcal{M}_\theta$ , using the projector  $Q_{\theta_C}^C$ . The average of the outer product of these transformed perturbations is the covariance  $Cov(\theta_C)$ .

仿真结果如下图所示。

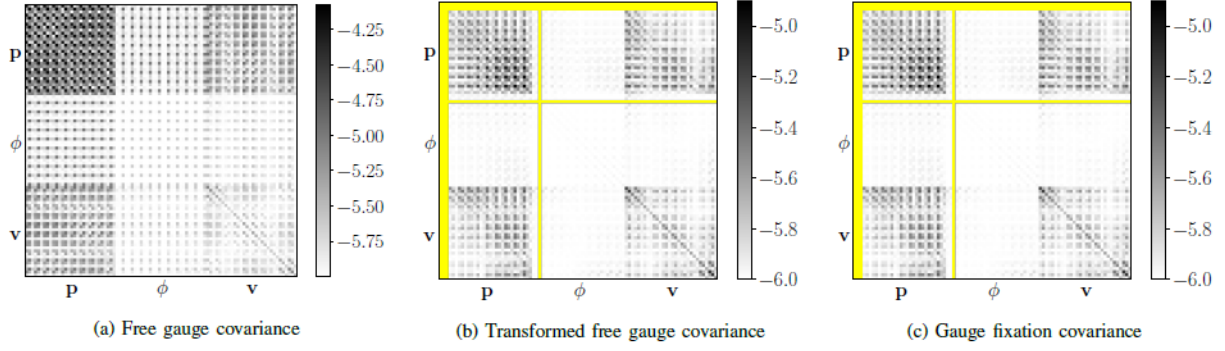


Fig. 9: Covariance of free gauge (Fig. 9a) and gauge fixation (Fig. 9c) approaches using  $N = 10$  keyframes. In the middle (Fig. 9b), the free gauge covariance transformed using (12) shows very good agreement with the gauge fixation covariance: the relative difference between them is  $\|\Sigma_b - \Sigma_c\|_F / \|\Sigma_c\|_F \approx 0.11\%$  ( $\|\cdot\|_F$  denotes Frobenius norm). For better visualization, the magnitude of the covariance entries is displayed in logarithmic scale. The yellow bands of the gauge fixation and transformed covariances indicate zero entries due to the fixed 4-DoFs (the position and the yaw angle of the first camera).

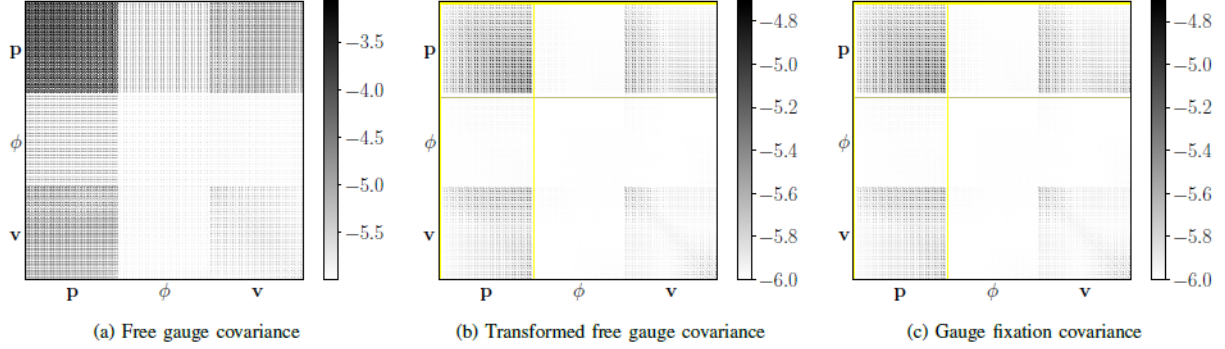


Fig. 10: Covariance comparison and transformation using  $N = 30$  keyframes of the EuRoC Vicin 1 sequence (VII). Same color scheme as in Fig. 9. The relative difference between (b) and (c) is  $\|\Sigma_b - \Sigma_c\|_F / \|\Sigma_c\|_F \approx 0.02\%$ . Observe that, in the gauge fixation covariance, the uncertainty of the first position and yaw is zero, and it grows for the rest of the camera poses (darker color), as illustrated in Fig. 1b.

#### 1.1.4 结论

1) 就 accuracy 和 computational effort 而言

- 这三种方法具有几乎相同的准确性。
- gauge prior 需要选择合适的先验权重，以避免增加计算成本。
- 在适当的权重下，gauge prior 与 gauge fixation 具有几乎相同的性能 (精度和计算成本)。
- free gauge 比其他方法稍微快一些，因为它需要更少的迭代来收敛。但是 free gauge 有一个额外的优点，那就是它是通用的，因此不需要对旋转参数进行任何特殊处理。

2) 就 covariance 而言

- 可以通过线性变换 (12) 将 free gauge 的协方差转化为 gauge fixation。协方差变换方法见 VI-B 节和附录 A。该理论可以在将优化方法作为黑盒时，计算协方差 (即不能直接从测量模型的 Jacobi 计算 Hessian 时)。