1 提升部分: 文献阅读

1 Introduction

Thesis Spline Fusion: A continuous-time representation for visual-inertial fusion with application to rolling shutter cameras [1]

本文介绍了利用已知离散的 Pose 通过 B-spline 曲线来产生连续轨迹, 用来进行多个不同步的传感器的校正以及对卷帘式相机在高速运动时的 distortion 更好的仿真，本门课中主要还是应用 B-spline 的 C^2 特性，经过求导来模拟 IMU 数据。

2 Continuous-time representation

$$\mathbf{T}_{b,a}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{b,a} & \mathbf{a}_b\\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_{b,a}\in\mathbb{SE}3,\quad \mathbf{R}_{b,a}\in\mathbb{SO}3 \tag{1}$$

首先就是常见的 $\mathbb{SE}3$ 下的变换矩阵，从 a 到 b 帧，

$$\Omega=\frac{1}{\Delta t}\log\left(\mathbf{T}_{b,a}\right),\Omega\in\mathbb{R}^{4\times 4} \tag{2}$$

表示了两帧之间的运动除以时间 Δt 之后就可以表示匀速运动下的速度。

$$\mathbf{p}(t)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{p}_i B_{i,k}(t) \tag{3}$$

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}_0\tilde{B}_{0,k}(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_{i-1}\right)\tilde{B}_{i,k}(t) \tag{4}$$

$$\mathbf{T}_{w,s}(t)=\exp\left(\tilde{B}_{0,k}(t)\log\left(\mathbf{T}_{w,0}\right)\right)\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\tilde{B}_{i,k}(t)\Omega_i\right) \tag{5}$$

根据定义下由控制点 p 得到的样条曲线 (3) 改写为用累计基函数来表示的形式 (4) 再将每个控制点之间的位移代入，用李代数的形式来表示 (5)。在本篇论文中采用的是 cubic B-spline，所以需要 4 个控制点（因为是从 0 到 3 阶），使用 $s(t)=(t-t_0)/\Delta t$ 来表示插值均匀分布的时间函数，利用 De Boor-Cox 公式和矩阵表示这个累计基函数，及其导数如式 (6) , 那么样条轨迹中位姿为 (7)

$$\tilde{\mathbf{B}}(u)=\mathbf{C}\begin{bmatrix}1\\u\\u^2\\u^3\end{bmatrix},\quad \dot{\mathbf{B}}(u)=\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\begin{bmatrix}0\\1\\2u\\3u^2\end{bmatrix},\quad \ddot{\mathbf{B}}(u)=\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{C}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\6u\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0&0\\5&3&-3&1\\1&3&3&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{T}_{w,s}(u)=\mathbf{T}_{w,i-1}\prod_{j=1}^{3}\exp\left(\tilde{\mathbf{B}}(u)_j\Omega_{i+j}\right) \tag{7}$$

对于时间的导数见原论文 (5) (6) 式

3 Generative model of visual-inertial data

$$\mathbf{p}_b=\mathcal{W}\left(\mathbf{p}_a;\mathbf{T}_{b,a},\rho\right)=\pi\left(\left[\mathbf{K}_b\mid\mathbf{0}\right]\mathbf{T}_{b,a}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_a^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{p}_a\\1\end{bmatrix};\rho\end{bmatrix}\right) \tag{8}$$

这个公式是将在相机的 a 帧观察到的 p 点，结合逆深度信息，经过相机的内参，和 a，b 两帧之间的变换矩阵，能够投影到 b 帧的画面上。($\pi()$ 是投影到归一化平面的函数) 然后分别对于陀螺仪和加速度计进行积分，利用推导出来的 B 样条曲线，用获取的结果来进行修正。

$$
\begin{aligned}
Gyro(u) &= \mathbf{R}_{w,s}^{\top}(u) \cdot \dot{\mathbf{R}}_{w,s}(u) + bias \\
Accel(u) &= \mathbf{R}_{w,s}^{\top}(u) \cdot (\ddot{\mathbf{s}}_w(u) + g_w) + bias
\end{aligned}
\tag{9}
$$

然后是将问题转换为一个最小化的问题用 Ceres 求解。

$$
E(\theta) = \sum_{\mathbf{p}_m} \left(\hat{\mathbf{p}}_m - \mathcal{W}\left(\mathbf{p}_r; \mathbf{T}_{c,s} \mathbf{T}_{w,s}\left(u_m\right)^{-1} \mathbf{T}_{w,s}\left(u_r\right) \mathbf{T}_{s,c}, \rho \right) \right)_{\Sigma_p}^2 + \sum_{\hat{\omega}_m} \left(\hat{\omega}_m - Gyro\left(u_m\right) \right)_{\Sigma_\omega}^2 + \sum_{\hat{\mathbf{a}}_m} \left(\hat{\mathbf{a}}_m - Accel\left(u_m\right) \right)_{\Sigma_{\mathbf{a}}}^2
\tag{10}
$$

然后后面就是利用拟合出来的曲线连续的特性，对卷帘式相机快门的畸变进行补偿。之后的实验部分还没仔细看，暂时只看了原理部分。

参考文献

[1] Steven Lovegrove. *Spline Fusion: A continuous-time representation for visual-inertialfusion with application to rolling shutter cameras.* BMVC, 2013.