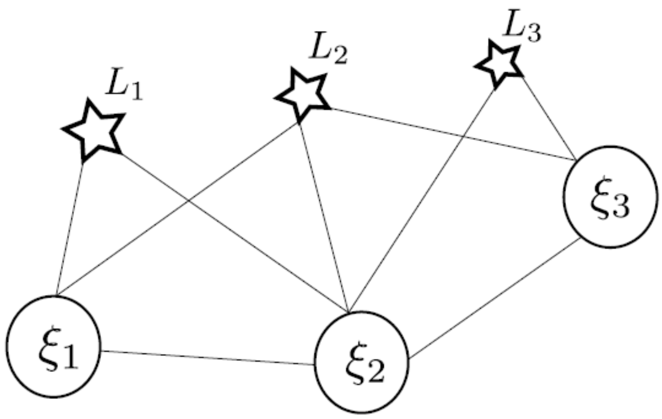
VIO 第四章作业

曾卓

May 2021

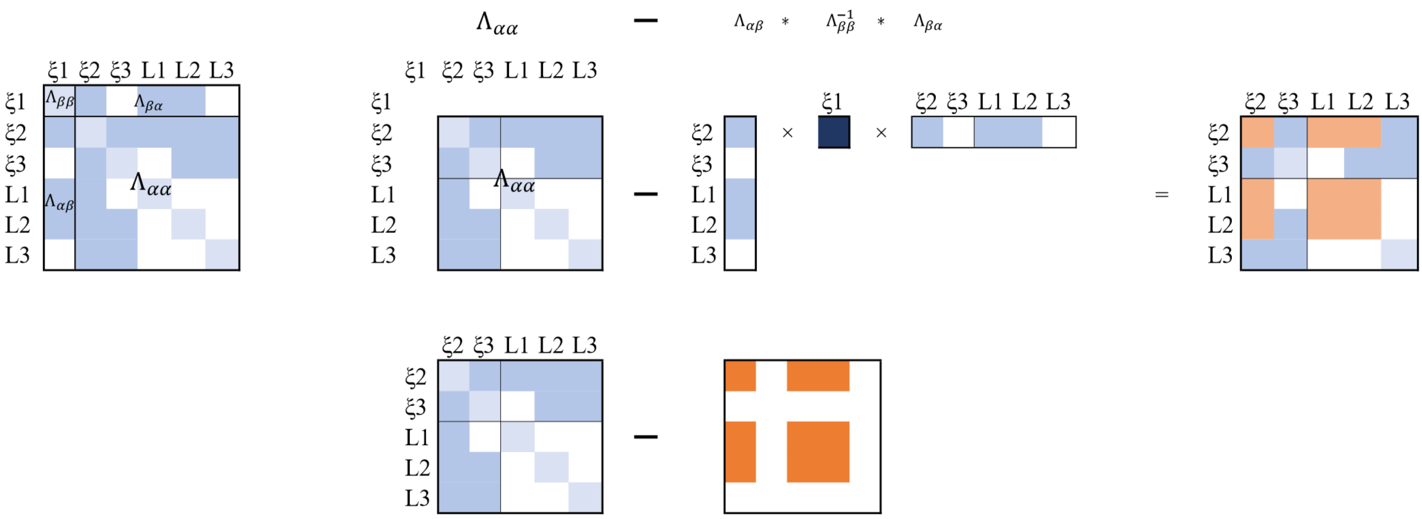
1 第一题

某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 ξ 表示相机姿态，L 表示观测到的路标点。当路标点 L 表示在世界坐标系下时，第 k 个路标被第 i 时刻的相机观测到，重投影误差为 $r(\xi_i, L_k)$。另外，相邻相机之间存在运动约束，如 IMU 或者轮速计等约束。



1 请绘制上述系统的信息矩阵 Λ.

2 请绘制相机 ξ_1 被 marg 以后的信息矩阵 Λ'.



2 第二题

阅读《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

2.1 问题定义

对于参数为 $\boldsymbol{\theta}$ 的概率分布 $p(x|\boldsymbol{\theta})$，此处 x 已知，$\boldsymbol{\theta}$ 为待估计变量, 分别定义了以下三个矩阵:

1. 信息矩阵 Fisher Information Matrix 定义为 $F := \mathbb{E}_{p(x|\boldsymbol{\theta})}[(s(\boldsymbol{\theta})-0)(s(\boldsymbol{\theta})-0)^{\top}]$,

其中 $s(\theta)$ 为 score function，即 log likelihood 函数的导数 $s(\theta) := \nabla_{\theta} \log p(x|\theta)$ 易证其期望为 0。Fisher Information 可以理解为用来最大似然估计的方程 (即 score function) 的方差，也可以理解为 log likelihood 函数在参数真实值处负的二阶导数 (Hessian) 的期望 (证明见 2.3)

2. Hessian 矩阵 实际上经常指的是 log likelihood 函数的二阶导函数

3. 协方差矩阵 Covariance Matrix $\Sigma = cov(X, X) = E[(X - E(X)) \cdot (X - E(X))^{\top}]$

2.2 先证明协方差矩阵和 Hessian 的关系

对于均值为 $\boldsymbol{\mu}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma_{\theta}}$ 的高斯分布

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{N_\theta}{2}} \left|\Sigma_{\boldsymbol{\theta}}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})\right] \tag{1}$$

取负对数后

$$J(\boldsymbol{\theta}) \equiv -\ln p(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N_\theta}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\right| + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) \tag{2}$$

求二阶导后易得 log likelihood 函数的 $Hessian = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$ 即对于高斯分布 Hessian 为协方差矩阵的逆，对于其它分布协方差的逆也可以提供较好的估计（不是高斯分布时，为 ≈，若采用 finite difference 的数值方法时还取决于步长和选取来求 Hessian 的点）。

2.3 再证明 Hessian 和信息矩阵的关系

参考https://wiseodd.github.io/.../fisher-information

Hessian 为二阶导即对一阶梯度的导数

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\log p(x|\theta)} &= \mathrm{J}\left(\frac{\nabla p(x \mid \theta)}{p(x \mid \theta)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)} p(x \mid \theta) - \nabla p(x \mid \theta) \nabla p(x \mid \theta)^{\mathrm{T}}}{p(x \mid \theta) p(x \mid \theta)} \\
&= \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)} p(x \mid \theta)}{p(x \mid \theta) p(x \mid \theta)} - \frac{\nabla p(x \mid \theta) \nabla p(x \mid \theta)^{\mathrm{T}}}{p(x \mid \theta) p(x \mid \theta)} \\
&= \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x \mid \theta)} - \left(\frac{\nabla p(x \mid \theta)}{p(x \mid \theta)}\right)\left(\frac{\nabla p(x \mid \theta)}{p(x \mid \theta)}\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\underset{p(x|\theta)}{\mathbb{E}}\left[\mathrm{H}_{\log p(x|\theta)}\right] &= \underset{p(x|\theta)}{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x\mid\theta)} - \left(\frac{\nabla p(x\mid\theta)}{p(x\mid\theta)}\right)\left(\frac{\nabla p(x\mid\theta)}{p(x\mid\theta)}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \underset{p(x|\theta)}{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x\mid\theta)}\right] - \underset{p(x|\theta)}{\mathbb{E}}\left[\left(\frac{\nabla p(x\mid\theta)}{p(x\mid\theta)}\right)\left(\frac{\nabla p(x\mid\theta)}{p(x\mid\theta)}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x\mid\theta)} p(x\mid\theta)\mathrm{d}x - \underset{p(x|\theta)}{\mathbb{E}}\left[\nabla\log p(x\mid\theta)\nabla\log p(x\mid\theta)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{H}_{\int p(x|\theta)\mathrm{d}x} - \mathrm{F} \\
&= \mathrm{H}_1 - \mathrm{F} \\
&= -\mathrm{F}
\end{aligned} \tag{4}
$$

对于取负对数的时候 $F = E_{p(x|\boldsymbol{\theta})}[\boldsymbol{H}_{\log p(x|\boldsymbol{\theta})}] \approx E_{p(x|\boldsymbol{\theta})}[\Sigma_\theta^{-1}]$
由于 Σ_θ^{-1} 项为 θ 分布的真实协方差矩阵的逆，与 x 无关，故可将期望去掉得到 $F \approx \Sigma_\theta^{-1}$
另外对于高斯牛顿法中 H 矩阵通常是由 $H = J^T\Sigma^{-1}J = \sum_{i=1}^n J_i^T\Sigma_i^{-1}J_i$ 近似得到的, 此处 Σ 为残差项的协方差，与我们上面证明中出现的协方差 Σ_θ 不一样。
所以最后的结论是：协方差矩阵的逆 $\approx$ Hessian 矩阵, 信息矩阵 $=$ Hessian 的期望 $\approx$ 协方差的逆。

3 第三题

请补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出正确的结果。正确的结果为：奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为**7**, 即单目 SLAM 下系统有 7 自由度不可观。

```
H.block(i*6,i*6,6,6) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Ti;
/// 请补充完整作业信息矩阵块的计算
// H.block(?,?,?,?) += ?; //* 3 blocks
// H = | pp pl |
//     | lp ll |
// compute block lp
H.block(6*poseNums + 3*j, 6*i, 3, 6) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Ti;
// compute block pl
H.block(6*i, 6*poseNums + 3*j, 6, 3) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
// compute block ll
H.block(6*poseNums + 3*j, 6*poseNums + 3*j, 3, 3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
```

图 1: 信息矩阵计算代码

```
3.21708e-17
2.06732e-17
1.43188e-17
7.66992e-18
6.08423e-18
6.05715e-18
3.94363e-18
```

图 2: 奇异值分解后，最小的 7 个奇异值