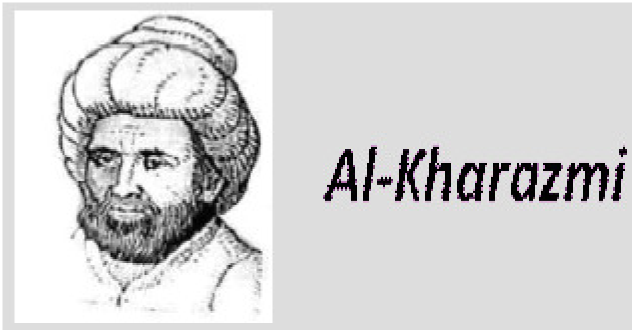
Complexidade

Estruturas de Dados

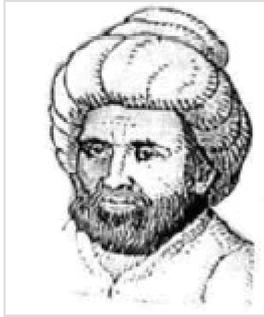
Engenharia da Computação UFC - Sobral

Algoritmo

- Algoritmo é qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores como entrada e produz algum valor ou conjunto de valores como saída.
- Portanto, um algoritmo é uma sequência de passos computacionais que transformam a entrada na saída.

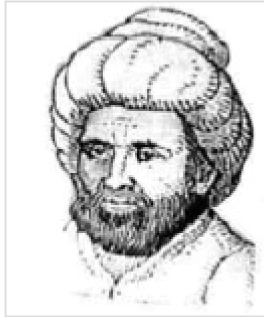


Algoritmo



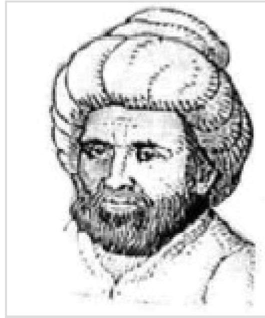
- Ex.: Entrada: Uma sequência de ***n*** números $<a_1, a_2, ..., a_n>$
- Saída: Uma permutação $<x_1, x_2, ..., x_n>$ da sequência de entrada, tal que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$

Algoritmo



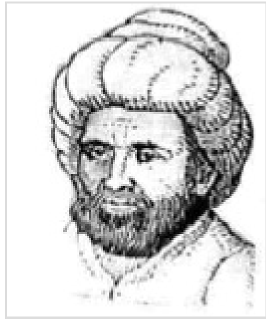
- Um algoritmo é dito correto se, para cada instância de entrada, ele pára com a saída correta.
- A medida habitual de eficiência é a velocidade, isto é, quanto tempo um algoritmo leva para produzir seu resultado. Porém, existem alguns problemas para os quais não se conhece nenhuma solução eficiente. Um subconjunto desses problemas denomina-se NP-Completo

Algoritmo



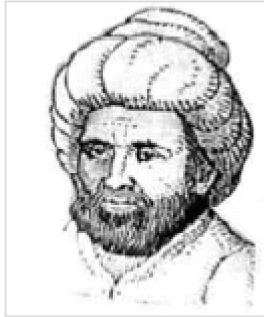
- Por que os problemas NP-Completos são interessantes?
- Embora não tenha sido encontrado nenhum algoritmo eficiente para um problema NP-Completo, ninguém jamais provou que não é possível existir um algoritmo eficiente para esse fim.

Algoritmo



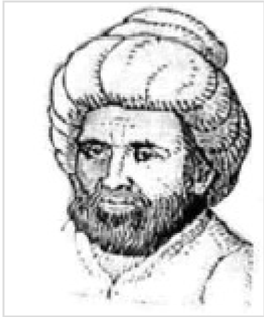
- O conjunto de problemas NP-Completos tem a propriedade notável de que, se existe um algoritmo eficiente para qualquer um deles, então existem algoritmos eficientes para todos.
  - Ex.: Caixeiro Viajante

Algoritmo



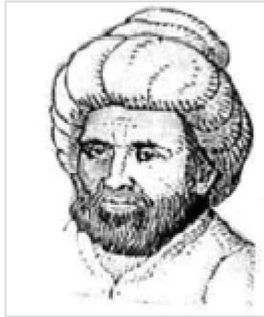
- Os computadores podem ser rápidos, mas não são infinitamente rápidos. A memória pode ser de baixo custo, mas não é gratuita. Assim, o tempo de computação é um recurso limitado bem como o espaço na memória.
- Esses recursos devem ser usados de forma sensata e algoritmos eficientes em termos de tempo ou espaço ajudarão nesse sentido.

Algoritmo



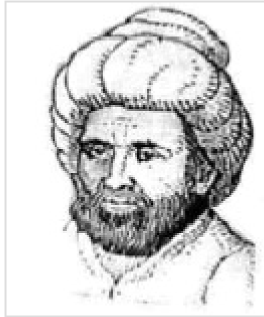
- **Eficiência:**
  - Algoritmos criados para resolver o mesmo problema muitas vezes diferem de forma drástica em sua eficiência.
  - Ex.: ordenação por inserção leva um tempo aproximadamente igual a $c_1 n^2$ para ordenar *n* itens, em que c_1 é uma constante que não depende de *n*.
  - Ex.: ordenação por intercalação leva um tempo aproximadamente igual $c_2 n \log(n)$

Algoritmo



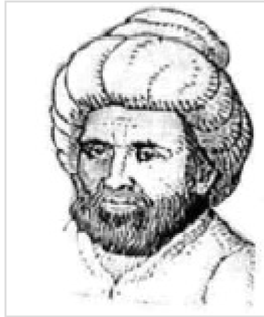
- A ordenação por inserção normalmente tem um fator constante menor que a ordenação por intercalação e assim $c_1 < c_2$.
- Os fatores constantes podem ser muito menos significativos no tempo de execução que a dependência do tamanho da entrada *n*.

Algoritmo



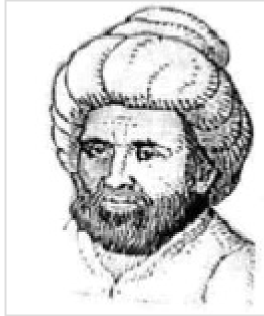
- Ex.: O problema consiste em ordenar um arranjo de um milhão de números
- Suponha que o computador A seja o mais rápido e execute a ordenação por inserção, e o computador B, mais lento, execute a ordenação por intercalação.

Algoritmo



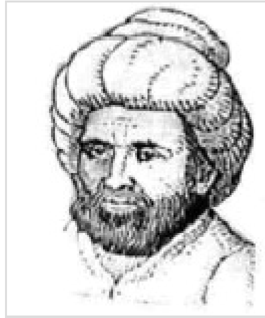
- O computador A executa um bilhão de instruções por segundo e o computador B executa apenas dez milhões de instruções por segundo; assim o computador A é 100 vezes mais rápido que o computador B em capacidade bruta de computação

Algoritmo



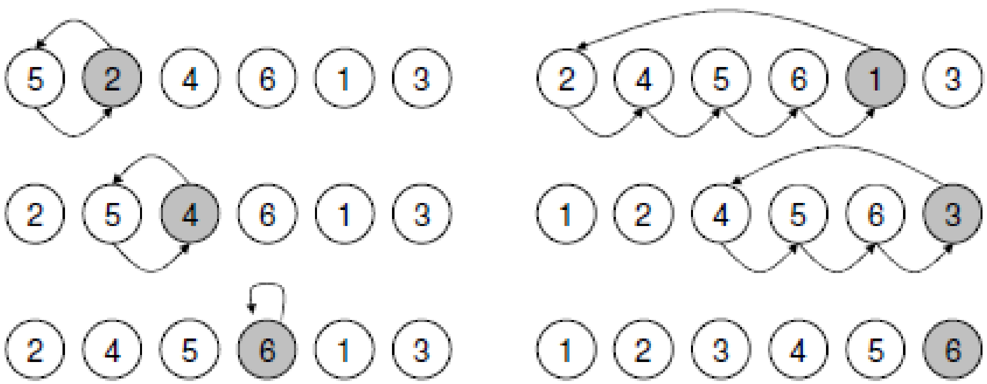
- A codificação por inserção possui $2n^2$ instruções para ordenar n números.
- A ordenação por intercalação tem um código de $50n\log(n)$ instruções.
- A $\rightarrow 2\times(10^6)^2 / (10^9)$ instruções-segundo = 2000 segundos
- B $\rightarrow 50\times 10^6 \log_2(10^6)/10^7 = 100$ segundos

Algoritmo

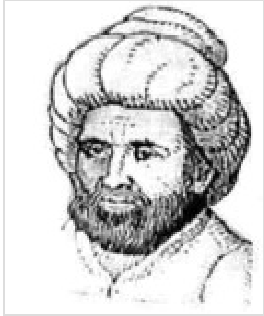


Ordenação por Inserção

```
para j←2 até tamanho[A] faça
   chave←A[j];
   i←j-1;
  enquanto i>0 e A[i]> chave faça
      A[i+1]←A[i];
      i←i-1;
  A[i+1]←chave;
```



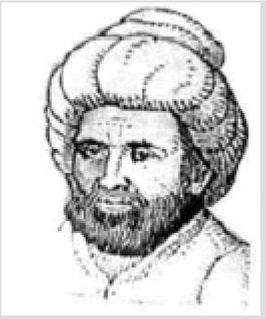
Algoritmo



- Análise do Algoritmo

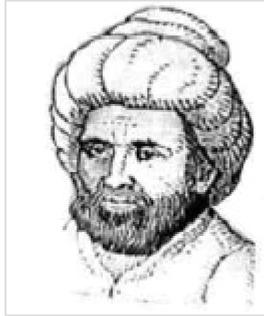
Algoritmo inserção	custo	vezes
para j ← 2 até tamanho[A] faça	C_1	n
chave ← A[j];	C_2	n-1
i ← j-1;	C_3	n-1
enquanto i > 0 e A[i] > chave faça	C_4	$\sum^{n}_{j=2} t_j$
A[i+1] ← A[i];	C_5	$\sum^{n}_{j=2} t_j$-1
i ← i-1;	C_6	$\sum^{n}_{j=2} t_j$-1
A[i+1] ← chave;	C_7	n-1

Algoritmo



- Melhor caso?
- Pior caso?

Algoritmo



- Análise do algoritmo no melhor caso

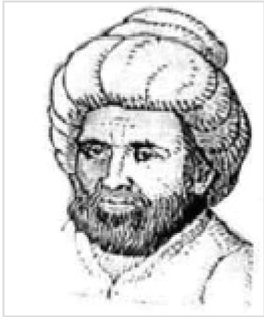
$$T(n)=c_1.n+c_2(n-1)+c_3(n-1)+c_4\sum^n_{j=2}t_j+c_5\sum^n_{j=2}(t_j-1)+c_6\sum^n_{j=2}(t_j-1)+c_7(n-1)$$

$$T(n)=c_1.n+c_2(n-1)+c_3(n-1)+c_4(n-1)+ +c_7(n-1)$$

$$T(n)=(c_1+c_2+c_3+c_4+c_7)n-(c_2+c_3+c_4+c_7)$$

- Complexidade: $\Omega(n)$

Algoritmo



- Análise do algoritmo no pior caso

$$T(n)=c_1.n + c_2(n-1) + c_3(n-1)+ c_4\sum^{n}_{j=2}t_j + c_5\sum^{n}_{j=2}(t_j-1) + c_6\sum^{n}_{j=2}(t_j-1) + c_7(n-1)$$

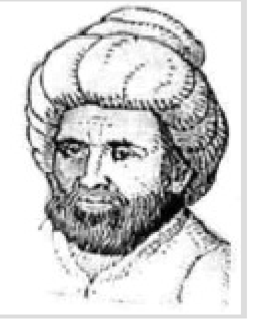
Sendo:

$$\sum^{n}_{j=2}t_j=[n(n+1)/2]-1 \text{ e } \sum^{n}_{j=2}(t_j-1)=n(n-1)/2$$

Logo temos:

$$T(n)=C_1.n + C_2.(n-1) + C_3.(n-1) + C_4.([n(n+1)/2]-1) + C_5.(n(n-1)/2) + C_6.(n(n-1)/2) + C_7.(n-1)$$

Algoritmo



- Análise do algoritmo no pior caso

$$T(n)=(C_4/2+c_5/2+c_6/2)n^2+(c_1+c_2+c_3+c_4/2-c_5/2-c_6/2+c_7)n-(c_2+c_3+c_4+c_7)$$

- Complexidade: $O(n^2)$