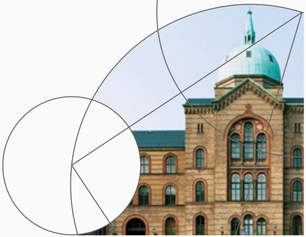
Porteføljeteori

Holdundervisning 14 - EØ F25

Levi van Boekel

28. April 2025, kl. 8.15 - 10.00



Plan

1. Spørgsmål fra sidst
2. Hængeparti (måske ?)
3. Porteføljeteori
4. Opsamling

Spørgsmål fra sidst

Spørgsmål?

- Øvrige spørgsmål kan altid kan stilles i timen eller **her**
- **NB**: Skal vi rykke spørgetime/opsamling fra den 26-05-2025 til en anden dato (tidligere). Det er tæt på jeres og mine eksaminer

Hængeparti (måske ?)

Risiko

Jeres opgave: F6 og F7

F6 – svar

BEREGNING AF AFKAST OG RISIKO

OPGAVE 1
Nedenfor er en oversigt over en akties kursudvikling og udbyttebetalinger over en årrække. Beregn aktiens årlige afkast, målt både som Total Return (TR) og Return Relative (RR).

Beregn følgende:

(1). Aritmetisk og geometrisk gennemsnit af de årlige afkast.
(2). Risikoen: Beregn den empiriske varians og den empiriske standardafvigelse som mål for risikoen. Forklar, hvad disse risikomål udtrykker, og hvorfor de kan bruges som mål for aktiens risiko.
(3). Forhold: Beregn forholdet mellem det aritmetiske gennemsnit og henholdsvis den empiriske varians samt den empiriske standardafvigelse.

Hint: De to mål kan beregnes manuelt eller ved hjælp af Excelfunktionerne VARIANS.S og STDAFV.S

OPGAVE 2
Diskuter forskellen mellem det aritmetiske og det geometriske gennemsnit. Hvad udtrykker de hver især, og hvornår er der forskel mellem dem?

OPGAVE 3
Udregn de samme årlige afkast som i opgave 1, men angiv dem i procentpoint i stedet for decimaltal. For eksempel angives et afkast på 5% nu som 5,0 (ikke som før 0,05).

Beregn derefter:

(1). Det aritmetiske gennemsnit.
(2). Den empiriske varians og standardafvigelse.
(3). Forholdet mellem det aritmetiske gennemsnit og henholdsvis den empiriske varians samt standardafvigelse.

OPGAVE 4
Sammenlign resultaterne fra opgave 3 med dem fra opgave 1, og kommentér forskellene.

x OPGAVE 1

År	Kurs (ultimo)	Udbytte / aktie	Årligt afkast	Relativt afkast
2005	56.00	3.00		
2006	55.00	4.00	0.05	1.05
2007	59.00	0.00	0.07	1.07
2008	62.00	2.00	0.08	1.08
2009	63.00	4.00	0.08	1.08
2010	63.00	6.00	0.10	1.10
2011	67.00	4.00	0.13	1.13
2012	61.00	3.00	(0.04)	0.96
2013	69.00	5.00	0.21	1.21
2014	73.00	3.00	0.10	1.10
2015	81.00	2.00	0.14	1.14

Aritmetisk gennemsnit	0.09
Geometrisk Gennemsnit	0.09
Empirisk varians	0.00
Empirisk standardafvigelse	0.07
Empirisk varians / aritmetisk gennemsnit	0.05
Empirisk standardafvigelse / aritmetisk gennemsnit	0.71

F7 – svar

FORVENTET AFKAST AF PORTEFØLJE

OPGAVE 1
Fire aktier har følgende forventede afkast, som er præsenteret i tabel 1. Beregn det forventede afkast for porteføljerne under de følgende vægtfordelinger:

Portefølje 1: Hver aktie har en porteføljevægt på 0,25.
Portefølje 2: Aktie A har en vægt på 0,10, mens de resterende aktier (B, C og D) er ligeligt fordelt med en vægt på 0,30.
Portefølje 3: Aktie A og B har hver en vægt på 0,10, mens aktie C og D hver har en vægt på 0,40.

OPGAVE 2
Antag først, at de tre porteføljer har samme risiko. Hvilken portefølje vil en investor, som søger højt afkast og samtidig er risikoavers, foretrække?

OPGAVE 3
Antag nu, at portefølje C har højere risiko end portefølje B, som igen har højere risiko end portefølje A. Hvilken portefølje vil en risikoavers, afkastsøgende investor foretrække i dette tilfælde?

OPGAVE 4
Betragt de fire nedenstående porteføljer, og beregn det forventede afkast for hver af dem. Antag derudover, at vi har beregnet standardafvigelsen for porteføljeafkastet i hvert tilfælde. Kan vi ud fra dette entydigt afgøre, hvilken af de fire porteføljer en risikoavers investor vil foretrække?

x OPGAVE 1

Antagelser	Aktie A	Aktie B	Aktie C	Aktie D	Forventet afkast
Forventet afkast	15.00%	12.00%	30.00%	22.00%	
Porteføljevægte:					
Portefølje A	25.00%	25.00%	25.00%	25.00%	19.75%
Portefølje B	10.00%	30.00%	30.00%	30.00%	20.70%
Portefølje C	10.00%	10.00%	40.00%	40.00%	23.50%

x OPGAVE 2

Da porteføljerne har samme risiko, vil en afkastsøgende, risikoavers investor sammenligne dem ud fra det forventede afkast. Den sidste portefølje c har det højeste forventede afkast, hvorfor den foretrækkes

x OPGAVE 3

Det kan vi ikke vide uden yderligere oplysninger: I modsætning til før er der nu en afvejning mellem risiko og forventet afkast, og når vi ikke ved mere om investorens præferencer (kender ikke graden af risikoaversion) samt om de præcise detaljer i denne afvejning (hvor meget større er risikoen fx ved portefølje c end b?), kan vi ikke konkludere noget entydigt om, hvilken portefølje investoren vil foretrække. Vigtig pointe: Risikoaversion betyder IKKE, at man altid vil vælge den mindst risikable portefølje!

x OPGAVE 4

Antagelser	Aktie A	Aktie B	Aktie C	Aktie D	Forventet afkast
Forventet afkast	15.00%	12.00%	30.00%	22.00%	
Porteføljevægte:					
Portefølje E	15.00%	15.00%	6.88%	63.12%	20.00%
Portefølje F	25.00%	20.00%	21.88%	33.12%	20.00%
Portefølje G	50.00%	0.00%	18.75%	31.25%	20.00%
Portefølje H	40.00%	8.00%	20.00%	32.00%	20.00%

Ja, disse porteføljer har alle samme forventede afkast, og en risikoavers investor vil derfor entydigt foretrække den af dem, der har den laveste standardafvigelse.

Porteføljeteori

Antagelser

Når vi opstiller porteføljeteorien antager vi, at:

- Investorer er **afkastsøgende**: hvis to værdipapirer har samme risiko, foretrækkes det med højst forventet afkast
- Investorer er **risikoaverse**: hvis to værdipapirer har samme forventede afkast, foretrækkes det mindst risikofyldte.
  - Betyder det, at investorer ikke vil investere i risikofyldte aktiver?

Holt-Laury test for risikovarsion

Betragt nedenstående oversigt over forskellige lotterier. Hvor mange gange vælger I 'Option A' (the safe choice)?

TABLE 1—THE TEN PAIRED LOTTERY-CHOICE DECISIONS WITH LOW PAYOFFS

Option A	Option B	Expected payoff difference
1/10 of \$2.00, 9/10 of \$1.60	1/10 of \$3.85, 9/10 of \$0.10	\$1.17
2/10 of \$2.00, 8/10 of \$1.60	2/10 of \$3.85, 8/10 of \$0.10	\$0.83
3/10 of \$2.00, 7/10 of \$1.60	3/10 of \$3.85, 7/10 of \$0.10	\$0.50
4/10 of \$2.00, 6/10 of \$1.60	4/10 of \$3.85, 6/10 of \$0.10	\$0.16
5/10 of \$2.00, 5/10 of \$1.60	5/10 of \$3.85, 5/10 of \$0.10	−\$0.18
6/10 of \$2.00, 4/10 of \$1.60	6/10 of \$3.85, 4/10 of \$0.10	−\$0.51
7/10 of \$2.00, 3/10 of \$1.60	7/10 of \$3.85, 3/10 of \$0.10	−\$0.85
8/10 of \$2.00, 2/10 of \$1.60	8/10 of \$3.85, 2/10 of \$0.10	−\$1.18
9/10 of \$2.00, 1/10 of \$1.60	9/10 of \$3.85, 1/10 of \$0.10	−\$1.52
10/10 of \$2.00, 0/10 of \$1.60	10/10 of \$3.85, 0/10 of \$0.10	−\$1.85

Impliceret risikovillighed

TABLE 3—RISK-AVERSION CLASSIFICATIONS BASED ON LOTTERY CHOICES

Number of safe choices	Range of relative risk aversion for $U(x) = x^{1-r}/(1-r)$	Risk preference classification	Proportion of choices: Low real[a]	Proportion of choices: 20x hypothetical	Proportion of choices: 20x real
0–1	$r < -0.95$	highly risk loving	0.01	0.03	0.01
2	$-0.95 < r < -0.49$	very risk loving	0.01	0.04	0.01
3	$-0.49 < r < -0.15$	risk loving	0.06	0.08	0.04
4	$-0.15 < r < 0.15$	risk neutral	0.26	0.29	0.13
5	$0.15 < r < 0.41$	slightly risk averse	0.26	0.16	0.19
6	$0.41 < r < 0.68$	risk averse	0.23	0.25	0.23
7	$0.68 < r < 0.97$	very risk averse	0.13	0.09	0.22
8	$0.97 < r < 1.37$	highly risk averse	0.03	0.03	0.11
9–10	$1.37 < r$	stay in bed	0.01	0.03	0.06

- Find hele papiret
  `https://www.jstor.org/stable/3083270?seq=1`

Kort om statistiske begreber og estimatorer

- Indtil videre har vi introduceret begreberne forventet afkast og risiko. Det er teoretiske koncepter
- Når vi bruger det aritmetiske / geometriske gennemsnit eller variansen, er det **estimatorer** for begreberne (dvs. IKKE begreberne selv !)
- Det er vigtigt at forholde sig til **estimatorernes begrænsninger**
- Når vi bruger f.eks. det aritmetiske gennemsnit som estimat for fremtidige forventede afkast, antager vi derfor implicit, at "fremtiden bliver som fortiden"
  - Eller mere præcist: at de historiske afkast er trukket fra en fordeling med samme middelværdi som de fremtidige afkast

Kovarians og korrelationskoefficient

Vi mangler to statistiske begreber, før vi går videre:

1. **Kovarians:** Et mål for, hvorvidt to stokastiske variable bevæger sig i samme retning (positiv kovarians = stigning i A fører til stigning i B, og vice versa)
2. **Korrelationskoefficient**: Et standardiseret mål for den samme lineær sammenhæng mellem to variable, der altid ligger mellem 1 og $+1$ (positivt indikerer, at de bevæger sig samme retning og vice versa)

- Formlerne i EXCEL er **Kovarians.S(<indsæt tal>)** og **Korrelation (<indsæt tal>)**

Sammensatte porteføljer

Hvad gør vi, hvis vi (mere realistisk) antager, at en portefølje, Z, består af forskellige aktier med afkast udtrykt ved $R_1, R_2, \ldots, R_N$ og tilhørende vægte $w_1, w_2, \ldots, w_N$, hvor $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$?

- **Det forventede afkast er let**. Da den forventede værdi, $\mathcal{E}(x)$ er en lineær operator, er det forventede afkast af porteføljen blot den vægtede sum:

$$Z = w_1 \cdot R_1 + w_2 \cdot R_2 + \ldots + w_N \cdot R_N \tag{1}$$

- **Porteføljens varians er straks sværere**. Det gælder nemlig (medmindre A og B er uafhængige, hvilket de næsten aldrig er i EØ), at:

$$Var(aB + cD) \neq aVar(B) + cVar(D)$$

Sammensatte porteføljer, fortsat

- Variansen for en portefølje er, hvor σ_i^2 angiver variansen for det enkelte aktiv:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{2}$$

- Dobbelsummen læses sådan her "for hvert aktiv i og for hvert 'andet' aktiv j, gang vægten på i med vægten på j og kovariansen imellem dem, og læg alle produkter sammen"
- Lad os tage et eksempel med $n = 2$, her har vi:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij} &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_1 \sigma_{21} \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}\end{aligned}$$

Sammensatte porteføljer, fortsat (2)

- I skal **IKKE** skrive summen ud hver gang. Der er en smartere måde at gøre det på i EXCEL

1. Opstil kovarians matricen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Brug kovarians matricen til at beregne hjælpematricen:

$$\begin{pmatrix} w_1 w_1 \, \sigma_{11} & w_1 w_2 \, \sigma_{12} & \cdots & w_1 w_n \, \sigma_{1n} \\ w_2 w_1 \, \sigma_{21} & w_2 w_2 \, \sigma_{22} & \cdots & w_2 w_n \, \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n w_1 \, \sigma_{n1} & w_n w_2 \, \sigma_{n2} & \cdots & w_n w_n \, \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Sammensatte porteføljer, fortsat (3)

1. Tag den vandrette sum i hvert række fra matricen
2. Læg alle vandrette summer sammen – så har du den samlede varians (udregnet præcis ved formel 2)
3. Jeg viser et eksempel i Excel, men det kræver træning!

Diversifikationsprincippet

- Formel (2) illustrerer diversifikationsprincippet: (1) ved at introducere flere aktier mindskes hver enkelt varians-led kraftigt (fordi w_i^2 falder med flere/lavere vægte) og (2) hvis aktiverne ikke bevæger sig helt ens, neutraliserer deres bevægelser hinanden, og kovarians-leddet bliver mindre. Dermed kan en høj-risiko aktie mindske den samlede varians, hvis summen af kovarians leddende er tilpas negative (dvs. stor negativ samvariation)
- **Jeres opgave: F8, F9**

F8 – svar

OPGAVE 1

År	Coca-Cola	Microsoft	Apple
1990	0.25	0.74	0.22
1991	0.78	1.21	0.31
1992	0.07	0.15	0.06
1993	0.10	(0.06)	(0.51)
1994	0.20	0.52	0.33
1995	0.48	0.43	(0.18)
1996	0.45	0.89	(0.35)
1997	0.29	0.56	(0.37)
1998	0.02	1.15	2.12
1999	(0.11)	0.68	1.51
2000	0.07	(0.63)	(0.71)
2001	(0.20)	0.53	0.47
2002	(0.04)	(0.22)	(0.35)
2003	0.20	0.08	0.49
2004	(0.14)	0.22	2.01
Forventet afkast (estimat)	0.16	0.42	0.34
Varians (estimat)	0.07	0.25	0.79
Standardafvigelse (estimat)	0.26	0.50	0.89

Kovarians Coca-Cola/Microsoft (estimat)	0.06
Kovarians Coca-Cola/Apple (estimat)	(0.09)
Kovarians Microsoft/Apple (estimat)	0.20
Korrelationskoeff. Coca-Cola/Microsoft	0.42
Korrelationskoeff. Coca-Cola/Apple	(0.40)
Korrelationskoeff. Microsoft/Apple	0.44

OPGAVE 2

Bemærk: Som estimat for det forventede afkast benyttes det aritmetiske gennemsnit for de historiske afkast. Det er vigtigt, at de studerende kan skelne mellem det forventede afkast som teoretisk/statistisk koncept og det aritmetiske gns. som et empirisk mål, der anvendes som estimator for førstnævnte. Det aritmetiske gennemsnit er bagudskuende, mens det forventede afkast er fremadskuende. Når vi bruger det aritmetiske gennemsnit som estimat for fremtidige forventede afkast, antager vi derfor implicit, at "fremtiden bliver som fortiden" (eller mere præcist: at de historiske afkast er trukket fra en fordeling med samme middelværdi som de fremtidige afkast). Det kan ofte være en fornuftig antagelse, men i andre tilfælde er det mere problematisk. I det konkrete eksempel kan antagelsen (måske?) være fornuftig nok for Coca Cola, som er et veletableret selskab med en lang historie, mens den er mere tvivlsom for Microsoft og Apple: Begge disse virksomheder voksede eksplosivt i den betragtede perioder og udviklede sig til verdensomspændende giganter inden for deres branche. Det er ret tvivlsomt, at de kommer til at gennemgå lignende udviklinger igen i fremtiden.

OPGAVE 3

Antagelser	Coca-Cola	Microsoft	Forventet afkast	Porteføljevarians	Standardafvigelse
Porteføljevægte	50.00%	50.00%	0.29	0.11	0.33

OPGAVE 4

Porteføljevarians

KOVARIANSMATRICEN

	Coca Cola	Microsoft	Apple
Coca Cola	0.07	0.06	(0.09)
Microsoft	0.06	0.25	0.20
Apple	(0.09)	0.20	0.79

HJÆLPEMATRIX

	0.50	0.50	0.00
0.50	0.02	0.01	0.00
0.50	0.01	0.06	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00

Porteføljensvarians	0.11
Porteføljensstandardafvigelse	0.33

OPGAVE 5

Porteføljevarians

KOVARIANSMATRICEN

	Coca Cola	Microsoft	Apple
Coca Cola	0.07	0.06	(0.09)
Microsoft	0.06	0.25	0.20
Apple	(0.09)	0.20	0.79

HJÆLPEMATRIX

	0.50	0.35	0.15
0.50	0.02	0.01	(0.01)
0.35	0.01	0.03	0.01
0.15	(0.01)	0.01	0.02

Porteføljensvarians	0.09
Porteføljensstandardafvigelse	0.30

Ved justering af porteføljevægtene i ovenstående hjælpematrix, får man, at standardafvigelsen bliver 0,3039, hvilket er lidt lavere end i spm. 6 og 7. Porteføljen bliver altså lidt mindre risikofyldt, når den udvides til at omfatte Apple-aktien, på trods af, at Apple-aktien isoleret set er mere risikofyldt end de to øvrige aktier. Det er naturligvis diversifikationsprincippet, der er på spil.

F9 – svar

OPGAVE 1
Antag, at det forventede afkast, standardafvigelsen og kovariansen for Novo Nordisk og Topdanmark er som følger. Virksomhedens økonomichef har beregnet porteføljeafkast, porteføljevarians og standardafvigelse for forskellige porteføljevægte. Han er dog usikker på, om beregningerne er korrekte, og du skal derfor hjælpe med at lave kontrolberegninger.

Foretag kontrolberegninger af det forventede porteføljeafkast, porteføljevariansen samt standardafvigelsen for de forskellige vægte, og sammenlign dine resultater med økonomichefens beregninger.

OPGAVE 2
Har økonomichefen begået nogen fejl? Hvis ja, kunne han have opdaget disse fejl uden at lave yderligere kontrolberegninger? Hvordan?

OPGAVE 3
Hvilken portefølje har den laveste risiko, og hvad er de tilhørende porteføljevægte?

OPGAVE 1

Antagelser	Novo Nordisk	Topdanmark
Forventet afkast (TR)	0.25	0.23
Standardafvigelse	0.30	0.25
Kovarians	0.01	
Korrelationskoefficient	0.15	

ØKONOMICHEFENS BEREGNINGER

Porteføljenr.	Novo Nordisk vægte	Topdanmark vægte	Forventet porteføljeafkast	Porteføljevarians	Standardafvigelse portefølje
1	1.00	0.00	0.25	0.09	0.30
2	0.80	0.20	0.25	0.06	0.25
3	0.60	0.40	0.24	0.05	0.22
4	0.20	0.80	0.23	0.05	0.22
5	0.00	1.00	0.23	0.05	0.23

ANALYTIKERENS TJEK

Porteføljenr.	Novo Nordisk vægte	Topdanmark vægte	Forventet porteføljeafkast	Porteføljevarians	Standardafvigelse portefølje			
1	1.00	0.00	0.25	0.090	0.30	TRUE	TRUE	TRUE
2	0.80	0.20	0.25	0.064	0.25	TRUE	TRUE	TRUE
3	0.60	0.40	0.24	0.048	0.22	TRUE	TRUE	TRUE
4	0.20	0.80	0.23	0.047	0.22	TRUE	TRUE	TRUE
5	0.00	1.00	0.23	0.063	0.25	TRUE	FALSE	FALSE

OPGAVE 2

Fejl i beregningen af porteføljevariansen for portefølje 5. Det burde han have indset, da porteføljevægten for Topdanmark her er 1, så standardafvigelsen for porteføljen skal være identisk med standardafvigelsen for Topdanmarkaktien.

OPGAVE 3

Porteføljenr. 4 har mindst risiko, og de tilhørende vægte er 20% Novo Nordisk og 80% Topdanmark.

Opsamling

Hvad har vi lært?

Færdigheder fra dagens time:

1. At kunne bestemme varians og afkast for sammensatte porteføljer

Vigtige begreber fra dagens time

- Forskellen mellem teoretiske begreber og estimatorer
- Diversifikationsprincippet