

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №3 по дисциплине
«Многомерный статистический анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/90401: Саськов Л.К.

Преподаватель: к.ф.-м.н., доцент, Павлова Л.В.

Санкт-Петербург

2023

1. Постановка задачи

В рамках данной лабораторной работы необходимо реализовать метод sv-кластеризации и проверить его работу на хорошо и плохо отделимых модельных данных.

План работы:

1. Подготовка модельных данных
2. Реализация SVC-алгоритма
3. Кластеризация с разными значениями гиперпараметров. Оценка качества и выбор оптимальных значений гиперпараметров.
4. Графическая иллюстрация результатов, таблицы.

2. Алгоритм SVC-кластеризации

Алгоритм SVC-кластеризации включает в себя следующие шаги:

1. Построение ядерной матрицы: $K = \{k_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n$

$$k_{ij} = k(x_i, x_j) = \exp(-q \|x_i - x_j\|^2)$$

2. Решение задачи квадратичного программирования. Необходимо найти множители Лагранжа $\mu_i, i = 1, \dots, n$. Любые множители меньше 10^{-3} будем считать нулем.

$$\max_{\mu_i} W$$

$$W = \sum_{i=1}^n \mu_i k(x_i, x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(x_i, x_j)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$$

$$0 \leq \mu_i \leq C, i = 1, \dots, n$$

3. Классификация векторов:

- Связанные опорные вектора (BSVs): $\mu_i = C$ лежат вне гиперсферы
- Опорные вектора (SVs): $0 < \mu_i < C$ лежат на поверхности гиперсферы.
- Другие векторы (OVs): $\mu_i = 0$ - внутри гиперсферы или на поверхности

1. Расстояние от центра гиперсферы до вектора x и радиусы гиперсфер:

$$r^2(x) = k(x, x) - 2 \sum_{i=1}^n \mu_i k(x_i, x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j k(x_i, x_j)$$

$$R = r(x_i), x_i \in SVs$$

2. Маркировка кластеров. Необходимо построить матрицу смежности А.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{если } r(y) \leq R, \forall y \in [x_i, x_j] \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

3. Находим кластеры как связанные компоненты графа, индуцированного матрицей А. Связанные опорные векторы не кластеризуются и впоследствии относятся к кластерам с ближайшим к ним центром.

3. Критерии оценки качества кластеризации

Для оценки воспользуемся критерием Калининского-Харабаша:

$$CH(C) = \frac{N - K}{K - 1} \frac{\sum_{C_k \in C} |C_k| \rho(\bar{C}_k, \bar{X})}{\sum_{C_k \in C} \sum_{x_i \in C_k} \rho(x_i, \bar{C}_k)}$$

где N - размер кластеризуемой выборки, K - количество кластеров, $|C_k|$ - количество элементов в кластере C_k , \bar{C}_k - центр кластера C_k

$$\bar{C}_k = \frac{\sum_{x_i \in C_k} x_i}{|C_k|}$$

\bar{X} - выборочное среднее всех исходных данных

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{x_i \in X} x_i$$

Чем больше значение критерия, тем лучше качество кластеризации.

4. Код

Код SVC алгоритма и оценки качества:

```
In [1]: from matplotlib import pyplot
import pandas as pd
import numpy as np
import cvxopt

class SVC:
    zero_mu = 1e-3

    @staticmethod
    def init_clustering(sample, p, q):
        svc = SVC(sample, p, q)
```

```

svc.__find_kernel_matrix()
svc.__find_mu()
svc.__find_segment_matrix()
svc.__find_clusters()
return svc

def show_plot(self, max_clusters_count=10):
    labels = np.zeros(self.sample.shape[0])
    for i in self.clusters.keys():
        for j in self.clusters[i]:
            labels[j] = int(i)
    if len(self.clusters) >= max_clusters_count:
        print("Number of clusters is more or equals 10, so no graphic")
        return
    df = pd.DataFrame(dict(x=self.sample[:, 0], y=self.sample[:, 1], label=labels))
    colors = {1: 'r', 2: 'b', 3: 'g', 4: 'c', 5: 'm', 6: 'y', 7: 'k', 8: 'w'}
    fig, ax = pyplot.subplots()
    grouped = df.groupby('label')
    for key, group in grouped:
        group.plot(ax=ax, kind='scatter', x='x', y='y', label=key, color=colors.get(key, 'k'))

    # Помечаем звездочками опорные вектора
    sv_val_x = [self.sample[i][0] for i in self.svs]
    sv_val_y = [self.sample[i][1] for i in self.svs]
    ax.scatter(x=sv_val_x, y=sv_val_y, marker='*', color='black')

    # Помечаем крестами связанные опорные вектора
    bsv_val_x = [self.sample[i][0] for i in self.bsvs]
    bsv_val_y = [self.sample[i][1] for i in self.bsvs]
    ax.scatter(x=bsv_val_x, y=bsv_val_y, marker='s', color='slategray')

    pyplot.show()

def calinski_harabasz(self):
    # K - количество кластеров
    k = len(self.clusters)
    if k == 1:
        return '-'
    if k == self.N:
        return 0

    # X - выборочное среднее всех исходных данных
    x_mean = sum(self.sample) / self.N
    scale = (self.N - k) / (k - 1)

    numerator = 0
    denominator = 0

    for cluster_num in self.clusters:
        cluster = self.clusters[cluster_num]
        # |C_k| - количество элементов в кластере
        cluster_len = len(cluster)

        cluster_sum = 0
        for id in cluster:
            cluster_sum += self.sample[id]

        # \overline{C_k} - центр кластера C_k
        cluster_center = cluster_sum / cluster_len
        numerator += cluster_len * SVC.rho(cluster_center, x_mean)

    # Считаем сумму расстояний до центра кластера
    cluster_distance_sum = 0
    for id in cluster:

```

```

        cluster_distance_sum += SVC.rho(cluster_center, self.sample[

        denominator += cluster_distance_sum

    return scale * numerator / denominator

# Don't use constructor, use init_clustering
# sample - выборка, которую кластеризуем
def __init__(self, sample, p, q):
    self.sample = sample
    self.N = len(sample)
    self.p = p
    self.q = q
    self.C = 1 / (self.N * p)

    # Ядерная матрица
    self.km = None
    # Вектор множителей Лагранжа \mu
    self.mu = None
    # Матрица смежности A
    self.segment_matrix = None
    self.clusters = None
    self.svs = None
    self.bsvs = None

# Инициализация ядерной матрицы
def __find_kernel_matrix(self):
    self.km = np.zeros((self.N, self.N))
    for i in range(self.N):
        for j in range(self.N):
            self.km[i, j] = self.__kernel(self.sample[i], self.sample[j])

# Инициализируем множители Лагранжа \mu_i
def __find_mu(self):
    P = cvxopt.matrix(self.km)
    q = cvxopt.matrix(self.km.diagonal().reshape(self.N, 1))
    G1 = cvxopt.spmatrix(-1, range(self.N), range(self.N))
    G2 = cvxopt.spmatrix(1, range(self.N), range(self.N))
    G = cvxopt.sparse([G1, G2])
    h1 = np.zeros(self.N)
    h2 = np.full(self.N, self.C)
    h = cvxopt.matrix(np.concatenate((h1, h2), axis=0), (2 * self.N, 1))
    A = cvxopt.matrix(1.0, (1, self.N))
    b = cvxopt.matrix(1.0)
    cvxopt.solvers.options['show_progress'] = False
    sol = cvxopt.solvers.qp(P, q, G, h, A, b)
    self.mu = np.array(sol['x'])

def __find_segment_matrix(self):
    svs_tmp = np.array(self.C > self.mu + SVC.zero_mu) * np.array(self.m
    self.svs = np.where(svs_tmp == True)[0]
    bsvs_tmp = np.array(np.isclose(self.mu, self.C, atol=SVC.zero_mu))
    self.bsvs = np.where(bsvs_tmp == True)[0]
    r = np.mean([self.__r2_func(self.sample[i]) for i in self.svs[:5]])
    self.segment_matrix = np.zeros((self.N, self.N))
    for i in range(self.N):
        if i not in self.bsvs:
            for j in range(i, self.N):
                if j not in self.bsvs:
                    self.segment_matrix[i, j] = self.segment_matrix[j, i

def __find_clusters(self):
    ids = list(range(self.N))

```

```

self.clusters = {}
num_clusters = 0
while ids:
    num_clusters += 1
    self.clusters[num_clusters] = []
    curr_id = ids.pop(0)
    queue = [curr_id]
    while queue:
        cid = queue.pop(0)
        for i in ids:
            if self.segment_matrix[i, cid]:
                queue.append(i)
                ids.remove(i)
        self.clusters[num_clusters].append(cid)

def __r2_func(self, x):
    return 1 - 2 * sum(
        self.mu[i] * self.__kernel(self.sample[i], x) for i in range(sel
    )

def __kernel(self, x1, x2):
    return np.exp(-self.q * sum((x1 - x2) ** 2))

# Вычисление элемента матрицы смежности A_ij
def __segment(self, x1, x2, r, n=10):
    for i in range(n):
        x = x1 + (x2 - x1) * i / (n + 1)
        if self.__r2_func(x) > r:
            return False
    return True

# Расстояние между 2мя точками
@staticmethod
def rho(x1, x2):
    return np.linalg.norm(x1 - x2)

```

Код для формирования хорошо и плохо отделимых данных:

In [2]: `from scipy.stats import multivariate_normal`

```

def get_sample(n, s):
    m1 = np.array([2, 1])
    m2 = np.array([0, 13])
    m3 = np.array([15, 8])
    size = int(n / 3)
    cluster1 = multivariate_normal(mean=m1, cov=s).rvs(size)
    cluster2 = multivariate_normal(mean=m2, cov=s).rvs(size)
    if n % 3 != 0:
        size += 1
    cluster3 = multivariate_normal(mean=m3, cov=s).rvs(size)

    pyplot.scatter(x=cluster1[:, 0], y=cluster1[:, 1], color='r')
    pyplot.scatter(x=cluster2[:, 0], y=cluster2[:, 1], color='g')
    pyplot.scatter(x=cluster3[:, 0], y=cluster3[:, 1], color='b')
    pyplot.show()

    return np.vstack([cluster1, cluster2, cluster3])

n = 100
s_good = np.array([[2, 0],

```

```
[0, 2]])
s_bad = s_good * 3
```

Код для исследования качества кластеризации и построения итоговой таблицы:

```
In [3]: def research(sample, max_cluster_count=10):
max = np.max([sum((sample[i] - sample[j]) ** 2) for i in range(len(sample))])
q1 = 1 / max
print(f"q1 = {q1}")

pq_set = (
    (0.01, q1),
    (0.01, 0.1),
    (0.01, 0.5),
    (0.1, 0.1),
    (0.5, 0.1),
    (0.9, 0.1),
    (1, 0.1)
)

table = pd.DataFrame(columns=['p', 'q', 'clusters count', 'SVs', 'BSVs'],
for pq in pq_set:
    svc = SVC.init_clustering(sample, p=pq[0], q=pq[1])
    ch = svc.calinski_harabasz()

    print("p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH")
    row = [pq[0], pq[1], len(svc.clusters), len(svc.svs), len(svc.bsvs),
    print(row)
    table.loc[len(table)] = row

    svc.show_plot(max_cluster_count)

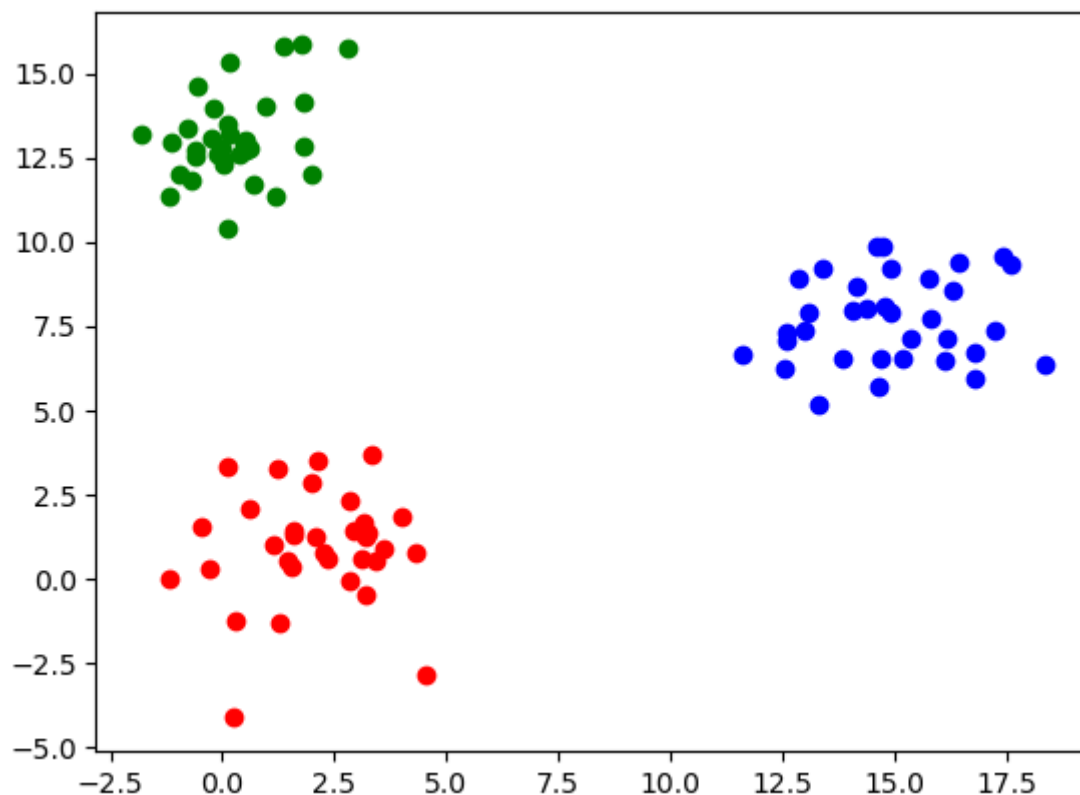
return table
```

```
In [11]: %%html
<style>
.output_wrapper .output {
    overflow-y: visible;
    height: fit-content;
}
</style>
```

5. Хорошо отделимые данные

Посмотрим как работает наш алгоритм на хорошо отделимых данных, возьмем 100 точек в 3х разных кластерах

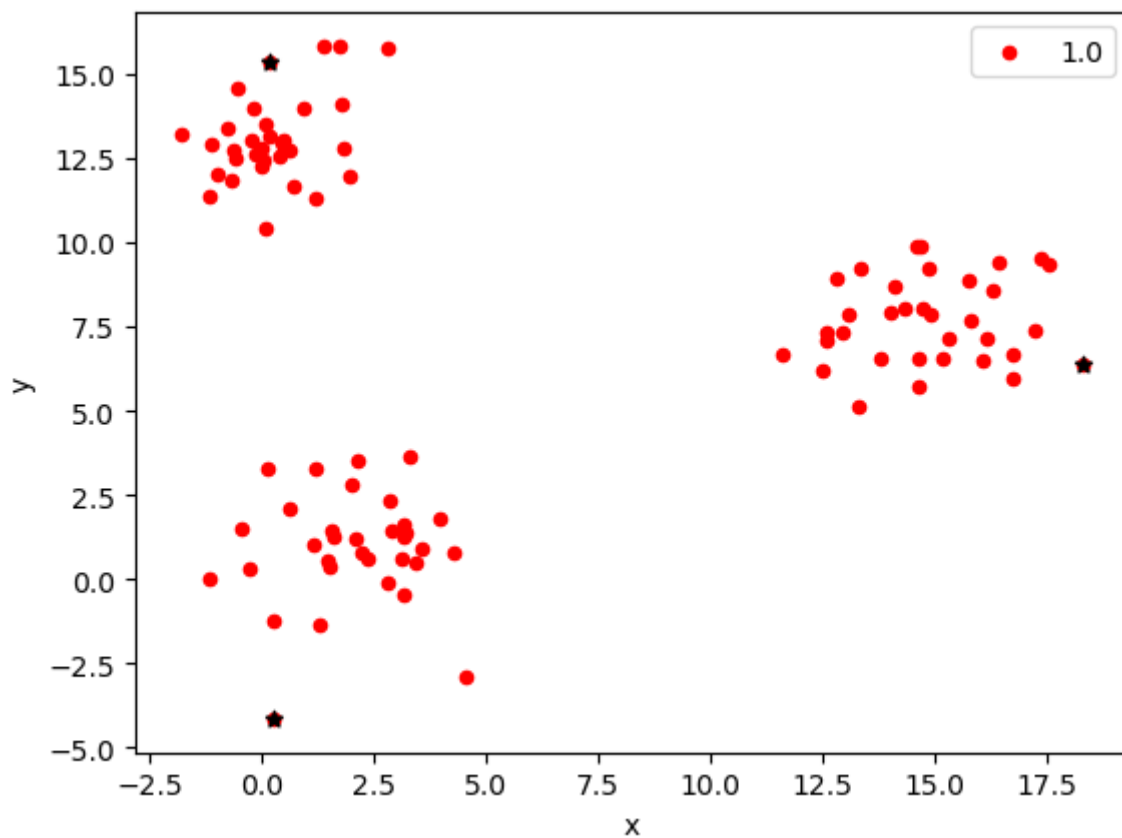
```
In [4]: good_sample = get_sample(100, s_good)
```



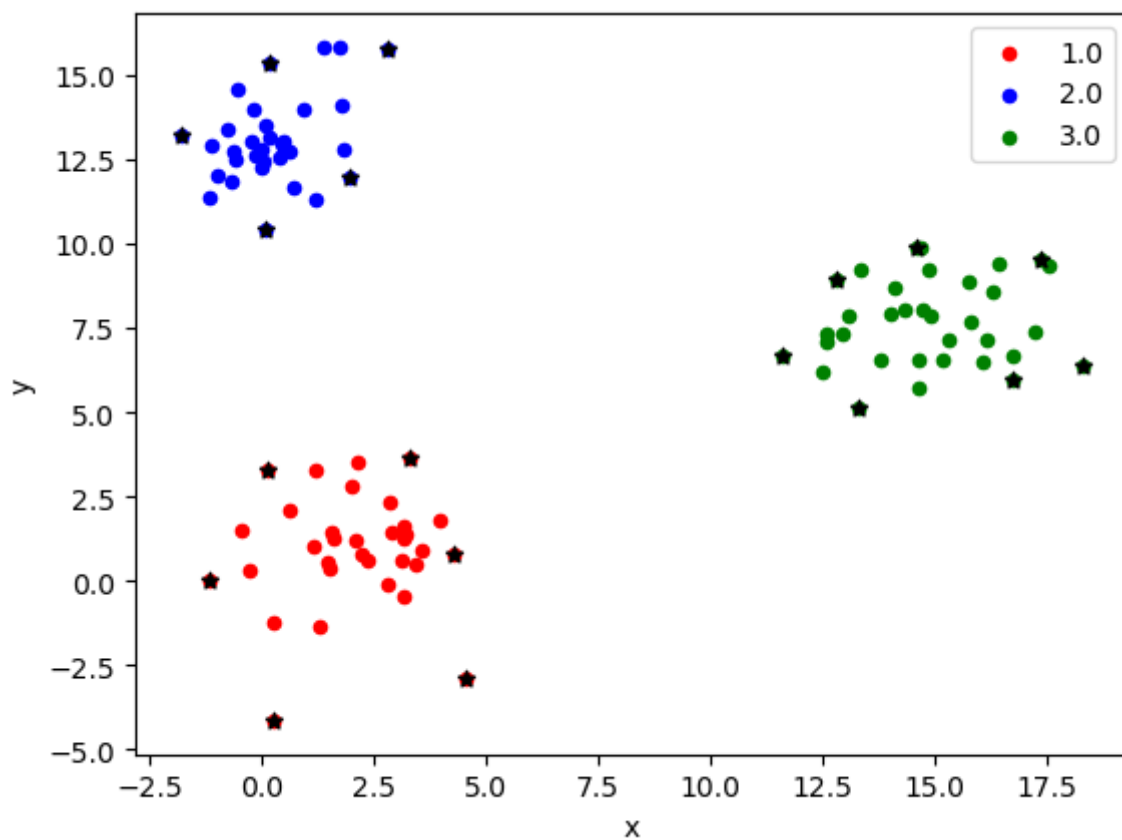
Построим графики полученной алгоритмом кластеризации для разных параметров p и q и сравним их в итоговой таблице. Графики, на которых больше 10 кластеров, выводить не будем. Звездочками отвечены опорные вектора, а квадратами связанные опорные вектора.

```
In [5]: good_sample_table = research(good_sample)

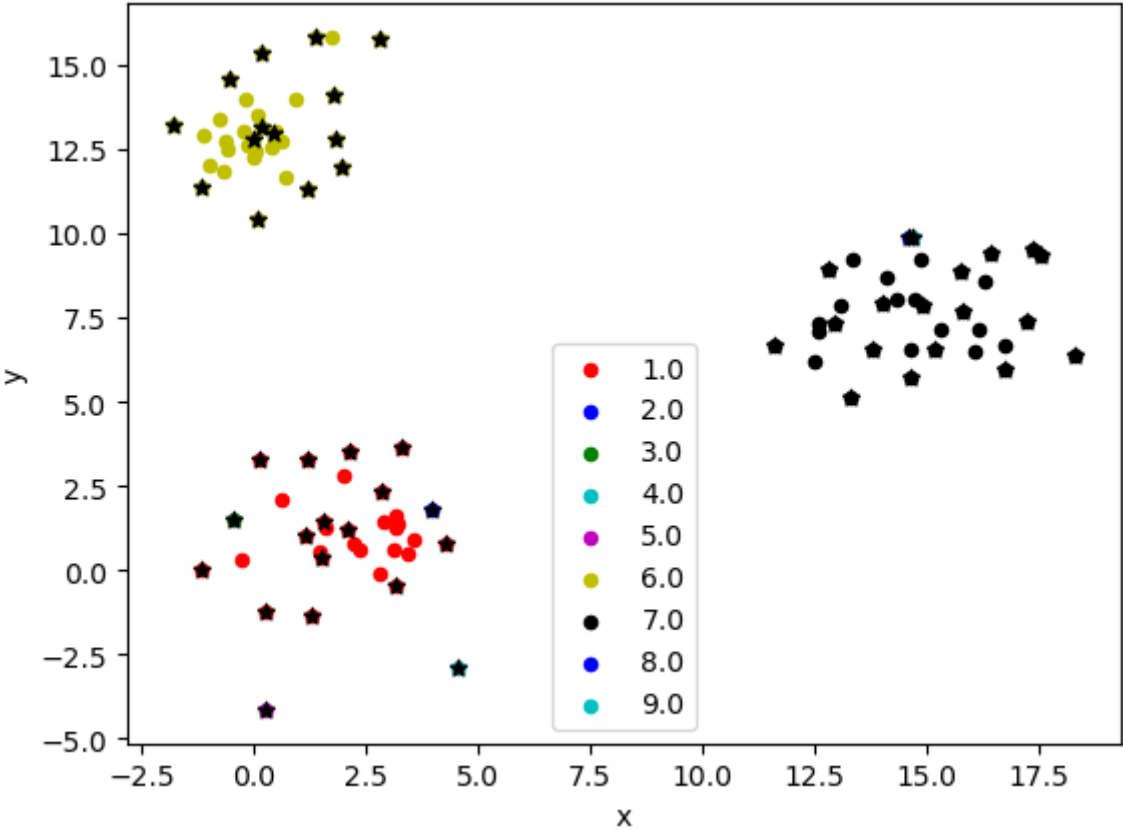
q1 = 0.002075480485749144
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.01, 0.002075480485749144, 1, 3, 0, '-']
```

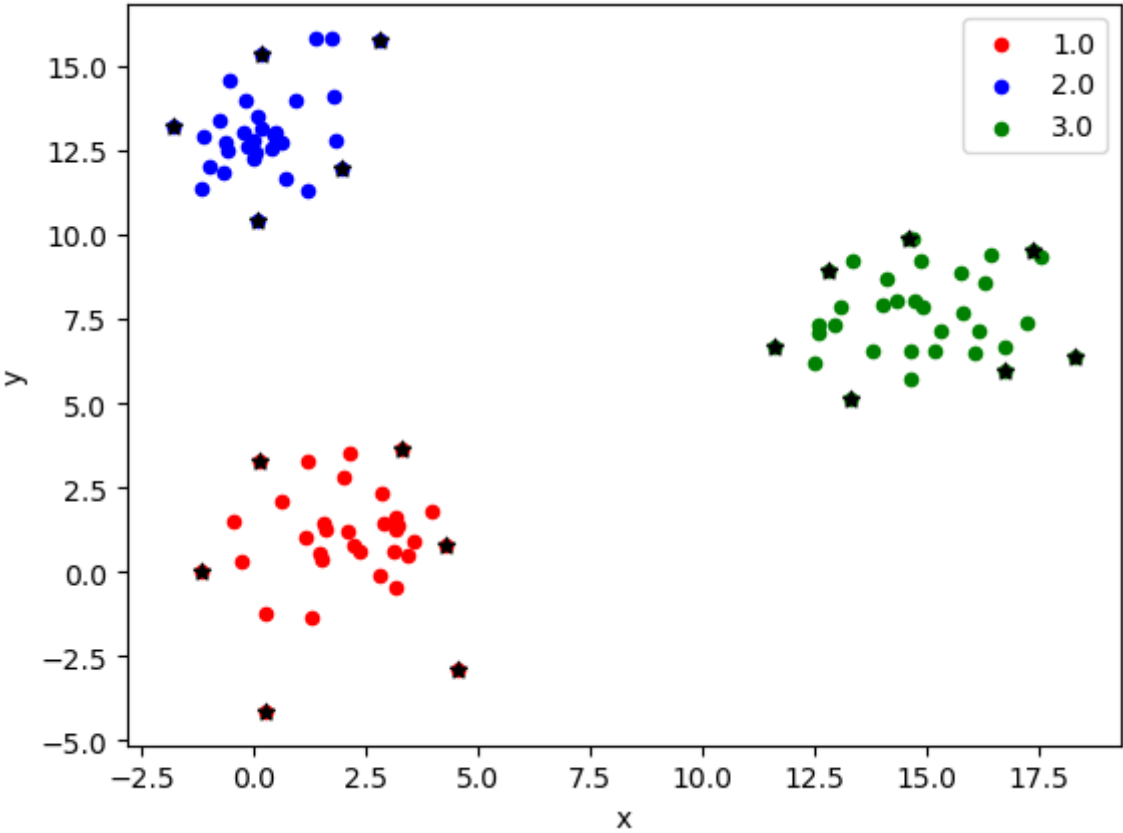
```
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH  
[0.01, 0.1, 3, 18, 0, 232.4020878646505]
```



```
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH  
[0.01, 0.5, 9, 51, 0, 61.621402731817525]
```



p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.1, 0.1, 3, 18, 0, 232.4020878646505]



```
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.5, 0.1, 50, 6, 47, 16.921356880896514]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.9, 0.1, 92, 3, 88, 24.57782927140867]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[1, 0.1, 100, 0, 100, 0]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
```

```
/Users/lev.saskov/opt/anaconda3/lib/python3.9/site-packages/numpy/core/fromn
umeric.py:3440: RuntimeWarning: Mean of empty slice.
  return _methods._mean(a, axis=axis, dtype=dtype,
/Users/lev.saskov/opt/anaconda3/lib/python3.9/site-packages/numpy/core/_meth
ods.py:189: RuntimeWarning: invalid value encountered in double_scalars
  ret = ret.dtype.type(ret / rcount)
```

Итоговая таблица:

In [6]: good_sample_table

Out[6]:

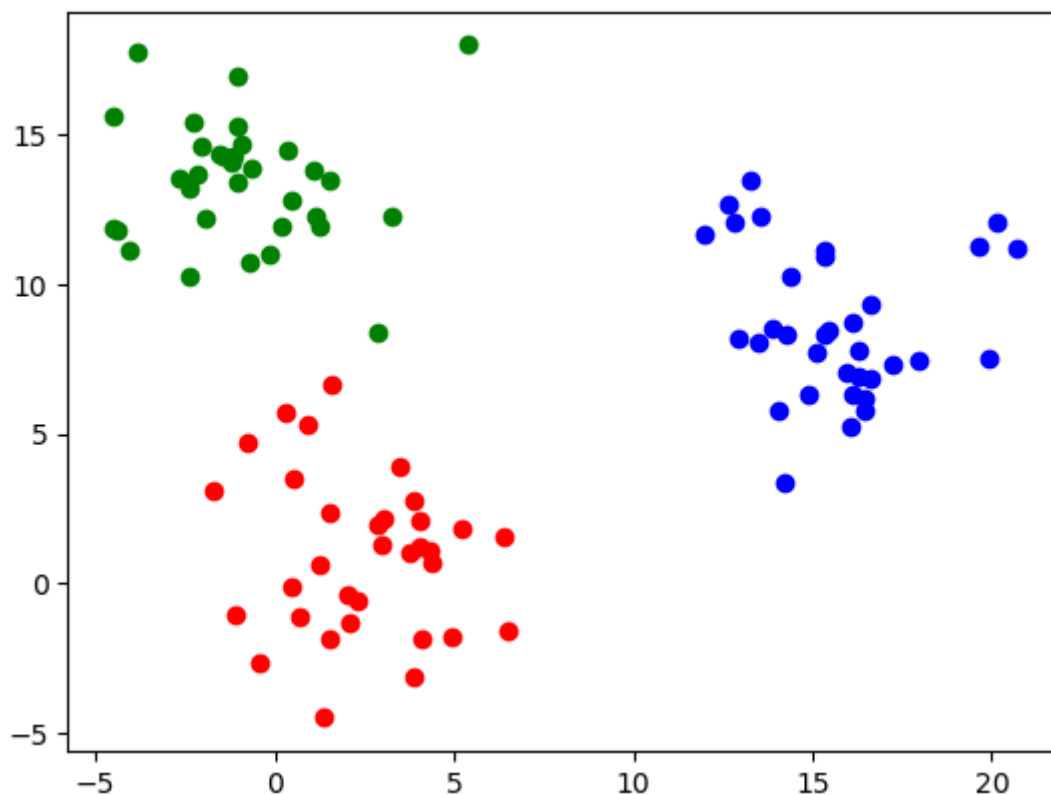
	p	q	clusters count	SVs	BSVs	CH
0	0.01	0.002075	1.0	3.0	0.0	-
1	0.01	0.100000	3.0	18.0	0.0	232.402088
2	0.01	0.500000	9.0	51.0	0.0	61.621403
3	0.10	0.100000	3.0	18.0	0.0	232.402088
4	0.50	0.100000	50.0	6.0	47.0	16.921357
5	0.90	0.100000	92.0	3.0	88.0	24.577829
6	1.00	0.100000	100.0	0.0	100.0	0.0

Видим, что лучшее разбиение получилось при параметрах p и q равных 0.01 и 0.1.

6. Плохо отделимые данные

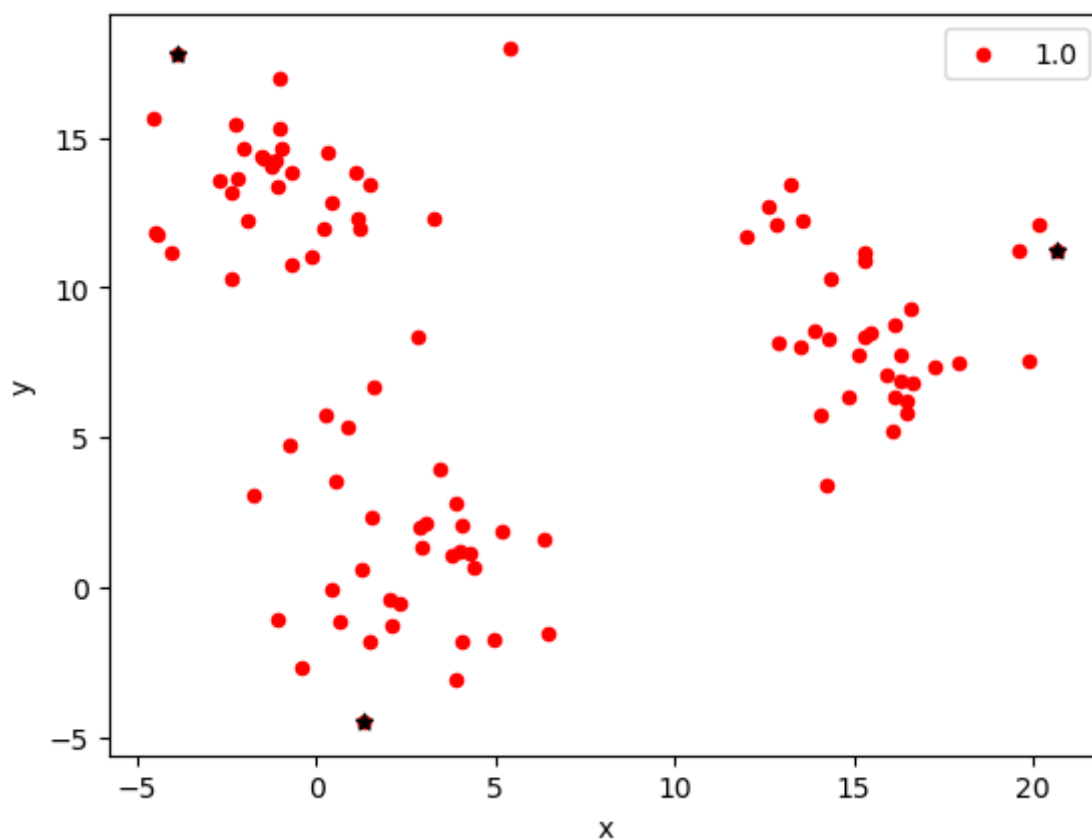
Посмотрим как ведет себя алгоритм при работе с плохо отделимыми данными.
Графики построим только для тех случаев, где меньше 20 кластеров.

In [7]: bad_sample = get_sample(100, s_bad)

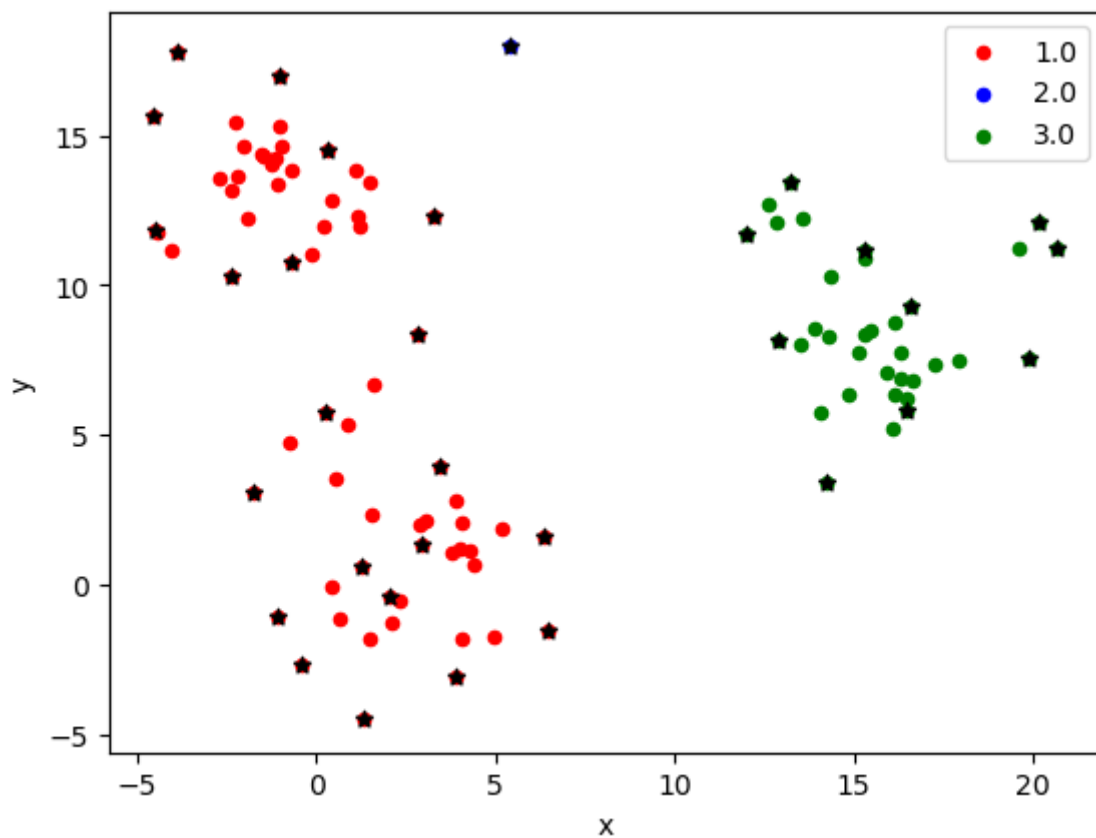


```
In [8]: bad_sample_table = research(bad_sample, max_cluster_count=20)
```

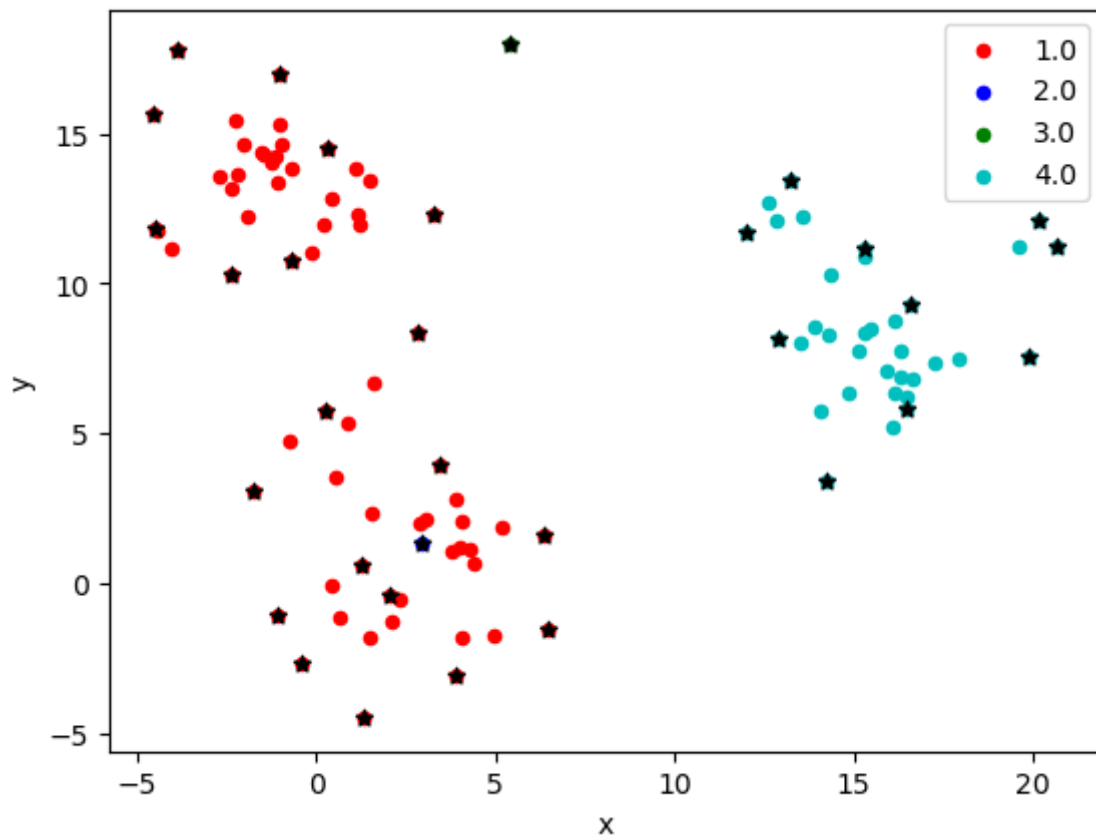
```
q1 = 0.001495030607775564
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.01, 0.001495030607775564, 1, 3, 0, '-']
```



```
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.01, 0.1, 3, 32, 0, 61.89570445278728]
```



```
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.01, 0.5, 25, 69, 0, 24.40354098663789]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.1, 0.1, 4, 32, 0, 41.51948266036185]
```



```

p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.5, 0.1, 47, 14, 43, 10.509960278301222]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[0.9, 0.1, 92, 3, 89, 14.882591317371032]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
p, q, clusters count, SVs, BSVs, CH
[1, 0.1, 100, 0, 100, 0]
Number of clusters is more or equals 10, so no graphic
/Users/lev.saskov/opt/anaconda3/lib/python3.9/site-packages/numpy/core/fromn
umeric.py:3440: RuntimeWarning: Mean of empty slice.
    return _methods._mean(a, axis=axis, dtype=dtype,
/Users/lev.saskov/opt/anaconda3/lib/python3.9/site-packages/numpy/core/_meth
ods.py:189: RuntimeWarning: invalid value encountered in double_scalars
    ret = ret.dtype.type(ret / rcount)

```

Итоговая таблица:

In [9]: bad_sample_table

Out[9]:

	p	q	clusters count	SVs	BSVs	CH
0	0.01	0.001495	1.0	3.0	0.0	-
1	0.01	0.100000	3.0	32.0	0.0	61.895704
2	0.01	0.500000	25.0	69.0	0.0	24.403541
3	0.10	0.100000	4.0	32.0	0.0	41.519483
4	0.50	0.100000	47.0	14.0	43.0	10.50996
5	0.90	0.100000	92.0	3.0	89.0	14.882591
6	1.00	0.100000	100.0	0.0	100.0	0.0

7. Выводы

- Был рассмотрен и реализован SVC-алгоритм кластеризации
- Протестировали работу алгоритма на хорошо и плохо отделимых данных
- Сравнили качество работы алгоритма с разными гиперпараметрами с помощью критерия Калининского-Харабаша
- На хорошо отделимых данных алгоритм работает лучше
- Для хорошо отделимых данных оптимальными гиперпараметрами, дающими наилучший результат стали $p = 0.01$, 0.1 и $q = 0.1$
- Для плохо отделимых данных наилучшими гиперпараметрами стали $p = 0.01$; $q = 0.1$
- Начиная с какого-то момента, при увеличении гиперпараметров падает качество кластеризации и растёт количество связанных опорных векторов
- Также было замечено, что при наличии связанных опорных векторов кластеризация не даёт хорошие результаты, такие результаты кластеризации могут быть связаны с довольно сложной границей между кластерами

In []: