Kapitel 1

Lösungen Aufgaben

1.1 Beispiel 1: $f(x) = e^{-x} + 1$ auf $[0, 2]$

1.1.1 Schritt 1: Allgemeine Rotationsvolumenformel

Das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse ist gegeben durch:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

1.1.2 Schritt 2: Einsetzen der Funktion $f(x) = e^{-x} + 1$

$$V = \pi \int_0^2 (e^{-x} + 1)^2 \, dx$$

1.1.3 Binomische Formel

Die erste binomische Formel lautet:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Angewandt auf die Funktion $f(x) = e^{-x} + 1$:

$$(e^{-x} + 1)^2 = e^{-2x} + 2e^{-x} + 1$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(e^{-2x} + 2e^{-x} + 1\right) \, dx$$

1.1.4 Schritt 3: Berechnung des Integrals

Die Stammfunktionen der einzelnen Terme sind:

$$\int e^{-2x} \, dx = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\int 2e^{-x} \, dx = -2e^{-x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Nun setzen wir die Integrationsgrenzen 0 und 2 ein:

$$V = \pi \left[\left(-\frac{e^{-2(2)}}{2} - 2e^{-2} + 2 \right) - \left(-\frac{e^{-2(0)}}{2} - 2e^{0} + 0 \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(-\frac{e^{-4}}{2} - 2e^{-2} + 2 \right) - \left(-\frac{1}{2} - 2(1) + 0 \right) \right]$$

$$V = \pi \left(-\frac{e^{-4}}{2} - 2e^{-2} + 2 + \frac{1}{2} + 2 \right)$$

$$V = \pi \left(4.5 - \frac{e^{-4}}{2} - 2e^{-2} \right)$$

1.1.5 Schritt 4: Ergebnis

Der numerische Wert ergibt:

$$V \approx 13.26$$

1.2 Beispiel 2: $f(x) = \sin(x)$ auf $[0, \pi]$

1.2.1 Schritt 1: Allgemeine Rotationsvolumenformel

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

1.2.2 Schritt 2: Einsetzen der Funktion $f(x) = \sin(x)$

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx$$

Mit der Identität $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ folgt:

$$V = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) \, dx$$

1.2.3 Schritt 3: Berechnung des Integrals

$$\int (1 - \cos(2x)) \, dx = x - \frac{\sin(2x)}{2}$$

Einsetzen der Grenzen:

$$V = \frac{\pi}{2} [\pi - 0]$$

$$V = \frac{\pi^2}{2}$$

1.2.4 Schritt 4: Ergebnis

Der numerische Wert ergibt:

$$V \approx 4.93$$

1.3 Beispiel 3: Rotationsvolumen zwischen zwei Graphen $f(x) = x^2 + 2$ und $g(x) = 2x^3$ auf $[0, 1]$

1.3.1 Schritt 1: Allgemeine Rotationsvolumenformel

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) \, dx$$

1.3.2 Schritt 2: Einsetzen der Funktionen

$$V = \pi \int_0^1 \left((x^2 + 2)^2 - (2x^3)^2 \right) \, dx$$

1.3.3 Schritt 3: Anwendung der binomischen Formel

Die erste binomische Formel lautet:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1.3.4 Schritt 4: Einsetzen von $(x^2+2)^2$

$$(x^2+2)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4$$

1.3.5 Schritt 5: Berechnung von $(2x^3)^2$

$$(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2$$

$$= 4x^6$$

1.3.6 Schritt 6: Einsetzen in das Integral

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^6\right) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^6\right) dx$$

1.3.7 Schritt 7: Berechnung des Integrals

Die Stammfunktionen der einzelnen Terme sind:

$$\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5}, \quad \int 4x^2 \, dx = \frac{4x^3}{3}, \quad \int 4 \, dx = 4x, \quad \int -4x^6 \, dx = -\frac{4x^7}{7}$$

Nun setzen wir die Integrationsgrenzen 0 und 1 ein:

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x - \frac{4x^7}{7}\right]_0^1$$

Obere Grenze $x = 1$ einsetzen

$$V = \pi \left(\frac{1^5}{5} + \frac{4(1^3)}{3} + 4(1) - \frac{4(1^7)}{7}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{7}\right)$$

Untere Grenze $x = 0$ einsetzen

Da alle Terme ein x enthalten, ergibt sich für $x = 0$:

$$\frac{0^5}{5} + \frac{4(0^3)}{3} + 4(0) - \frac{4(0^7)}{7} = 0$$

Differenz der Grenzen berechnen

$$V = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{7} - 0\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{7}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{521}{105}\right)$$

1.3.8 Schritt 8: Ergebnis

$$V = \frac{521\pi}{105}$$

Numerischer Wert:

$$V \approx 15.59$$

Kapitel 2

Trigonometrische Identitäten

2.0.1 Herleitung der Identitäten für $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$

2.0.2 Schritt 1: Ausgangspunkt - Additionstheoreme

Die grundlegenden trigonometrischen Identitäten sind:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Zusätzlich gilt die fundamentale Identität:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

2.0.3 Schritt 2: Herleitung der Identität für $\cos^2(x)$

Wir starten mit:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Verwenden der Identität $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Auflösen nach $\cos^2(x)$:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2.0.4 Schritt 3: Herleitung der Identität für $\sin^2(x)$

Erneut ausgehend von:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Ersetzen von $\cos^2(x)$ durch $1 - \sin^2(x)$:

$$\cos(2x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

Umstellen nach $\sin^2(x)$:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

2.0.5 Schritt 4: Ergebnis

Die hergeleiteten Identitäten lauten:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Diese Identitäten sind besonders nützlich bei der Integration von $\sin^2(x)$ oder $\cos^2(x)$, da sie eine Substitution mit $\cos(2x)$ ermöglichen.

Kapitel 3

Simpson Beweis

Die Simpson-Regel dient der Approximation des Integrals einer Funktion $f(x)$ über ein Intervall $[a,b]$ mithilfe einer Parabel. Sie lautet:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(m)+f(b)\right),$$

wobei $m=\frac{a+b}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls ist. In diesem Beweis zeigen wir, warum der Faktor $\frac{b-a}{6}$ genau diese Form hat.

3.0.1 Herleitung der Simpson-Regel

Die Simpson-Regel basiert auf der Approximation von $f(x)$ durch ein quadratisches Interpolationspolynom $P(x)$ der Form:

$$P(x)=Ax^2+Bx+C.$$

Dieses Polynom wird so gewählt, dass es durch die drei Punkte $(a,f(a))$, $(m,f(m))$ und $(b,f(b))$ verläuft:

$$P(a)=f(a),\quad P(m)=f(m),\quad P(b)=f(b).$$

Das Integral der Funktion $f(x)$ über $[a,b]$ wird nun durch das Integral von $P(x)$ angenähert:

$$I=\int_a^b P(x)\,dx.$$

3.0.2 Berechnung des Integrals der Parabel

Das Integral einer quadratischen Funktion ist:

$$\int_a^b (Ax^2+Bx+C)\,dx.$$

Wir berechnen die drei einzelnen Integrale:
1. Integral von Ax^2:

$$\int_a^b Ax^2\,dx = A\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = A\frac{b^3-a^3}{3}.$$

2. Integral von Bx:

$$\int_a^b Bx\,dx = B\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = B\frac{b^2-a^2}{2}.$$

3. Integral von C:

$$\int_a^b C\,dx = C[x]_a^b = C(b-a).$$

Setzen wir diese Ergebnisse zusammen:

$$I=A\frac{b^3-a^3}{3}+B\frac{b^2-a^2}{2}+C(b-a).$$

3.0.3 Anwendung der Simpson-Regel

Durch detaillierte Rechnung (unter Verwendung der Werte $P(a) = f(a)$, $P(m) = f(m)$, $P(b) = f(b)$) erhält man:

$$I \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(m)+f(b)\right).$$

Hierbei ergibt sich der Faktor $\frac{b-a}{6}$ aus der exakten Berechnung des Integrals einer Parabel über das Intervall $[a,b]$.