(MAT-2910) Analyse numérique - Devoir 1

Dan Lévy – 536 762 873

14 February 2025

1 Familiarisation avec les commandes

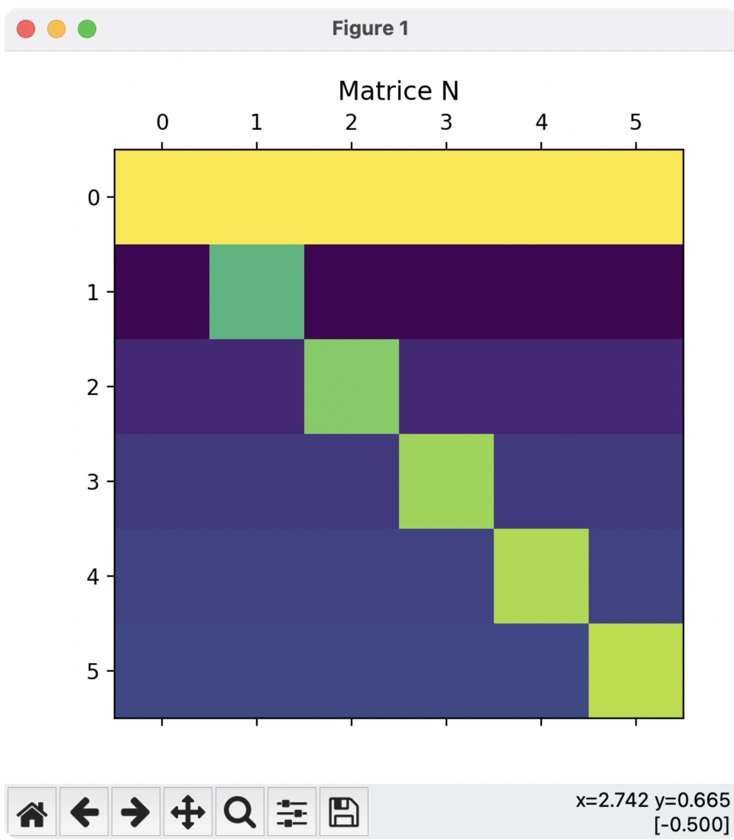

Figure 1: Visualisation de la matrice N

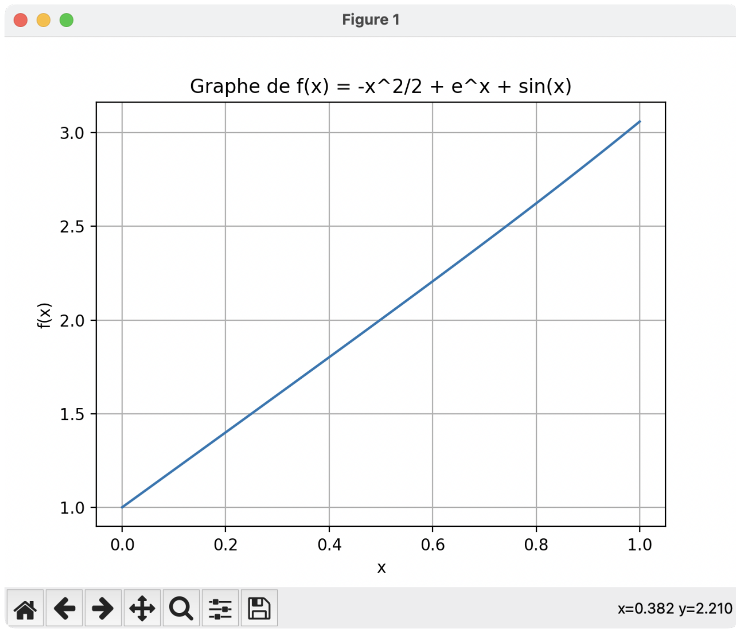

Figure 2: Graphique de la fonction $f(x)$

2 Instabilité numérique

2.1 Explication des valeurs surprenantes pour S_{18} et S_{19}

Soit :

$$S_n = \int_0^1 x^n e^x, dx. \tag{1}$$

Démontrer que :

$$S_n = e^{-1} - nS_{n-1}. \tag{2}$$

Poser :

$u = x^n$ donc $du = nx^{n-1}, dx$,

$dv = e^x, dx$ donc $v = e^x$.

Formule de l'intégration par parties :

$$\int u, dv = uv - \int v, du, \tag{3}$$

On obtient :

$$S_n = [x^n e^x]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^x, dx. \tag{4}$$

En évaluant les bornes :

$$S_n = (1^n e^1 - 0) - n \int_0^1 x^{n-1} e^x, dx. \tag{5}$$

Puisque $S_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} e^x, dx$, on obtient :

$$S_n = e - n S_{n-1}. \tag{6}$$

2.2 Évolution de S_n en fonction de n

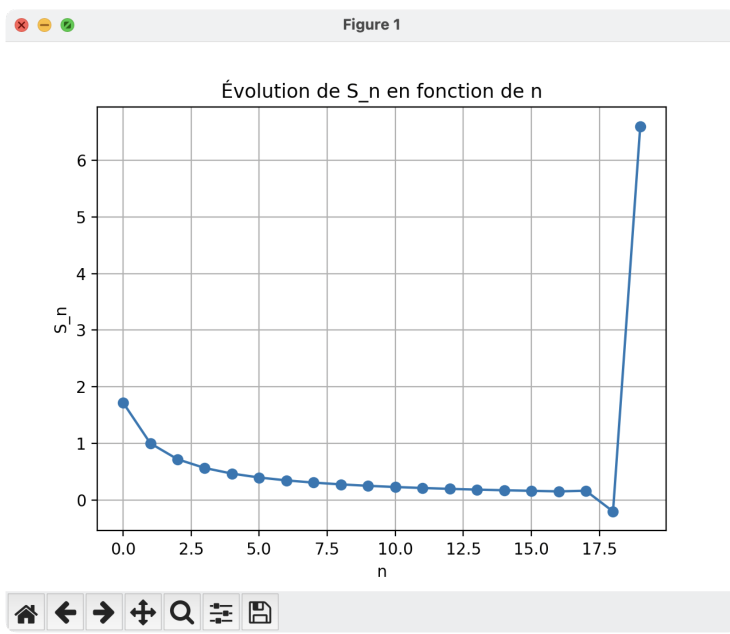

Figure 3: Évolution de la fonction S_n en fonction des valeurs de n

2.3 Explication des valeurs surprenantes pour S_{18} et S_{19}

Lors du calcul de S_n par récurrence, une accumulation des erreurs d'arrondi peut apparaître. En utilisant la propagation des erreurs, nous pouvons exprimer l'erreur sur S_n en fonction de celle sur S_{n-1}.

Soit ΔS_n l'erreur absolue sur S_n. À partir de la formule de récurrence :

$$S_n = e - nS_{n-1}, \tag{7}$$

On obtient la relation d'erreur suivante :

$$\Delta S_n = |n\Delta S_{n-1}|. \tag{8}$$

Cela signifie que l'erreur se multiplie par un facteur n à chaque étape. Pour des valeurs élevées de n, l'erreur devient rapidement significative, expliquant les valeurs aberrantes de S_{18} et S_{19}.

En résumé, ces erreurs sont dues à l'amplification des erreurs d'arrondi causée par la multiplication répétée par des entiers croissants dans la récurrence.

3 Opération dangereuse

Approximation numérique de la dérivée première de $f(x)$ à $x = 0$ en utilisant la formule :

$$D(0, h) = \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}. \tag{9}$$

Calcul de l'erreur :

$$E(h) = |f'(0) - D(0, h)|. \tag{10}$$

et observé son comportement en fonction de h.

3.1 Pourquoi l'erreur devient étrange pour les petites valeurs de h ?

Théoriquement, lorsque $h \to 0$, on s'attend à ce que l'approximation $D(0, h)$ converge vers la dérivée exacte $f'(0)$. Cependant, pour les très petites valeurs de h (typiquement $h < 10^{-8}$), l'erreur $E(h)$ cesse de diminuer et commence à augmenter.

Cela s'explique par deux phénomènes :

- **Erreur d'arrondi**: En raison de la représentation en virgule flottante, la soustraction de deux valeurs très proches (i.e., $f(0 + h)$ et $f(0)$) entraîne une perte de précision significative due aux limites de la machine.

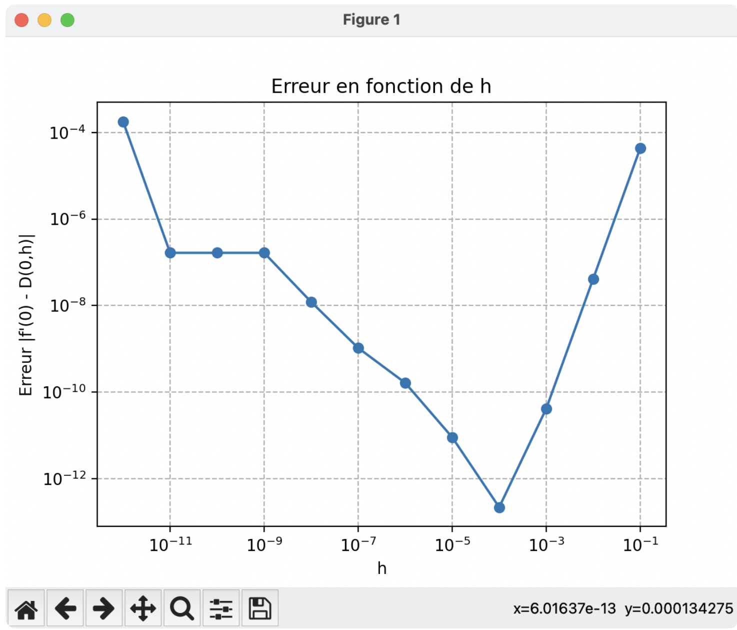

Figure 4: Erreur de l'approximation de $f'(x)$ en fonction de h

- **Amplification des erreurs numériques**: La division par un très petit h amplifie ces erreurs d'arrondi, rendant l'approximation moins fiable.

Ce comportement illustre bien les limites des calculs numériques et met en évidence un compromis fondamental : un h trop grand induit une erreur de troncature, tandis qu'un h trop petit amplifie les erreurs numériques.

4 Ordre du polynôme de Taylor

Polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x)$ en $x_0 = 0$:

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}. \tag{11}$$

L'erreur d'approximation est :

$$E(x) = |f(x) - p_2(x)|. \tag{12}$$

On cherche à montrer que cette approximation est d'ordre 4, c'est-à-dire que :

$$E(x) \approx Cx^p \quad \text{avec } p = 4. \tag{13}$$

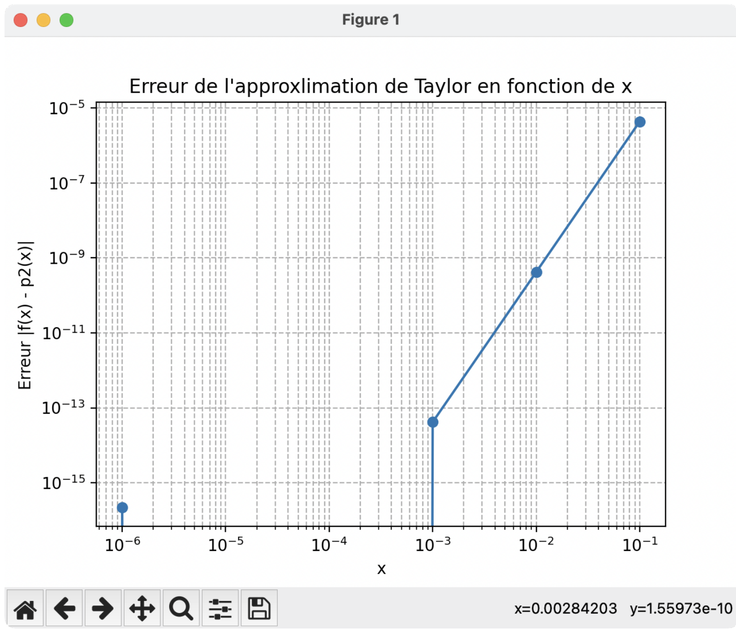

Figure 5: Erreur du polynome de taylor de degré 2 de la fonction $f(x)$

En prenant le logarithme des deux côtés :

$$\log(E(x)) \approx \log(C) + p\log(x). \tag{14}$$

Le graphe en échelle logarithmique montre que la pente de la droite ajustée est proche de 4. Cela confirme que l'erreur se comporte comme x^4, indiquant une approximation d'ordre 4 malgré un développement de Taylor d'ordre 2.