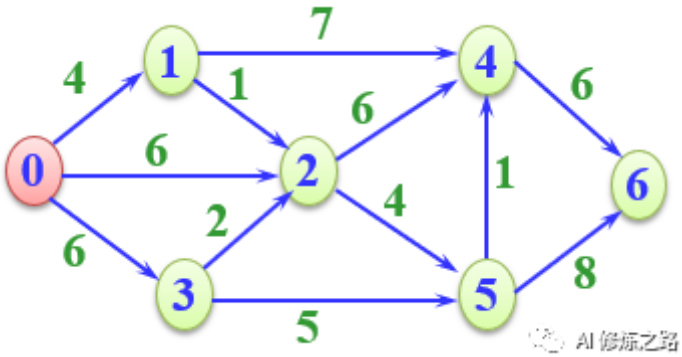
【手撕经典算法】最小路径问题 | 01 Dijkstra算法详解

Willam AI 修炼之路 2021-04-26 19:09

不点蓝字，我们哪来故事？

一、最短路径问题介绍

1、从图中的某个顶点出发到达另外一个顶点的所经过的边的权重和最小的一条路径，称为最短路径。



2、解决问题的算法：

- **迪杰斯特拉算法（Dijkstra算法）**
- 弗洛伊德算法（Floyd算法）
- SPFA算法

这篇文章，就先对Dijkstra算法来做一个详细的介绍~

二、Dijkstra算法介绍

- **算法特点**

  迪科斯彻算法使用了广度优先搜索解决赋权有向图或者无向图的单源最短路径问题，算法最终得到一个最短路径树。该算法常用于路由算法或者作为其他图算法的一个子模块。

- **算法的思路**

  Dijkstra算法采用的是一种贪心的策略，声明一个数组dis来保存原点到各个顶点的最短距离和一个保存已经找到了最短路径的顶点的集合：T={}，初始时，原点 s 的路径权重被赋为 0 （dis[s] = 0）。

  若对于顶点 s 存在能直接到达的边（s,m），则把dis[m]设为w（s, m）,同时把其他所有**s不能直接到达的顶点**的路径长度设为无穷大。初始时，集合T只有顶点s。

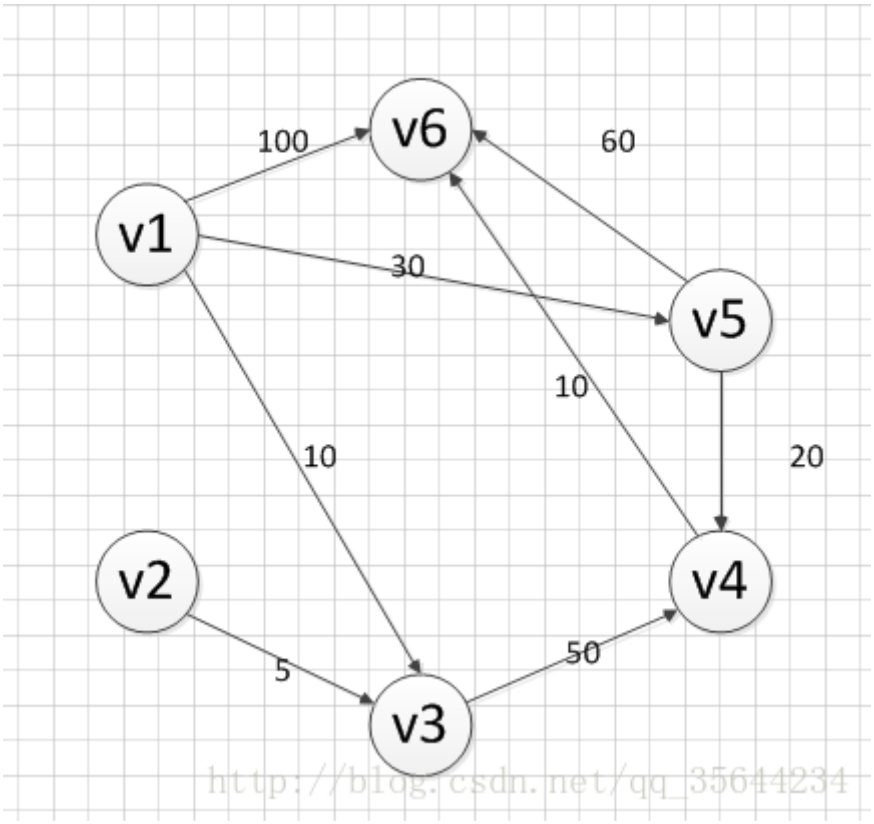
  然后，从dis数组选择最小值，则该值就是原点s到该值对应的顶点的最短路径，并且把该点加入到T中，OK，此时完成一个顶点。

  然后，我们需要看看新加入的顶点是否可以到达其他顶点并且看看通过该顶点到达其他点的路径长度是否比源点直接到达短，如果是，那么就替换这些顶点在dis中的值。

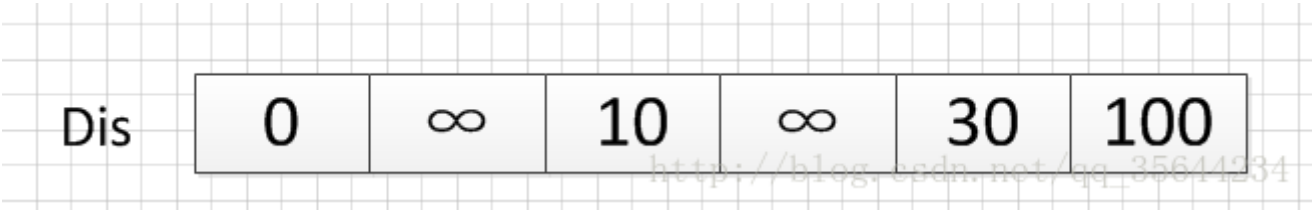
  然后，又从dis中找出最小值，重复上述动作，直到T中包含了图的所有顶点。

三、Dijkstra算法示例演示

以下图为例，找出从顶点v1到其他各个顶点的最短路径。



首先第一步，我们先声明一个dis数组，该数组初始化（原顶点v1到其它点的直接距离，无法直达则记为无穷）的值为：

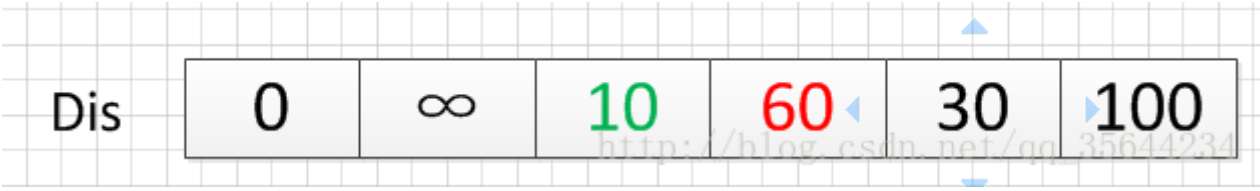


我们的顶点集合T的初始化为：T={v1}

既然是求 v1顶点到其余各个顶点的最短路程，那就先找一个**离第一个顶点 v1最近的顶点**。通过数组 dis 可知当前离v1顶点最近是 v3顶点。当选择了第二个顶点v3后，dis[2]（索引从0开始，即v1到v3的最短距离）的值就已经从“估计值”变为了“确定值”，**即 v1顶点到 v3顶点的最短路程就是当前 dis[2]值。**将v3加入到T中。

提示：因为目前离 v1顶点最近的是 v3顶点，并且这个图所有的边都是正数，那么肯定不可能通过第三个顶点中转，使得 v1顶点到 v3顶点的路程进一步缩短了。因为 v1顶点到其它顶点的路程肯定没有 v1到 v3顶点短.

OK，既然确定了一个顶点的最短路径，下面我们就要根据这个新入的顶点v3会有**出度**（即v3可达到的路径），发现以v3 为弧尾的有：< v3,v4 >,那么我们看看路径：v1–v3–v4的长度是否比v1–v4短，其实这个已经是很明显的了，因为dis[3]代表的就是v1–v4的长度为无穷大，而v1–v3–v4的长度为：10+50=60，**dis[3]要更新为 60, 得到如下结果：**

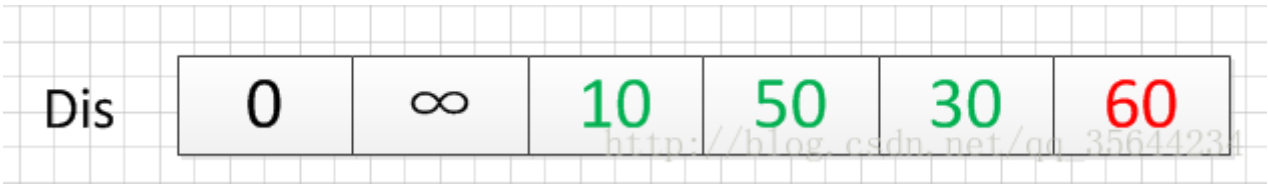


此时，顶点集合： T={v1, v3}

然后，我们又从除dis[2]和dis[0]外的其他值中寻找最小值，发现dis[4]（即v1到v5的直达距离）的值最小，通过之前是解释的原理，可以知道v1到v5的最短距离就是dis[4]的值，然后，我们把v5加入到集合T中，然后，考虑v5的出度是否会影响我们的数组dis的值，v5有两条出度：< v5,v4>和 < v5,v6>,然后我们发现：v1–v5–v4的长度为：50，而dis[3]的值为60，所以我们要更新dis[3]的值.另外，v1-v5-v6的长度为：90，而dis[5]为100，所以我们需要更新dis[5]的值。更新后的dis数组如下图：

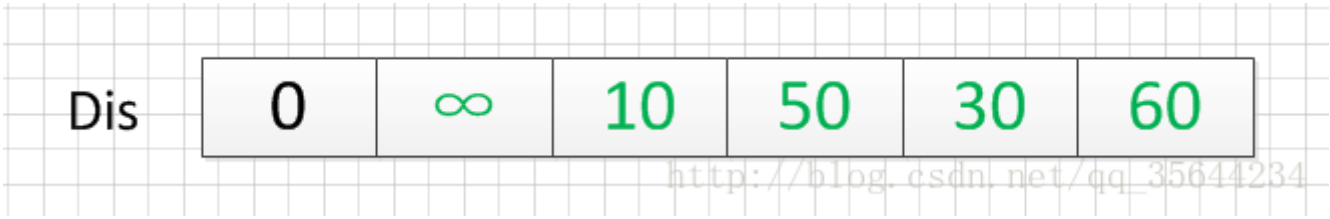
此时，顶点集合： T={v1, v3, v5}

然后，继续从dis中选择未确定的顶点的值中选择一个最小的值，发现dis[3]的值是最小的，所以把v4加入到集合T中，此时集合T={v1,v3,v5,v4},然后，考虑v4的出度是否会影响我们的数组dis的值，v4有一条出度：< v4,v6>,然后我们发现：v1–v5–v4–v6的长度为：60，而dis[5]的值为90，所以我们要更新dis[5]的值，更新后的dis数组如下图：



此时，顶点集合： T={v1, v3, v5, v4}

然后，我们使用同样原理，分别确定了v6和v2的最短路径，最后dis的数组的值如下：



最后，顶点集合： T={v1, v3, v5, v4, v6, v2}

因此，从图中，我们可以发现v1-v2的值为：∞，代表没有路径从v1到达v2。所以我们得到的最后的结果为：

起点	终点	最短路径	长度
v1	v2	无	∞
	v3	{v1, v3}	10
	v4	{v1, v5, v4}	50
	v5	{v1, v5}	30
	v6	{v1， v5, v4, v6}	60

四、Dijkstra算法的代码实现（c++）

- Dijkstra.h文件的代码

```
/************************************************************/
/*                程序作者：Willam                          */
/************************************************************/
//@尽量写出完美的程序

#include<iostream>
#include<string>
using namespace std;

/*
本程序是使用Dijkstra算法实现求解最短路径的问题
采用的邻接矩阵来存储图
*/
//记录起点到每个顶点的最短路径的信息
struct Dis {
    string path;
    int value;
    bool visit;
    Dis() {
        visit = false;
        value = 0;
        path = "";
    }
};

class Graph_DG {
private:
    int vexnum;   //图的顶点个数
    int edge;     //图的边数
    int **arc;   //邻接矩阵
    Dis * dis;   //记录各个顶点最短路径的信息
public:
    //构造函数
    Graph_DG(int vexnum, int edge);
    //析构函数
    ~Graph_DG();
    // 判断我们每次输入的的边的信息是否合法
    //顶点从1开始编号
    bool check_edge_value(int start, int end, int weight);
    //创建图
    void createGraph();
    //打印邻接矩阵
    void print();
    //求最短路径
    void Dijkstra(int begin);
    //打印最短路径
    void print_path(int);
};
```

- Dijkstra.cpp文件的代码

```
#include"Dijkstra.h"

//构造函数
Graph_DG::Graph_DG(int vexnum, int edge) {
    //初始化顶点数和边数
    this->vexnum = vexnum;
    this->edge = edge;
    //为邻接矩阵开辟空间和赋初值
    arc = new int*[this->vexnum];
    dis = new Dis[this->vexnum];
    for (int i = 0; i < this->vexnum; i++) {
        arc[i] = new int[this->vexnum];
        for (int k = 0; k < this->vexnum; k++) {
            //邻接矩阵初始化为无穷大
                arc[i][k] = INT_MAX;
        }
    }
}
//析构函数
Graph_DG::~Graph_DG() {
    delete[] dis;
    for (int i = 0; i < this->vexnum; i++) {
        delete this->arc[i];
    }
    delete arc;
}

// 判断我们每次输入的的边的信息是否合法
//顶点从1开始编号
bool Graph_DG::check_edge_value(int start, int end, int weight) {
    if (start<1 || end<1 || start>vexnum || end>vexnum || weight < 0) {
        return false;
    }
    return true;
}

void Graph_DG::createGraph() {
    cout << "请输入每条边的起点和终点（顶点编号从1开始）以及其权重" << endl;
    int start;
    int end;
    int weight;
    int count = 0;
    while (count != this->edge) {
        cin >> start >> end >> weight;
```

```
        //首先判断边的信息是否合法
        while (!this->check_edge_value(start, end, weight)) {
            cout << "输入的边的信息不合法，请重新输入" << endl;
            cin >> start >> end >> weight;
        }
        //对邻接矩阵对应上的点赋值
        arc[start - 1][end - 1] = weight;
        //无向图添加上这行代码
        //arc[end - 1][start - 1] = weight;
        ++count;
    }
}

void Graph_DG::print() {
    cout << "图的邻接矩阵为：" << endl;
    int count_row = 0; //打印行的标签
    int count_col = 0; //打印列的标签
    //开始打印
    while (count_row != this->vexnum) {
        count_col = 0;
        while (count_col != this->vexnum) {
            if (arc[count_row][count_col] == INT_MAX)
                cout << "∞" << " ";
            else
            cout << arc[count_row][count_col] << " ";
            ++count_col;
        }
        cout << endl;
        ++count_row;
    }
}
void Graph_DG::Dijkstra(int begin){
    //首先初始化我们的dis数组
    int i;
    for (i = 0; i < this->vexnum; i++) {
        //设置当前的路径
        dis[i].path = "v" + to_string(begin) + "-->v" + to_string(i + 1);
        dis[i].value = arc[begin - 1][i];
    }
    //设置起点的到起点的路径为0
    dis[begin - 1].value = 0;
    dis[begin - 1].visit = true;

    int count = 1;
    //计算剩余的顶点的最短路径（剩余this->vexnum-1个顶点）
    while (count != this->vexnum) {
        //temp用于保存当前dis数组中最小的那个下标
        //min记录的当前的最小值
        int temp=0;
```

```
        int min = INT_MAX;
        for (i = 0; i < this->vexnum; i++) {
            if (!dis[i].visit && dis[i].value<min) {
                min = dis[i].value;
                temp = i;
            }
        }
        //cout << temp + 1 << "  "<<min << endl;
        //把temp对应的顶点加入到已经找到的最短路径的集合中
        dis[temp].visit = true;
        ++count;
        for (i = 0; i < this->vexnum; i++) {
            //注意这里的条件arc[temp][i]!=INT_MAX必须加，不然会出现溢出，从而造成程序异常
            if (!dis[i].visit && arc[temp][i]!=INT_MAX && (dis[temp].value + arc[temp][i]) < dis[i]
                //如果新得到的边可以影响其他为访问的顶点，那就就更新它的最短路径和长度
                dis[i].value = dis[temp].value + arc[temp][i];
                dis[i].path = dis[temp].path + "-->v" + to_string(i + 1);
            }
        }
    }

}
void Graph_DG::print_path(int begin) {
    string str;
    str = "v" + to_string(begin);
    cout << "以"<<str<<"为起点的图的最短路径为：" << endl;
    for (int i = 0; i != this->vexnum; i++) {
        if(dis[i].value!=INT_MAX)
        cout << dis[i].path << "=" << dis[i].value << endl;
        else {
            cout << dis[i].path << "是无最短路径的" << endl;
        }
    }
}
```

- main.cpp文件的代码

```
#include"Dijkstra.h"

//检验输入边数和顶点数的值是否有效，可以自己推算为啥：
//顶点数和边数的关系是：((Vexnum*(Vexnum - 1)) / 2) < edge
bool check(int Vexnum, int edge) {
    if (Vexnum <= 0 || edge <= 0 || ((Vexnum*(Vexnum - 1)) / 2) < edge)
```

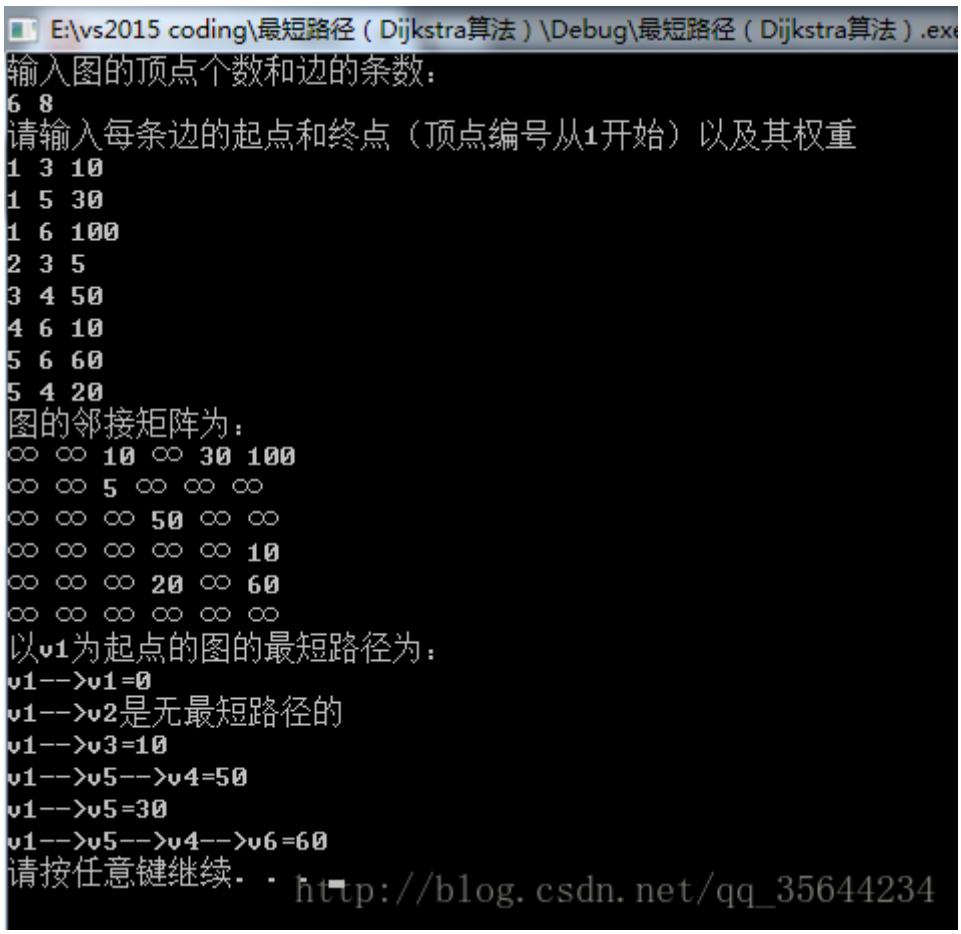
```
        return false;
    return true;
}
int main() {
    int vexnum; int edge;

    cout << "输入图的顶点个数和边的条数：" << endl;
    cin >> vexnum >> edge;
    while (!check(vexnum, edge)) {
        cout << "输入的数值不合法，请重新输入" << endl;
        cin >> vexnum >> edge;
    }
    Graph_DG graph(vexnum, edge);
    graph.createGraph();
    graph.print();
    graph.Dijkstra(1);
    graph.print_path(1);
    system("pause");
    return 0;
}
```

输入：

```
6 8
1 3 10
1 5 30
1 6 100
2 3 5
3 4 50
4 6 10
5 6 60
5 4 20
```

输出：



从输出可以看出，程序的结果和我们之前手动计算的结果是一样的，今天的分享就到这里啦，下期再见！

扫描二维码
获取更多精彩

AI修炼之路

Read more