

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

ОТЧЕТ О ПРАКТИКЕ

Студента 3 курса факультета КНиИТ направления 27.03.03 – Системный анализ
и управление

Черневского Алексея Дмитриевича

фамилия, имя, отчество

кафедра системного анализа и автоматического управления

кафедра

Саратов, 2017

Тема практики:

«Решение задач по дисциплине

“Характеристики эргодических цепей Маркова с дискретным временем”.»

Задание:

Определить регулярную цепь Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний C_s , задав произвольную матрицу P вероятностей переходов за 1 шаг и начальное распределение $p^{(0)}$.

1. Получить предельное распределение для заданной цепи Маркова.

Код программы:

```
1 %начальное распределение
2 P0 = [0.14 0.174 0.12 0.273 0.02 0.093 0.016 0.164];
3
4 %матрица вероятностей переходов
5 P = [0.156 0.135 0.05 0.346 0.119 0.045 0.078 0.071;
6      0.094 0.271 0.156 0.023 0.096 0.175 0.065 0.12;
7      0.225 0.075 0.25 0.05 0.05 0.1 0.15 0.1;
8      0.076 0.097 0.065 0.234 0.312 0.156 0.023 0.037;
9      0.12 0.2 0.352 0.123 0.065 0.063 0.032 0.045
10     0.3 0.05 0.05 0.12 0.08 0.015 0.085 0.2;
11     0.09 0.01 0.02 0.045 0.055 0.48 0.2 0.1;
12     0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.15 0.05;];
13
14 %Создание единичной матрицы
15 I = eye(8);
16 %вычитаем из транспонированной матрицы вероятностей переходов единичную
17 A = P' - I;
18 %заполняем нижнюю строку итоговой матрицы единицами
19 A(8,:) = ones(1,8);
20 %решаем СЛАУ
21 b = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1];
22 pi = A \ b
```

Результат работы программы:

```
pi =
0.168623
0.119748
0.128001
0.145547
0.116425
0.127572
0.091753
0.102330
```

2. Вычислить n -е степени матрицы P при $n=1,2,\dots,5$

Код программы:

```
1 %Выводим n-ю степень матрицы на каждом шаге от 1 до 5
2 for n=1 : 5
3     n
4     Pn = P^n
5 end
```

Результат работы программы:

```
n = 1
Pn =

Columns 1 through 7:

    0.156000    0.135000    0.050000    0.346000    0.119000    0.045000    0.078000
    0.094000    0.271000    0.156000    0.023000    0.096000    0.175000    0.065000
    0.225000    0.075000    0.250000    0.050000    0.050000    0.100000    0.150000
    0.076000    0.097000    0.065000    0.234000    0.312000    0.156000    0.023000
    0.120000    0.200000    0.352000    0.123000    0.065000    0.063000    0.032000
    0.300000    0.050000    0.050000    0.120000    0.080000    0.015000    0.085000
    0.090000    0.010000    0.020000    0.045000    0.055000    0.480000    0.200000
    0.300000    0.100000    0.100000    0.100000    0.100000    0.100000    0.150000

Column 8:

    0.071000
    0.120000
    0.100000
    0.037000
    0.045000
    0.200000
    0.100000
    0.050000

n = 2
Pn =

Columns 1 through 7:

    0.130672    0.128887    0.116648    0.171192    0.164701    0.142333    0.070284
    0.182856    0.140662    0.143313    0.099672    0.087993    0.122716    0.097823
    0.181700    0.100800    0.124300    0.138675    0.091575    0.142700    0.116175
    0.150793    0.138250    0.172176    0.148364    0.132339    0.100135    0.060759
    0.169148    0.129701    0.164365    0.113997    0.104981    0.119688    0.098574
    0.153620    0.107040    0.093710    0.170995    0.111515    0.112035    0.087745
    0.221500    0.067725    0.071345    0.126265    0.089685    0.131485    0.109265
    0.156800    0.116300    0.110300    0.170550    0.109250    0.141400    0.096400

Column 8:

    0.070783
    0.107465
    0.094075
    0.081584
    0.093246
    0.061840
    0.134730
    0.089000
```

n = 3

Pn =

Columns 1 through 7:

0.161781	0.125761	0.140505	0.141648	0.120204	0.120132	0.082048
0.169986	0.118681	0.123205	0.137690	0.105190	0.127810	0.096126
0.168804	0.110640	0.115999	0.146875	0.113946	0.132961	0.094965
0.162399	0.125368	0.142758	0.137867	0.114228	0.118504	0.087123
0.169574	0.118660	0.131426	0.137438	0.107510	0.129579	0.096135
0.141548	0.108328	0.111715	0.137606	0.113814	0.118699	0.076846
0.167029	0.104931	0.101485	0.156509	0.111653	0.122194	0.091394
0.164078	0.116285	0.120998	0.145995	0.121166	0.129220	0.088403

Column 8:

0.089189
0.091540
0.091540
0.086141
0.091409
0.078741
0.083656
0.089715

n = 4

Pn =

Columns 1 through 7:

0.164043	0.119986	0.130919	0.140851	0.113400	0.123112	0.088973
0.162939	0.115251	0.121259	0.141680	0.112244	0.126057	0.089807
0.163567	0.115260	0.122057	0.144518	0.114754	0.125381	0.088808
0.162659	0.118235	0.128818	0.139277	0.111824	0.124437	0.089474
0.165473	0.116321	0.124166	0.142374	0.112805	0.126982	0.091208
0.147664	0.107532	0.116258	0.128828	0.104757	0.111676	0.078916
0.154028	0.111498	0.115870	0.142778	0.114280	0.121545	0.083458
0.163024	0.117450	0.125934	0.143018	0.114336	0.123585	0.087863

Column 8:

0.087969
0.088211
0.088089
0.087812
0.089444
0.079795
0.083176
0.087728

n = 5

Pn =

Columns 1 through 7:

0.161971	0.116666	0.125454	0.140546	0.112442	0.123939	0.088555
0.160135	0.114538	0.122080	0.140039	0.111862	0.122620	0.087148
0.160601	0.115406	0.123314	0.141131	0.112905	0.122829	0.087187
0.161204	0.115434	0.123990	0.139526	0.111528	0.123260	0.088121
0.162179	0.115751	0.123541	0.141615	0.112939	0.124165	0.088429
0.146207	0.105595	0.113613	0.127341	0.101966	0.111320	0.079506
0.154072	0.111635	0.119634	0.135777	0.109433	0.117704	0.083082

0.160698 0.115853 0.124209 0.140491 0.112517 0.122798 0.087425

Column 8:

0.087370
0.086420
0.086523
0.087030
0.087457
0.078711
0.083142
0.086589

3. Проверить выполнение неравенств $PN = NP = N$.

Код программы:

1	for n=1:8
2	N(n,:)= npi';
3	end
4	N
5	A=N*P
6	B=P*N

Результат работы программы:

N =

Columns 1 through 7:

0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753

Column 8:

0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.102330

A =

Columns 1 through 7:

0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.151761	0.107773	0.115201	0.130992	0.104783	0.114815	0.082578
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753

Column 8:

0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.092097
0.102330
0.102330

B =

Columns 1 through 7:

0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.151761	0.107773	0.115201	0.130992	0.104783	0.114815	0.082578
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753
0.168623	0.119748	0.128001	0.145547	0.116425	0.127572	0.091753

Column 8:

0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.102330
0.092097
0.102330
0.102330

4. Для произвольных начальных распределений $p(0)$ и $p'(0)$ вычислить значения векторов $p(n)$ при $n=1,2,\dots,5$.

Код программы:

1	P1= [0.076 0.135 0.214 0.165 0.067 0.134 0.183 0.026];
2	pn=P0*P^5
3	pn1=P1*P^5

Результат работы программы:

```
pn =  
Columns 1 through 7:  
    0.159481    0.114547    0.122774    0.138957    0.111147    0.121935    0.086911  
Column 8:  
    0.086011  
pn1 =  
Columns 1 through 7:  
    0.157727    0.113419    0.121487    0.137862    0.110393    0.120565    0.085749  
Column 8:  
    0.085056
```

5. Вычислить математическое ожидание доли времени, проведенного цепью в состоянии r за промежуток времени от 1 до n (при $n \rightarrow \infty$),
 $r=1,2\dots c_S$.

Код программы:

1	Ex=np1'
---	---------

Результат работы программы:

```
Ex =  
Columns 1 through 7:  
    0.168623    0.119748    0.128001    0.145547    0.116425    0.127572    0.091753  
Column 8:  
    0.102330
```


6. Вычислить значения элементов фундаментальной матрицы.

Код программы:

1	Sum=0;
2	for n=1:8
3	Sum += P^n - N;
4	end
5	Z=I+Sum

Результат работы программы:

Z =
Columns 1 through 6:
0.8991167 0.0084545 -0.0960143 0.1888067 0.0286737 -0.1039159
-0.1116620 1.1381096 0.0017085 -0.2141485 -0.0915232 0.0109541
0.0205121 -0.1029626 1.0738226 -0.1329799 -0.1198706 -0.0375495
-0.1656712 -0.0260805 -0.0296216 1.0448380 0.1785522 -0.0386850
-0.0896198 0.0623098 0.2354866 -0.0929165 0.9022942 -0.0955120
-0.0323031 -0.1720959 -0.2092092 -0.1066760 -0.1209316 0.7751241
-0.1100527 -0.2265990 -0.2464213 -0.1634038 -0.1353564 0.2978984
0.0659079 -0.0539965 -0.0801845 -0.0540298 -0.0457764 -0.0440304
Columns 7 and 8:
-0.0681695 -0.1568855
-0.0437465 -0.0729780
0.0587885 -0.1050800
-0.1294151 -0.1854845
-0.0702328 -0.1570397
-0.0930952 -0.0889317
1.0792838 -0.0900857
0.0321168 0.8380056

7. Проверить выполнение свойств фундаментальной матрицы.

Код программы:

1	%Свойство 1 ($P \cdot Z == Z \cdot P$)
2	one = P.*Z
3	two = Z.*P
4	
5	%Свойство 2 ($\nu == Z\nu$)
6	nu=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1]
7	answer2 = Z*nu
8	
9	%Свойство 3 ($\pi_i == \pi_i \cdot Z$)
10	answer3 = pi'*Z
11	
12	%Свойство 4 ($I - Z == N - P \cdot Z$)
13	one4 = I - Z
14	two4 = N - P * Z

Результат работы программы:

one =

Columns 1 through 6:

1.4026e-01	1.1414e-03	-4.8007e-03	6.5327e-02	3.4122e-03	-4.6762e-03
-1.0496e-02	3.0843e-01	2.6652e-04	-4.9254e-03	-8.7862e-03	1.9170e-03
4.6152e-03	-7.7222e-03	2.6846e-01	-6.6490e-03	-5.9935e-03	-3.7549e-03
-1.2591e-02	-2.5298e-03	-1.9254e-03	2.4449e-01	5.5708e-02	-6.0349e-03
-1.0754e-02	1.2462e-02	8.2891e-02	-1.1429e-02	5.8649e-02	-6.0173e-03
-9.6909e-03	-8.6048e-03	-1.0460e-02	-1.2801e-02	-9.6745e-03	1.1627e-02
-9.9047e-03	-2.2660e-03	-4.9284e-03	-7.3532e-03	-7.4446e-03	1.4299e-01
1.9772e-02	-5.3997e-03	-8.0184e-03	-5.4030e-03	-4.5776e-03	-4.4030e-03

Columns 7 and 8:

-5.3172e-03	-1.1139e-02
-2.8435e-03	-8.7574e-03
8.8183e-03	-1.0508e-02
-2.9765e-03	-6.8629e-03
-2.2474e-03	-7.0668e-03
-7.9131e-03	-1.7786e-02
2.1586e-01	-9.0086e-03
4.8175e-03	4.1900e-02

two =

Columns 1 through 6:

1.4026e-01	1.1414e-03	-4.8007e-03	6.5327e-02	3.4122e-03	-4.6762e-03
-1.0496e-02	3.0843e-01	2.6652e-04	-4.9254e-03	-8.7862e-03	1.9170e-03
4.6152e-03	-7.7222e-03	2.6846e-01	-6.6490e-03	-5.9935e-03	-3.7549e-03
-1.2591e-02	-2.5298e-03	-1.9254e-03	2.4449e-01	5.5708e-02	-6.0349e-03
-1.0754e-02	1.2462e-02	8.2891e-02	-1.1429e-02	5.8649e-02	-6.0173e-03
-9.6909e-03	-8.6048e-03	-1.0460e-02	-1.2801e-02	-9.6745e-03	1.1627e-02
-9.9047e-03	-2.2660e-03	-4.9284e-03	-7.3532e-03	-7.4446e-03	1.4299e-01
1.9772e-02	-5.3997e-03	-8.0184e-03	-5.4030e-03	-4.5776e-03	-4.4030e-03

Columns 7 and 8:

-5.3172e-03	-1.1139e-02
-2.8435e-03	-8.7574e-03
8.8183e-03	-1.0508e-02
-2.9765e-03	-6.8629e-03
-2.2474e-03	-7.0668e-03
-7.9131e-03	-1.7786e-02
2.1586e-01	-9.0086e-03
4.8175e-03	4.1900e-02

nu =

1
1
1
1
1
1
1
1
1

answer2 =

0.700066
0.616714
0.654681
0.648432
0.694770
-0.048118
0.405263
0.658013

answer3 =

Columns 1 through 7:

0.098845 0.079720 0.087066 0.096296 0.077038 0.083944 0.054217

Column 8:

-0.027782

one4 =

Columns 1 through 6:

0.1008833	-0.0084545	0.0960143	-0.1888067	-0.0286737	0.1039159
0.1116620	-0.1381096	-0.0017085	0.2141485	0.0915232	-0.0109541
-0.0205121	0.1029626	-0.0738226	0.1329799	0.1198706	0.0375495
0.1656712	0.0260805	0.0296216	-0.0448380	-0.1785522	0.0386850
0.0896198	-0.0623098	-0.2354866	0.0929165	0.0977058	0.0955120
0.0323031	0.1720959	0.2092092	0.1066760	0.1209316	0.2248759
0.1100527	0.2265990	0.2464213	0.1634038	0.1353564	-0.2978984
-0.0659079	0.0539965	0.0801845	0.0540298	0.0457764	0.0440304

Columns 7 and 8:

0.0681695	0.1568855
0.0437465	0.0729780
-0.0587885	0.1050800
0.1294151	0.1854845
0.0702328	0.1570397
0.0930952	0.0889317
-0.0792838	0.0900857
-0.0321168	0.1619944

two4 =

Columns 1 through 6:

1.1575e-01	7.9440e-04	1.0561e-01	-1.7742e-01	-1.9601e-02	1.1394e-01
1.2848e-01	-1.2747e-01	9.3728e-03	2.2724e-01	1.0196e-01	5.6206e-04
-4.5198e-03	1.1302e-01	-6.3370e-02	1.4536e-01	1.2974e-01	4.8435e-02
1.8165e-01	3.6120e-02	4.0065e-02	-3.2490e-02	-1.6871e-01	4.9558e-02
1.0463e-01	-5.2965e-02	-2.2579e-01	1.0443e-01	1.0688e-01	1.0565e-01
-7.2847e-02	9.6241e-02	1.2787e-01	1.4609e-02	4.7258e-02	1.4422e-01
1.3172e-01	2.4074e-01	2.6125e-01	1.8074e-01	1.4919e-01	-2.8268e-01
-5.0025e-02	6.3973e-02	9.0559e-02	6.6305e-02	5.5563e-02	5.4831e-02

Columns 7 and 8:

7.6214e-02	1.7631e-01
5.2849e-02	9.3447e-02
-5.0137e-02	1.2510e-01
1.3806e-01	2.0550e-01
7.8355e-02	1.7654e-01

3.5835e-02	3.4510e-02
-6.7546e-02	1.1317e-01
-2.3524e-02	1.8196e-01

8. Сравнить математические ожидания величин $\tilde{y}_r^{(n)}$, $r=1,2,\dots,c_S$, при начале эволюции цепи с вероятностью 1 из состояния v , $v=1,2,\dots,c_S$.

Код программы:

1	for n=1:8
2	Ey(n,:)=Z(n,:)-npi'
3	end

Результат работы программы:

```
Ey =
Columns 1 through 7:
    0.730494   -0.111294   -0.224015    0.043260   -0.087752   -0.231488   -0.159923
   -0.280285    1.018361   -0.126293   -0.359695   -0.207949   -0.116618   -0.135500
   -0.148111   -0.222711    0.945821   -0.278526   -0.236296   -0.165122   -0.032965
   -0.334294   -0.145829   -0.157623    0.899291    0.062127   -0.166257   -0.221169
   -0.258243   -0.057438    0.107485   -0.238463    0.785869   -0.223084   -0.161986
   -0.200926   -0.291844   -0.337210   -0.252223   -0.237357    0.647552   -0.184849
   -0.278676   -0.346347   -0.374422   -0.308950   -0.251782    0.170326    0.987530
   -0.102715   -0.173745   -0.208186   -0.199576   -0.162202   -0.171603   -0.059637

Column 8:
   -0.259216
   -0.175308
   -0.207410
   -0.287815
   -0.259370
   -0.191262
   -0.192416
    0.735676
```

9. Сравнить математические ожидания величин $\tilde{y}_r^{(n)}$, $r=1,2,\dots,c_S$, при произвольных начальных распределениях $p(0)$ и $p'(0)$.

Код программы:

1	Ep=(P0-P1)*Z
---	--------------

Результат работы программы:

```
Er =  
  
Columns 1 through 6:  
  
    0.0679006    0.0874020   -0.0814478    0.1589793    0.0087211   -0.0888243  
  
Columns 7 and 8:  
  
   -0.1934349    0.1194950
```

10. Вычислить значения элементов матрицы средних времен достижения.

Код программы:

```
1 I9=ones(8,8);  
2 Vdg=eye(8);  
3 for n=1:8  
4     Vdg(n,n)=1/npi'(n);  
5 end  
6 Zdg=eye(8);  
7 for n=1:8  
8     Zdg(n,n)=Z(n,n);  
9 end  
10 V=(I-Z+I9*Zdg)*Vdg
```

Результат работы программы:

```
V =  
  
    5.9304    9.4220    9.1326    5.8749    7.5028    6.8014   12.4656  
9.7171  
    6.0058    8.3509    8.3807    8.6552    8.5469    5.9126   12.2109  
8.9073  
    5.2171   10.3591    7.8124    8.0926    8.7855    6.2879   11.0885  
9.2167  
    6.3212    9.7170    8.6205    6.8707    6.2221    6.2967   13.1397  
10.0024  
    5.8644    8.9730    6.5435    7.8114    8.5892    6.7364   12.4889  
9.7193  
    5.6119   11.0190   10.1064    7.9943    8.8771    7.8387   12.8255  
9.1314  
    6.0251   11.4257   10.3485    8.3357    8.9526    3.6924   10.8988  
9.1001  
    4.9473    9.9496    9.0150    7.5494    8.1484    6.3380   11.3786  
9.7723
```

11. Сравнить математическое ожидание случайных величин f_r при произвольных начальных распределениях $p(0)$ и $p'(0)$.

Код программы:

1	Epf=(P0-P1)*(I-Z)*Vdg
---	-----------------------

Результат работы программы:

Epf =
Columns 1 through 7:
-0.014107 -0.395054 -0.088904 -0.341111 -0.469441 0.384002 0.297126
Column 8:
0.188854

12. Вычислить дисперсии времен первого достижения

Код программы:

1	ZVdg=eye(8);
2	ZV=Z*V;
3	for n=1:8
4	ZVdg(n,n)=ZV(n,n);
5	end
6	W=V*(2*Zdg*Vdg-I)+2*(ZV-I9*ZVdg);
7	Vsq=V.*V;
8	V2=W-Vsq

Результат работы программы:

V2 =
21.097 82.610 61.427 41.302 47.795 34.815 132.966
52.176
19.422 79.164 60.674 42.926 48.637 33.690 129.932
51.187
19.705 83.078 60.957 43.472 48.506 34.005 129.535
51.864
19.957 81.753 59.787 43.403 44.426 34.916 130.728
50.297
20.381 82.338 56.308 44.892 49.415 34.684 131.505
51.480
12.102 67.257 47.515 32.224 35.964 23.341 113.787
39.141
17.122 77.123 56.859 39.585 44.495 24.387 123.931
47.259
19.777 82.735 61.770 43.442 48.430 34.247 130.852
50.972

