

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

**ОТЧЕТ О ПРАКТИКЕ**

Студента 3 курса факультета КНиИТ направления 27.03.03 – Системный анализ и управление

Черневского Алексея Дмитриевича

фамилия, имя, отчество

кафедра системного анализа и автоматического управления

кафедра

Саратов, 2017

Тема практики:

«Решение задач по дисциплине

“Характеристики поглощающих цепей Маркова с дискретным временем”.»

*Задание:*

Определить поглощающую цепь Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний  $c_s$ , из которых первые  $k$  состояний являются поглощающими, задав произвольную матрицу  $P$  вероятностей переходов за 1 шаг и начальное распределение  $p(0)$ .

1. Вычислить  $n$ -е степени матриц  $P$  и  $R$  при  $n=1,2,\dots,7$ .

*Код программы:*

1	% Мощность множества состояний.
2	cS = 8;
3	
4	% Количество поглощающих состояний цепи (первые k).
5	k = 4;
6	% Остальные состояния цепи являются невозвратными.
7	
8	% Q -- матрица размерности k*k, описывающая эволюцию цепи
9	после её попадания в множество её поглощающих состояний.
10	% Так как Q=I, то:
11	Q = eye(k, k);
12	
13	% O -- матрица размерности k*(cS - k), состоящая из нулей.
14	O = zeros(k, (cS - k));
15	
16	% Матрица [H R] представляет из себя стохастическую матрицу
17	% H -- матрица размерности (cS - k)*k, описывающая переходы цепи
18	из состояний множества Z(невозвратных состояний) в состояния
19	множества Y(поглощающих состояний)
20	H = [ 0.1 0.15 0.25 0.05;
21	0.05 0.03 0.27 0.15;

```

22     0.01 0.09 0.35 0.05;
23     0.1 0.2 0.1 0.05;];
24 % R -- матрица размерности (cS - k)*(cS - k), описывающая
25 эволюцию цепи до её выхода из множества невозвратных состояний.
26 R = [ 0.05 0.1 0.2 0.1;
27       0.1 0.25 0.1 0.05;
28       0.05 0.07 0.35 0.03;
29       0.25 0.1 0.1 0.1;];
30
31 % Создаем матрицу P из Q, O, H и R
32 P = [Q O;
33       H R;];
34
35 % Выводим n-ю степень матриц на каждом шаге от 1 до 7
36 for n=1:7
37     n
38
39     Rn = R^n
40
41     Pn = P^n
42 end

```

*Результат работы программы:*

```

n = 1
Rn =

    0.050000    0.100000    0.200000    0.100000
    0.100000    0.250000    0.100000    0.050000
    0.050000    0.070000    0.350000    0.030000
    0.250000    0.100000    0.100000    0.100000

Pn =

    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000

```

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.10000	0.15000	0.25000	0.05000	0.05000	0.10000	0.20000	0.10000
0.05000	0.03000	0.27000	0.15000	0.10000	0.25000	0.10000	0.05000
0.01000	0.09000	0.35000	0.05000	0.05000	0.07000	0.35000	0.03000
0.10000	0.20000	0.10000	0.05000	0.25000	0.10000	0.10000	0.10000

n = 2

Rn =

0.047500	0.054000	0.100000	0.026000
0.047500	0.084500	0.085000	0.030500
0.034500	0.050000	0.142500	0.022000
0.052500	0.067000	0.105000	0.043000

Pn =

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.12200	0.19850	0.36950	0.08250	0.04750	0.05400	0.10000	0.02600
0.07850	0.07150	0.40250	0.20000	0.04750	0.08450	0.08500	0.03050
0.02500	0.13710	0.50690	0.08200	0.03450	0.05000	0.14250	0.02200
0.14100	0.26950	0.23450	0.08750	0.05250	0.06700	0.10500	0.04300

n = 3

Rn =

0.019275	0.027850	0.052500	0.013050
0.022700	0.034875	0.050750	0.014575
0.019350	0.028125	0.063975	0.012425
0.025325	0.033650	0.058250	0.016050

Pn =

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.13305	0.22144	0.43356	0.09928	0.01928	0.02785	0.05250	0.01305
0.09138	0.09491	0.46999	0.22082	0.02270	0.03488	0.05075	0.01458
0.03458	0.16100	0.58110	0.09945	0.01935	0.02813	0.06398	0.01242
0.15495	0.29744	0.30677	0.10758	0.02533	0.03365	0.05825	0.01605

n = 4

Rn =

0.0096363	0.0138700	0.0263200	0.0062000
0.0108038	0.0159988	0.0272475	0.0069938
0.0100850	0.0146870	0.0303162	0.0065030
0.0115563	0.0166275	0.0304225	0.0075675

Pn =

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.13820	0.23251	0.46557	0.10769	0.00964	0.01387	0.02632	0.00620
0.09735	0.10684	0.50430	0.23046	0.01080	0.01600	0.02725	0.00699
0.03980	0.17299	0.61717	0.10846	0.01009	0.01469	0.03032	0.00650
0.16135	0.31070	0.34417	0.11760	0.01156	0.01663	0.03042	0.00757

n = 5

Rn =

0.0047348	0.0068935	0.0131462	0.0030667
0.0052509	0.0076868	0.0139966	0.0033971
0.0051145	0.0074527	0.0147467	0.0033026
0.0056536	0.0081988	0.0153786	0.0036564

Pn =

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.14074	0.23798	0.48156	0.11188	0.00473	0.00689	0.01315	0.00307
0.10021	0.11280	0.52156	0.23511	0.00525	0.00769	0.01400	0.00340
0.04249	0.17897	0.63491	0.11300	0.00511	0.00745	0.01475	0.00330
0.16440	0.31718	0.36296	0.12258	0.00565	0.00820	0.01538	0.00366

n = 6

Rn =

0.0023501	0.0034238	0.0065442	0.0015192
0.0025803	0.0037663	0.0070574	0.0016690
0.0025640	0.0037372	0.0072598	0.0016568
0.0027856	0.0040572	0.0076988	0.0018023

Pn =

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.14200	0.24069	0.48951	0.11396	0.00235	0.00342	0.00654	0.00152
0.10160	0.11575	0.53018	0.23739	0.00258	0.00377	0.00706	0.00167
0.04386	0.18195	0.64370	0.11528	0.00256	0.00374	0.00726	0.00166
0.16590	0.32039	0.37233	0.12504	0.00279	0.00406	0.00770	0.00180

n = 7

Rn =

1.1669e-03	1.7010e-03	3.2548e-03	7.5444e-04
1.2758e-03	1.8605e-03	3.5297e-03	8.2497e-04
1.2791e-03	1.8645e-03	3.5931e-03	8.2672e-04
1.3805e-03	2.0120e-03	3.8376e-03	8.9261e-04

$P_n =$

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.14262	0.24204	0.49347	0.11500	0.00117	0.00170	0.00325	0.00075
0.10228	0.11722	0.53448	0.23853	0.00128	0.00186	0.00353	0.00082
0.04454	0.18343	0.64805	0.11642	0.00128	0.00186	0.00359	0.00083
0.16663	0.32198	0.37700	0.12626	0.00138	0.00201	0.00384	0.00089

2. Вычислить условные м. о. и дисперсию числа заходов цепи в невозвратное состояние  $r$  от момента начала эволюции цепи из невозвратного состояния  $s$  до момента завершения ее эволюции в одном из поглощающих состояний,  $r, s = k+1, \dots, c_s$ .

*Код программы:*

```

1 % Фундаментальная матрица поглощающей цепи Маркова
2 M = (Q - R)^(-1);
3
4 Mdg=eye(k);
5 for n=1:k
6     Mdg(n,n)=M(n,n);
7 end
8 % Ответ
9 Msq=M.^2
   Dps=M*(2*Mdg-Q)-Msq

```

*Результаты работы программы:*

$Msq =$

1.2900771	0.0438561	0.1640107	0.0229024
0.0366215	1.9614550	0.0847282	0.0118314
0.0154155	0.0315818	2.6112390	0.0060113
0.1228943	0.0545367	0.1052260	1.3779223

Dps =

0.154262	0.333315	0.739856	0.181052
0.206727	0.560935	0.564926	0.134761
0.142469	0.288486	0.995306	0.098480
0.322892	0.366062	0.618759	0.204073

3. Вычислить условные м. о. и дисперсию числа заходов цепи в невозвратное состояние  $s$  от момента начала эволюции цепи до поглощения в множестве  $Y$  при данном начальном распределении вероятностей состояний  $p(0)$ ,  $s=k+1, \dots, c_s$ .

*Код программы:*

```
1 % Данное начальное распределение вероятностей состояний p(0)
2 p0 = [0.25, 0.33, 0.25, 0.17];
3
4 Mdg=eye(k);
5 for n=1:k
6     Mdg(n,n)=M(n,n);
7 end
8 % Ответ
9 Eporo = p0 * M;
Dporo=p0 * M * (2 * Mdg - Q)-(p0 * M).^2;
```

*Результаты работы программы:*

Eporo =

0.43774	0.59865	0.65643	0.29267
---------	---------	---------	---------

Dporo =

0.36503	0.71981	1.03416	0.30877
---------	---------	---------	---------



4. Вычислить м. о. длительности пребывания цепи в невозвратном состоянии  $s$  до момента завершения ее эволюции в одном из поглощающих состояний при данном начальном распределении вероятностей состояний  $p(0)$ ,  $s = k+1, \dots, c_S$ .

*Код программы:*

1	for s=5:8
2	Ep0sigmas=p0*M(s);
3	end
4	
5	Ep0sigmas

*Результаты работы программы:*

Ep0sigmas =
0.058383 0.077065 0.058383 0.039700

5. Вычислить м. о. и дисперсию длительности пребывания цепи в множестве невозвратных состояний при условии начала ее эволюции из состояния  $r$ ,  $r = k+1, \dots, c_S$ .

*Код программы:*

1	tau = M * [1; 1; 1; 1;];
2	Ersigmaz = tau
3	Drsgimaz = (2 * M - Q) * tau - tau.^2

*Результаты работы программы:*

Ersigmaz =
1.9016
1.9917
1.9953
2.0823
Drsgimaz =
1.8828
1.9626
1.9750
2.0283

6. Вычислить условные м. о. и дисперсию длительности пребывания цепи в множестве невозвратных состояний при данном начальном распределении вероятностей состояний  $p(0)$  .

*Код программы:*

1	tau = M * [1; 1; 1; 1;];
2	Ep0sigmaz = p0 * tau
3	Dp0sigmaz = p0 * (2 * M - Q) * tau - (p0 * tau).^2

*Результаты работы программы:*

Ep0sigmaz = 1.9855
Dp0sigmaz = 1.9603

7. Вычислить элементы матрицы  $B$  вероятностей поглощения.

*Код программы:*

1	% Матрица B вероятностей поглощения
2	B = M * H

*Результаты работы программы:*

B =	
	0.143236 0.243370 0.497374 0.116019
	0.102951 0.118672 0.538738 0.239639
	0.045214 0.184896 0.652352 0.117538
	0.167362 0.323555 0.381614 0.127470

8. Вычислить м. о. и дисперсию с. в.  $\phi_r$ ,  $r=k+1, \dots, c_S$ .

*Код программы:*

1	for r=5:8
2	r
3	Efir = 1 / (1 - P(r, r))
4	Dfir = P(r, r) / ((1 - P(r, r))^2)
5	end

*Результаты работы программы:*

```

r = 5
Efir = 1.0526
Dfir = 0.055402
r = 6
Efir = 1.3333
Dfir = 0.44444
r = 7
Efir = 1.5385
Dfir = 0.82840
r = 8
Efir = 1.1111
Dfir = 0.12346

```

9. Вычислить условные вероятности переходов цепи.

*Код программы:*

```

1  for r=5:8
2      for s=1:8
3          if(r!=s)
4              uslovn(r,s)=P(r,s)/(1-P(r,r));
5          end
6      end
7  end
8
9  uslovn

```

*Результаты работы программы:*

```

uslovn =

    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.10526    0.15789    0.26316    0.05263    0.00000    0.10526    0.21053    0.10526
    0.06667    0.04000    0.36000    0.20000    0.13333    0.00000    0.13333    0.06667
    0.01538    0.13846    0.53846    0.07692    0.07692    0.10769    0.00000    0.04615
    0.11111    0.22222    0.11111    0.05556    0.27778    0.11111    0.11111    0.00000

```

10. Вычислить элементы матрицы  $G$ .

*Код программы:*

1	Mdg=eye(k);
2	for n=1:k
3	Mdg(n,n)=M(n,n);
4	end
5	G = (M - Q) * Mdg^(-1)

*Результаты работы программы:*

G =
0.119575 0.149529 0.250618 0.128922
0.168485 0.285979 0.180132 0.092663
0.109313 0.126891 0.381162 0.066050
0.308644 0.166746 0.200742 0.148102

11. Вычислить условные м. о. числа различных невозвратных состояний, в которые когда-либо попадает цепь при начале эволюции из состояния  $r$ ,  $r = k+1, \dots, c_S$ .

*Код программы:*

1	G = (M - Q) * Mdg^(-1);
2	
3	
4	Gdg=eye(4);
5	for n=1:4
6	Gdg(n,n)=G(n,n);
7	end
8	
9	Erl=(G + (Q - Gdg)) * [1; 1; 1; 1;]

*Результаты работы программы:*

Erl =
1.5291
1.4413
1.3023
1.6761