

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра компьютерных технологий и систем

ГОЛУБЕВ АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ ГРАФА БИКЛИКАМИ

Курсовой проект
студента 3 курса 13 группы

“Допустить к защите“

Руководитель проекта

Лепин Виктор Васильевич

ученый секретарь Института
математики НАН Беларуси, доцент,
канд. физ.-мат. наук

“ ____ ” _____ 2013 г

Минск 2013

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра дискретной математики и алгоритмики

“Утверждаю”

Заведующий кафедрой

_____ В.М. Котов

“ ” _____ 2013 г.

**ЗАДАНИЕ
ПО ПОДГОТОВКЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА**

Студенту 3 курса Голубеву Александру Николаевичу

1. Тема работы ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ ГРАФА БИКЛИКАМИ

2. Срок сдачи студентом законченной работы _____

3. Исходные данные к работе

- 1) Учебная литература и научные публикации в области теории графов.
- 2) Перечень требований к реализации алгоритмов решения поставленных задач.

4. Перечень вопросов подлежащих разработке или краткое содержание работы

1. Изучение литературы по теме.
2. Выяснить сложность решения задачи о бикликовом покрытии декартова произведения графов.
3. Провести исследование и реализовать алгоритмы решения задач о бикликовом покрытии.
4. Протестировать разработанный алгоритм.

5. Перечень графического материала

6. Консультанты по работе (с указанием относящихся к ним разделов работы)

Лепин В.В., ученый секретарь Института математики НАН Беларуси, доцент, кандидат физ.-мат. наук

7. Дата выдачи задания “ ____ ” _____ 2013г.

8. **Календарный график** работы на весь период (с указанием этапов работы и сроков их выполнения)

Сентябрь-октябрь: Изучение литературы. Анализ имеющихся на данный момент методов, решающих аналогичный круг задач. Выделение основных свойств бикликовых покрытий графа. Составление плана работы.

Ноябрь-январь: Анализ и изучение существующих методов, выбор наиболее подходящего метода для решения поставленных задач.

Февраль-март: Реализация алгоритмов.

Апрель: Тестирование. Устранение ошибок.

Май-июнь: Оформление и защита работы.

Руководитель _____ / В.В. Лепин / сентября 2006 г.

Задание принял к исполнению _____ сентября 2006 г.
(подпись студента)

Аннотация

В данной работе рассмотрена задача о покрытии графов бикликами. В работе были установлены границы на число бикликового покрытия графа, найдено минимальное число бикликового покрытия для лестниц и квадратных решеток. Построен алгоритм для нахождения бикликового покрытия в графах, а также для нахождения минимального бикликового покрытия в последовательно-параллельных графах, а также реализованы данные алгоритмы языке программирования Java.

Анотацыя

У дадзенай працы разгледжана задача аб пакрыцці дэкартавага здабытку графаў. Былі знойдзены абмежавання на мінімальны лік біклікавага пакрыцця графа, знойдзены мінімальны лік біклікавага пакрыцця для лесвіцы і квадратных рашотак. Знойдзены алгарытм біклікавага пакрыцця ў графах, а таксама алгарытм для знаходжання мінімальнага біклікавага пакрыцця ў паслядоўна-паралельных графах, а таксама рэалізаваны гэтыя алгарытмы на мове праграмавання Java.

The annotation

In this work biclique cover of Cartesian product graphs was considered. Found bounds for minimum biclique cover and exactly value for stairs and square lattice. Found algorithm for built biclique cover and algorithm for built minimum biclique cover for serial-parallel graphs and this algorithms was implemented on programming language Java.

Реферат

Курсовой проект, 13 с., 2 рис., 7 источников, 1 приложение.

Ключевые слова: число бикликового покрытия графов, бикликовое покрытие графов, максимальное паросочетание, декартово произведение графов, последовательно-параллельные графы.

Объект исследования – алгоритмы решения задачи о бикликовом покрытии графов.

Цель работы – освоение алгоритмов решения задачи о бикликовом покрытии и их реализация.

Содержание

1. Введение	6
2. Краткая теория вопроса	6
3. Оценки числа бикликового покрытия	6
3.1. Декартово произведение графов.....	6
3.2. Лестницы и квадратные решетки.	8
4. Алгоритмы построения бикликового покрытия	11
4.1. Эвристический алгоритм.....	11
4.2. Последовательно-параллельные графы	12
4.2.1 Общие сведения	12
4.2.2 Узлы бинарного sr -дерева и биклики последовательно-параллельного графа.	15
4.2.3 Алгоритм для нахождения числа бикликового покрытия последовательно-параллельного графа	21
5. Сравнение алгоритмов	24
6. Заключение	24
Список использованной литературы	25

1. Введение

Бикликой графа G называется подграф графа G (необязательно порожденный), изоморфный полному двудольному графу. Числом бикликового покрытия графа G называется наименьшее число биклик графа G , которое понадобится чтобы покрыть все ребра графа. Число бикликового покрытия является важным графовым параметром. С практической точки зрения, задача покрытия наименьшим числом биклик имеет широкое применение в области биоинформатики, искусственного интеллекта, компактного представления графа. С теоретической точки зрения, число бикликового покрытия графа играет важную роль в теории коммуникационной сложности.

Задача нахождения числа бикликового покрытия графа является NP-трудной и остается NP-трудной в классе двудольных хордальных графов. Но в классах двудольных C_4 -свободных графов, двудольных домино-свободных графов, двудольных выпуклых графов, последовательно-параллельных графах и графов с ограниченной путевой шириной задача о нахождении бикликового покрытия является полиномиально разрешимой. Число бикликового покрытия известно для простой цепи, простого цикла, полного графа, шестиугольной решетки.

2. Краткая теория вопроса

Рассматриваются только неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Граф с пустым множеством ребер называется пустым графом. Граф G называется двудольным, если существует разбиение $V(G) = U_1 \cup U_2$ такое, что концы каждого ребра G принадлежат разным множествам U_1, U_2 . Двудольный граф G с разбиением $V(G) = U_1 \cup U_2$ называется полным двудольным, если каждая вершина из U_1 смежна с каждой вершиной из U_2 . Бикликой графа G называется полный двудольный подграф G . Биклика графа называется максимальной, если она не содержится в другой биклике с большим числом вершин. Биклика графа G не обязательно является порожденным подграфом G . Биклику с биразбиением U_1, U_2 будем обозначать как $K(U_1, U_2)$. Биклика $K(U_1, U_2)$ называется звездой с центром в вершине u , если $U_1 = \{u\}$ или $U_2 = \{u\}$. Множество биклик S графа G называется бикликовым покрытием графа G , если каждое ребро графа G содержится, по крайней мере, в одной биклике из S . Наименьшее число биклик в бикликовом покрытии графа G называется числом бикликового покрытия графа G и обозначается как $bc(G)$.

3. Оценки числа бикликового покрытия

3.1. Декартово произведение графов

Декартовым произведением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 \times G_2$ с множеством вершин $V(G_1) \times V(G_2)$ и две вершины $(u_1, u_2); (v_1, v_2)$ смежны тогда и только тогда, когда или $u_1 = v_1$ и u_2, v_2 смежны в G_2 , или $u_2 = v_2$ и u_1, v_1 смежны в G_1 .

Теорема 1. Для любых двух непустых графов G_1, G_2 выполняется неравенство:

$$bc(G_1 \times G_2) \leq |V(G_1)| \cdot bc(G_2) + |V(G_2)| \cdot bc(G_1).$$

Доказательство. Для того чтобы доказать это неравенство, построим бикликовое покрытие графа $G_1 \times G_2$, которое содержит не более чем $|V(G_1)| \cdot bc(G_2) + |V(G_2)| \cdot bc(G_1)$ биклик.

Пусть S_1 — бикликовое покрытие G_1 мощности $bc(G_1)$ и S_2 — бикликовое покрытие G_2 мощности $bc(G_2)$. Рассмотрим произвольную биклику $K(A, B) \in S_1$ и произвольную вершину $v \in V(G_2)$. В графе $G_1 \times G_2$ каждая вершина из множества $A \times \{v\}$ смежна с каждой вершиной из $B \times \{v\}$. Поэтому существует биклика $G_1 \times G_2$ с биразбиением $(A \times \{v\}, B \times \{v\})$. Аналогично, если $K(A, B) \in S_2$ и $v \in V(G_1)$, то существует биклика $G_1 \times G_2$ с биразбиением $(\{v\} \times A, \{v\} \times B)$. Тогда

$$S = \{K(A \times \{v\}, B \times \{v\}) : K(A, B) \in S_1, v \in V(G_2)\} \cup \\ \cup \{K(\{v\} \times A, \{v\} \times B) : K(A, B) \in S_2, v \in V(G_1)\}$$

является бикликовым покрытием $G_1 \times G_2$ и

$$|S| = |V(G_1)| \cdot bc(G_2) + |V(G_2)| \cdot bc(G_1).$$

Действительно, пусть $e = \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\}$ — ребро $G_1 \times G_2$. Возможны два случая:

(i) $u_1 = v_1$, $\{u_2, v_2\} \in E(G_2)$ и, если биклика $K(A, B) \in S_2$ содержит ребро $\{u_2, v_2\}$, то биклика $K(\{u_1\} \times A, \{u_1\} \times B) \in S$ содержит ребро e ; (ii) $u_2 = v_2$, $\{u_1, v_1\} \in E(G_1)$ и, если биклика $K(A', B') \in S_1$ содержит ребро $\{u_1, v_1\}$, то биклика $K(A' \times \{u_2\}, B' \times \{u_2\}) \in S$ содержит ребро e . Таким образом, каждое ребро графа $G_1 \times G_2$ содержится, по крайней мере, в одной биклике из S . Следовательно, множество S биклик графа $G_1 \times G_2$ является бикликовым покрытием $G_1 \times G_2$. *Теорема доказана.*

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы 1.

Следствие 1. Если G_1, G_2 — полные двудольные графы, то

$$bc(G_1 \times G_2) \leq |V(G_1)| + |V(G_2)|.$$

Используя следствие 1, можно получить оценку сверху на число бикликового покрытия декартова произведения двух графов, которая не зависит от количества вершин в этих графах.

Теорема 2. Для любых двух непустых графов G_1, G_2 без изолированных вершин выполняется $bc(G_1 \times G_2) \leq 2 \cdot (\Delta(G_1) + \Delta(G_2)) \cdot bc(G_1) \cdot bc(G_2)$.

Доказательство. Рассмотрим бикликовые покрытия S_1, S_2 наименьшей мощности графов G_1, G_2 соответственно. Пусть $S_1 = \{K(X_1, Y_1), \dots, K(X_r, Y_r)\}$, где $r = bc(G_1)$ и $S_2 = \{K(U_1, V_1), \dots, K(U_s, V_s)\}$ где $s = bc(G_2)$. Заметим, что $K(X_i, Y_i) \times K(U_j, V_j)$ является подграфом графа $G_1 \times G_2$ для любых $i = 1, r, j = 1, s$. Рассмотрим граф

$$G = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^s K(X_i, Y_i) \times K(U_j, V_j).$$

Покажем, что множество вершин и множество ребер графов G и $G_1 \times G_2$ совпадают. Легко видеть, что $V(G) \subseteq V(G_1 \times G_2)$ и $E(G) \subseteq E(G_1 \times G_2)$. Остается доказать, что а) $V(G_1 \times G_2) \subseteq V(G)$ и б) $E(G_1 \times G_2) \subseteq E(G)$.

Для того чтобы доказать, что условие а) выполняется, рассмотрим произвольную вершину $(u_1, v_1) \in V(G_1 \times G_2)$. Так как графы G_1, G_2 не содержат изолированных вершин, то существует ребро $e_1 \in E(G_1)$ инцидентное вершине u_1 и ребро $e_2 \in E(G_2)$ инцидентное вершине v_1 . Тогда существуют биклики $K(X_i, Y_i) \in S_1$ и $K(U_j, V_j) \in S_2$ такие, что $K(X_i, Y_i)$ содержит ребро e_1 , а $K(U_j, V_j)$ содержит ребро e_2 , где $i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}$. Так как $u_1 \in X_i \cup Y_i$ и $v_1 \in U_j \cup V_j$, то граф $K(X_i, Y_i) \times K(U_j, V_j)$ содержит вершину (u_1, v_1) . Из определения графа G следует, что $(u_1, v_1) \in V(G)$. Выполнимость условия а) доказано.

Покажем, что условие б) также выполняется. Пусть $e = \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\}$ — произвольное ребро графа $G_1 \times G_2$. Из определения декартова произведения графов следует, что выполняется одно из следующих двух условий: i) $u_1 = v_1$ и $\{u_2, v_2\} \in E(G_2)$ или ii) $u_2 = v_2$ и $\{u_1, v_1\} \in E(G_1)$. Без потери общности, предположим, что выполняется условие i) (в случае условия ii) можно провести аналогичные рассуждения). Так как граф G_1 не содержит изолированных вершин, то существует ребро $e_1 \in E(G_1)$ инцидентное вершине u_1 . Тогда, существуют биклики $K(X_i, Y_i) \in S_1$ и $K(U_j, V_j) \in S_2$ такие, что $K(X_i, Y_i)$ содержит ребро e_1 , а $K(U_j, V_j)$ содержит ребро $\{u_2, v_2\}$. Граф $K(X_i, Y_i) \times K(U_j, V_j)$ содержит ребро e . Из определения графа G следует, что $e \in E(G)$. Следовательно, условие б) выполняется.

Таким образом, множество вершин и множество ребер графов G и $G_1 \times G_2$ совпадают, это означает, что $bc(G_1 \times G_2) = bc(G)$. Для того чтобы доказать теорему 2, построим бикликовое покрытие графа G , которое состоит из не более чем $2 \cdot (\Delta(G_1) + \Delta(G_2)) \cdot bc(G_1) \cdot bc(G_2)$ биклик. Согласно следствию 1, для любых биклик $K(X_i, Y_i) \in S_1$ и $K(U_j, V_j) \in S_2$ существует бикликовое покрытие графа $K(X_i, Y_i) \times K(U_j, V_j)$ мощности не более $|X_i| + |Y_i| + |U_j| + |V_j|$. Заметим, что $|X_i| + |Y_i| \leq 2 \cdot \Delta(G_1)$ и $|U_j| + |V_j| \leq 2 \cdot \Delta(G_2)$. Пусть S_{ij} — бикликовое покрытие графа $K(X_i, Y_i) \times K(U_j, V_j)$ мощности не более $2 \cdot \Delta(G_1) + 2 \cdot \Delta(G_2)$ для всех $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, s$.

Из определения графа G следует, что множество биклик $S = S_1 \cup \dots \cup S_r \cup S_{r+1} \cup \dots \cup S_{r+s}$ является бикликовым покрытием графа G мощности не более $2 \cdot (\Delta(G_1) + \Delta(G_2)) \cdot r \cdot s$.

3.2. Лестницы и квадратные решетки.

Два различных ребра графа G будем называть зависимыми, если они содержатся в некоторой биклике графа. Заметим, что если два ребра содержатся в одной биклике, то они смежны или содержатся в некотором 4-цикле графа. Два различных ребра графа G называются независимыми, если они не являются зависимыми. Подмножество $F \subseteq E(G)$ ребер графа G называется независимым, если любые два различных ребра из F независимы. Следующая лемма непосредственно следует из определений.

Лемма 1. Пусть $G = (V, E)$ — граф и F — независимое подмножество ребер графа G , тогда $bc(G) \geq |F|$.

Используя лемму 1, можно установить число бикликового покрытия графа $P_n \times K_2$, который называется лестницей.

Теорема 3. $bc(P_n \times K_2) = n - 1$ для всех $n \geq 3$:

Доказательство. Пусть v_0 и v_1 — вершины графа K_2 , а n — вершинная простая цепь P_n имеет множество вершин $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и множество ребер $\{\{u_i, u_{i+1}\} : i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$. Граф $P_n \times K_2$ изображен на рис. 1.

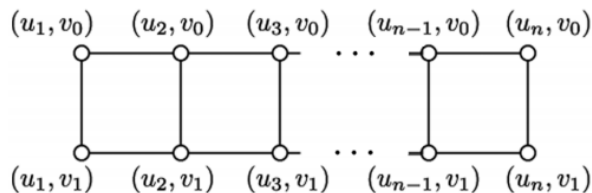


Рисунок 1 - Граф $P_n \times K_2$

Отметим, что подмножество ребер $F = \{(u_i, v_{i \bmod 2}), (u_{i+1}, v_{i \bmod 2}) : i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$ графа $P_n \times K_2$ является независимым. Согласно лемме 1, $bc(P_n \times K_2) \geq |F| = n-1$. С другой стороны, множество всех циклов длины 4 графа $P_n \times K_2$ является бикликовым покрытием $P_n \times K_2$ мощности $n-1$. Следовательно, $bc(P_n \times K_2) = n-1$.

Решеткой называется двудольный граф $G_{m,n} = (V_{m,n}, E_{m,n})$ такой, что

$$V_{m,n} = \{(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\};$$

$$E_{m,n} = \{(u_i, v_j), (u_k, v_l) : (u_i, v_j) \in V_{m,n}, (u_k, v_l) \in V_{m,n}, |i - k| + |j - l| = 1\}.$$

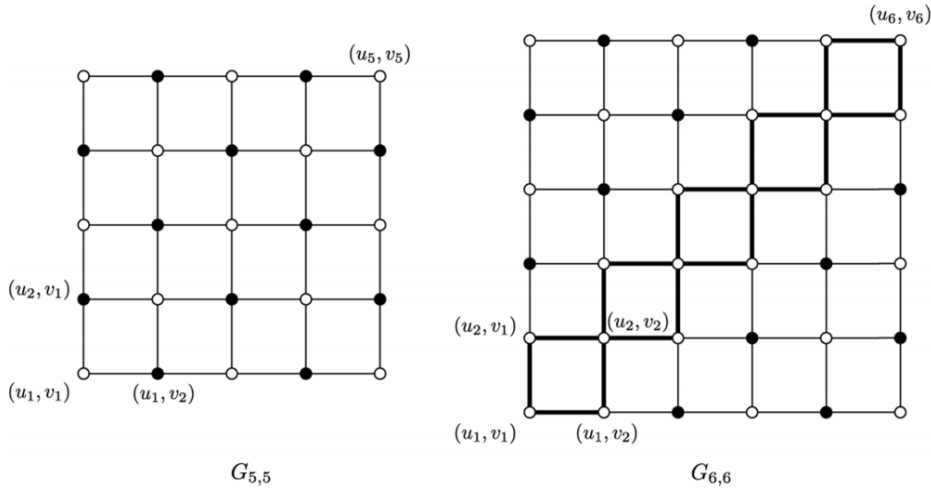
Заметим, что решетка $G_{m,n}$ изоморфна графу $P_n \times P_m$. Решетку $G_{n,n}$ будем называть квадратной решеткой.

Теорема 4. Для каждого $n \geq 2$ выполняется

$$bc(G_{n,n}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n^2-1}{2} \right\rfloor & \text{если } n \text{ — нечетно} \\ \frac{n^2-2}{2} & \text{если } n \text{ — четно} \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что для квадратной решетки $G_{n,n}$ существует бикликовое покрытие мощности $\frac{(n^2-1)}{2}$ в случае, когда n — нечетно и $\frac{(n^2-2)}{2}$ в случае, когда n — четно. Пусть $n > 2$ — нечетное число. Решетка $G_{n,n}$ представляет собой двудольный граф с биразбиением $V(G_{n,n}) = V_1 \cup V_2$, где $V_1 = \{(u_i, v_j) : 1 \leq i, j \leq n, i+j \equiv 1 \pmod{2}\}$ и $V_2 = \{(u_i, v_j) : 1 \leq i, j \leq n, i+j \equiv 0 \pmod{2}\}$. При этом $|V_1| = (n^2 - 1)/2$ и $|V_2| = (n^2 + 1)/2$.

Множество звезд с центрами в вершинах из множества V_1 является бикликовым покрытием $G_{n,n}$ мощности $\frac{n^2-1}{2}$. На рис. 2 изображена квадратная решетка $G_{5,5}$. В этом случае множество V_1 состоит из всех черных вершин.



Пусть n – четное. Тогда в качестве бикликового покрытия возьмем множество звезд, аналогичное для случая с нечетным n и дополним его бикликами $K_{2,2}$ на диагонали, тогда $bc(G) = \frac{n^2-2}{2}$.

Результат полученный для декартова произведения двух простых цепей $P_n \times K_n$ позволяет сформулировать следующую гипотезу относительно значения числа бикликового покрытия произведения двух простых цепей $G_{m,n} = P_m \times P_n$ для $m < n$.

Гипотеза 1. Пусть m, n — натуральные числа, такие что $m < n$. Если m — нечетное, то

$$bc(G_{m,n}) = \beta(G_{m,n}) = \left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor,$$

где $\beta(G_{m,n})$ — число вершинного покрытия графа $G_{m,n}$. Если m — четное натуральное число, то

$$bc(G_{m,n}) = \begin{cases} \beta(G_{m,n}) = \frac{mn}{2} & \text{если } (n-1) \text{ не кратно } (m-1) \\ \frac{mn-2}{2} & \text{если } (n-1) \text{ кратно } (m-1) \end{cases}$$

Гипотеза 2. Пусть $B_{m,n} = K_{1,m} \times P_n$, где $m \geq 3, n \geq 2$, тогда

$$\beta(G_{m,n}) = bc(G_{m,n}) = \begin{cases} (m+1)\frac{n}{2} & \text{если } n \text{ — четное,} \\ (m+1)\frac{n-1}{2} + 1 & \text{если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$$

Гипотеза 3. Пусть, $2 \leq k \leq m \leq n$ — натуральные числа, тогда

$$\beta(P_k \times P_m \times P_n) = bc(P_k \times P_m \times P_n) = \begin{cases} \frac{kmn-1}{2} & \text{если } k, m, n \text{ — нечетные,} \\ \frac{kmn}{2} & \text{иначе} \end{cases}$$

Из гипотезы следует, что число бикликового покрытия данных графов совпадает с минимальным вершинным покрытием. Так как эти графы являются двудольными (т.к. отсутствуют циклы нечетной длины), то для них справедлива теорема Кенига: в любом двудольном графе число рёбер в максимальном паросочетании равно числу вершин в минимальном вершинном покрытии. Но для двудольного графа задача нахождения максимального паросочетания является полиномиальной, и может быть решена, например, при помощи алгоритма Хопкрофта-Карпа.

Алгоритм Хопкрофта-Карпа.

Вход: Двудольный граф $G(U \cup V, E)$

Выход: Наибольшее паросочетание $M \subseteq E$

begin

$M \leftarrow \emptyset;$

do

//строим максимальное по включению множество

//вершинно-непересекающихся M-чередующихся цепей

$P \leftarrow \{P_1, P_2, \dots, P_k\};$

$M \leftarrow M \oplus (P_1, P_2, \dots, P_k);$

while $P \neq \emptyset$

end

Трудоёмкость данного алгоритма составляет $O(|E|\sqrt{|V|})$.

Запустив программу, можем убедиться, что мощность минимального вершинного покрытия совпадает с заданными значениями в этих гипотезах для $n \leq m \leq 40$.

4. Алгоритмы построения бикликового покрытия

4.1. Эвристический алгоритм

Рассмотрим следующий эвристический алгоритм для задачи о бикликовом покрытии, основанный на эвристике Келлермана для задачи о покрытии графа кликами. На вход подается граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$, имеющий m ребер.

Алгоритм начинает работу с пустого бикликового покрытия и последовательно для $i = 1, 2, \dots, n$ дополняет бикликовое покрытие так, чтобы покрыть все ребра $\{i, j\}$ графа G такие, что $j < i$. В случае, когда нет ребра между текущей обрабатываемой вершиной i и вершинами множества W уже обработанных вершин смежных с i , то создается новая биклика, которая состоит из одной вершины i . Иначе пытаемся добавить вершину i в существующие биклики. После этого возможно, что еще останутся непокрытые ребра соединяющие вершину i и вершины W . Чтобы покрыть эти ребра, мы создаем новую биклику — звезду с центром в вершине i , которая включает все непокрытые ребра между i и W .

Алгоритм 1: Эвристика для решения задачи о покрытии графа бикликами.

Вход : Граф $G = (\{1, 2, \dots, n\}, E)$ без изолированных вершин.

Выход: Бикликовое покрытие $K(X_1, Y_1), K(X_2, Y_2), \dots, K(X_k, Y_k)$ графа G .

begin

$k \leftarrow 0;$ *//число сгенерированных биклик*

for $i = 1, \dots, n$ **do**

//инвариант цикла: $K(X_1, Y_1), \dots, K(X_k, Y_k)$ покрывают все ребра графа G

```

//инцидентные вершинам  $u, w < i$ ;
 $W \leftarrow \{j : j < i, \{i, j\} \in E\}$ ;
if  $W = \emptyset$  then
     $k \leftarrow k + 1$ ;
     $X_k \leftarrow \{i\}$ ;
     $Y_k \leftarrow \emptyset$ ;
else
    //попробуем добавить вершину  $i$  в существующие биклики;
     $U \leftarrow \emptyset$ ; //множество вершин  $j$  смежных с  $i$  таких, что  $\{i, j\}$  уже покрыто
    for  $l = 1, 2, \dots, k$  do
        if  $X_l \subseteq W$  and  $X_l \neq \emptyset$  then
             $Y_l \leftarrow Y_l \cup \{i\}$ ;
             $U \leftarrow U \cup X_l$ ;
        else if  $Y_l \subseteq W$  and  $Y_l \neq \emptyset$  then
             $X_l \leftarrow X_l \cup \{i\}$ ;
             $U \leftarrow U \cup Y_l$ ;
        if  $W = \emptyset$  then break;
     $W \leftarrow W \setminus U$ ;
    if  $W \neq \emptyset$  then
         $k \leftarrow k + 1$ ;
         $X_k \leftarrow \{i\}$ ;
         $Y_k \leftarrow W$ ;
end

```

Выполнение алгоритма прерывается, если в ходе работы построено m или более биклик, так как в таком случае мы можем просто взять бикликовое покрытие, которое состоит из всех ребер графа. Время работы алгоритма 1 составляет $O(nm^2)$.

Эвристический алгоритм 1 может быть улучшен с помощью добавления шага, который исключает избыточные биклики из бикликового покрытия графа построенного алгоритмом 1.

Предположим, что $K(X_1, Y_1), K(X_2, Y_2), \dots, K(X_k, Y_k)$ — бикликовое покрытие графа, которое построено алгоритмом 1. Рассматриваем, последовательно, каждую биклику $K(X_i, Y_i)$. Если каждое ребро содержащееся в $K(X_i, Y_i)$ покрывается остальными бикликами из покрытия, то такая биклика избыточна и ее можно исключить из покрытия.

4.2. Последовательно-параллельные графы

4.2.1 Общие сведения

Граф называется последовательно-параллельным, если он не содержит полного графа K_4 в качестве минора; эквивалентно, если он не имеет ни одного подграфа гомеоморфного графу K_4 . Поскольку оба графа K_5 и $K_{3,3}$ содержат подграфы гомеоморфные графу K_4 , то по теореме Куратовского последовательно-параллельные графы являются планарными.

Класс последовательно-параллельных графов можно определить как рекурсивно-порождаемый класс графов в множестве двухтерминальных графов. При формальном определении используется операция стягивания вершин.

Пусть G — граф и $u \in V(G)$, $v \in V(G)$. Операция стягивания вершин u и v по определению эквивалентна следующей процедуре. Создается новая вершина x . Каждое ребро uw инцидентное u удаляется и добавляется новое ребро xw . Каждое ребро vu инцидентное v удаляется и добавляется новое ребро xu . Наконец удаляются изолированные вершины u и v . Операция стягивания обозначается следующим образом: $x = u \circ v$.

Граф называется двухтерминальным, если в нем выделены две различные вершины, называемые терминалами. Пара терминалов упорядоченная, поэтому часто первый терминал называют левым, а второй — правым. Двухтерминальный граф обозначают тройкой (G, s, t) , где G — граф, $s \in V(G)$ — левый терминал и $t \in V(G)$ — правый терминал.

Последовательной композицией двух или более двухтерминальных графов называется операция, на вход которой подаются $r \geq 2$ двухтерминальных графов $(G_1, s_1, t_1), \dots, (G_r, s_r, t_r)$, а выходом является новый двухтерминальный граф (G, s, t) , который получается в результате объединения графов G_1, \dots, G_r , стягивания вершины s_{i+1} с вершиной t_i для всех i , $1 \leq i < r$ (все вершины $z_i = s_{i+1} \circ t_i$ не имеют терминального статуса), и установки терминального статуса для терминалов: $s = s_1$ и $t = t_r$.

Параллельной композицией двух или более двухтерминальных графов называется операция, на вход которой подаются $r \geq 2$ двухтерминальных графов $(G_1, s_1, t_1), \dots, (G_r, s_r, t_r)$, а выходом является новый двухтерминальный граф (G, s, t) , который получается в результате объединения графов G_1, \dots, G_r , стягивания всех вершин s_1, \dots, s_r в одну вершину s , которой присваивается статус левого терминала, и стягивания всех вершин t_1, \dots, t_r в одну вершину t , которой присваивается статус правого терминала.

Определение. Двухтерминальный граф (G, s, t) называется последовательно-параллельным графом тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:

- Граф (G, s, t) является базовым последовательно-параллельным графом, состоящим из двух вершин s и t и одного ребра между ними.
- Граф (G, s, t) образуется в результате последовательной или параллельной композиции $r \geq 2$ последовательно-параллельных графов.

Отметим, что мы получим эквивалентный класс графов, если в определении использовать только двухоперандные последовательные и параллельные композиционные операции. Говорят, что граф G является последовательно-параллельным графом тогда и только тогда, когда существуют вершины $s, t \in V(G)$ такие, что (G, s, t) — двухтерминальный последовательно-параллельный граф.

Декомпозиция последовательно-параллельного графа (G, s, t) на последовательные и параллельные композиции представляется sr -деревом T_G . Sp -дерево является корневым деревом, в котором имеются узлы трех типов: p -узлы, s -узлы и листья. Каждый узел имеет метку в виде упорядоченной пары (u, v) вершин графа G . Каждому узлу α sr -дерева соответствует уникальный последовательно-параллельный граф $(G(\alpha), x, y)$, где $G(\alpha)$ — подграф графа G , и (x, y) — метка узла α . Корень дерева имеет метку (s, t) и соответствует

графу (G, s, t) . Листья дерева соответствуют базовым последовательно-параллельным графам, которые представляют ребра графа G (существует взаимно-однозначное соответствие между листьями sr -дерева T_G и ребрами $E(G)$).

Внутренние узлы являются либо s -узлами (такой узел представляет последовательную операцию), либо r -узлами (такой узел представляет параллельную операцию). Сыновья последовательных узлов упорядочены, в то время как сыновья параллельных узлов не являются упорядоченными. Последовательно-параллельный граф, ассоциируемый с s -узлом α — это граф, который получается в результате последовательной композиции последовательно-параллельных графов, ассоциированных с сыновьями узла α , причем порядок сынов задает такой порядок, в котором выполняются последовательные композиции. Последовательно-параллельный граф, ассоциируемый с r -узлом β — это граф, который получается в результате параллельной композиции последовательно-параллельных графов, ассоциированных с сыновьями узла β . Узел, который является сыном r -узла, имеет такую же метку, как и его родитель. Граф, ассоциируемый с узлом α , sr -дерева будем обозначать через $G(\alpha)$.

Отметим, что последовательно-параллельный граф может иметь различные sr -деревья. sr -дерево называется бинарным sr -деревом, если каждый внутренний узел имеет двух сынов. Очевидно, что любой последовательно-параллельный граф имеет бинарное sr -дерево. sr -дерево последовательно-параллельного графа (G, s, t) называется минимальным sr -деревом, если каждый его r -узел имеет в качестве сынов только s -узлы и листья, а каждый его s -узел имеет в качестве сынов только r -узлы и листья. Для каждого последовательно-параллельного графа (G, s, t) можно построить минимальное sr -дерево из любого sr -дерева для этого графа, выполнив следующий алгоритм.

Пока в дереве существует s -узел с сыном s -узлом или r -узел с сыном r -узлом выполнять следующее: если s -узел α имеет в качестве сына s -узел β , то стянуть ребро между ними и изменить метку; если r -узел имеет в качестве сына r -узел, то стянуть ребро между ними.

Ориентированные последовательно-параллельные графы определяются аналогично не ориентированным. Различие заключается в том, что в ориентированном случае базовым графом является граф с двумя вершинами s и t и ориентированным ребром от левого терминала s к правому — t . Ориентированные последовательно-параллельные графы являются ациклическими и каждая его вершина лежит на пути из левого терминала в правый.

Если sr -дерево последовательно-параллельного графа задано, то многие задачи на графах могут быть решены за линейное время (от числа ребер).

Двухтерминальные графы можно преобразовывать к такого же вида графам с меньшим числом вершин и ребер, используя две операции — последовательную и параллельную редукции.

Последовательной редукцией двухтерминального графа (G, s, t) называется операция, которая удаляет вершину $v \in V(G)$ степени два из G , $v \neq s, t$, и добавляет ребро между соседями вершины v . Параллельной редукцией двухтерминального графа (G, s, t) называется операция, которая удаляет ребро $e \in E(G)$ между вершинами u и v , которые являются концами двух или более кратных ребер.

4.2.2 Узлы бинарного sp -дерева и биклики последовательно-параллельного графа.

Два графа G и H называются изоморфными, обозначается это так: $G \sim H$, если существует такая биекция $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$, что $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$.

Пусть G — последовательно-параллельный граф и пусть T — бинарное sp -дерево для G . Для каждого полного двудольного подграфа $K(X, Y)$ графа G можно найти узел α в дереве T , для которого выполняется $K(X, Y) \subseteq G(\alpha)$, и который расположен на наибольшем расстоянии от корня. Следующая теорема устанавливает зависимость между типом узла α и классом полных двудольных графов, к которому принадлежит граф $K(X, Y)$.

Теорема 5. Пусть G — последовательно-параллельный граф, и $K(X, Y)$ — полный двудольный подграф графа G . Пусть T — бинарное sp -дерево для G . Пусть α — узел в дереве T , для которого выполняется $K(X, Y) \subseteq G(\alpha)$, и который расположен на наибольшем расстоянии от корня. В зависимости от типа узла α и класса полных двудольных графов, к которому принадлежит граф $K(X, Y)$, возможны только следующие случаи:

Случай 1. α — лист и $K(X, Y) \cong K_{1,1}$. В этом случае

$$X = \{u\}, Y = \{v\}, \quad (1)$$

где $\{u, v\} \subseteq V(G)$ и $(u, v) \in E(G)$.

Случай 2. α — s -узел и $K(X, Y) \cong K_{1,m}$, где $m \geq 2$. Пусть β_1 — левый, а β_2 — правый сын узла α . Пусть $(G(\alpha), s, t)$, $(G(\beta_1), s, z)$ и $(G(\beta_2), z, t)$ — последовательно-параллельные графы, соответствующие узлам: α , β_1 и β_2 , т.е. $(G(\alpha), s, t) = (G(\beta_1), s, z) \odot_s \odot_s (G(\beta_2), z, t)$. Тогда

$$X = \{z\}, Y = \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\} \quad (2)$$

и существуют полные двудольные графы $K_1(X_1, Y_1) \cong K_{1,a}$, $K_2(X_2, Y_2) \cong K_{1,b}$, $a \geq 1$, $b \geq 1$, такие, что $K_1(X_1, Y_1) \subseteq G(\beta_1)$, $X_1 = \{z\}$, $Y_1 = \{u_1, \dots, u_a\}$, $K_2(X_2, Y_2) \subseteq G(\beta_2)$, $X_2 = \{z\}$, $Y_2 = \{v_1, \dots, v_b\}$, $m = a + b$.

Случай 3. α — p -узел и $K(X, Y) \cong K_{1,m}$, где $m \geq 2$. Пусть β_1 и β_2 — сыновья узла α . Пусть $(G(\alpha), s, t)$, $(G(\beta_1), s, t)$ и $(G(\beta_2), s, t)$ — последовательно-параллельные графы, соответствующие узлам α , β_1 и β_2 , т.е. $(G(\alpha), s, t) = (G(\beta_1), s, t) \odot_p (G(\beta_2), s, t)$. Тогда биклика $K(X, Y)$ — это звезда, центром которой может быть либо вершина $s \in V(G(\alpha))$, либо вершина $t \in V(G(\alpha))$. Точнее, возможно только следующее:

$$X = \{z\}, Y = \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\}, \quad (3)$$

где

$$z \in \{s, t\}, \{z, u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\} \subseteq V(G)$$

и

$$E(K) = \{(z, u_i) : 1 \leq i \leq a\} \cup \{(z, v_i) : 1 \leq i \leq b\} \subseteq E(G);$$

и существуют полные двудольные графы $K_1(X_1, Y_1) \cong K_{1,a}$, $K_2(X_2, Y_2) \cong K_{1,b}$, $a \geq 1$, $b \geq 1$, такие, что $K_1(X_1, Y_1) \subseteq G(\beta_1)$, $X_1 = \{z\}$, $Y_1 = \{u_1, \dots, u_a\}$, $K_2(X_2, Y_2) \subseteq G(\beta_2)$, $X_2 = \{z\}$, $Y_2 = \{v_1, \dots, v_b\}$, $m = a + b$.

Случай 4. α — p -узел и $K(X, Y) \cong K_{2,m}$, где $m \geq 2$. Пусть β_1 и β_2 — сыновья узла α . Пусть $(G(\alpha), s, t)$, $(G(\beta_1), s, t)$ и $(G(\beta_2), s, t)$ — последовательно-параллельные графы, соответствующие узлам: α , β_1 и β_2 , т.е. $(G(\alpha), s, t) = (G(\beta_1), s, t) \odot_p (G(\beta_2), s, t)$. Тогда для подграфа $K(X, Y)$ существуют три возможности:

Случай 4.1.

$$X = \{s, t\}, Y = \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\}, \quad (4)$$

где

$$\{s, t, u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\} \subseteq V(G)$$

и

$$E(K) = \{(s, u_i) : 1 \leq i \leq a\} \cup \{(t, u_i) : 1 \leq i \leq a\} \cup \{(s, v_i) : 1 \leq i \leq b\} \cup \{(t, v_i) : 1 \leq i \leq b\} \subseteq E(G);$$

и существуют полные двудольные графы $K_1(X_1, Y_1) \cong K_{2,a}$, $K_2(X_2, Y_2) \cong K_{2,b}$,

$a \geq 1$, $b \geq 1$, такие, что

$$K_1(X_1, Y_1) \subseteq G(\beta_1), X_1 = \{s, t\}, Y_1 = \{u_1, \dots, u_a\}, K_2(X_2, Y_2) \subseteq G(\beta_2), \\ X_2 = \{s, t\}, Y_2 = \{v_1, \dots, v_b\}, m = a + b;$$

Случай 4.2.

$$X = \{s, u\}, Y = \{t, v_1, \dots, v_{m-1}\}, \quad (5)$$

где

$$\{s, t, u, v_1, \dots, v_{m-1}\} \subseteq V(G)$$

и

$$E(K) = \{(s, t)\} \cup \{(t, u)\} \cup \{(s, v_i) : 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{(u, v_i) : 1 \leq i \leq m-1\} \subseteq E(G);$$

и существует подграф $G_1 = K(\{s, u\}, \{v_1, \dots, v_{m-1}\}) + (u, t)$ графа $G(\beta_1)$; в графе $G(\beta_2)$

существует ребро $(s, t) \in E(G(\beta_2))$;

Случай 4.3.

$$X = \{u, t\}, Y = \{s, v_1, \dots, v_{m-1}\}, \quad (6)$$

где

$$\{s, t, u, v_1, \dots, v_{m-1}\} \subseteq V(G)$$

и

$$E(K) = \{(s, t)\} \cup \{(s, u)\} \cup \{(u, v_i) : 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{(t, v_i) : 1 \leq i \leq m-1\} \subseteq E(G);$$

и существует подграф $G_2 = K(\{u, t\}, \{v_1, \dots, v_{m-1}\}) + (u, s)$ графа $G(\beta_1)$; в графе $G(\beta_2)$

существует ребро $(s, t) \in E(G(\beta_2))$.

Доказательство. Корню ρ любого sr -дерева последовательно-параллельного графа (G, s, t) соответствует сам граф: $G(\rho) = (G, s, t)$. Пусть T — бинарное sr -дерево для (G, s, t) , и пусть γ — лист этого дерева. Пусть $\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_k = \rho$ — цепь, соединяющая лист γ с корнем ρ . Тогда выполняется условие:

$$G(\gamma_1) \subset G(\gamma_2) \subset \dots \subset G(\gamma_k).$$

Следовательно, для любого подграфа $K \subseteq G$ в дереве T всегда существует узел α , для которого выполняется $K \subseteq G(\alpha)$, и который расположен на наибольшем расстоянии от корня.

Рассмотрим все случаи, приведенные в формулировке теоремы.

Случай 1. Равенство (1) следует из определения sr -дерева.

Случай 2. $(G(\alpha), s, t) = (G(\beta_1), s, z) \odot_s (G(\beta_2), z, t)$. Отметим, что при выполнении этой операции вершина $z \in V(G(\beta_1))$ стягивается с вершиной $z \in V(G(\beta_2))$ и в результате получается вершина $z \in V(G(\alpha))$. Надеемся, что в данном случае и в последующем идентификация стягиваемых вершин одной буквой не нарушает ясности изложения. Выполняется неравенство $E(K) \cap E(G(\beta_1)) \neq \emptyset$, поскольку в противном случае граф $K(X, Y)$

являлся бы подграфом графа $G(\beta_2)$, что противоречит условию: “ α — узел в дереве T , для которого выполняется $K(X, Y) \subseteq G(\alpha)$, и который расположен на наибольшем расстоянии от корня”. Аналогично, по этой же причине, $E(K) \cap E(G(\beta_2)) \neq \emptyset$. Пусть $a = |E(K) \cap E(G(\beta_1))|$, $b = |E(K) \cap E(G(\beta_2))|$, $c = \deg_{G(\beta_1)}(z)$ и $d = \deg_{G(\beta_2)}(z)$.

Звезда

$$S_1 = (\{z\}, \{u_1, \dots, u_a\})$$

является подграфом графа $G(\beta_1)$, а звезда

$$S_2 = (\{z\}, \{v_1, \dots, v_b\})$$

является подграфом графа $G(\beta_2)$. Звезда $K(\{z\}, \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\})$ является подграфом графа $G(\alpha)$. Следовательно, $m = a + b$ и (2) верно.

Случай 3. $(G(\alpha), s, t) = (G(\beta_1), s, t) \odot_p (G(\beta_2), s, t)$. Пусть

$$K(X, Y) = K(\{y\}, \{x_1, \dots, x_m\}).$$

Тогда $y \notin V(G(\beta_1)) \setminus \{s, t\}$, поскольку в противном случае граф $K(X, Y)$ являлся бы подграфом графа $G(\beta_1)$, что противоречит условию: “ α — узел в дереве T , для которого выполняется $K(X, Y) \subseteq G(\alpha)$, и который расположен на наибольшем расстоянии от корня”. Случаи $y = s$ и $y = t$ возможны. Рассмотрим только случай $y = s$, поскольку все выкладки для случая $y = t$ аналогичны.

Звезда

$$S_1 = K(\{s\}, \{u_1, \dots, u_a\})$$

является подграфом графа $G(\beta_1)$, а звезда

$$S_2 = K(\{s\}, \{v_1, \dots, v_b\})$$

является подграфом графа $G(\beta_2)$. Звезда $K(X, Y) = K(\{s\}, \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\})$ является подграфом графа $G(\alpha)$. Следовательно, $m = a + b$ и (3) верно.

Случай 4. $(G(\alpha), s, t) = (G(\beta_1), s, t) \odot_p (G(\beta_2), s, t)$. Пусть

$$K(X, Y) = K(\{x, y\}, \{z_1, \dots, z_m\}).$$

Отметим, что следующие соотношения:

$$\{x, y\} \cap \{s, t\} \neq \emptyset, \{z_1, \dots, z_m\} \not\subseteq V(G(\beta_1)), \{z_1, \dots, z_m\} \not\subseteq V(G(\beta_2))$$

выполняются, поскольку в противном случае получаем противоречие условию: “ α — узел в дереве T , для которого выполняется $K \subseteq G(\alpha)$, и который расположен на наибольшем расстоянии от корня”.

В случае $\{x, y\} \cap \{s, t\} = \{s, t\}$ полный двудольный подграф

$$K(X, Y) = K(\{s, t\}, \{u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b\})$$

является подграфом графа $G(\alpha)$. Существуют не пустые полные двудольные подграфы:

$$K_1(X_1, Y_1) = K(\{s, t\}, \{u_1, \dots, u_a\})$$

и

$$K_2(X_2, Y_2) = K(\{s, t\}, \{v_1, \dots, v_b\})$$

такие, что $K_1(X_1, Y_1) \subseteq G(\beta_1)$, $K_2(X_2, Y_2) \subseteq G(\beta_2)$. Следовательно, $m = a + b$ и (4) верно.

В случае $\{x, y\} \cap \{s, t\} = \{s\}$ полный двудольный подграф

$$K(X, Y) = K(\{s, u\}, \{t, v_1, \dots, v_{m-1}\})$$

является подграфом графа $G(\alpha)$. Существует граф

$$K_1(X_1, Y_1) = K(\{s, u\}, \{v_1, \dots, v_{m-1}\}) + (u, t),$$

являющийся подграфом графа $G(\beta_1)$. В графе $G(\beta_2)$ существует ребро $(s, t) \in E(G(\beta_2))$.

Следовательно, (5) верно.

В случае $\{x, y\} \cap \{s, t\} = \{t\}$ полный двудольный подграф

$$K(X, Y) = K(\{u, t\}, \{s, v_1, \dots, v_{m-1}\})$$

является подграфом графа $G(\alpha)$. Существует граф

$$K_1(X_1, Y_1) = K(\{u, t\}, \{v_1, \dots, v_{m-1}\}) + (u, s),$$

являющийся подграфом графа $G(\beta_1)$. В графе $G(\beta_2)$ существует ребро $(s, t) \in E(G(\beta_2))$.

Следовательно, (6) верно.

Теорема 5 доказана.

Пусть (G, s, t) — последовательно-параллельный граф с терминалами s и t . Пусть $C = \{G_1, \dots, G_m\}$ — покрытие графа G , т.е. $G = G_1 \cup \dots \cup G_m$. Рассмотрим шесть свойств, которыми может обладать покрытие:

(P₁) покрытие C содержит подграф $G_i = K(\{s\}, \{t\}) \sim K_{1,1}$,

(P₂) покрытие C содержит подграф $G_i = K(\{s\}, U) \sim K_{1,|U|}$,

(P₃) покрытие C содержит подграф $G_i = K(\{t\}, W) \sim K_{1,|W|}$,

(P₄) покрытие C содержит подграф $G_i = K(\{s, t\}, Z) \sim K_{2,|Z|}$,

(P₅) покрытие C содержит подграф $G_i = K(\{s, v\}, A) + (v, t)$,

(P₆) покрытие C содержит подграф $G_i = K(\{u, t\}, B) + (u, s)$,

где U, W, Z, A и B — некоторые подмножества вершин графа G .

Свойства попарно совместимы, поэтому для покрытия C можно определить характеристический вектор $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{если покрытие обладает свойством (P}_i\text{)}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем говорить, что покрытие C обладает свойством $c = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, если оно обладает всеми свойствами (P_i), для которых $c_i = 1$, и не обладает свойствами (P_j), для которых $c_j = 0$, т.е., если $c = c(C)$.

Для каждого последовательно-параллельного графа (G, s, t) определим 2^6 классов эквивалентности $M(G, c)$ покрытий. Класс $M(G, c)$ состоит из всех покрытий $C = \{G_1, \dots, G_m\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(а) для любого $i = 1, \dots, m$ либо существует такое целое число $l \geq 1$, что $G_i \sim K_{1,l}$, либо существует такое целое число $f \geq 1$, что $G_i \sim K_{2,f}$, либо существует такое подмножество вершин $W \subset V(G)$, что $G_i = K(\{s, u\}, W) + (u, t)$, либо существует такое подмножество вершин $W' \subset V(G)$, что $G_i = K(\{u, t\}, W') + (u, s)$;

(б) C обладает свойством c ;

(в) C имеет наименьшее число подграфов среди покрытий графа (G, s, t) , обладающих свойствами (а) и (б).

Пусть (G, s, t) — последовательно-параллельный граф, $c \in \{0, 1\}^6$, $M(G, c) \neq \emptyset$ и $C \in M(G, c)$, тогда:

если $c_1 = 1$, то покрытие C содержит только один подграф $K(\{s\}, \{t\}) \sim K_{1,1}$,

если $c_2 = 1$, то покрытие C содержит только один подграф $K(\{s\}, U) \sim K_{1,|U|}$,

если $c_3 = 1$, то покрытие C содержит только один подграф $K(\{t\}, W) \sim K_{1,|W|}$,

если $c_4 = 1$, то покрытие C содержит только один подграф $K(\{s, t\}, Z) \sim K_{2,|Z|}$,

если $c_5 = 1$, то покрытие C содержит $f > 0$ подграфов:

$K(\{s, v_1\}, A_1) + (v_1, t), \dots, K(\{s, v_f\}, A_f) + (v_f, t),$

если $c_6 = 1$, то покрытие C содержит $l > 0$ подграфов:

$K(\{u_1, t\}, B_1) + (u_1, s), \dots, K(\{u_l, t\}, B_l) + (u_l, s).$

Каждый такой подграф будем называть подграфом, реализующим (соответствующее) свойство c_i .

Пусть (G, s, t) — последовательно-параллельный граф, $c \in \{0, 1\}^6$ и $C \in M(G, c)$, тогда возможны следующие преобразования, уменьшающие число подграфов в покрытии.

(П1) если $c_1 \wedge c_2 = 1$ и подграф $G' \in C$ реализует свойство c_1 , а подграф $G'' \in C$ реализует свойство c_2 , то $R = C \setminus \{G', G''\} \cup \{G' \cup G''\}$ — покрытие, имеющее свойство $r(R) = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6$, где $r_1 = 0, r_2 = 1, r_i = c_i$, для $i \in \{3, 4, 5, 6\}$.

(П2) если $c_1 \wedge c_3 = 1$ и подграф $G' \in C$ реализует свойство c_1 , а подграф $G'' \in C$ реализует свойство c_3 , то $R = C \setminus \{G', G''\} \cup \{G' \cup G''\}$ — покрытие, имеющее свойство $r(R) = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6$, где $r_1 = 0, r_3 = 1, r_i = c_i$, для $i \in \{2, 4, 5, 6\}$.

(П3) если $c_1 \wedge (c_5 \vee c_6) = 1$, то пусть $G' \in C$ — подграф реализующий свойство c_1 , $\{G_1^5, \dots, G_k^5\} \subset C$ — подграфы реализующие свойство c_5 и $\{G_1^6, \dots, G_l^6\} \subset C$ — подграфы реализующие свойство c_6 . Тогда покрытие $R = C \setminus \{G'\} \cup_{i=1}^k \{G' \cup G_i^5\} \cup_{j=1}^l \{G' \cup G_j^6\}$ имеет свойство $r(R) = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6$, где $r_1 = 0, r_i = c_i$, для $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ясно, что после любого из преобразований (П1) – (П3) $|R| = |C| - 1$.

Обозначим через $h(G, c)$ число подграфов в покрытии из класса $M(G, c)$. Для каждого узла α s -дерева числа $h(G(\alpha), c)$ можно хранить в массиве, имеющем 2^6 элементов.

Пусть $a \in \{0, 1\}^6$ и $b \in \{0, 1\}^6$. Пусть G, H, D — такие последовательно-параллельные графы, что либо $G = H \odot_s D$, либо $G = H \odot_r D$. Пусть $C_H = \{H_1, \dots, H_l\}$ и $C_D = \{D_1, \dots, D_k\}$ такие покрытия графов H и D соответственно, что $C_H \in M(H, a)$, $C_D \in M(D, b)$. Ясно, что $C_H \cup C_D$ — покрытие графа G . Часто из покрытий C_H и C_D можно построить покрытие $C_G = \{G_1, \dots, G_m\}$, которое удовлетворяет условиям (а) и (б), и такое, что при соответствующих упорядочениях подграфов в покрытиях выполняется условие:

$$G_1 = H_1 \cup D_1, \dots, G_t = H_t \cup D_t \{G_{t+1}, \dots, G_m\} = \{H_{t+1}, \dots, H_l\} \cup \{D_{t+1}, \dots, D_k\}. \quad (7)$$

Если такое покрытие существует, то $m = l + k - t = h(H, a) + h(D, b) - t$. Ясно, что в таком случае нас интересует максимальное значение t .

Если $G = H \odot_s D$, то возможны следующие преобразования, которые можно использовать для построения покрытия вида (7), имеющего максимальное значение t .

(П4) если $a_1 b_1 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_1 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_1 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = 0, c_2 = a_2, c_3 = b_3, c_4 = 1, c_5 = c_6 = 0$.

(П5) если $a_1 b_2 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_1 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_2 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = 0, c_2 = a_2, c_3 = b_3, c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

(П6) если $a_1 b_4 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_1 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_4 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = 0, c_2 = a_2, c_3 = b_3, c_4 = c_5 = 0, c_6 = 1$.

(П7) если $a_3 \wedge b_1 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_3 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_1 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = 0$, $c_2 = a_2$, $c_3 = b_3$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

(П8) если $a_3 \wedge b_2 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_3 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_2 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = 0$, $c_2 = a_2$, $c_3 = b_3$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

(П9) если $a_4 \wedge b_2 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_4 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_2 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = 0$, $c_2 = a_2$, $c_3 = b_3$, $c_4 = 0$, $c_5 = 1$, $c_6 = 0$.

Если $G = H \odot_p D$, то возможны следующие преобразования, которые можно использовать для построения покрытия вида (7), имеющего максимальное значение r .

(П10) если $a_2 \wedge b_2 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_2 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_2 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_1 = a_1 \vee b_1$, $c_2 = 1$, $c_3 = a_3 \vee b_3$, $c_4 = a_4 \vee b_4$, $c_5 = a_5 \vee b_5$, $c_6 = a_6 \vee b_6$.

(П11) если $a_3 \wedge b_3 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_3 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_3 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_3 = 1$ и $c_i = a_i \vee b_i$, для $i \in \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

(П12) если $a_4 \wedge b_4 = 1$, то пусть $H_1 \in C_H$ — подграф реализующий свойство a_4 , и $D_1 \in C_D$ — подграф реализующий свойство b_4 . Тогда покрытие $\{H_1 \cup D_1\} \cup \{H_2, \dots, H_l\} \cup \{D_2, \dots, D_k\}$ имеет свойство $c(C) = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, где $c_4 = 1$ и $c_i = a_i \vee b_i$, для $i \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Ясно, что после выполнения любого из преобразований (П4) – (П12) получаем покрытие c с числом подграфов: $|C| = h(H, a) + h(D, b) - 1$.

Некоторые из преобразований (П1) – (П12) можно комбинировать, чтобы получить максимальное значение параметра r в формуле (7). Проверка на корректность такого рода комбинаций реализована в виде двух функций: $SC(a, b, c)$ и $PC(a, b, c)$.

На множестве всех возможных троек $(a, b, c) \in \{0, 1\}^6 \times \{0, 1\}^6 \times \{0, 1\}^6$ определим функцию $SC(a, b, c)$ следующим образом: $SC(a, b, c) = r$, если существуют такие последовательно-параллельные графы G, H, D и их покрытия $C_G = \{G_1, \dots, G_m\}$, $C_H = \{H_1, \dots, H_l\}$, $C_D = \{D_1, \dots, D_r\}$, что $G = H \odot_s D$, $C_G \in M(G, c)$, $C_H \in M(H, a)$, $C_D \in M(D, b)$ и r — максимальное значение, для которого $G_1 = H_1 \cup D_1, \dots, G_r = H_r \cup D_r$, $\{G_{r+1}, \dots, G_m\} = \{H_{r+1}, \dots, H_l\} \cup \{D_{r+1}, \dots, D_e\}$. Если из C_H и C_D невозможно построить покрытие вида (7) со свойством c , то полагаем $SC(a, b, c) = -1$.

Аналогично, на множестве всех возможных троек $(a, b, c) \in \{0, 1\}^6 \times \{0, 1\}^6 \times \{0, 1\}^6$ определим функцию $PC(a, b, c)$ следующим образом: $PC(a, b, c) = r$, если существуют такие последовательно-параллельные графы G, H, D и их покрытия $C_G = \{G_1, \dots, G_m\}$, $C_H = \{H_1, \dots, H_l\}$, $C_D = \{D_1, \dots, D_r\}$, что $G = H \odot_p D$, $C_G \in M(G, c)$, $C_H \in M(H, a)$, $C_D \in M(D, b)$ и r — максимальное значение, для которого $G_1 = H_1 \cup D_1, \dots, G_r = H_r \cup D_r$, $\{G_{r+1}, \dots, G_m\} = \{H_{r+1}, \dots, H_l\} \cup \{D_{r+1}, \dots, D_e\}$. Если из C_H и C_D невозможно построить покрытие вида (7) со свойством c , то полагаем $PC(a, b, c) = -1$.

4.2.3 Алгоритм для нахождения числа бикликового покрытия последовательно-параллельного графа

Приведем рекурсивный алгоритм для нахождения числа бикликового покрытия последовательно-параллельного графа.

Алгоритм 2:

Вход: Простой последовательно-параллельный граф (G, s, t) . (Вершины s и t являются терминалами графа G , и его бинарное дерево декомпозиции.)

Выход: Число бикликового покрытия $bc(G)$ и массив чисел $h(G, 000000), \dots, h(G, 111111)$, такой, что элемент $h(G, c)$ содержит число подграфов в покрытии из класса $M(G, c)$, если $M(G, c) \neq \emptyset$, и $h(G, c) = |E(G)| + 1$, если $M(G, c) = \emptyset$.

begin

if $|E| = 1$ **then**

$h(G, 100000) := h(G, 010000) := h(G, 001000) := 1;$

for all $c \in \{0, 1\}^6 \setminus \{100000, 010000, 001000\}$ **do**

$h(G, c) := m(G);$

else {

for all $c \in \{0, 1\}^6$ **do**

$h(G, c) := m(G);$

if $G = H \odot_s D$ **then**

for all $a \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $h(H, a) < m(H)$ **then**

for all $b \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $h(D, b) < m(D)$ **then**

for all $c \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $SC(a, b, c) \geq 0$ **then**

if $h(G, c) > h(H, a) + h(D, b) - SC(a, b, c)$ **then**

$h(G, c) := h(H, a) + h(D, b) - SC(a, b, c);$

else if $G = H \odot_p D$ **then**

for all $a \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $h(H, a) < m(H)$ **then**

for all $b \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $h(D, b) < m(D)$ **then**

for all $c \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $PC(a, b, c) \geq 0$ **then**

if $h(G, c) > h(H, a) + h(D, b) - PC(a, b, c)$ **then**

$h(G, c) := h(H, a) + h(D, b) - PC(a, b, c);$

}

for all $c \in \{0, 1\}^6$ **do**

if $\neg((c_5 \vee c_6) \wedge \neg c_1)$ **then**

$bc(G) = \min\{bc(G), h(G, c)\};$

end

В алгоритме используются функции: $m(G)$, $SC(a, b, c)$ и $PC(a, b, c)$. Функция $m(G) =$

$= |E(G)| + 1$. Приведем описание функций $SC(a, b, c)$ и $PC(a, b, c)$.

Функция $SC(a, b, c)$

Вход: три характеристических вектора a, b, c свойств бикликовых покрытий.

Выход: наибольшее число r , такое, что при операции \odot_s из покрытия со свойством a и покрытия со свойством b можно построить покрытие вида (7) со свойством c ; -1 иначе.

begin

$s := 0$;

if $a_2 \wedge \neg c_2 \vee b_3 \wedge \neg c_3 \vee a_5 \vee a_6 \vee b_5 \vee b_6 \vee$

$c_1 \vee c_2 \wedge \neg a_2 \vee c_3 \wedge \neg b_3 \vee c_4 \wedge \neg(a_1 \wedge b_1)$ **then**

return -1 ;

if a_4 **then** $s := s + 1$;

if c_5 **then if** $a_4 \wedge b_1$ **then** $s := s - 1$ **else return** -1 ;

if b_4 **then** $s := s + 1$;

if c_6 **then if** $a_1 \wedge b_4$ **then** $s := s - 1$ **else return** -1 ;

if $a_1 \wedge \neg(c_2 \vee c_6 \vee c_4 \wedge b_1) \vee a_3 \vee b_1 \wedge \neg(c_3 \vee c_5 \vee c_4 \wedge a_1) \vee b_2$ **then**

$s := s + 1$;

return $\omega(a) + \omega(b) - \omega(c) - s$;

end

Функция $PC(a, b, c)$

Вход: Три характеристических вектора a, b, c свойств бикликовых покрытий.

Выход: наибольшее число r , такое, что при операции \odot_r из покрытия со свойством a и покрытия со свойством b можно построить покрытие вида (7) со свойством c ; -1 иначе.

begin

if $a_1 \wedge b_1 \vee (a_1 \vee b_1) \wedge \neg(c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee a_5 \vee a_6 \vee b_5 \vee b_6) \vee$

$(a_2 \vee b_2) \wedge \neg c_2 \vee (a_3 \vee b_3) \wedge \neg c_3 \vee$

$(a_4 \vee b_4) \wedge \neg c_4 \vee \neg(a_1 \vee b_1) \wedge ((a_5 \vee b_5) \wedge \neg c_5 \vee (a_6 \vee b_6) \wedge \neg c_6) \vee$

$c_1 \wedge \neg(a_1 \vee b_1) \vee c_2 \wedge \neg(a_1 \vee b_1 \vee a_2 \vee b_2) \vee c_3 \wedge \neg(a_1 \vee b_1 \vee a_3 \vee b_3) \vee$

$c_4 \wedge \neg(a_4 \vee b_4) \vee c_5 \wedge \neg(a_5 \vee b_5) \vee c_6 \wedge \neg(a_6 \vee b_6)$ **then**

return -1 ;

else

$s :=$ **if** $c_1 \wedge (a_5 \vee a_6 \vee b_5 \vee b_6)$ **then** 1 **else** 0 ;

return $\omega(a \&111100) + \omega(b \&111100) - \omega(c \&111100) + s$;

end

Здесь функция ω обозначает операцию взвешивания бинарного вектора, т.е. количество единиц в векторе.

Теорема 6. Данный алгоритм для любого последовательно-параллельного графа G вычисляет число бикликового покрытия $bc(G)$ за время $O(n)$, где $n = |V(G)|$.

Доказательство. Алгоритм основан на свойствах, установленных в теореме 4. Покажем корректность вычислений. Алгоритм является рекурсивным. В каждом узле α дерева осуществляется рекурсивное обращение для вычисления числа бикликового покрытия $bc(G(\alpha))$ и чисел $h(G(\alpha), c)$ для графа $G(\alpha)$, соответствующего узлу α . Корректность этих вычислений докажем структурной индукцией по порядку вычислений в

узлах этого sp -дерева. Легко проверить, что операторы в строках 1–4 алгоритма корректно вычисляют числа $h(G(\alpha), c)$ для каждого листа α sp -дерева.

Пусть α — s -узел sp -дерева. Пусть β и γ его сыновья и $(G, s, t) = G(\alpha)$, $(H, s_1, t_1) = G(\beta)$, $(D, s_2, t_2) = G(\gamma)$. Предположим, что для узлов β и γ числа $h(G(\beta), a)$ и $h(G(\gamma), b)$ вычислены корректно. Покажем, что в строках 6–16 алгоритма корректно вычисляется массив чисел $h(G(\alpha), c)$.

Отметим, что если $h(H, a) < m(H)$, то класс покрытий $M(H, a)$ не пуст. Следовательно, при обращении к функции $SC(a, b, c)$ характеристические вектора a и b такие, что $M(H, a) \neq \emptyset$ и $M(D, b) \neq \emptyset$.

Пусть $C_H = \{H_1, \dots, H_l\} \in M(H, a)$ и $C_D = \{D_1, \dots, D_k\} \in M(D, b)$, тогда $l = h(H, a)$ и $k = h(D, b)$. Для некоторых значений характеристического вектора c из покрытий C_H и C_D можно построить покрытие $C_G = \{G_1, \dots, G_m\}$, которое удовлетворяет условиям (а) и (б), и такое, что при соответствующих упорядочениях подграфов в покрытиях выполняется (7). Если такое покрытие существует, то $m = l + k - t = h(H, a) + h(D, b) - t$. Ясно, что в таком случае нас интересует максимальное значение t . Функция $SC(a, b, c)$ отвечает на вопрос: существует ли покрытие $C_G = \{G_1, \dots, G_m\}$, удовлетворяющее (7), и если да, то она возвращает максимальное значение t , в случае отрицательного ответа возвращается значение -1 .

В условном операторе, записанном в строках 2, 3 функции $SC(a, b, c)$, в качестве условия записана формула, задающая булеву функцию, принимающую значение ИСТИНА в случае не выполнения условий “передачи” свойств, которыми обладают графы H и D , графу G или не выполнения условий “приобретения” свойств графом G .

При выполнении операторов, записанных в строках 5–12, вычисляется значение переменной s , которое используется для корректного вычисления значения, возвращаемого функцией $SC(a, b, c)$.

Таким образом, операторы в строках 14–16 алгоритма корректно вычисляют числа $h(G(\alpha), c)$. Корректность вычислений в строках 17–25 следует из определения параллельной композиции и предположения индукции. По индукции заключаем, что в корневом узле дерева декомпозиции массив чисел $h(G, c)$ вычисляется корректно.

Определим трудоемкость рекурсивного алгоритма. Бинарное дерево декомпозиции (sp -дерево) последовательно-параллельного графа можно построить за линейное время. В каждом узле sp -дерева осуществляется рекурсивное обращение к алгоритму. В sp -дереве $m - 1$ внутренних узлов и m листьев, где $m = |E(G)|$. Трудоемкость вычислений, соответствующих одному узлу — $O(1)$. Поскольку в простом последовательно-параллельном графе $O(n)$ ребер, то трудоемкость алгоритма $O(n)$.

Теорема 6 доказана.

Этот алгоритм может быть легко модифицирован для построения бикликового покрытия. Вычисляя для каждого узла вектор H , будем сохранять лучший результата h . Будем двигаться по дереву от листьев к корням. Тогда зная для сыновей узла лучшее бикликовое покрытие, легко строится лучшее бикликовое покрытие для узла. Для реализации восстановления бикликового покрытия потребуется еще 1 проход по дереву, а

сложность операций внутри узла $O(1)$. Таким образом, трудоемкость алгоритма останется $O(n)$.

5. Сравнение алгоритмов

Первый алгоритм неточный – он находит бикликовое покрытие, но оно не обязательно будет минимальным. Второй же алгоритм находит минимальное бикликовое покрытие, но только для последовательно-параллельного графа. Поэтому вычислим, насколько хорошо эта эвристика работает на последовательно-параллельных графах.

Генерируем случайное SP-дерево и строим для него соответствующий граф. Далее вычисляем среднее относительное отклонение числа бикликового покрытия, полученного первым алгоритмом, от числа, полученного вторым алгоритмом.

Как можно убедиться (запустив программу), средняя относительная погрешность составляет 20-25%, (хотя в целом погрешность колеблется в пределах 10-40%).

А вот модифицированный алгоритм для данного типа графов нет смысла применять, он работает с такой же точностью, как и обычный эвристический алгоритм.

6. Заключение

- Получена оценка сверху для числа бикликового покрытия
- Получены точные значения для графов лестница и квадратная решетка
- Построен приближенный алгоритмы для нахождения бикликового покрытия графа.
- Построен точный алгоритм для нахождения бикликового покрытия последовательно-параллельного графа.
- Написана программа для нахождения максимального паросочетания в двудольном графе, а также для нахождения бикликового покрытия графа.
- Практическим путем установлена точность приближенного алгоритма.

Список использованной литературы

1. Лепин В.В., Дугинов О.И. О числе бикликового покрытия декартова произведения графов //Тр. Ин-та математики 2013. Т.21. №1. С. 1-9.
2. Amilhastre J., Vilarem M.C., Janssen P. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs // Disc. App. Math. 1998. V. 86. P. 125–144.
3. Orlin J. Containment in Graph Theory: covering graphs with cliques // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1977. V. 39. P. 211–218.
4. Лепин В.В. Линейный алгоритм для вычисления числа бикликового покрытия последовательно-параллельного графа //Тр. Ин-та математики 2008. Т.16. №2. С. 1-12.
5. Лепин В.В., Дугинов О.И. Задачи и инварианты, связанные с бикликами и мультикликами графа //Тр. Ин-та математики 2013. Т.21. №2. С. 69-71.

□а密審機剽涸剽涸 袂箇審Русский
(Россия)

☐ 密審機剽涸剽涸 袂箇審Русский
(Россия)

☐ 密審機剽涸剽涸 袂箇審Русский
(Россия)

□а密審機剽涸剽涸 袂箇審Русский
(Россия)

☐ 密機潤潤 袂箇Русский
(Россия)

□а密警機剿涸剿涸 袂箇警Русский
(Россия)

☐ 密警機剽涸剽涸 袂箇警Русский
(Россия)