No.
Date

数模复习—微分方程

[例题部分]

[追逐问题]——转方向改变

解：建立直角坐标系：

设海盗船轨迹为 $f(x)$，在任意时刻 t_0 切线过商船。

$$V_p t = \int_0^x \sqrt{1+f'^2(z)}\,dz$$

切线：$y = f'(x)(m-x) + f(x) = V_m t$ ∵ 两 t 相等 $t=t$.

$$\therefore \frac{1}{V_p}\cdot\int_0^x \sqrt{1+f'^2(z)}\,dz = \frac{1}{V_m}\cdot\left[f'(x)(m-x)+f(x)\right]$$

∴ 对两边求导，$\frac{1}{V_p}\cdot\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{V_m}\cdot\left[m\cdot f''(x) + f'(x) - (f'(x) + x\cdot f''(x))\right]$

即 $\frac{1}{V_p}\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{V_m}(m-x)\cdot f''(x)$

$$\therefore -\frac{V_m}{V_p}\sqrt{1+f'^2(x)} = (x-m)\cdot f''(x) = (x-m)\cdot\frac{df'(x)}{dx}$$

$$\frac{df'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} = -\frac{V_m}{V_p}\cdot\frac{dx}{x-m}$$，记 $\frac{V_m}{V_p}=r$

$$\frac{df'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} = -r\cdot\frac{dx}{x-m}$$，两边积分

$$\left[\ln\left|f'(x)+\sqrt{1+f'^2(x)}\right|\right]_0^x = \left[-r\cdot\ln|x-m|\right]_0^x$$

$x=0$，$f'(x)=0$

$$\therefore \ln\left|f'(x)+\sqrt{1+f'^2(x)}\right| = -r\cdot\ln\left|1-\frac{x}{m}\right|$$

$$f'(x)+\sqrt{1+f'^2(x)} = \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-r} \quad ①$$

继续解①方程：$\boxed{\text{对于 } t+\sqrt{1+t^2} \text{ 方程，可以取倒数}}$

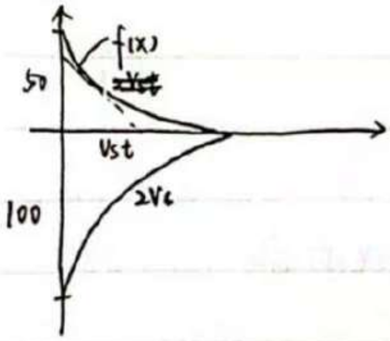
$$\begin{cases} f'(x)+\sqrt{1+f'^2(x)} = \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-r} \\ f'(x)-\sqrt{1+f'^2(x)} = -\left(1-\frac{x}{m}\right)^{r} \end{cases}$$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-r} - \left(1-\frac{x}{m}\right)^{r}\right]$，两边积分

$$f(x) - 0 = \frac{1}{2}\cdot\left[(-m)\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{m}\right)^{1-r}}{1-r} - (-m)\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{m}\right)^{r+1}}{r+1}\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[(-m)\cdot\frac{1}{1-r} - (-m)\cdot\frac{1}{r+1}\right]$$

$$= \frac{rm}{1-r^2} + \frac{m-x}{2}\left(\frac{1}{1+r}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{r} - \frac{1}{1-r}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-r}\right)$$

[同类问题]



解: 设 eagle 轨迹 $f(x)$

$$y = f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$\therefore 2V_s t = \int_0^x \sqrt{1+f'^2(z)}\, dz$$

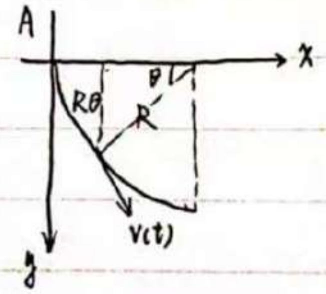
$$f'(x)(x-V_s t)+f(V_s t)=0$$

[最速降线问题]

① 直线: 高中物理

② 圆弧下降:

利用微分方程: (书上) [N也有动量, 故不可动量定理]



先由能量守恒: $\frac{1}{2}m\cdot v(t)^2 = mgR\sin[\theta(t)]$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \sqrt{2gR\sin[\theta(t)]}$$

又 $\because l(t) = R\theta(t)$ $\quad \therefore$ 两边求导, $l'(t) = R\theta'(t)$

$$\therefore R\theta'(t) = \sqrt{2gR\sin[\theta(t)]}$$

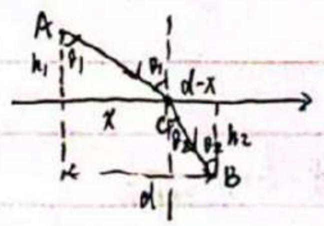
$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}}\cdot dt$$ 两边积分

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2g}{R}}\cdot dt,$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{R}{2g}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = 13.3090\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}$$ (课件感觉有误).

③ 最速降线:

时间最少:



设 $\frac{v_1}{v_2} = n$ 已知, 光线入射点 C

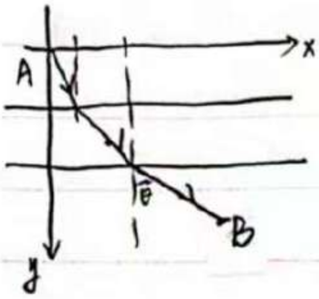
$$\therefore T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}{v_2}$$

$$\therefore T'(x) = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{h_1^2+x^2}} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{2(x-d)}{2\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}$$, $T(x)$ 显然单增

令 $T'(x)=0$ $\quad \frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}} = \frac{1}{v_2}\cdot\frac{d-x}{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}$

发现 $\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}$ $\quad \sin\theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+h_2^2}}$ $\quad \therefore \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$, 恰好满足折射原理.

由此，推导最速降线：



由之前的推导，

$n=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$ ∴ $\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}=\cdots=k$

∴ 利用某点 $\frac{\sin\theta}{v}=k$ 去求 $y=f(x)$ 的表达式

$\tan\theta=y'$ $\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$

而又由能量守恒：$\frac{1}{2}mv^2=mgy \Rightarrow v=\sqrt{2gy}$

∴ $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=k\cdot\sqrt{2gy}$ $\quad 1+(y')^2=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2gy}$ $\quad y'^2=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2gy}-1$

令 $\frac{1}{2gk}=C_2$ $\quad y'=\sqrt{\frac{C_2}{y}-1}$ $\quad$ ∴ $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{C_2}{y}-1}$ $\quad \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_2}{y}-1}}=dx$ $\quad$ ∴ $\sqrt{\frac{y}{C_2-y}}\,dy=dx$

两边积分，遇根号，$\boxed{\text{三角换元}}$： $\quad \sin^2\beta=\frac{1-\cos2\beta}{2}$

令 $y_2=C_2\sin^2\beta=\frac{1}{2}C_2\cdot(1-\cos2\beta)$

∴ $\sqrt{\frac{C_2\sin^2\beta}{C_2\cos^2\beta}}\cdot C_2\cdot2\sin\beta\cos\beta\cdot d\beta=dx$ $\quad C_2\cdot2\sin^2\beta\,d\beta=dx$

∴ $C_2\cdot(1-\cos2\beta)\,d\beta=dx$ 两边积分

即 $C_2(\beta-\frac{1}{2}\sin2\beta)=x$

∴ $\begin{cases}x=C_2(\beta-\frac{1}{2}\sin2\beta)\\ y=\frac{1}{2}C_2(1-\cos2\beta)\end{cases}$ $\quad$ 令 $\frac{1}{2}C_2=R$，$2\beta=r$ $\Rightarrow \begin{cases}x=R\cdot(r-\sin r)\\ y=R(1-\cos r)\end{cases}$ $\quad$ 事实上是摆线

$v(t)$; $T(t)=\int_0^{x_B}v\,dt$.

[相关<讨论题>] From <资料>

Ex. b.1 (1) 设单位时间单位面积降雪量为A

∴ 某一时刻，扫雪车扫的雪 = 该地有的雪，即 $k\,dt=t\cdot A\cdot W\cdot dx$

∴ $\frac{k}{AW}\cdot\frac{dt}{t}=dx$，即 $x=\frac{k}{AW}\cdot\ln\frac{t}{t_0}$

∵ $x_1=2x_2$ ∴ $\frac{\ln\frac{1+t_0}{t_0}}{\ln\frac{2+t_0}{t_0}}=\frac{3}{2}$，即 $1+\frac{1}{t_0}=(1+\frac{2}{t_0})^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow t_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) 注意：若 $t_0<t_1$，则扫雪车扫的是剩下的雪

扫雪车1仍满足 $x_1=\frac{k}{WA}\ln\frac{t}{t_1}$ $\quad$ 扫雪车2中t为扫雪车1离开后的时间

由 $x=\frac{k}{WA}\ln\frac{t}{t_1}$，有 $t=t_1e^{(\frac{WA}{k}\cdot x)}$ (A)

∴ 原方程 $kdt=tAW\cdot dx \longrightarrow kdt=[t-t_1e^{(\frac{WA}{k}x)}]AW\cdot dx$

$\therefore kdt=(tdx-t_1e^{(\frac{WA}{k}\cdot x)}dx)\cdot AW$

$k\cdot\frac{dt}{dx}=[t-t_1(e^{\frac{WA}{k}\cdot x})]AW$

$\therefore \frac{dt}{dx}-\frac{1}{k}\cdot t=-\frac{t_1}{k}e^{\frac{WA}{k}\cdot x}$ ，一阶线性非齐次方程，用公式解

$p(x)=-\frac{1}{k}$，$f(x)=-\frac{t_1}{k}e^{\frac{WA}{k}\cdot x}$ $\therefore \int p(x)dx=-\frac{1}{k}x$，$\int -t_1e^{\frac{WA}{k}x}e^{-\frac{1}{k}x}dx$

$=-t_1\int e^{\frac{WA-1}{k}\cdot x}dx=-t_1\cdot\frac{k}{WA-1}\cdot e^{\frac{WA-1}{k}\cdot x}$

$\therefore t=(-t_1)\frac{k}{WA-1}\cdot e^{\frac{WA}{k}\cdot x}$ [这里出问题了，解错了！]

$\frac{dt}{dx}-\frac{AW}{k}\cdot t=-\frac{AW}{k}\cdot t_1\cdot e^{\frac{WA}{k}\cdot x}$

这里 $p(x)=-\frac{AW}{k}$ $f(x)=-\frac{AWt_1}{k}\cdot e^{\frac{WA}{k}\cdot x}$

设 $n=\frac{WA}{k}$ $\therefore \int p(x)dx=-nx$，$f(x)=-nt_1\cdot e^{nx}$

$\int(-nt_1)e^{nx}\cdot e^{-nx}dx=\int(-nt_1)dx=-nt_1x$

$\therefore t=e^{nx}\cdot(-nt_1x+C)$ 回代 $n=\frac{WA}{k}$，则有 $t=e^{\frac{WA}{k}\cdot x}(-\frac{WA}{k}\cdot t_1x+C)$

代入第二辆车 t_2 时出发，即 $t=t_2$，$x=0$

$\therefore t_2=C$ $\therefore t=e^{\frac{WA}{k}\cdot x}(t_2-\frac{WA}{k}\cdot t_1x)$ (B)

∴ 联立(A)式和(B)式，

$t_1=t_2-\frac{WA}{k}\cdot t_1\cdot x \Rightarrow x=\frac{t_2-t_1}{\frac{WA}{k}\cdot t_1}=\frac{k(t_2-t_1)}{WAt_1}$，代入(A)

$t=t_1\cdot e^{\frac{t_2-t_1}{t_1}}$，为最终答案

Ex.6.6 (1) $\frac{dm}{dt}=c\cdot4\pi r^2$

又 $\because m=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ $\therefore \frac{dm}{dt}=4\pi\rho\cdot r^2\cdot\frac{dr}{dt}$

$\therefore c\cdot4\pi r^2=4\pi r^2\cdot\rho\cdot\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{c}{\rho}$，$r_0=a\Rightarrow r=\frac{c}{\rho}t+a$ $\therefore\frac{dm}{dt}=\rho\cdot4\pi r^2\cdot\frac{c}{\rho}=m\cdot\frac{c}{\rho}\cdot\frac{3}{r}$

只受重力作用，动量定理：$\frac{d(mv)}{dt}=mg$ $\therefore \frac{dm}{dt}\cdot v+m\cdot\frac{dv}{dt}=mg$

$\therefore \frac{dv}{dt}=g-\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dt}\cdot v=g-\frac{c}{\rho}\cdot\frac{3}{r}\cdot v$ $\frac{dv}{dt}=g-\frac{3}{t-\frac{a\rho}{c}}\cdot v(t)$

(2) $\frac{dm}{dt} = k\cdot\pi r^2\cdot v.$

同时 $\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2\cdot\rho\cdot\frac{dr}{dt}$

$\therefore kv = 4\rho\cdot\frac{dr}{dt}.$ $\qquad \therefore \frac{dr}{dt} = \frac{kv}{4\rho}.$

△ 代入 $\frac{dm}{dt}\cdot v + m\cdot\frac{dv}{dt} = mg$，

$$\underbrace{4\pi r^2\cdot\rho\cdot\frac{dr}{dt}}_{\frac{dm}{dt}}\cdot\frac{4\rho}{k}\cdot\frac{dr}{dt} + \underset{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\underset{\downarrow}{m}}\cdot\frac{4\rho}{k}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{3}r\frac{d^2r}{dt^2} = 0.$$

(3) 解(1)中方程:

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3v}{r}\cdot\frac{c}{\rho}.$ $\qquad \therefore \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{c}{\rho}\cdot\frac{dv}{dr}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{\rho}{c}g - \frac{3v}{r}$

$\therefore$ 凑微分，两边同乘 r^3 $\qquad r^3dv = r^3\frac{\rho}{c}\cdot g - 3vr^2$

$\Rightarrow d(vr^3) = \frac{\rho g}{4c}\cdot d(r^4)$ 两边积分

$r^3v = \frac{\rho g}{4c}(r^4 - a^4) \Rightarrow v = \frac{\rho}{4c}gr\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) = \frac{\rho}{4c}gr\cdot\left(1 - \frac{a}{r}\right)\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3}\right)$

$\therefore$ 带入，(没有懂怎么带的……)

得 $r(t) = \frac{1}{4}gt\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3}\right)$

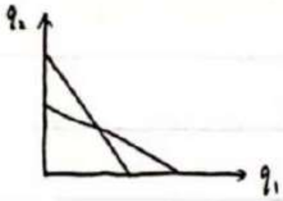
[博弈论]

[讲义] 数理经济学例题

Cournot:

解：利润 $u_i = q_i(M - q_1 - q_2 - c)$

以 i=1 为例，顶点 $q_1 = \frac{M-q_2-c}{2}$



当 $\begin{cases} 2q_1 = M - q_2 - c \\ 2q_2 = M - q_1 - c \end{cases}$ 时，即 $q_1 = q_2 = \frac{M-c}{3}$ 时，产量最大，为 $\frac{1}{9}(M-c)^2$

同题 $Q(M-Q-c)$ $\quad Q=\frac{M-c}{2}$ 利润最大.

Stackelberg:

$u_2 = q_2(M-q_1-q_2-c) = \frac{1}{4}\cdot(M-q_1-c)^2$

对厂商1来讲，$u_1 = q_1(M-q_1-q_2-c)$，由于知道厂二会最优选，即 $q_2=\frac{1}{2}(M-q_1-c)$

$\therefore u_1 = q_1\cdot\frac{1}{2}(M-q_1-c) = \frac{1}{8}(M-c)^2$ $\quad q_1$ 取 $\frac{1}{2}(M-c)$

$\therefore q_2$ 取 $\frac{1}{4}(M-c)$，$u_2=\frac{1}{16}(M-c)^2$

[习题]

Ex. 4.1.

(1) 模型：参与者：n位市民

策略集：S：参与维修 N：不参与维修

收益：至少一人维修：维修者：$v-c$

其他：v

无人维修：所有人：0

Nash：一人修

(2) 期望收益：修：$v-c$. 不修：$v[1-(1-p)^{n-1}]$

(3) 混合策略 $(x,1-x)$，期望收益 $x(v-c)+(1-x)v\cdot[1-(1-p)^{n-1}]$

$f'(x)=0$ $\quad \therefore v-c = v - v\cdot(1-p)^{n-1}$ $\quad (1-p)^{n-1}=\frac{c}{v}$ $\quad \therefore p = 1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

4.2

Ex.1. (1) 对机构来讲:

	排	不排
查	1	$V(n-1,m-1)$
不查	-1	$V(n,m-1)$

(2) 既然混合策略, 设企业排放概率 p, 机构检查概率 q

$\therefore$ 若企业排污, 机构的期望 $V(m,n) = p-(1-p) = 2p-1 \rightarrow$ 企业 $1-2p$

若不排污, ------ $V(m,n) = pV(n-1,m) + (1-p)V(n,m-1) \rightarrow$ 企业 相反数

由于是均衡状态, 企业是否排污期望相等

$\therefore 2p-1 = pV(n-1,m) + (1-p)V(n,m-1)$

解出 $p = \dfrac{V(n,m-1)+1}{V(n,m-1)-V(n-1,m)+2}$

q 同理, 可以解出来: $q = \dfrac{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)}{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)+2}$

$\therefore V(n,m) = pq-(1-p)q + p(1-q)V(m-1,n-1) + (1-p)(1-q)V(m,n-1)$, 代入, ···

初始条件: $n=0$, $V(0,m)=-1$

$m=n\geq 1$, 每天检查, $V(m,n)=1$

(3) 求 $V(1,n)$. 数列问题: 代入 $m=1$ 入表达式

上面 $V(m,n) = \dfrac{V(m,n-1)+V(m-1,n-1)}{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)+2} \Rightarrow V(1,n) = \dfrac{V(1,n-1)-1}{V(1,n-1)+3}$

$\therefore a_n = \dfrac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+3}$ 不动点 $x = \dfrac{x-1}{x+3} \Rightarrow x^2+3x = x-1$ $\underline{x=-1}$

$\therefore a_n+1 = \dfrac{a_{n-1}+1-2+a_{n-1}+3}{a_{n-1}+1+2} = \dfrac{2a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1+2}$ $\therefore \dfrac{1}{a_n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}+1} + \cancel{\dfrac{1}{2}}\cdot\dfrac{2\cdot 1}{a_{n-1}+1} = \dfrac{1}{a_{n-1}+1} + \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{a_n+1} = \dfrac{n}{2}$ $a_n = \dfrac{2}{n}-1$ $\therefore V(1,n) = \dfrac{2}{n}-1$

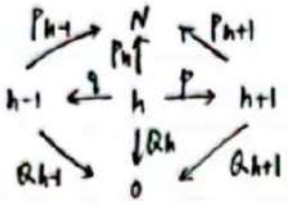
[赌徒破产问题]

解：设 P_k：赌徒初始财富 k，最终剩达 N；

Q_k：赌徒初始财富 k，最终剩达 0

$\therefore P_N=1,\ P_0=0,\ Q_0=1,\ Q_N=0$

$\therefore$ 对 P_n 画 Markov 链



$\therefore P_n = p\cdot P_{n+1} + q\cdot P_{n-1} = p\cdot P_{n+1} + (1-p)P_{n-1}$

$\therefore$ 化成差比：

$p\cdot P_{n+1} - P_n = (p-1)P_{n-1}$

$p P_{n+1} - p\cdot P_n = (p-1)P_{n-1} - (p-1)P_n$

$r = \frac{1-p}{p} \neq 1$ ……

① 若 $p\neq\frac{1}{2}$：

$\therefore P_n = \dfrac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$

② 若 $p=\frac{1}{2}$：

$A_n = \frac{n}{N}$

Q_n：法一：再推一遍

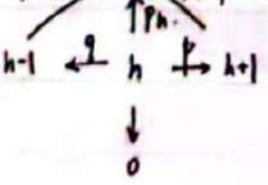
法二：$Q_n = P_{N-n} = \cdots$

[Pascal 问题]

$p=\frac{27}{216}$ $q=\frac{15}{216}$ A初始 n：P_n：A胜；Q_n：B胜.

$n_0=12 \rightarrow N=24$： $P_N=1,\ Q_N=0\ \ P_0=0.\ Q_0=1$

$\therefore$ 对 P_n 画 Markov 链：



$P_n = p\cdot P_{n+1} + q\cdot P_{n-1} + (1-p-q)P_n$

$Q_n = 1-P_n$

(下面纯化简了)

[动态规划]

[秘书问题重做]

j: 绝对名次　　y_i: 相对名次

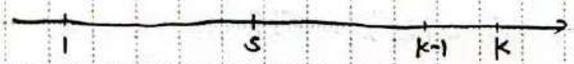
$A_1, A_2 \cdots A_k \cdots A_n$: 应聘者

s: 策略 s. 自第 s 位开始录用

$p_n(s)$: 采用 s 录到第一名的概率

$p_n^k(s)$: 采用 s 录 A_k 录到第一名的概率
(真的第一)

考查 $p_n^k(s)$: 即在第 k 为最优时, 前 $1\sim k-1$ 人中最优在 $1\sim s$ 中的概率



$$p_n^k(s) = \frac{1}{n}\cdot\frac{s-1}{k-1}$$

$$\therefore P_n(s) = \sum_{k=s}^{n} p_n^k(s) = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

下面希望招到第一名, 即 $P_n(s)$ 最大

$$P_n(s) - P_n(s-1) = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{s-2}{n}\sum_{k=s-2}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$= \frac{s-2}{n}\left(\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=s-2}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{s-2}{n}\cdot\left(-\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \geq 0.$$

临界: $\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} \geq 1$　　[可以找到 s^* 后都是对该式的化简, 略]

[变式2. 双保险] (略)

[变式3. 期望策略]　　设录用 A_i, 绝对 $A_i=k$, 相对 $y_i=j$.

$\cancel{E_n^k(s) = 1\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{s-1}{k-1} + 2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{s-1}{k-1}\cdot\frac{1}{n-k} + 3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{s-1}{k-1}\cdot\frac{2}{n-k}}$ Error

$$E(A_i \mid y_i=j) = k\cdot P(A_i=k \mid y_i=j) = \sum_{k=j}^{n} k\cdot\frac{P(A_i=k,\ y_i=j)}{P(y_i=j)}$$　($k<j$ 是不存在的, 相应概率 p 为 0)

$\therefore$ 分别求解:　$P(y_i=j) = \frac{1}{i}$

$P(A_i=k,\ y_i=j)$: 录第 j 个, 在总体为第 k 个.

$= P(y_i=j \mid A_i=k)\cdot P(A_i=k)$

∴求 $P(y_i=j \mid A_i=k)$：

$$\left\langle\begin{array}{l} k-1\text{个比}k\text{好}: \begin{cases} \nearrow j-1\text{个在}i-1\text{个中} \\ \searrow k-j\text{在}n-i\text{中} \end{cases} \\ n-k\text{个不如}k: \begin{cases} \nearrow i-j\text{个在}i-1\text{中} \\ \searrow n-k+j-i\text{在}n-i\text{中} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$p=\frac{C_{k-1}^{j-1}\cdot C_{n-k}^{i-j}}{C_{n-1}^{i-1}}\cdot\frac{1}{n}$$

∴原式 $=\sum_{k=j}^{n}k\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{C_{k-1}^{j-1}C_{n-k}^{i-j}}{C_{n-1}^{i-1}}$ （后面又是组合式化简，略） $\Rightarrow E(A_i \mid y_i=j)=\frac{n+1}{i+1}\cdot j$

（吐槽：TT 本应该好好啃一遍化简的！组合式魅力所在！但来不及了. sad TT.）

∴算 $U(j,i)$ 的最小值.

[下面使用动态规划]

令 $U(j,i)$、录用相对 $y_i=j$ 时最优名次期望：

$y_i=j$

- 录用 $\downarrow$ $U(j,i)=\frac{n+1}{i+1}j$
- 不录用（下一个），则 y_{i+1} 可以是 $1,2,\cdots,i+1$

 此时 $U(j,i)=\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)$

 （此 k 和上一个是不一样的）

$$\therefore U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}\cdot j,\ \frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\}$$ 而 U 的末端条件 $U(j,n)=j$

∴记 $C_i=\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)$ 则 $U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}\cdot j,\ C_i\right\}$

∴当 $\underline{\frac{n+1}{i+1}\cdot j<C_i}$ 即 $s_i=j=\left\lfloor C_i\cdot\frac{i+1}{n+1}\right\rfloor$，录用 A_i，否则继续面试

（边界）

下面我们希望 $\left\lfloor C_i\cdot\frac{i+1}{n+1}\right\rfloor$ 最优，希望给出 C_i 表达式

求递推式：$\underline{C_{i-1}=\frac{1}{i}\cdot\sum_{k=1}^{i}U(k,i)}=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\min\left\{\frac{n+1}{i+1}\cdot k,\ C_i\right\}$

由表达式，可知

而我们知道，$s\le s_i$ 时，$\frac{n+1}{i+1}j<C_i$ $\quad\therefore C_{i-1}=\frac{1}{i}\cdot\left(\frac{n+1}{i+1}\cdot\sum_{k=1}^{s_i}k+\sum_{k=s_i+1}^{i}C_i\right)=\frac{1}{i}\cdot\left(\frac{n+1}{i+1}\cdot\frac{s_i(s_i+1)}{2}\underline{+(i-s_i)C_i}\right)$

尾部条件: $C_{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U(k,n)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}$

通过递推来求 C_i.

[动态规划] 一 讨论题

Ex. 2.1

(1) 解: $t_1, t_2 \cdots t_m$

$h_1, h_2 \cdots h_n$.

假设 $h_1<h_2<\cdots<h_n$.

$t_1<t_2<\cdots<t_n$

假设 h_n 拿了 t_n. h_i 拿了 t_i $\quad \frac{A_4^4}{A_2^2 A_2^2}=\frac{4\times3\times2}{2\times1\times2}=6$ 种.

$f_1(k)=|h_n-t_n|+|h_i-t_i| \qquad f_2(k)=|h_n-t_i|+|h_i-t_n|$

讨论6种情况:

① $h_i<t_i<t_n<h_n$

f_1: $h_n-t_n+t_i-h_i$.

f_2: $h_n-t_i+t_n-h_i$

$f_2-f_1=2(t_n-t_i)>0$.

② $h_i<t_i<h_n<t_n$

f_1: $\underline{t_n}-h_n+t_i-\underline{h_i}$

f_2: $h_n-t_i+\underline{t_n}-\underline{h_i}$

$f_2-f_1=2(h_n-t_i)>0$

③ $t_i<t_n<h_i<h_n$

f_1: $h_n-t_n+h_i-t_i$

f_2: $h_n-t_i+h_i-t_n$

$f_1=f_2$

④ $t_i<h_i<t_n<h_n$

f_1: $h_n-t_n+h_i-t_i$

f_2: $h_n-t_i+t_n-h_i$

$f_2-f_1=2(t_n-h_i)>0$

⑤ $t_i<h_i<h_n<t_n$

f_1: $t_n-h_n+h_i-t_i$

f_2: $h_n-t_i+t_n-h_i$

$f_2-f_1=2(h_n-h_i)>0$

⑥ $h_i<h_n<t_i<t_n$

f_1: $t_n-h_n+t_i-h_i$

f_2: $t_i-h_n+t_n-h_i$

$f_1=f_2$

$\therefore f_2>f_1$ 故任意交换, f_1 min

(2) 解: 先令 $P(i,j)$: 前i套滑雪服给前j个人

$P(i,j)=\min\{P(i-1,j),\ |t_i-h_j|+P(i-1,j-1)\}$

初态: $i=j$. 从小到大分配.

Ex. 2.2.

$$P(i,j) = c_{ij} + \max\{P(i-1,j),\ P(i,j-1)\}$$

初态: $P(0,j)=0$

$P(i,0)=0$

Ex. 2.4.

(1) 解:

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{不计划停}\ V_{i+1} \\
V_i \arrow[urr] \arrow[dr] & & \\
 & \text{停} \arrow[r, "\text{空}"] \arrow[dr, "\text{不空}"'] & \alpha_i U_i \\
 & & (1-\alpha_i) V_{i+1}
\end{tikzcd}$$

$$V_i = \max\{V_{i+1},\ \alpha_i U_i + (1-\alpha_i) V_{i+1}\}$$