讨论题(二) 招聘问题推广

Ex.1.(1) f_k: 相对第一名 → 绝对No.2 概率

g_k: 相对No.2 → 绝对No.2 概率

方法: 递推:

若 $k=n$. $g_n=1$.

找 g_k 和 g_{k+1} 关系: 设第k+1个所处相对名次 i, $P(y_{k+1}=i)=\frac{1}{k+1}$, $i=1,2\cdots k+1$

$k+1$:
- → 相对No.1 → g_k 变成No.3, f_k 变成No.2.
- → 相对No.2 → 0
- → other → g_k

g_{k+1}: 在相对k+1名中No.2为绝对No.2的概率. 则k+1要比 g_k 中的No.2排得靠后

$$g_k=\begin{cases}\frac{k-1}{k+1}\cdot g_{k+1} & k<n \\ 1 & k=n\end{cases}$$

$$\frac{g_k}{g_{k+1}}=\frac{k-1}{k+1}. \quad \therefore \frac{g_3}{g_2}\cdot\frac{g_4}{g_3}\cdots\frac{g_n}{g_{n-1}}=$$

$$g_k=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

下求 f_k:

$k+1$:
- → 相对No.1, 则前k中最好, 即前k+1中No.2
- → other: 前k中No.1, 即前k+1中No.1

$$f_k=\frac{1}{k+1}g_{k+1} \Rightarrow f_k=\begin{cases}\frac{1}{k+1}g_{k+1}+\frac{k}{k+1}f_{k+1} \\ 0, & k=n\end{cases}$$

$$\begin{cases}f_k=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)k}{n(n-1)}+\frac{k}{k+1}f_{k+1} \\ f_n=0.\end{cases}$$

求解, 有 $f_k=\begin{cases}\frac{k(n-k)}{n(n-1)}, & k<n \\ 0 & k=n.\end{cases}$

(2) $v_k=\underbrace{\frac{1}{k+1}f_{k+1}}_{\text{相对第一名}}+\underbrace{\frac{1}{k+1}g_{k+1}}_{\text{相对No.2}}+\underbrace{\frac{k-1}{k+1}v_{k+1}}_{\text{其他}}$ × 修正:

但相对No.1. No.2 可以抉择. 其他直接看 v_{k+1}

$\therefore v_k=\frac{1}{k+1}\max\{f_{k+1},v_{k+1}\}+\frac{1}{k+1}\max\{g_{k+1},v_{k+1}\}+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1}$

$v_0=\max\{v_{k+1},f_{k+1}\}$, $v_n=0$.

No.
Date

(3) 计算具体关系式：

∵ $f_k=\frac{k(n-k)}{n(n-1)}$ 由 $k(n-k)$ 二次性，$k_0=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$ 时取到最大值，$f_k\le f_{k_0}$.

又∵ $g_k=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ ∴ $\frac{g_k}{f_k}=\frac{k-1}{n-k}$ 令 $\frac{g_k}{f_k}=1$ $k-1=n-k$ $k_1=\frac{n+1}{2}$

$$\therefore\begin{cases} k\le\frac{n+1}{2}, & g_k\le f_k\\ k\ge\frac{n+1}{2}, & g_k\ge f_k.\end{cases}$$

又∵ $V_k=\frac{1}{k+1}\max\{V_{k+1},f_{k+1}\}+\frac{1}{k+1}\max\{V_{k+1},g_{k+1}\}+\frac{k-1}{k+1}V_{k+1}$

用归纳证 $V_k=\begin{cases} f_{k_0} & 0\le k<k_0\\ f_k & k_0\le k<n.\end{cases}$

$V_n=0=f_n$

$k>k_0$. 有 $V_{k+1}=f_{k+1}$，$g_{k+1}>f_{k+1}=V_{k+1}$

则 $V_k=\frac{1}{k+1}\cdot f_{k+1}+\frac{1}{k+1}\cdot g_{k+1}+\frac{k-1}{k+1}f_{k+1}=\underline{\frac{k}{k+1}\cdot f_{k+1}+\frac{1}{k+1}g_{k+1}=f_k}$，成立.

$k<k_0$. 有 $V_{k+1}=f_{k_0}\ge f_{k+1}$，$g_{k+1}\le f_{k+1}\le f_{k_0}$

则 $\underline{V_k}=\frac{1}{k+1}f_{k_0}+\frac{1}{k+1}\cdot f_{k_0}+\frac{k-1}{k+1}f_{k_0}=\underline{f_{k_0}\text{ 成立}}$

即证成了上述结论.

Ex.2. 第r名，V_r —— V_{r+1} — 直接下一个
开始准备
最好 $\frac{1}{n}$ — p 录用 → 相对No.1 $\frac{1}{r}$
拒收 — 下一个
$\frac{r-1}{r}$ 不好 — 下一个 V_{r+1}
不是相对No.1

(1) $\frac{p}{n}$

(2) $V_r=\max\{\underbrace{\frac{p}{n}}_{\text{接受}}+\underbrace{(\frac{r-1}{r}+\frac{1}{r}\cdot(1-p))V_{r+1}}_{\text{下一个}},\ \underbrace{V_{r+1}}_{\text{直接下一个}}\}$ 算 V_r：暴算(?)

显然，$V_r\ge V_{r+1}$. $V_n=\frac{p}{n}\le\frac{n-1}{n}$

∴ 找最值函数的分段函数的分界点，令 $\underline{\frac{p}{n}+[\frac{r-1}{r}+\frac{1}{r}(1-p)]V_{r+1}=V_{r+1}}$ $\frac{p}{n}+1-\frac{p}{r}=0$ $\frac{1}{r}=\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$??

$\underline{r=\frac{np}{n+p}}$ 必存在s，使得 $V_s\ge\frac{s-1}{n}$，$V_{s+1}<\frac{s}{n}$ ∴ $V_1=V_2=\dots V_s$，$V_r=\frac{p}{n}+(1-\frac{p}{r})V_{r+1}$ $(r\ge s)$

使用 $X_{n+1}=AX_n+B$ 公式进行递推：

物门

(过程暂略)

$$\Rightarrow \frac{\frac{1-p}{p}\cdot\frac{nV_r}{r+1}+1}{\frac{1-p}{p}\cdot\frac{nV_{r+1}}{r+1}+1}=1+\frac{1-p}{r-1}$$

$$\therefore V_s=\frac{p(s-1)}{n(1-p)}\left[\prod_{i=s-1}^{k-1}\left(1+\frac{1-p}{i}\right)-1\right]\geq\frac{s-1}{n}$$

利用不等式 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1-p}\leq 1+\frac{1-p}{k}\leq\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{1-p}$ 据说是因为伯努利(bushi

$\therefore\left(\frac{n}{s}\right)^{1-p}<\frac{1}{p}\quad\left(\frac{n-p}{s-p-1}\right)^{1-p}>\frac{1}{p}$

$\therefore\ np^{\frac{1}{1-p}}<s<np^{\frac{1}{1-p}}+1+p\left(1-p^{\frac{1}{1-p}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s}{n}=p^{\frac{1}{1-p}}\quad\lim\limits_{n\to+\infty}V_i=p^{\frac{1}{1-p}}$

Ex.4.

(1)

	I	II	III	IV	V	
$n=2$	$A_2\to A_1$	$A_2\to A_3$				$\frac{1}{2}$
$n=3$	$A_2\to A_1$	$A_3\to A_2$	$A_3\to A_1$			$\frac{1}{4}$
$n=4$	$A_2\to A_1$	$A_3\to A_2$	$A_1\to A_3$	$A_1\to A_2$		$\frac{1}{8}$
$n=5$	$A_2\to A_1$	$A_3\to A_2$	$A_1\to A_3$	$A_2\to A_1$	$A_2\to A_3\cdots$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
						$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$
						$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}$

$\therefore$ $n=3k+2$ A_2

$n=3k+3$ A_3

$n=3k+4$ A_1

概率 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $\therefore$ 求和. $\underbrace{A_2\to A_1}$ 情况下,

$A_2.\ \frac{1}{2}$

$A_1.\ \frac{1}{2}$

A_2胜 A_1胜

$A_2=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\left(\frac{4}{7}+\frac{1}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$

$A_3=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$

$A_4=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\left(\frac{1}{7}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$

(3) $r=4$

第一位的影响

1 $\boxed{1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1}$ 不合法: a_{n-1}符合, a_n不一定符合

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1}$ $\cdots$

$\boxed{1}$ 0 $\boxed{1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1}$ a_{n-2} ✓.

0 $\boxed{1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1}$ 合法: a_{n-1}符合, a_n也符合.

$\underbrace{a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_{n-r+1}}$

第一位	0	1	1	$1\sim r-2$位: 1
		0	1	$r-1$位: 0.
			0 $\cdots$	

No.

Date

(4) $n=r \quad b_r=(\frac{1}{2})^{r-1}$

定义 $x_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i-1\text{场比赛胜者赢得了第}i\text{场} \\ 0 & \end{cases}$

$P(X_i)=\frac{1}{2} \quad \therefore b_r = P(X_1 \cdot X_2 \cdots X_{r-1}) = (\frac{1}{2})^{r-1}$

$\therefore b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + (\frac{1}{2})^2 b_{n-2} + \cdots \quad (\frac{1}{2})^{r-1} b_{n-r+1}$

第1位 0 1

0

物门