讨论题(二)

三、n 支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为 r 轮，第 l 轮共有 m_l 场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，r 和 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队 i 的水平值为 v_i，$i=1,\cdots,n$，设队 i 与队 j 比赛时，队 i 获胜的概率为 $\dfrac{v_i}{v_i+v_j}$，队 j 获胜的概率为 $\dfrac{v_j}{v_i+v_j}$。记 $n=2^s+k$，其中 s,k 为正整数，$0\le k<2^s$。设 $v_1>v=v_2=\cdots=v_n>0$。

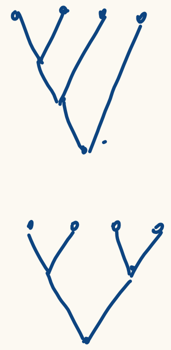
（1）试给出为保证赛制可行 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 应满足的条件；

（2）问 $n=4$ 时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最小；

（3）若 $m_1=k$，求队1在第一轮结束后未被淘汰的概率 f_1，若 $m_1=j<k, m_2=k-j$，求队1在第二轮结束后未被淘汰的概率 f_2，并证明 $f_1-f_2>0$；

（4）证明：$r=s+1$ 且 $m_1=k, m_l=2^{s-l+1}, l=2,3,\cdots,s+1$ 的赛制对队1最为有利。

举例，不同赛制：

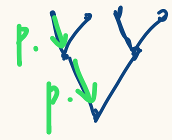


(1) 每一场比赛淘汰一支球队，共淘汰 $n-1$ 支，则 $\sum_{l=1}^{r} m_l = n-1$ ①

$m_l \le \frac{1}{2}\left(n-\sum_{i=1}^{l-1} m_i\right)$ ②（两两能够组队）。

(2) a. $r=3$，$m_1+m_2+m_3=3$　　$m_1=m_2=m_3=1$.

b. $r=2$，$m_1+m_2=3$　　$m_1=2$，$m_2=1$　　（反之不满足 ②，会去）.



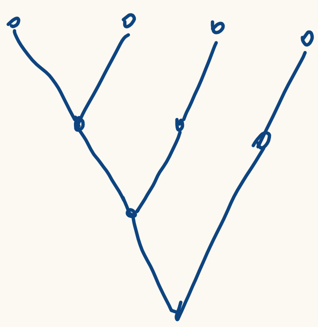
p^2.

下计算概率：

队1胜的概率：$p=\frac{v_1}{v_1+v_2}>\frac{1}{2}$

方案 b: p^2.

方案 a: 不知队伍1何时参加比赛



row1　　row2

Team1. → $\frac{1}{2}$ 选上 $\xrightarrow{赢. p.}$ → $\frac{2}{3}$ 选上 $\xrightarrow{赢 p}$ 必选 赢. p.

→ $\frac{1}{3}$ 没选上 → 必选 赢. p.

Team1. → $\frac{1}{2}$ 没选上 → $\frac{2}{3}$ 选上 $\xrightarrow{赢 p}$ 必选 赢. p.

→ $\frac{1}{3}$ 没选上 → 必选 赢. p.

$\therefore \frac{1}{2}p\cdot\left(\frac{2}{3}p^2+\frac{1}{3}p\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}p^2+\frac{1}{3}p\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot p(p+1)(2p+1)$

$=\frac{1}{6}p\cdot(p+1)(2p+1)=1+2+\cdots+p^2>p^2$.

∴ 对强队而言，b 更易获胜.

(3) $n=2^s+k$，对 k 的处理： → 抽 2k 支队伍.

m_1：直接通过 k 轮，淘汰 k 支队伍.　　$f_1=\frac{2k}{n}p+\left(1-\frac{2k}{n}\right)\cdot 1$

m_2：先淘汰 j 轮，再淘汰 $k-j$ 轮.

row1

Team1：$\frac{2j}{n}$ 选中 → p 赢；$1-\frac{2j}{n}$ 未选中 $\times 1$ → 选中 $\frac{2(k-j)}{n-j}\cdot p$；未选中 $1-\frac{2(k-j)}{n-j}\times 1$.

$$f_2=\left(\frac{2j}{n}\cdot p+1-\frac{2j}{n}\right)\cdot\left(\frac{2k-2j}{n-j}\cdot p+1-\frac{2k-2j}{n-j}\right)$$

下面计算，得 $f_1-f_2=\dfrac{2j(k-j)(1-p)(2p-1)}{n(n-j)}$，判断 $\underline{>0}$.

∴ $f_1>f_2$，直接淘汰 k 支队比较有利

(4) 方法：对 n 归纳，证平衡赛制（第一轮淘汰 k 支队，第二轮按二叉树淘汰，依次）最有利.

现任取一个赛制：$m_1=j<k$，　$m_1=j=k$　$m_1=j>k$.

$n_1'=2^s+k-j<n$.　假设对 $n_1'=2^s+k-j$，最有利是平衡赛制，则对于 $n=2^s+k$.

若 $m_1=j$，则：$m_2=k-j$. 下面 $2^{s-1}, 2^{s-2}\cdots 1$. 由(3)，不如第一轮 k，下面 $2^{s-1}\cdots 1$.

若 $m_1=j>k$，例如：$30=16+\underline{14}$，则第一轮淘汰 $14=2^{s-1}-(j-k)$ 支队伍.

j.　$2^{s-1}-(j-k)$　不如第一轮 $2^{s-1}+k$，下面 $2^{s-2}\cdots$，不如 $\underbrace{\text{第一轮 } k\text{，下面 } 2^{s-1}, 2^{s-2}\cdots}_{\text{平衡赛制}}$

∴ 无论 m_1 取什么，都为平衡赛制，得证.

五、一种彩票每注面额 1 元，投注者可从 P 种可能方案中选择 1 种。彩票设置大、中、小三类奖项，若某注彩票选择的方案属于某类奖项获奖方案之一，该注彩票获得相应的奖项。只有 1 种方案可获大奖，总奖金额为 J，由所有获奖的彩票平分。有 s 种方案可获中奖，总奖金额为 rN，由所有获奖的彩票平分，其中 N 为当期彩票的总投注额，$0<r<1$。有 t 种方案可获小奖，小奖每注奖金为固定值 a 元。

（1）求当期共有 w 注彩票获得大奖的概率；

（2）求每注彩票的期望收益；

（3）该种彩票会将上期未中的大奖与中奖奖金注入奖池，作为当期大奖的奖金。试证明，若当期大奖总奖金额 $J<(1-r)P-at$，则每注彩票的期望收益仍小于面值。

(1) $\underbrace{C_N^w}_{N注中有w注} \cdot \underbrace{\frac{1}{P}}_{正确} + \underbrace{C_N^{N-w}}_{剩余N-w注} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{P}\right)}_{错了}$

(2) 分类：小 / 中 / 大.

小奖：中的概率：$\frac{t}{P}$　　$E(X_1)=\frac{t}{P}\cdot a$

中奖：假设 w注中中奖 → 事件 X_2，总：rN. 每注 $\frac{rN}{w}$.

$P(X_{2w_1}) = \underbrace{\frac{s}{P}}_{你中了} \underbrace{C_{N-1}^{w-1}\left(\frac{s}{P}\right)^{w-1}}_{w-1和你一起中了} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{s}{P}\right)^{N-w}}_{N-w个倒霉蛋}$

$E(X_{2w_1}) = \frac{rN}{w}\cdot\frac{s}{P}\cdot C_{N-1}^{w-1}\left(\frac{s}{P}\right)^{w-1}\left(1-\frac{s}{P}\right)^{N-w}$

$\therefore E(X_2) = \sum_{w\geq 1} \frac{rN}{w}\cdot\frac{s}{P}\cdot C_{N-1}^{w-1}\left(\frac{s}{P}\right)^{w-1}\left(1-\frac{s}{P}\right)^{N-w}$

$= r\left[1-\left(1-\frac{s}{P}\right)^N\right]$

大奖：类似，s取1，rN取J

$E(X_{3w_1}) = \frac{J}{w}\cdot\frac{1}{P}\cdot C_{N-1}^{w-1}\left(\frac{1}{P}\right)^{w-1}\left(1-\frac{1}{P}\right)^{N-w}$

$\Rightarrow E(X_3) = \sum_{w\geq 1}\frac{J}{w}\cdot\frac{1}{P}\cdot C_{N-1}^{w-1}\left(\frac{1}{P}\right)^{w-1}\left(1-\frac{1}{P}\right)^{N-w}$

$= \frac{J}{N}\cdot\left[1-\left(1-\frac{1}{P}\right)^N\right]$

$\therefore E(X) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) = \frac{t}{P}\cdot a + r\left[1-\left(1-\frac{s}{P}\right)^N\right] + \frac{J}{N}\cdot\left[1-\left(1-\frac{1}{P}\right)^N\right]$

(3) $J<(1-r)P-at$.

$EX = \frac{t}{P}\cdot a + r\underbrace{\left[1-\left(1-\frac{s}{P}\right)^N\right]}_{<1} + \frac{J}{N}\cdot\underbrace{\left[1-\left(1-\frac{1}{P}\right)^N\right]}_{<\frac{N}{P}}$

$EX < \frac{t}{P}\cdot a + r + \frac{J}{P}$　把J代入，$EX < \cancel{\frac{t}{P}\cdot a} + \cancel{r} + 1 - \cancel{r} - \cancel{a\frac{t}{P}} = 1$

∴一定是亏的

六、在传染病防控中，通过对大范围人群进行检测，可有效控制传染源。假设某区域内一种传染病的感染率为 p，区域内每人是否感染相互独立。对每人提取相关样本进行检测，检测结果有阳性和阴性两种。来自某个人的样本称为个体样本，检测结果为阳性当且仅当该人已被感染。若干份个体样本混合后的样本称为混合样本。对由任意份个体样本混合成的混合样本，检测结果为阳性当且仅当其中至少有一份个体样本检测结果为阳性。

现需找出 n 人中所有的感染者，采用以下减半群试法（halving scheme for pooled testing）。将 n 份个体样本组成混合样本 Π 进行检测。若 Π 的检测结果为阴性，则 n 人中无感染者。若 Π 的检测结果为阳性，则将 n 人随机分成人数分别为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 和 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 的两组 A 和 B。对每一组，取该组人的个体样本组成混合样本。记两组的混合样本分别为 Π_A 和 Π_B。先对 Π_A 进行检测，若 Π_A 的检测结果为阴性，则感染者必在组 B 中。若 Π_A 的检测结果为阳性，再对 Π_B 进行检测。若 Π_B 的检测结果为阴性，则感染者仅在组 A 中。若 Π_B 的检测结果为阳性，则 A 和 B 两组中均有感染者。对有感染者的组重复上述操作，直至找出所有感染者为止。

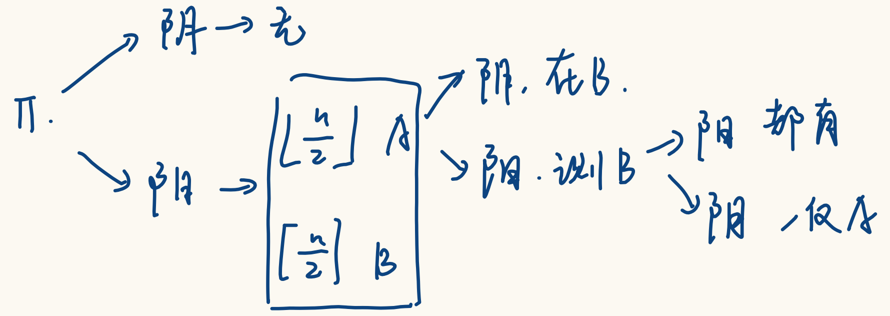
记 X_n 为对 n 人按上述方式进行检测所需的检测次数，Y_n 为对含有感染者的 n 人按上述方式进行检测所需的检测次数。

p 阳. $q=1-p$ 阴.

（1）试给出 $E(X_n)$ 和 $E(Y_n)$ 之间的关系；

（2）试写出 $E(Y_n)$ 所满足的递推关系。

过程:



(1) $E(X_n) = \underbrace{1}_{\text{初始}} + \underbrace{q^n \cdot 0}_{\text{全阴}} + \underbrace{(1-q^n) \cdot E(Y_n)}_{\text{含有感染者}}$

$\Rightarrow E(X_n) = 1 + [1-(1-p)^n] \cdot E(Y_n)$ [∵要求 $E(X_n)$，可先求 $E(Y_n)$]

(2) 简化一下，我们记 n 为偶数，分组：A: $\frac{n}{2}$ B: $\frac{n}{2}$

$E(Y_n)$：先对A检测 1次 → A阴 $\frac{q^{\frac{n}{2}}-q^n}{1-q^n}$，已知B中有阳性，$E(Y_{\frac{n}{2}})$

→ A阳 $\frac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n}$，$\xrightarrow[\text{1次}]{\text{B做}}$ B阴，A继续 $\frac{q^{\frac{n}{2}}-q^n}{1-q^n} E(Y_{\frac{n}{2}})$

B阳. A.B 都阳，$\frac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n} \cdot 2E(Y_{\frac{n}{2}})$

$$E(Y_n) = 1 + \frac{q^{\frac{n}{2}}-q^n}{1-q^n} E(Y_{\frac{n}{2}}) + \frac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n}\left[1 + \frac{q^{\frac{n}{2}}-q^n}{1-q^n} E(Y_{\frac{n}{2}}) + \frac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n} \cdot 2 \cdot E(Y_{\frac{n}{2}})\right]$$