一、学校希望从n名学生中录取一名，学生以随机顺序逐个前来面试。通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序，某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定，在作出不录取决定后方能面试下一名学生。考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大。

（1）分别记f_k和g_k为综合素质在前k名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求f_k和g_k；

（2）记v_k为不录取前k名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出v_k满足的递推关系；

（3）求v_k，并给出相应的最优策略。

二、n名求职者应聘某一职位。他们能力各不相同，以某一顺序接受面试，该顺序以完全随机的方式确定。招聘方能准确比较已面试求职者的能力大小。在面试完一位求职者后，招聘方需立即决定是否有录用意向。若有意向，求职者以p的概率接受而被录用，每位求职者是否接受意向相互独立。若招聘方没有意向，或招聘方虽有意向但求职者拒绝接受，招聘方均面试下一位求职者。此后招聘方不得录用该求职者，该求职者也不得再接受此前拒绝的意向。招聘方希望录用到能力最强的求职者，因此只会对能力大于已面试过的其他求职者的求职者提出意向。

（1）试求出招聘方对第r名接受面试的求职者提出意向并被接受，而该求职者恰为能力最强的求职者的概率；

（2）记v_r为从招聘方面试第r名求职者起，采用最优策略以录用到能力最强的求职者的概率的最大值。试写出v_r满足的递推关系；

（3）求v_r的表达式与$\lim_{n\to\infty} v_1$，并给出招聘方最优策略的具体描述。

三、n支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为r轮，第l轮共有m_l场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，r和$m_1,m_2,\cdots,m_r$的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队i的水平值为v_i，$i=1,\cdots,n$，设队i与队j比赛时，队i获胜的概率为$\dfrac{v_i}{v_i+v_j}$，队j获胜的概率为$\dfrac{v_j}{v_i+v_j}$。记$n=2^s+k$，其中s,k为正整数，$0\le k<2^s$。设$v_1>v=v_2=\cdots=v_n>0$。

（1）试给出为保证赛制可行$m_1,m_2,\cdots,m_r$应满足的条件；

（2）问$n=4$时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最小；

（3）若$m_1=k$，求队1在第一轮结束后未被淘汰的概率f_1，若$m_1=j<k,m_2=k-j$，求队1在第二轮结束后未被淘汰的概率f_2，并证明$f_1-f_2>0$；

（4）证明：$r=s+1$且$m_1=k,m_l=2^{s-l+1},l=2,3,\cdots,s+1$的赛制对队$1$最为有利。

四、一赛季有$r+1$名选手$A_1,A_2,\cdots,A_{r+1}$参加。赛季中的每场比赛在两名选手间进行。一场比赛的参赛者只有胜、负两种结果，两名选手获胜的概率相等。所有选手按编号顺序排为一队列。首先由队列中的前两位选手进行比赛，胜者与队列中下一位选手进行比赛，负者重新排在队列的末尾。上述过程持续进行下去，直至有一人连续战胜所有其他选手，整个赛季结束。

（1）假设选手共 3 人，即$r=2$。在第一场比赛A_2战胜A_1的情况下，试给出整个赛季包含n场比赛时，获胜的选手及其获胜的概率；

（2）求$r=2$时，每位选手获胜的概率；

（3）一由n个数字 0 或 1 组成的序列，最后$r-1$位均为数字 1，但在前$n-1$位中不包含连续$r-1$位数字 1 的子序列，其中r为一给定整数。记所有这样的序列的总数为a_n。试写出a_n满足的递推关系；

（4）记b_n为整个赛季包含n场比赛的概率。试写出b_n满足的递推关系。

五、一种彩票每注面额 1 元，投注者可从P种可能方案中选择 1 种。彩票设置大、中、小三类奖项，若某注彩票选择的方案属于某类奖项获奖方案之一，该注彩票获得相应的奖项。只有 1 种方案可获大奖，总奖金额为J，由所有获奖的彩票平分。有s种方案可获中奖，总奖金额为rN，由所有获奖的彩票平分，其中N为当期彩票的总投注额，$0<r<1$。有t种方案可获小奖，小奖每注奖金为固定值a元。

（1）求当期共有w注彩票获得大奖的概率；

（2）求每注彩票的期望收益；

（3）该种彩票会将上期未中的大奖与中奖奖金注入奖池，作为当期大奖的奖金。试证明，若当期大奖总奖金额$J<(1-r)P-at$，则每注彩票的期望收益仍小于面值。

六、在传染病防控中，通过对大范围人群进行检测，可有效控制传染源。假设某区域内一种传染病的感染率为p，区域内每人是否感染相互独立。对每人提取相关样本进行检测，检测结果有阳性和阴性两种。来自某个人的样本称为个体样本，检测结果为阳性当且仅当该人已被感染。若干份个体样本混合后的样本称为混合样本。对由任意份个体样本混合成的混合样本，检测结果为阳性当且仅当其中至少有一份个体样本检测结果为阳性。

现需找出n人中所有的感染者，采用以下减半群试法（halving scheme for pooled testing）。将n份个体样本组成混合样本Π进行检测。若Π的检测结果为阴性，则n人中无感染者。若Π的检测结果为阳性，则将n人随机分成人数分别为$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$和$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$的两组 A 和 B。对每一组，取该组人的个体样本组成混合样本。记两组的混合样本分别为Π_A和Π_B。先对Π_A进行检测，若Π_A的检测结果为阴性，则感染者必在组 B 中。若Π_A的检测结果为阳性，再对Π_B进行检测。若Π_B的检测结果为阴性，则感染者仅在组 A 中。若Π_B的检测结果为阳性，则 A 和 B 两组中均有感染者。对有感染者的组重复上述操作，直至找出所有感染者为止。

记X_n为对n人按上述方式进行检测所需的检测次数，Y_n为对含有感染者的n人按上述方式进行检测所需的检测次数。

（1）试给出$E(X_n)$和$E(Y_n)$之间的关系；

（2）试写出$E(Y_n)$所满足的递推关系。