

## 23-24 秋冬数学建模期末

考试时间：120 分钟

任课教师：谈之奕

作者：23 级 ACEE

1. (30 分) 派遣  $N$  支队伍找某稀有野生动物,  $N$  是随机变量,  $E(N) = c$ , 每支队伍  $p$  概率找到,  $p \in (0, 1]$ 。

- (1) 求所有队伍中至少一支队伍找到动物的概率的期望的表达式
- (2) 数列  $\{x_k\}$ , 若  $1 \geq x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_k \geq \dots \geq 0$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = c$ , 求  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(1-p)^k$  的最大值
- (3) 求第一问中期望的最大值

2. (25 分) 甲和乙手上有相同的两套卡片, 每套卡片有  $n$  张, 每张卡片上都有特征, 如男性, 带眼镜的女性等。卡片集合的每个子集都有一个独一无二的特征, 甲选择了一个卡片, 乙可以问甲所选择的卡片是否有某个特征, 甲回答是或否。

- (1) 乙采取什么策略问的次数最少
- (2) 若甲可以回答一次不知道, 乙什么策略最少

3. (20 分) 自行车前后轮对地两个接触点距离为  $a$ ,  $t$  时刻: 前轮与地面接触点坐标为  $(x_f(t), y_f(t))$ ; 后轮为  $(x_b(t), y_b(t))$ 。

- (1) 后轮轨迹切线经过前轮接触点, 求  $x_b(t)$  和  $y_b(t)$  满足的微分方程
- (2) 若后轮速度是前轮速度在后轮速度方向的投影, 求后轮速率  $v(t)$
- (3) (附加题 10 分) 若前轮从  $(c, 0)$  以  $\omega$  角速度转动, 求后轮轨迹方程

4. (25 分) 无向图  $G(V, E, w)$ , 每个顶点表示一个座位  $i \in V$ 。这些人来自  $m$  个单位, 单位  $p$  有  $b_p$  个人,  $e \in E$  表示座位相邻, 边权  $w_e$  表示这两个座位间的交流顺畅度, 如果是同一个单位有效交流, 定义

$$x_i^p = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 个位置上坐 } p \text{ 公司的代表} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$y_e^p = \begin{cases} 1 & e \text{ 两端坐着 } p \text{ 公司的代表} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 最大化交流顺畅度, 求数学规划
- (2) 无向图中的一条边换算成两条有向边, 构成有向图, 边  $(i, j)$  相关于每个单位的流量为  $f_{(i,j)}^p$ , 若每个单位的子图是连通子图, 求  $f_{(i,j)}^p$  满足的关系
- (3) (附加题 10 分) 数学规划要加什么约束使得每个单位的子图为连通图