数模讨论题（一）

一、一单行道上有n个车位，按车行方向分别记为$1,2,\cdots,n$。每个车位有空闲和占用两种状态，车位i空闲的概率为$\alpha_i>0$，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位i上停车的效用为$U_i>0$，未在n个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。→ 初始条件.

（1）记$V_i, i=1,\cdots,n+1$为驶过车位$i-1$后（车位 0 为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出V_i所满足的递推关系；→ 动态规划

（2）令$x_i=V_i-V_{i+1}$，$i=1,\cdots,n$，试写出求解该问题的以x_i为决策变量的数学规划。

(1) 初始：$V_{n+1}=0$，（都没停）

$V_i=f(V_{i+1})$

V_i. 驶过 i 后，计划停车. → 没车，能停 α_i　$\alpha_i U_i$

→ 有车，停不下来 → 继续往下开. 和到 $(i+1)$ 后再打算停效果是一样的　$(1-\alpha_i)V_{i+1}$ . . （被动往下开）

or. 不计划停车，$\underline{V_{i+1}}$ 再说 α_i．（主动往下开）　V_{i+1}

$$V_i=\max\{\alpha_i U_i+(1-\alpha_i)V_{i+1},\ V_{i+1}\}$$

(2) $x_i=V_i-V_{i+1}$

$$V_i=\max\{\alpha_i U_i+(1-\alpha_i)V_{i+1},\ V_{i+1}\} \Rightarrow \begin{cases} V_i\ge V_{i+1} & \Rightarrow x_i\ge 0 \quad ① \\ V_i\ge \alpha_i U_i+(1-\alpha_i)V_{i+1} & \Rightarrow V_i-V_{i+1}\ge \alpha_i U_i-\alpha_i V_{i+1} \end{cases}$$

$\because x_i=V_i-V_{i+1}$　$\therefore \sum_{k=i}^{n}(V_i-\cancel{V_{i+1}}+\cancel{V_{i+1}}-\cancel{V_{i+2}}\cdots+V_n-V_{n+1})=V_i=\sum_{k=i}^{n}x_k$

$\therefore x_i\ge \alpha_i U_i-\alpha_i\sum_{j=i+1}^{n}x_j \Rightarrow x_i+\alpha_i\sum_{j=i+1}^{n}x_j\ge \alpha_i U_i$ ②.

目标：使得 V_1 最大.　$\sum_{i=1}^{n}x_i$

到起点开始计划停车.

min 与 max 的选择：若 max：由约束可知，$\alpha_i U_i$ 是 const. 左边可→

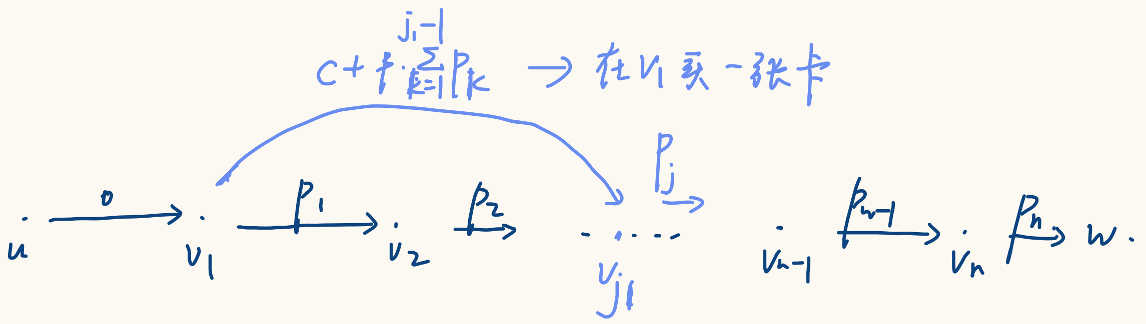
min ✓，原因：

转化约束：$\max(x_1,x_2)=x$，当时 $\Rightarrow \begin{cases} x\ge x_1 \\ x\ge x_2 \end{cases}$.　事实上，$x$ 只能在 x_1, x_2 中取．满足不等式后，x 应该尽可能的小

我们的"最大效用"是通过约束"2"实现的，目标函数是保证真实性．

二、中铁网发售某地区的铁路车票，近期推出一款名为“中铁卡”的优惠产品。每张中铁卡售价为C元，有效期为T天，可随时购买，立即生效。购买了中铁卡的乘客在其有效期内购买面值为p元的车票只须实付βp元，其中$0<\beta<1$。已知准备购买的n张车票价格p_j和购票时间$t_j, j=1,\cdots,n$，其中$t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$，欲使购买中铁卡和车票支付的总金额最小。

提示 为此，构造有向图$G=(V,E)$，其中$V=\{u,w,v_1,\cdots,v_n\}$，v_j对应于需购买的第j张车票。试确定G的边和每条边的权，使该问题等价于寻找图G中自u到w的一条最短有向路。

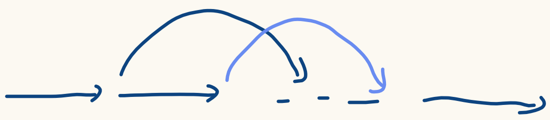


定义 $j_i=\min\{t_j-t_i\ge T\}$ → 失效

$j_i-1=\max\{t_{j-1}-t_i\le T\}$ → 生效

v_2开始，也有边 $c+\beta\sum_{k=1}^{j_2-1}p_k$.

依此，得到图.



下寻找最短有向路得到最优解.

三、一篇英语文章有n个单词，第$i, i=1,\cdots,n$个单词的字符数为l_i。纸张一行可容纳M个字符或空格，同一个单词不能跨两行排版，同一行两个相邻单词之间恰有一个空格，每行第一个单词从该行开始处排版。为使版面美观，要求行尾空格和最小，这里行尾空格和是指除最后一行外，各行最后一个单词结束至该行末尾处的空格数量之和。记C_k为将第k个至第n个单词按上述要求排版产生的行尾空格和的最小值。试写出求解该问题的动态规划。

初始：$C_n=0$，要求：$\min C_1$.

C_k. 从第k个单词开始. 如何决策?

想法1：贪心（排不下换一行）⇒ 不是最优

设 $d_k=\max\{j \mid \sum_{i=k}^{j}(l_i+1)-1\le M\}$ 最后一个单词无空格.

从第k个单词开始. 每一行最多排到第d_k个.（但不一定要塞到d_k）

这行：$M-\left[\sum_{j=k}^{i}(t_j+1)-1\right]$，$k\le i\le d_k$.

下一行开始：C_{i+1}. $i+1 \to n$ 之后的空格.

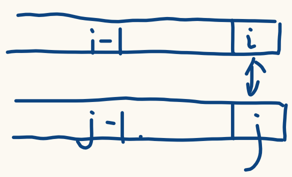
$$\therefore C_k = \min_{k \le i \le d_k} \left\{ M - \left[\sum_{j=k}^{i}(l_j+1)-1\right] + C_{i+1} \right\}.$$

最后一行：能排下，空格都是0，初始可写成 $C_{k_0}=0$, $k_0 = \min\{k \mid \sum_{i=k}^{n}(l_i+1)-1 \le M\}$

四、现有两个字母表 Σ 上的字符串 X,Y，通过在字符串中插入空格将它们变为长度相等的字符串 X',Y'，并比较 X' 和 Y' 中位于相同位置的字符。若相同位置两个字符不同，则称为一类误差；若两个字符一个为空格，另一个为非空格，则称为二类误差。若两个字符串所有位置出现的一类误差与二类误差总数分别为 n_1 和 n_2，两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差定义为 $\alpha n_1 + \beta n_2$。例如对 AGGGCT 和 AGGCA 两个字符串，若在第二个字符串中插入空格使之成为 AGG—CA，Needleman-Wunsch 误差为 $\alpha+\beta$。序列比对问题（sequence alignment）希望给出一种空格插入方案，使两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差最小。试给出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。

定义：$P(i,j)$：X 的前 i 个字符和 Y 的前 j 个字符组成的子串的最小误差.

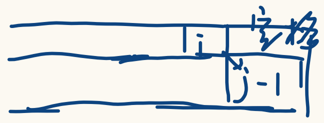
① 若 i, j 对应：



① i, j 是否一致？(已知). 定义 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \ne y_j \\ 0, & x_i = y_j \end{cases}$

则 $P(i,j) = P(i-1,j-1) + \alpha\delta_{ij}$

② 若 i, j 不对应，(长度不一致)



$P(i,j) = P(i,j-1)+\beta \;/\; P(i-1,j)+\beta$

故 $P(i,j) = \min\{P(i-1,j-1)+\alpha\cdot\delta_{ij},\ P(i,j-1)+\beta,\ P(i-1,j)+\beta\}$

初始条件 $P(i,0) = i\beta$, $P(0,j) = j\beta$.

复杂度：$O(mn)$

五、一博物馆的展览区为由若干面直形墙围成的封闭区域。为保护藏品安全，在区域内的若干个固定位置放置监控仪。监控仪不可移动，可观测到任意方向、任意距离的藏品情况，但无法观测到墙壁后区域的情况。现希望用最少的监控仪监控博物馆的全部区域。

（1）试给出上述问题的一种数学描述；

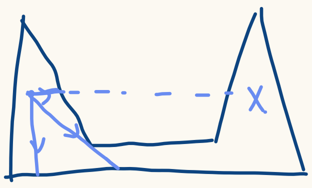
（2）记 $G(M)$ 为博物馆 M 所需监控仪数量的最小值，

$$g(n)=\max\{G(M) \mid M \text{ 由 } n \text{ 面墙围成}\}。$$

试求 $g(3), g(4), g(5)$ 的值，并证明 $g(6)>g(5)$；

（3）求 $g(n)$。（提示：任意平面多边形可用不相交的对角线划分为若干个三角形，这一过程称为三角剖分（triangulation），三角剖分后得到的平面图的色数必为 3。）

无法监控的情形:

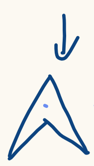


(1) 数学描述：给定 S，求点集 $P \subseteq S$, s.t. 对于 $\forall s \subseteq S$, $\exists p \subseteq P$, s.t. $\overline{ps} \subseteq S$. 且希望 card{P} 最小,

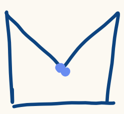
(2) 考虑凹的图案.

$g(3)=1$. $g(4)=1$. $g(5)=1$

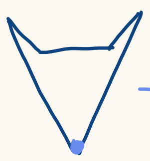
仅凸: △.



⇒ 1.



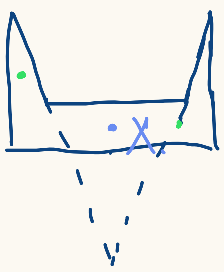
→ 1个.



→ 1个

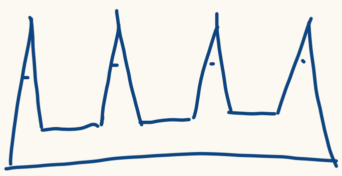
证: $g(6)>g(5)$, 即 $g(6)>1$.

找出



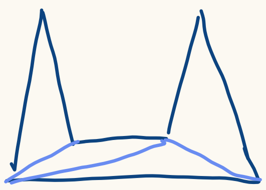
⇒ $g(6)=2$

(3) 猜想 $g(n)=[\frac{n}{3}]$



12边形 → 4.

利用提示



色数为3：可用三种不同颜色着色顶点

由着色原理，△ 3个顶点颜色不同，存在一种颜色，使着该颜色顶点数小于 $[\frac{n}{3}+1]$.

(反证，假设不成立，则顶点总数 $> \frac{n}{3} \cdot 3 = n$. 矛盾)

∴把监控仪放在着色小于$[\frac{n}{3}]$的顶点上，由于每个三角形都有三个颜色，必然有其中一个顶点属于该△.

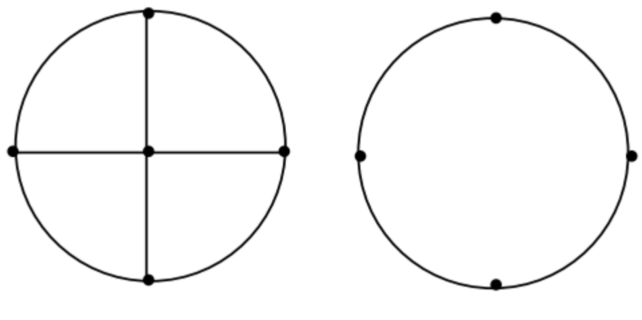
而 △ 该顶点必能管辖△所有区域

∴ $g(n)$ = 顶点个数 $\le [\frac{n}{3}]$

又∵我们刚举出 $g(n) = [\frac{n}{3}]$ 的情形，即 $g(n) \ge [\frac{n}{3}]$

∴即证明了 $g(n)$ 严格等于 $[\frac{n}{3}]$

六、考虑图上的**警察与小偷游戏**（cop and robber game）。给定连通无向图 $G=(V,E)$。游戏开始前，每位警察先占据图中一个顶点，小偷再选择图中一个顶点。随后警察和小偷轮流行动，在每一轮中，所有警察先行动，小偷后行动。每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点，也可原地不动。警察和小偷都了解图的形状并能在行动前看到其他人的位置。若在某次行动后，某个警察和小偷位于同一顶点，则称警察抓获小偷。对某个图 G，不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图 G 的警察数（cop-number），记为 $c(G)$。



W_4　　　　C_4

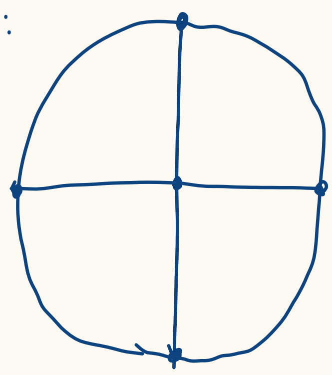
（1）分别求轮 W_4 和圈 C_4 的警察数；

（2）证明：若 $c(G)=1$，必存在顶点 u,w，使得 $N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$，这里 $N(v)$ 是图中与 v 有边相连的顶点集；

（3）试通过建立该问题与图论中某问题的联系给出 $c(G)$ 的一个上界；

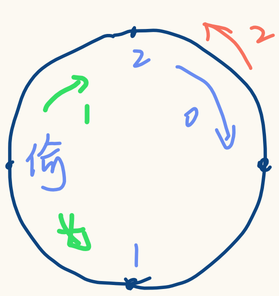
（4）设在 G 中没有长度为 3 或 4 的圈，G 的最小度 $\delta(G)=d$。证明：（ⅰ）若警察数不超过 $d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷；（ⅱ）若警察数不超过 $d-1$，小偷至第 $t-1$ 轮警察行动后仍未被抓获，则他总可以采取某种行动，使得在第 t 轮仍未被抓获；（ⅲ）$c(G)\ge\delta(G)$。

(1) 轮W_4：



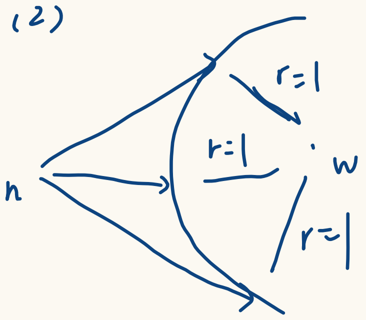
警察位于中心. ∴ $c(W_4=1)$

圈C：



若只有一个警察：不断转圈.

(2)

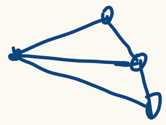


小偷下一步能去的位置 ⊆ 警察下一步能到达的位置范围内

$N(u)\cup\{u\}$ $\qquad$ $N(w)\subseteq\{w\}$

(3) 一般地, $c(G) \le V$.

① 联系顶点覆盖问题



② 支配集问题

(这两个给出的上界都过于宽泛…)

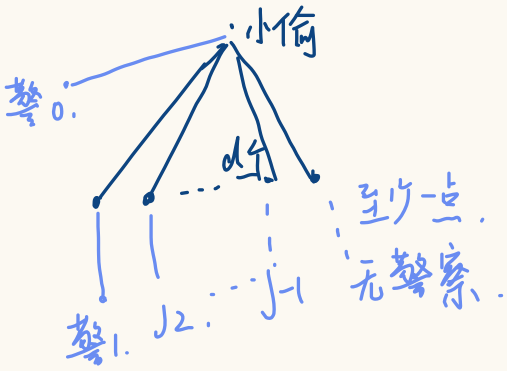
(4) 证下界: $c(G) \ge \delta(G)$. (条件: G内没有长度 3 or 4 的圈).

(i) 若警察数 ≤ $d-1$ 个, 先讨论 $(d-1)$ 个警察

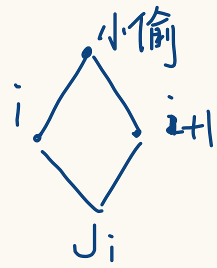
小偷下一步在的地方 ≥ $d+1$ (最小度为 d) $\qquad$ $d+1$ − 1

可以不动 不可以自投罗网

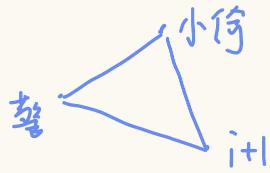
若 $d-1$ 个警察, 每个都管小偷所在边的另一边



若一个警管两个小偷会去的点



∴ 长为4的圈, 违反条件, 不存在.



长为3的圈, 矛盾.