数学部分 常微分方程复习

一阶线性方程求解

齐：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$

非齐：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$，其中 $Q(x) \neq 0$

$$\Rightarrow y = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

- 齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = 0$$

1）求特征方程

$$z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n = 0.$$

获得n个根 $z_1, \ldots, z_n$

若没有重根，n个独立解 $e^{z_i x}$

若z是 m_z 重根，m_z 个独立解

$y = x^k e^{zx}$ $k \in \{0, 1, \ldots, m_z - 1\}$

依旧可获得总共 n个独立解

2）写出通解

n个独立解的线性组合就是方程的通解

- 非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1）求出对应齐次方程的通解

2）求出非齐次方程的一个特解

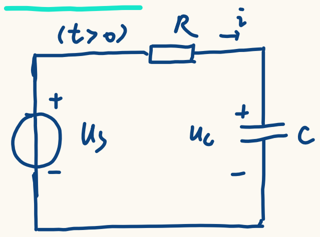
（电路分析中一般选取 t = ∞ 稳态时刻的解为特解）

3）两者相加，获得非齐次方程的通解

动态电路

一. 基础一阶电路:

RC电路:



$\because$ 电路KVL: $Ri + u_c = u_s$

$\because q = cu_c \quad \therefore i = \frac{dq}{dt} = c \cdot \frac{du_c}{dt}$

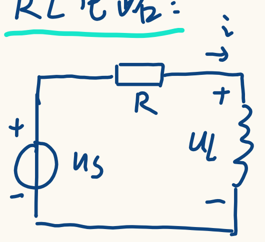
$\therefore RC \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s$ （以 u_c 为变量）

又$\because du_c = \frac{1}{c} \cdot i dt \qquad \therefore u_c = \frac{1}{c}\int i dt$

$\therefore Ri + \frac{1}{c}\int i dt = u_s$ 对 t 求导

$$R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \cdot i = \frac{du_s(t)}{dt}$$

RL电路:



①若以电感电流为变量.

利用KVL和电感VCR,有

$$\begin{cases} u_s = iR + u_L \\ u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \end{cases}$$

$$u_s(t) = iR + L \cdot \frac{di}{dt}$$

②若以电感电压为变量

$\because u_L = L\frac{di}{dt} \quad \therefore \frac{1}{L}\int u_L dt = i$

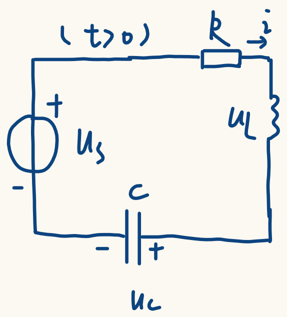
$\therefore u_s = \frac{R}{L}\int u_L dt + u_L$

故对于 t 求导,

$$\frac{du_s(t)}{dt} = \frac{R}{L} \cdot u_L + \frac{du_L}{dt}.$$

二. 基础二阶电路

RLC电路:



电路KVL: $Ri + u_L + u_C = u_S$

电容,感VCR: $i = C\cdot\frac{du_C}{dt}$

$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2}$

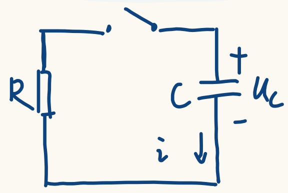
$\therefore RC\cdot\frac{du_C}{dt} + LC\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = u_S(t)$

二阶线性常微分方程 → 二阶电路

三、求解一阶动态电路

初始条件: $t=0_+$ 与 $t=0_-$: 确定 k.

① 一阶动态电路:



列出方程: $\begin{cases} Ri + u_C = 0 \quad (t\geq 0) \\ RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \end{cases}$

令此方程 $u_C = ke^{pt}$. $RC\cdot p\cdot k\cancel{e^{pt}} + k\cancel{e^{pt}} = 0$

$\therefore RCp + 1 = 0 \qquad p = -\frac{1}{RC}$

$\therefore u_C(t) = ke^{pt} = ke^{-\frac{1}{RC}\cdot t}$

[也可以代入公式:

由于 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$, 解为 $y = ke^{-\int P(x)dx}$

这里 $P(t) = \frac{1}{RC}$

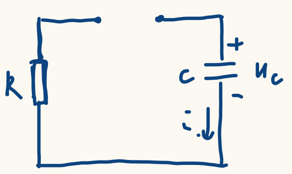
$\therefore u_C(t) = k\cdot e^{-\int\frac{1}{RC}dt} = ke^{-\frac{1}{RC}t}$.]

下面研究初始条件:

对电容: 电压不可突变, 电流可突变

故 $u_C(0^-) = u_C(0^+)$

0^- 时刻: 开关闭合前: 稳定,



该状态下, 电容u_C取决于电容原先的储能.

设为$u_C(0^-) = k = U_0$

$\therefore$ 综上, $u_C = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$

② 初始条件 — 换路定律

电容的初始条件：$u_C(0_+) = u_C(0_-)$

电感的初始条件：$i_L(0_+) = i_L(0_-)$

④换路定律

$$\begin{cases} q_C(0_+) = q_C(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

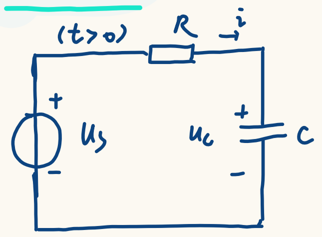
$$\begin{cases} \psi_L(0_+) = \psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

(具体方法和等效电路等等的类似)

③ 无响应电路求解动态电路

3.1 RC电路：



∴ 电路KVL：$Ri + u_C = u_S$

∵ $q = Cu_C$ ∴ $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

∴ $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u_S$ （以 u_C 为变量）

又∵ $du_C = \frac{1}{C} \cdot i\,dt$ ∴ $u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$

∴ $Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = u_S$ 对 t 求导

$R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du_S(t)}{dt}$

令此方程 $u_C = ke^{pt}$. $RC \cdot p \cdot k\cancel{e^{pt}} + k\cancel{e^{pt}} = 0$

∴ $RCp + 1 = 0$ $p = -\frac{1}{RC}$

∴ $u_C(t) = ke^{pt} = ke^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$

[也可以代入公式：

由于 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$，解为 $y = ke^{-\int P(x)dx}$

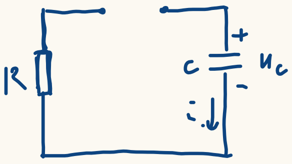
这里 $P(t) = \frac{1}{RC}$

∴ $u_C(t) = k \cdot e^{-\int \frac{1}{RC}dt} = ke^{-\frac{1}{RC}t}$.]

对电容：电压不可突变，电流可突变

故 $u_C(0^-)=u_C(0^+)$

0^-时刻：开关闭合前：稳定，



该状态下，电容u_C取决于电容原先的储能。

设为 $u_C(0^-)=k=U_0$

综上，$u_C=U_0e^{-\frac{1}{RC}t}$

$\therefore i=\frac{v_C}{R}=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}=I_0e^{-\frac{1}{RC}t}\quad t\geq0.$

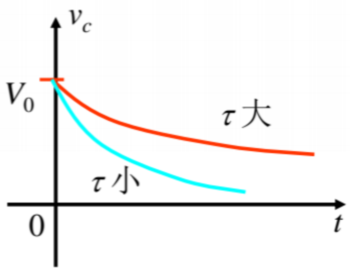
[总结归纳]

令 $\boxed{\tau=RC}$，称τ为一阶电路的时间常数

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长

τ小→过渡过程时间短



物理含义 → **当电压初值一定时：**

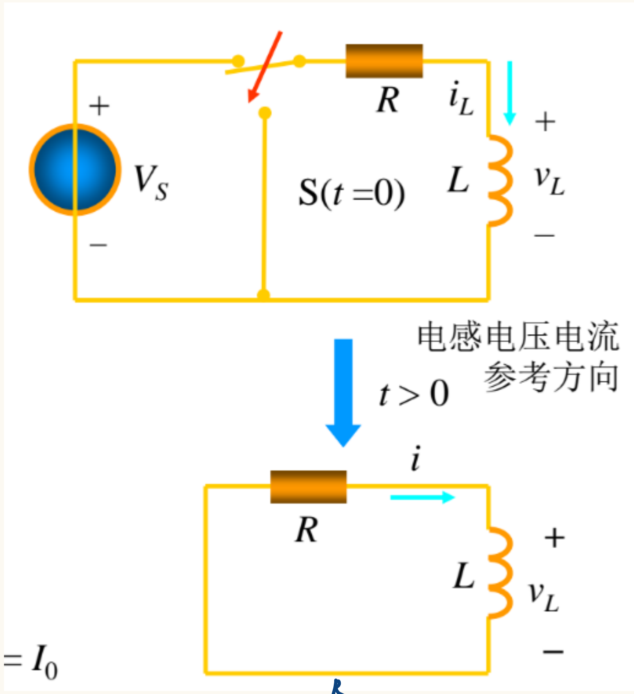
C **大**（R **一定**）	$W=Cv^2/2$	**储能大**	**放电时间长**
R **大**（C **一定**）	$i=v/R$	**放电电流小**	

$\therefore \boxed{v(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}}$ $\quad i(t)=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

- 求解source-free RC 电路的方法：
  - 第一步：求出电容两端的初始电压值 V_0；
  - 第二步：求出 时间常数RC；
    - R 为 C 两端的等效电阻（即戴维南电阻）；
  - 然后可以直接写出 $v(t)$ 的表达式：
  - 电路中其他的量可由 $v(t)$ 导出

$$\boxed{v(t)=V_0e^{-t/\tau}}$$

3.2 RL电路



换路定理: $i_L(0^+)=i_L(0^-)=\frac{V_s}{R}=I_0$

由KVL和电感VCR:

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0 \quad (t\geq 0)$$

解这个一阶常微分方程:

$i_L(t)=ke^{st}$

$\therefore Ls\cdot ke^{st}+R\cdot k\cdot e^{st}=0$

特征方程: $Ls+R=0$ $\quad s=-\frac{R}{L}$

$\therefore i_L(t)=k\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$

将 $t=0$, $i_L(0)=I_0$ 代入 $\therefore k=I_0$

$\therefore i_L(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

$v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-RI_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

[总结归纳]

令 $\tau=\frac{L}{R}$ 为一阶RL电路时间常数

$\therefore i(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

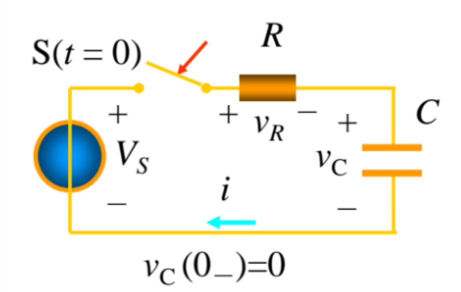
求解source-free *RL* 电路的方法：

- 第一步：求出流经电感的初始电流值 I_0；
- 第二步：求出时间常数 L/R；
  - ***R* 为 *L* 两端的等效电阻**（即戴维南电阻）；
- 然后可以直接写出 $i(t)$ 的表达式：
- 电路中其他的量可由 $i(t)$ 导出

$$\boxed{i(t)=I_0e^{-t/\tau}}$$

④ 一阶电路的零状态响应

一. RC电路的直流响应



方程: $RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=V_S$

解答形式为:

$v_C=v_C'+v_C''$

齐次方程通解

非齐次方程特解

先求特解: $\frac{dv_c}{dt}$ 取0, $\boxed{v_c'=V_s}$

再求通解：即为 $RC\frac{dV_c}{dt}+V_c=0$ 的通解，$V_c''=ke^{-\frac{t}{RC}}$

∴全解 $V_c(t)=V_s+ke^{-\frac{t}{RC}}$

下面利用换路定理求初始条件：

由于电路中注明了 $V_c(0^-)=0$

故 $V_c(0^+)=V_c(0^-)=0$

∴代入：$0=V_s+k$.　$k=-V_s$

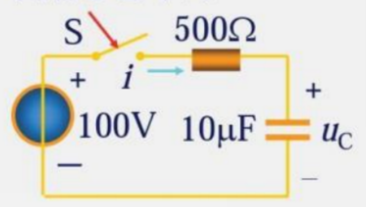
∴ $V_c(t)=V_s(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ $(t\geq0)$　∵ $\tau=RC$　∴ $V_c(t)=V_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

$\frac{dV_c}{dt}=\frac{V_s}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ $(t\geq0)$

故 $i_c=C\frac{dV_c}{dt}=\frac{V_s}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$　⇒ $i_c=\frac{V_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

例题：

例　$t=0$时，开关S闭合，已知 $u_C(0_-)=0$，求(1)电容电压和电流，(2) $u_C=80V$时的充电时间t。



(1)解：发现是零响应

∴ $V_c=V_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

而 $V_s=100V$　$\tau=RC=10\times10^{-6}\times500=5\times10^{-3}s$

∴代入，$V_c=100(1-e^{-200t})V$　$(t\geq0)$

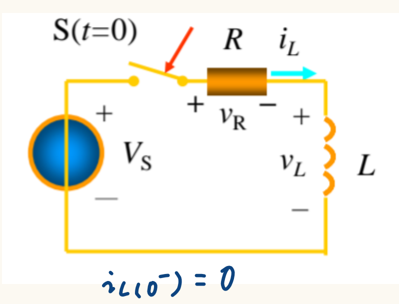
$i=C\frac{du_c}{dt}=\frac{V_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{100}{500}e^{-200t}=\frac{1}{5}e^{-200t}A$

(2)解：$u_c=80V$的充电时间？

解方程：$100(1-e^{-200t})=80$　$e^{-200t}=\frac{1}{5}$

$-200t=-\ln5$　$t=\frac{1}{200}\ln5=8.047ms$

二. RL电路的直流响应.



$i_L(0^-)=0$

由KVL：$V_R+V_L=V_s$

即：$Ri_L+L\cdot\frac{di_L}{dt}=V_s$

而 $i_L=i_L'+i_L''$

先求特解：$Ri_L' = V_s$ 　 $i_L' = \frac{V_s}{R}$

再求通解：即 $Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = 0$ 的解，$i_L'' = ke^{-\frac{t}{\tau}}$，其中 $\tau = \frac{L}{R}$，

$\therefore i_L(t) = i_L' + i_L'' = \frac{V_s}{R} + k\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

又 $\because i_L(0) = 0$ 　 $\therefore k = -\frac{V_s}{R}$ 　 $\therefore \boxed{i_L(t)} = \frac{V_s}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) = \boxed{\frac{V_s}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{V_s}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})}$

$\frac{di}{dt} = \frac{V_s}{R}\cdot(-\frac{R}{L})\cdot(-e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{V_s}{L}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

$\therefore \boxed{v_L = L\frac{di}{dt} = V_s e^{-\frac{R}{L}\cdot t}}$

[例题之后再补充] ~ 例题1. 例题2

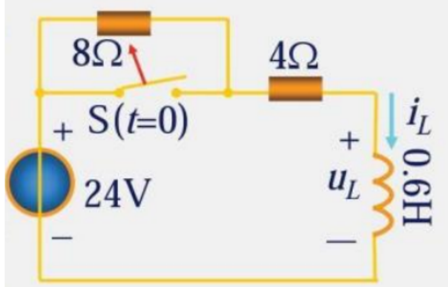
三、全响应的两种分解方式

$v_c = V_s + ke^{-\frac{t}{\tau}} = \underbrace{V_s}_{强制分量} + \underbrace{(V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{自由分量}$ 　 $t \geq 0$

化简：$= \underbrace{V_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}_{零状态响应} + \underbrace{V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{零输入响应}$ 　 $(t \geq 0)$

∴全响应 = 零状态响应 + 零输入响应.

例1 t=0 时，开关k打开，求t>0后的i_L、u_L。



解：全响应问题：Δ $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.6}{12} = 0.05$

①换路定理 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 6A$

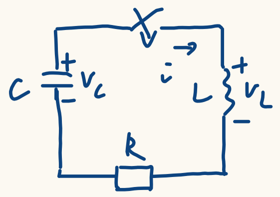
②零输入响应 $i_L'(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-20t}A$

③零状态响应 $i_L''(t) = \frac{V_s}{\underbrace{R_{eq}}_{诺}}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2\cdot(1-e^{-20t})A$

$\therefore i_L(t) = i_L'(t) + i_L''(t) = 2 + 4e^{-20t}A$

4.2 二阶电路的响应

4.2.1 二阶电路的零输入响应



$v_c(0^+)=V_0$. $i(0^+)=0$

$\therefore Ri+v_L-v_c=0$

$\because i=-C\frac{dv_c}{dt}$ $v_L=L\frac{di}{dt}$

$\therefore$ 以电容电压为变量:

$v_c-Ri-v_L=0$ $v_c+RC\cdot\frac{dv_c}{dt}+LC\frac{d^2v_c}{dt^2}=0$

即 $LC\frac{dv_c^2}{dt^2}+RC\frac{dv_c}{dt}+v_c=0$

以电感电流为变量:

$v_c-Ri-v_L=0$ $\because dv_c=-\frac{1}{C}\cdot i dt$

对 i 求导 $\therefore -\frac{1}{C}i-R\cdot\frac{di}{dt}-L\cdot\frac{d^2i}{dt^2}=0$

即 $LC\frac{di^2}{dt^2}+RC\frac{di}{dt}+i=0$

$\therefore$ 初始条件: ,

· 若以电容电压为初始条件:

$v_c(0^+)=V_0$ $i(0^+)=0$. $\Rightarrow\therefore \frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+}=0$

· 若以电感电流为初始条件:

$i(0^+)=0$ $v_c(0^+)=0$

$\therefore v_c(0^+)=v_L(0^+)=L\cdot\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+}=V_0$

$\therefore \frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+}=\frac{V_0}{L}$

特征方程: $LCs^2+RCs+1=0$.

特征根:

$s=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$

$\boxed{(1)\ R>2\sqrt{\frac{L}{C}}}$: $v_c=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$

其中 $s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-w_0^2}$

$\alpha=\frac{R}{2L}$ $w_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$

代入初值条件:

$V_c(0^+) = V_0 \Rightarrow k_1 + k_2 = V_0$

$i_L(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{dV_c}{dt} = 0 \quad \therefore s_1 k_1 + s_2 k_2 = 0$

$$\therefore \begin{cases} k_1 = \frac{s_2}{s_2 - s_1} V_0 \\ k_2 = \frac{-s_1}{s_2 - s_1} V_0 \end{cases}$$

$\therefore V_c = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

$= \frac{V_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})$

$\therefore i_c = -C \cdot \frac{dV_c}{dt} = -\frac{V_0}{L(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$

why?

电感电压:

$V_L = L \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{V_0}{s_2 - s_1}(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$

(来不及推了, 之后补)

(2) $\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$ (来不及推了, 后补)

令 $\alpha = \frac{R}{2L}$, $w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$w = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$

$\therefore s = -\alpha \pm jw$

$V_c = e^{-\alpha t}(k_1 e^{jwt} + k_2 e^{-jwt})$

即 $V_c = k e^{-\alpha t} \sin(wt + \beta)$

由初始条件:

$$\begin{cases} V_c(0^+) = V_0 \\ \frac{dV_c(0^+)}{dt} = 0 \end{cases} \quad \therefore k \sin\beta = V_0$$

$k \cdot (-\alpha) \sin\beta + kw \cos\beta = 0$

$\therefore k = \frac{V_0}{\sin\beta}$, $\beta = \arctan\frac{w}{\alpha}$

$\therefore V_c = \frac{w_0}{w} V_0 e^{-\alpha t} \sin(wt + \beta)$

(3) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\quad \therefore s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$

$\therefore v_C = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$

$\because v_C(0^+) = V_0 \quad \Rightarrow k_1 = V_0$

$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = 0 \quad \therefore \left[-\alpha k_1 e^{-\alpha t} + k_2(e^{-\alpha t} + t\cdot(-\alpha)e^{-\alpha t})\right]\Big|_{t=0} = 0$

即 $-\alpha k_1 + k_2 = 0 \quad k_2 = \alpha V_0$

$\therefore$ 代入 $v_C = V_0 e^{-\alpha t} + \alpha V_0 t e^{-\alpha t}$

$= V_0 e^{-\alpha t}(1+\alpha t)$

$i_C = -C\cdot\frac{dv_C}{dt} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$

$i_C = -C\cdot V_0\left[-\alpha\cdot e^{-\alpha t}(1+\alpha t) + e^{-\alpha t}\cdot\alpha\right]$

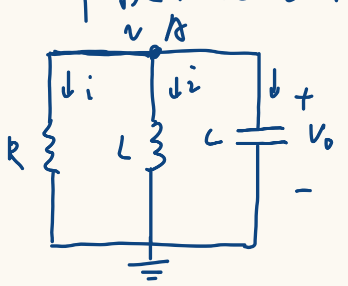
$= -CV_0\left(-\alpha e^{-\alpha t}\cdot\alpha t\right) = CV_0\cdot\alpha^2\cdot t e^{-\alpha t}$

$= \frac{V_0}{L} t e^{-\alpha t}$?

二阶动态电路自由响应的求解步骤

1. 列写所求变量的动态方程
2. 求二阶电路的固有模态---动态方程的特征方程根
3. 由固有模态判断自由响应的形式
4. 找初始条件，确定响应中待定系数。

并联 RLC 电路:



初始条件: $i(0) = I_0$

$v(0) = V_0$.

对 A 写节点电流法: 由于对电感来说, $v = L\cdot\frac{di}{dt}$. $\Rightarrow di = \frac{1}{L}v\,dt$

$\frac{v}{R} + \int_0^t \frac{1}{L} v\,dt + C\cdot\frac{dv}{dt} = 0$

∴ 对t求导. $\frac{1}{R}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v+C\cdot\frac{d^2v}{dt^2}=0$，同除C，有

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}\cdot v=0$$

∴ 特征方程: $s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0$

$$\boxed{\alpha=-\frac{\frac{1}{RC}}{2}=-\frac{1}{2RC} \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

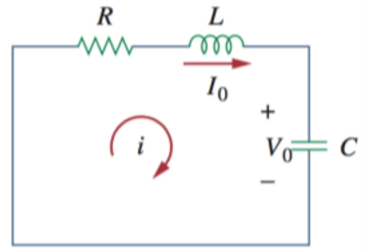
∴ $s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

串联: $\alpha=\frac{R}{2L}$ i作为中心变量

并联: $\alpha=\frac{1}{2RC}$ v作为中心变量

Example 8.3

In Fig. 8.8, $R=40\ \Omega$, $L=4$ H, and $C=1/4$ F. Calculate the characteristic roots of the circuit. Is the natural response overdamped, underdamped, or critically damped?

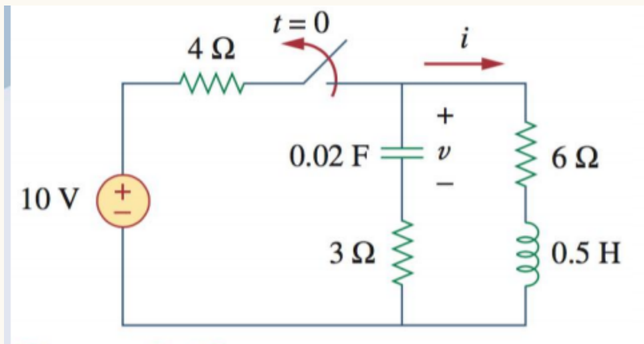


$\alpha=\frac{R}{2L}=\frac{40}{2\times4}=5$

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{4\times\frac{1}{4}}}=1$

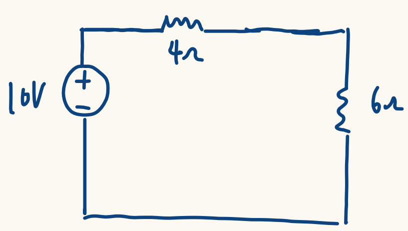
∴ $s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-5\pm\sqrt{25-1}$

∵ 有两个不相同的实根 ∴ 是过阻尼



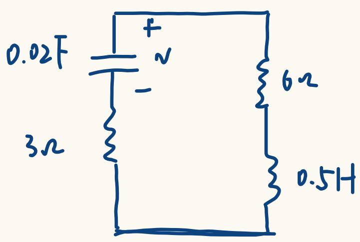
EX. 8.4. 求 $i(t)$.

① 检查初始条件: $i(0^-)=I_0=1A$.



$V(0^-)=6V$

② $t>0$ 时，作此时等效电路图:



此时 RC 串联，$\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{9}{1} = -9$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10$$

$\alpha^2 - w_0^2 < 0$ $\therefore$ 欠阻尼

$$\therefore s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} = -9 \pm j \cdot 4.359$$

$$\therefore i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t)$$

下面结合初始条件求解:

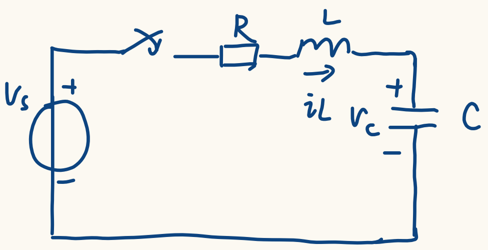
$i(0_-) = i(0^+) = 1$，即 $A_1 = 1$

$v(0_-) = v(0^+) = 6$，而 $3i + v = 6i + L \cdot \frac{di}{dt}$ 即 $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{v - Ri}{L} = -6A.$

代入，解 $A_2 = 20.6882$

二阶电路零响应

$v_c(0_-) = 0$ $i(0_-) = 0$



串联 RLC，微分方程为:

利用 KVL: $Ri + L\frac{di}{dt} + v_c = V_s$

$q = Cu \Rightarrow i = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$ $\therefore V_c = \frac{1}{C} \cdot \int i dt.$

故 $Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i dt = V_s$

$RC\frac{di}{dt} + LC \cdot \frac{d i^2}{dt^2} + i = 0$ 故特征方程 $LCs^2 + RCs + 1 = 0$

$v = \underbrace{v_c'}_{特解} + \underbrace{v_c''}_{通解}$ $\boxed{特解: v_c' = V_s}$

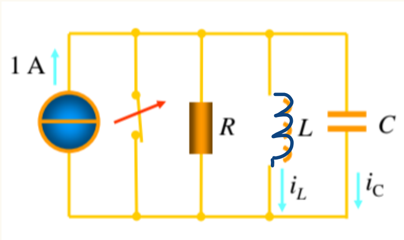
v_C的一般形式为:

$$\begin{cases} v_C = V_S + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (s_1 \neq s_2) & 过阻尼 \\ v_C = V_S + k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t} \quad (s_1 = s_2 = -\alpha) & 临界阻尼 \\ v_C = V_S + k e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega) & 欠阻尼 \end{cases}$$

由初值 $v_C(0_+)$**和** $\frac{dv_C(0_+)}{dt}$ **确定两个常数。**

[二阶电路全响应.]

$R=50\Omega$. $L=0.5H$, $C=100\mu F$, $i_L(0^-)=2A$, $V_c(0^-)=0$. 求 i_L



1) 列微分方程: 并联以 i 作为变量.

$$\frac{V_c}{R} + i_L + i_c = 1 \qquad V_c = \frac{1}{C}\cdot\int i_c\,dt. \qquad \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}\cdot i_c.$$

$$L\cdot\frac{di}{dt} = V_c \qquad i = \frac{1}{L}\cdot\int V_c\,dt$$

$$\therefore \frac{1}{CR}\cdot i_c + \frac{1}{L}\cdot V_c + \frac{di_c}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 i_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}\cdot i_c + \frac{1}{RC}\cdot\frac{di_c}{dt} = 0$$

$$\therefore RLC\cdot\frac{d^2 i_c}{dt^2} + L\cdot\frac{di_c}{dt} + R\cdot i_c = 0$$

特解, (略)

- step 1: 求变量及变量导数的初始值
- step 2: 求微分方程的特解，即变量的稳态响应 $x_{ss}(t) = x(\infty)$
- step 3: 0^+ 时刻，turn off 独立源，求齐次微分方程的通解，即变量的瞬态响应 $x_t(t)$
- step 4: 写出非齐次微分方程的通解，即稳态响应和瞬态响应相加 $x(t) = x_t(t) + x_{ss}(t)$
- step 5: 结合初始条件，求待定系数

- 对于串联 RLC、并联 RLC 这两种特殊的二阶电路，可根据衰减常数和谐振频率直接写出解的表达式
  - **衰减常数**，对于串联 RLC，$\alpha = \frac{R}{2L}$；对于并联 RLC，$\alpha = \frac{1}{2RC}$
  - **谐振频率**，$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
  - 典型的二阶电路有过阻尼（$\alpha > \omega_0$）、临界阻尼（$\alpha = \omega_0$）、欠阻尼（$\alpha < \omega_0$）三个 cases；临界阻尼衰减最快；以下以电容电压为例

$$v(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad \text{(Overdamped)}$$

$$v(t) = V_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(Critically damped)}$$

$$v(t) = V_s + (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(Underdamped)}$$