

2019年工程硕士数学期末考题

一、填空题

(所有答案都写在答题纸上, 此处作答不计分)

1. a 是 10π 保留 5 位有效数字得到的, 那么 $a =$ _____, a 精确到了小数点后第 _____ 位。

2. 给定线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

则雅可比迭代法 _____, 高斯-赛德尔迭代法 _____。(填收敛/发散)

3. 给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

则 $\|A\|_1 =$ _____, $\|A\|_\infty =$ _____, $\rho(A) =$ _____。

4. 方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

解此方程组 SOR 迭代法的最佳松弛因子 $\omega_b =$ _____, $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) =$ _____。

5. 不高于三次的多项式 $p(x)$ 满足 $p(0) = p'(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p(2) = 1$, 则 $p(x) =$ _____。

6. 已知 $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 9$, 则 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式为 _____, 插值余项为 _____。

7. 设 $s(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + bx - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, $s(x)$ 是以 0, 1, 2 为节点的三次样条函数, 那么 $b =$ _____, $c =$ _____。

8. 求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$ 的代数精度为 _____。

9. 用改进 Euler 法求解下列初值问题时:

$$\begin{cases} y' = -30y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

由绝对稳定性对步长的限制为 _____。

10. 用区间 $[0, 1]$ 上的首一正交多项式对函数 $f(x) = \sin \pi x$ 作二次最佳平方逼近多项式, 其最佳平方逼近多项式 $S^*(x)$ 为 _____。

二、解答题

1. 用 **Cholesky 方法** 求解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 10 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 27 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 25 \\ 60 \end{bmatrix}$$

2. 假设 $a > 0, x_0 > 0$, 请问以下迭代格式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

是计算哪个数的几阶方法?

3. 已知 $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$:

1. 推导以这三个节点为求积节点在 $[0, 1]$ 上的插值型求积公式;
2. 求上述求积公式的代数精度;
3. 用上述公式计算 $\int_0^1 x^2 dx$ 。

4. 求 **Heun 方法**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))$$

的局部截断误差主项, 并指出它是几阶的。

5. 已知 Gauss 型求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 。设 $g(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, 证明:

$$\int_a^b [(x - x_1) \dots (x - x_n)]^2 dx = g'(x_0) \int_a^b (x - x_1) \dots (x - x_n) dx$$