

2020年秋工程硕士数学期末考试题

一、填空题

(请将所有答案写在答题纸上, 此处作答不计分)

1. $2021 - \pi$ 的近似值取为 _____ 有 5 位有效数字。

2. 已知三对角方程组 $\begin{cases} 3x_1 + ax_2 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2ax_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$ 。当 a 满足 _____ 时, 用追赶法求解是数值稳定的。系数矩阵 LU 分解后, $L =$ _____, $U =$ _____。

3. 对方程组 $Ax = b$, 若 $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -2 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$, 则该方程组 SOR 方法的最佳松弛因子 ω 为 _____。

4. 用迭代法求解方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, ($a \neq 0$)。当 a 满足 _____ 时, J 迭代法和 GS 迭代法都收敛。此时 J 迭代法和 GS 迭代法的渐进收敛速度比为 _____。

5. 当 $p =$ _____, $q =$ _____, $r =$ _____ 时, 迭代公式 $x_{k+1} = px_k + q\frac{a}{x_k^2} + r\frac{a^2}{x_k^5}$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$, 且收敛阶最高。此时收敛阶为 _____。

6. 已知 $f(x) = 2021x^3 - 2020x^2 + 20202021$, 利用插值节点 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ 得到的 Lagrange 插值多项式为 _____。

7. 对权函数 $\rho(x) = 1 - x^2$, 在区间 $[-1, 1]$ 上, 首项系数为 1 的正交多项式为 $\phi_1(x) =$ _____, $\phi_2(x) =$ _____。

8. Simpson 求积公式是 _____, 它是由 _____ 次插值多项式推导出来的。它的余项是 _____。

9. 改进欧拉公式为 _____, 它的阶 = _____。 h 满足 _____ 时绝对稳定

10. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ 有 n 个不同的实根 x_1, x_2, \dots, x_n 。当 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 时, $\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} =$ _____。

二、解答题

1. 已知矩阵 A 和向量 b :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = [1 \quad 2 \quad 2 \quad -1]^T$$

请利用 Doolittle 三角分解法 求解线性方程组 $Ax = b$ 。

2. 为求方程 $e^x - 2x - 1 = 0$ 的根 $x^* = 0$, 请构造一种迭代法使之局部收敛, 并确定其收敛阶。

3. 已知观测函数表如下:

$$| x_i | 1 | 2 | 4 |$$

| $f(x_i)$ | 9 | 4 + $\sqrt{2}$ | 4 |
试用拟合函数 $S(x) = \frac{a_0}{x} + a_1\sqrt{x}$ 作 **最小二乘曲线拟合**, 以确定参数 a_0 和 a_1 。

4. 考查以下多步法公式:

$$y_{n+3} = \frac{1}{8}(9y_{n+2} - y_n) + \frac{3}{8}h(f_{n+3} + 2f_{n+2} - f_n)$$

请问该公式是显式还是隐式? 是几步法? 并求出它的阶。

5. 已知 Gauss 型求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 。且
 $g(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ 。证明:

$$\int_a^b [(x - x_1) \dots (x - x_n)]^2 dx = g'(x_0) \int_a^b (x - x_1) \dots (x - x_n) dx$$