Лабораторная работа № 2
Нахождение суммы ряда с заданной точностью

Пример.

Написать программу нахождения суммы ряда с заданной точностью ε.

Использовать реккурентные соотношения при вычислении очередного элемента ряда. Суммирование ряда завершить, если модуль очередного члена ряда не превосходит ε. Предусмотреть вычисление значения функции по контрольной формуле.

Рассмотри конкретный пример:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots, \text{ где } |x| < 1.$$

Контрольная формула в данном случае $\sin x$. Ряд, соответственно, имеет вид:

$$S = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad i$$

где $a_i = \dfrac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ для $i \ge 0$. Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{(-1)^i x^{2i+1}\left(2(i+1)+1\right)!}{(2i+1)!(-1)^{i+1} x^{2(i+1)+1}} = -\frac{(2i+2)(2i+3)}{x^2}$$

Отсюда $a_{i+1} = -\dfrac{x^2}{(2i+2)(2i+3)} a_i$.

Далее важно определиться с начальным значением a_0 (в нашем случае $a_0 = x$) и проследить, чтобы порядок накопления суммы и значения счетчика ряда менялись в нужной последовательности. Чтобы осознать значимость следования операторов, попробуйте поменять в теле цикла местоположение оператора *i:= i+1* - “поднимите” его в начало тела цикла. Выполнив фрагмент программы пошагово, вы убедитесь, что общий член ряда будет видоизменен - уже при $i = 1$ вы получите $a = -\dfrac{x^3}{4 \cdot 5}$ вместо необходимого $a = -\dfrac{x^3}{2 \cdot 3}$.

Задание. **Написать программу нахождения суммы ряда с заданной точностью ε. Использовать рекуррентные соотношения при вычислении очередного элемента ряда. Суммирование ряда завершить, если модуль очередного члена ряда не превосходит ε. Предусмотреть вычисление значения функции по контрольной формуле.**

Должен быть предусмотрен ввод значений $|x| < 1$.

1. $3(1+x)^{1/3} - 3 = x - \frac{2}{6}x^2 + \frac{2\cdot5}{6\cdot9}x^3 - \dots \pm \frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3i-4)}{6\cdot9\cdot\ldots\cdot(3i)}x^i \mp \dots$

2. $x\sin x - e^{-x^2} + 1 = x^2\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{1!}\right) - x^4\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + \dots \pm x^{2i}\left(\frac{1}{i!} + \frac{1}{(2i-1)!}\right) \mp \dots$

3. $\sin x - \cos x + 1 = \frac{x(2+x)}{2!} - \frac{x^3(4+x)}{4!} + \dots \pm \frac{x^{2i-1}(2i+x)}{(2i)!} \mp \dots$

4. $1 - (1+x)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot5}{4\cdot8}x^2 + \frac{1\cdot5\cdot9}{4\cdot8\cdot12}x^3 - \dots \pm \frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4i-3)}{4\cdot8\cdot12\cdot\ldots\cdot(4i)}x^i \mp \dots$

5. $\frac{1-\cos x - x\cdot\sin x}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{3x^2}{4!} - \frac{5x^4}{6!} + \dots \pm \frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i+2)!} \mp \dots$

6. $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot4}{3\cdot6}x^2 + \frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3 - \dots \pm \frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3i-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot(3i)}x^i \mp \dots$

7. $\frac{16}{5}\left(\sqrt{(1+x)^5} - 1\right) - 8x - 6x^2 =$

$$x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1\cdot3}{8\cdot10}x^5 - \dots \pm \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2i-3)}{8\cdot10\cdot\ldots\cdot2(i+2)}x^{i+2} \mp \dots$$

8. $(1+x^2)\arctan(x) - x = \frac{2x^3}{4\cdot1^2-1} - \frac{2x^5}{4\cdot2^2-1} + \dots \pm \frac{2x^{2i+1}}{4\cdot i^2-1} \mp \dots$

9. $\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots \pm \frac{x^{2i}}{(2i+2)!} \mp \dots$

10. $\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 - \cdots \pm \frac{3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2i+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots\cdot(2i)}x^i \mp \cdots$

11. $2 - \cos x - e^{-x^2} = x^2\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) - x^4\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) + \cdots \pm x^{2i}\left(\frac{1}{i!} + \frac{1}{(2i)!}\right) \mp \cdots$

12. $\frac{2-\cos x - \sin x - e^{-x}}{2x^2} = \frac{x(4-x)}{4!} - \frac{x^5(8-x)}{8!} + \cdots \pm \frac{(4i-x)x^{4i-3}}{(4i)!} \mp \cdots$

13. $4\sqrt[4]{1+x} - 4 = x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3\cdot 7}{8\cdot 12}x^3 - \cdots \pm \frac{3\cdot 7\cdot \ldots\cdot(4i-5)}{8\cdot 12\cdot \ldots\cdot(4i)}x^i \mp \cdots$

14. $2\sin^2 x = \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots \pm \frac{(2x)^{2i}}{(2i)!} \mp \cdots$

15. $1 + \frac{x}{2}\sin x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\cos x = \frac{2\cdot 1^2+1}{2!}x^2 - \frac{2\cdot 2^2+1}{4!}x^4 + \cdots \pm \frac{2\cdot i^2+1}{(2i)!}x^{2i} \mp \cdots$

16. $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots \pm \frac{1\cdot 3\cdot \ldots\cdot(2i-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots\cdot(2i)}x^i \mp \cdots$

17. $\frac{x-\sin x}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{x^3}{5!} + \cdots \pm \frac{x^{2i-1}}{(2i+1)!} \mp \cdots$

18. $e^{-x}(x-1) + 1 = \frac{2x}{1!} - \frac{3x^2}{2!} + \cdots \pm \frac{(i+1)x^i}{i!} \mp \cdots$

19. $\frac{8}{3}\left(\sqrt{(1+x)^3} - 1\right) - 4x =$

$$x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1\cdot 3}{6\cdot 8}x^4 - \cdots \pm \frac{1\cdot 3\cdot \ldots\cdot(2i-3)}{6\cdot 8\cdot 10\cdot \ldots\cdot(2i+2)}x^{i+1} \mp \cdots$$

20. $\frac{\cos x + \sin x - e^{-x}}{2} = \frac{x(2-x)}{2!} + \frac{x^3(6-x)}{6!} + \cdots + \frac{(4i-2-x)x^{4i-3}}{(4i-2)!} \mp \cdots$

21. $2\mathrm{x} - \sin x - xe^{-x^2} = x^3\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!}\right) - x^5\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{5!}\right) + \cdots \pm x^{2i+1}\left(\frac{1}{i!} + \frac{1}{(2i+1)!}\right) \mp \cdots$

22. $\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}} = 1 - \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2 - \cdots \pm \frac{5\cdot 7\cdot \ldots\cdot(2i+3)}{2\cdot 4\cdot \ldots\cdot(2i)}x^i \mp \cdots$

23. $\cos x - x\cdot\sin x = 1 - \frac{3x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} - \cdots \pm \frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i)!} \mp \cdots$

24. $2x\cdot\arctan(x) - 2\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{x^2}{1\cdot(2\cdot 1-1)} - \frac{x^4}{2\cdot(2\cdot 2-1)} + \cdots \pm \frac{x^{2i}}{i\cdot(2i-1)} \mp \cdots$

25. $2\sqrt{1+x} - 2 = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}x^3 - \cdots \pm \frac{1\cdot 3\cdot \ldots\cdot(2i-3)}{4\cdot 6\cdot \ldots\cdot(2i)}x^i \mp \cdots$

26. $\frac{1-\cos x - \sin x}{x} + 1 = \frac{x(3+x)}{3!} - \frac{x^3(5+x)}{5!} + \cdots \pm \frac{x^{2i-1}(2i+1+x)}{(2i+1)!} \mp \cdots$

27. $\sin(x^2) - x^2\cos(x^2) = \frac{2x^6}{3!} - \frac{4x^{10}}{5!} + \cdots \pm \frac{(2i)\cdot x^{4i+2}}{(2i+1)!} \mp \cdots$

28. $1 + x - \frac{\pi^2}{12} - \ln(1+x) = \frac{2x^2+1}{2^2} - \frac{3x^3+1}{3^2} + \cdots \pm \frac{(i+1)x^{i+1}+1}{(i+1)^2} \mp \cdots$

29. $\ln(1+x) - e^{-x} + 1 = x\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1!}\right) - x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\right) + \cdots \pm x^i\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i!}\right) \mp \cdots$

30. $\cos\sqrt{x} - e^{-x} = x\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) - x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots \pm x^i\left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{(2i)!}\right) \mp \cdots$

31. $\cos\sqrt{|x|} - 1 = -\frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{4!} - \cdots \pm \frac{|x|^i}{(2i)!} \mp \cdots$

32. $\arctan(x) + x\cdot\cos x = x\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1!}\right) - x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\right) + \cdots \pm x^{2i-1}\left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{(2(i-1))!}\right) \mp \cdots$

33. $\ln(1+x^2) + \cos x = 1 - x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1}\right) + x^4\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\right) - \cdots \pm x^{2i}\left(\frac{1}{(2i)!} - \frac{1}{i}\right) \mp \cdots$

34. $\frac{\ln(1+x^2)}{x} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - - \cdots \pm \frac{x^{2i+1}}{i+1} \mp \cdots$

35. $\frac{\arctan(x)}{x} + \cos x = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1!}\right) - x^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\right) + \cdots \pm x^{2i}\left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{(2i)!}\right) \mp \cdots$