INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso
Campus Cuiabá
Bela Vista

Curso Tecnologia em Sistemas para Internet
UAB Núcleo de Educação a Distância

MATEMÁTICA APLICADA

Conjuntos

Sérgio Candido de Gouveia Neto

Cuiabá, MT

1. INTRODUÇÃO

Neste tópico estudaremos o que são conjuntos, bem como as operações entre eles, tais como relação de pertinência, conjuntos iguais, subconjuntos, relação de inclusão, quantificadores, união e interseção. Ao final, veremos alguns problemas contextualizados.

2. CONJUNTOS

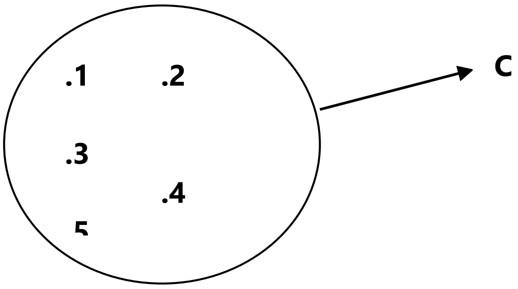
Na matemática algumas noções são primitivas, ou seja, não tem definição. A noção de conjuntos e elementos são algumas delas. De uma forma geral, o conjunto é "uma coleção qualquer de objetos, que são os seus elementos (MACHADO, 1988, p. 1).

Exemplos:

A = {Conjunto dos estados da região Centro Oeste}

B = {Conjunto das cidades de Mato Grosso}

Além desta representação dos conjuntos citando suas propriedades, podemos representar os conjuntos por meio de um diagrama, também conhecido por diagrama de Venn[1]:



C = Conjunto dos números naturais menores que 6.

Observe que este conjunto possui um número limitado de elementos. Neste caso, dizemos que o conjunto é finito.

[1] Jonh Venn foi um matemático inglês que viveu entre 1834 e 1923. Em 1880 ele publicou um trabalho de lógica formal onde aparece os famosos diagramas de Venn. Tal representação que veio para facilitar, de forma significante, a resolução de muitos problemas (Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_john-venn/. Acessado em 07 de março de 2025).

Agora, considere um conjunto D, formado pelos números pares. Observe, agora, que o conjunto foi descrito por uma propriedade comum de seus elementos: são dos números pares. Podemos representá-lo desta forma:

D = {x | x é um número natural para}

D = {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}

Neste caso, as reticências indicam um conjunto infinito. Mas não é sempre assim. Veja este outro caso: C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... 99}. Aqui, as reticências indicam que o existe um grande número de elementos, mas as regras de formação devem ser mantidas.

Devemos lembrar ainda, que existem conjuntos que apresentam apenas um elemento. Estes conjuntos são chamados de **unitários**.

Exemplo: Conjunto dos números pares e primos E = {2}

Os conjuntos com nenhum elemento são chamados de **Conjunto Vazio**, e existem duas formas de representar este conjunto. Veja:

F = { } ou F = ∅

Exemplo: Conjunto G das cidades de Mato Grosso banhadas pelo mar: G = { }

3. RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto usamos a relação de pertinência, neste caso, utilizamos o símbolo ∈.

Para caso de um elemento não pertencer ao conjunto, utilizamos o símbolo ∉. Assim, dado **A** o **conjunto das vogais** do nosso alfabeto, dizemos que **a** pertence ao conjunto **A**

a ∈ A

e que **b** não pertence ao conjunto **A**

b ∉ A

Exemplos: Seja B = {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}. Podemos dizer que:

5 ∉ B, 3 ∉ B, 36 ∈ B e 81 ∉ B

Vamos considerar, agora, o conjunto unitário B = {4}. Temos que 4 ∈ B, isto é

4 ∈ {4} e não é correto escrever 4= {4} pois o primeiro é um número e o segundo é um conjunto.

Não podemos, neste caso, comparar objetos de diferentes naturezas. Um conjunto unitário e o elemento deste conjunto são coisas distintas.

4. CONJUNTOS IGUAIS

Dizemos que dois conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos. Os conjuntos A e B são iguais se todo elemento de A também pertence a B e todo elemento de B também pertence a A.

Exemplo: Seja A o conjunto das letras da palavra ROMA e seja B o conjunto das letras da palavra AMOR.

A = {r, o, m, a}

B = {a, m, o, r}

{r, o, m, a} = {a, m, o, r}

Vejamos agora, dois outros conjuntos, um conjunto C formado pelas letras da palavra AMORA, outro conjunto D formado pelas letras da palavra ROMA. Veja:

C = {a, m, o, r, a}

D = {r, o, m, a}

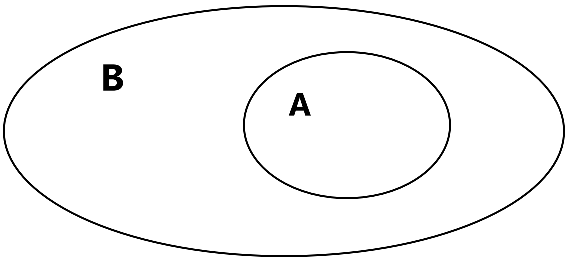
Observe que todos os elementos de D pertencem a D e que todos os elementos de F pertencem a E. Neste caso, E = F, ou seja, {a, m, o, r, a} = {a, m, o, r}

Este exemplo mostra que não precisamos repetir elemento dentro de um mesmo conjunto, basta indicar cada elemento uma só vez. Se dois conjuntos não são iguais, escrevemos que A ≠ B (Lemos: A é diferente de B). Para que isto ocorra, é necessário que haja pelo menos um elemento que pertença a um dos conjuntos e não pertença ao outro, usando este argumento, podemos justificar, inclusive, porque ∅ ≠ {∅}.

5. SUBCONJUNTOS E RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Consideremos o conjunto A das vogais da palavra AMOR: A = {a, o} e o conjunto B de todas as letras da palavra AMOR: B = {a, m, o, r}. Observa-se que todos os elementos do conjunto A também pertencem ao conjunto B.

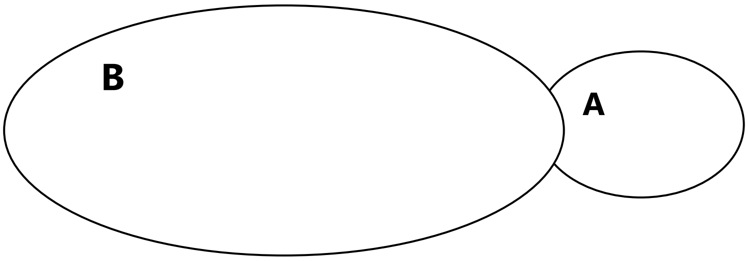
Quando isto ocorre, dizemos que A é um subconjunto de B ou que A é parte de B, indicamos $A \subset B$ e lemos A está contido em B ou ainda $B \supset A$ e lemos B contém A. Daí temos que: $A \subset B$ quando todo elemento de A também pertence a B.



$A \subset B$ (Lemos: **A está contido em B**)

$B \supset A$ (Lemos: **B contém A**)

Se existir ao menos um elemento de A que não pertença a B, dizemos que:



$A \not\subset B \rightarrow$ A não está contido em B

Exemplo:

Sendo A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 4, 5}, C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, preencha as relações de inclusão a seguir:

a) $A \subset C$

b) $A \not\subset B$

c) $B \subset C$

d) $B \not\subset A$

e) $C \supset A$

f) $C \supset B$

g) $C \supset A$

6. QUANTIFICADORES

Em relação ao conjunto A = {1, 4, 9, 16}, podemos fazer algumas afirmações:

- Qualquer que seja o elemento de A, ele é natural.
- Existe elemento de A que é número par.
- Existe um único elemento de A que é número ímpar.

- Não existe elemento de A que é número primo.

Para representar as expressões citadas acima, utilizamos alguns símbolos, os quais são chamados de quantificadores.
Desta forma, poderíamos reescrever o exemplo anterior da seguinte forma:
$\forall\ x \in A, x \text{ é } natural$ (Qualquer seja ou para todo o elemento x de A, x é natural)
$\exists\ x \in A \mid x \text{ é } par$ (Existe elemento de A que é número par)
$\exists|\ x \in A \mid x \text{ é } ímpar$ (Existe um único elemento de A que é número ímpar)
$\nexists x \in A \mid x \text{ é } primo$ (Não existe elemento de A que é número primo)

7. IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

Quando de uma afirmação ***a*** podemos tirar uma conclusão ***b***, dizemos que a implica b e indicamos assim:

$\boldsymbol{a \Rightarrow b}$ (Lemos: **a implica b ou se a então b**.)

Se também de b podemos concluir a, então dizemos que a e b são equivalentes indicando assim:

$\boldsymbol{a \Leftrightarrow b}$ (Lemos: **a é equivalente a b ou a se e somente se b**)

8. INTERSECÇÃO E UNIÃO – OS CONECTIVOS E e OU

8.1 Intersecção

Dados dois conjuntos (A e B), a intersecção é o conjunto formado pela pela presença de elementos pertencentes a dois conjuntos simultaneamente. Nesse caso, representamos a interseção por $A \cap B$ (lemos: A inter B) e definimos por:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \ e\ x \in B\}$

(Lemos: **A inter B é igual a x tal que x pertence a A e x pertence a B**). Chamamos a atenção para o conectivo **E**.

Exemplo: Dados os conjuntos A = {1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 81} e B = {1, 9, 27, 64}, a interseção entre A e B, representado por $A \cap B$ = {1, 9, 64}. Neste caso, os elementos de $A \cap B$ pertence a A **E** a B

8.2 União

Segundo Machado (1988), "o conectivo **OU**, quando colocado entre duas condições, indica que pelo menos delas deve ser verificada: só a primeira ou só a segunda" (p. 12). A União entre dois conjuntos obedece a esta condição. Dessa forma, a união de dois conjuntos A e B é formada por todos os elementos que aparecem em A **ou** em B, assim, podemos escrever que:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \ ou\ x \in B\}$

Exemplo: Ex.1: Sendo A = {1, 4, 9, 27, 64, 121} e B = {1, 3, 6, 9}, determine $A \cup B$

Resolução: $A \cup B = \{1, 3, 4, 6, 9, 27, 64, 121\}$. Neste caso, os elementos de $A \cup B$ pertence a A **OU** a B

9. DIFERENÇA E COMPLEMENTAR

9.1 Diferença

Segundo Machado (1988), "a diferença entre dois conjuntos A e B" (p. 15) e indicado por A – B, é definido como o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. $A - B = \{x \mid x \in A \ e\ x \notin B\}$. Nota-se a presença do conectivo E.

Exemplo: A = {1, 4, 9, 16, 25} e B= {1, 8, 27, 81}, temos que A – B = {4, 9, 16, 25}

9.2 Complementar

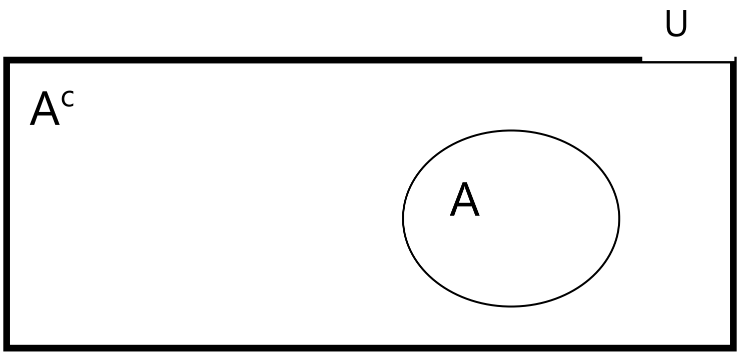
De acordo com Machado (1988), "Quando B ⊂ A, a diferença A – B também é chamado de complementar de B em A e indicamos por $C_A B$" (p. 16).

Exemplo: Sendo A = {1, 2, 3, 4, 5, 6...} e B = {1, 3, 5, 7, 9, ...}, temos que $C_A B$ = A -B = {2, 4, 6, 8, 10, ...}

Para Machado (1988, p 16):

> Geralmente quando vamos tratar de um assunto trabalhamos com elementos que pertencem a um dado conjunto. Este conjunto é chamado de conjunto universo e o representaremos por U. Em um diagrama, costumamos representar o U (universo) por um retângulo. Sendo A um subconjunto de U, o complementar de A em U é também representado por AC (Leia: A complementar) ou pelo símbolo Ã (Leia: não A). Assim, $A^C = \tilde{A} = \{x \mid x \in U \ e\ x \notin A\} = U - A$

A citação de Machado (1988) pode ser representada da seguinte forma:



EXERCÍCIOS

1) Sendo A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 2, 3}, C = {1, 4, 9, 16, 25} e D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Classifique em verdadeira ou falsa cada sentença:

a) $A \subset C$ b) $A \subset B$ c) $A \subset D$ d) $B \subset C$ e) $B \subset C$ f) $A \supset C$

g) $B \not\subset C$ h) $A \not\subset C$ i) $B \not\subset D$ j) $B \supset A$ k) $D \supset C$ l) $B \supset A$

2) Dados os conjuntos A = {a, b} e B = {{a}, {b}}, classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $a \in A$ b) $a \in B$ c) $b \notin A$ d) $b \notin B$ e) $\{a\} \in A$ f) $\{a\} \in B$

g) $\{b\} \notin A$ h) $\{b\} \notin B$ i) $A = B$

3) Em cada caso, determine $A \cup B$, $A \cap B$, A – B, $C_A B$

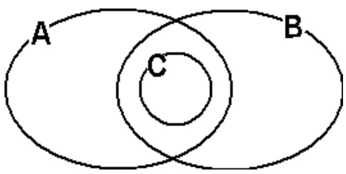
a) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6, 8, 10}

b) A = {1, 2, 3, 4, 5, ... 50} e B = {1, 3, 5, 7, ..., 51}

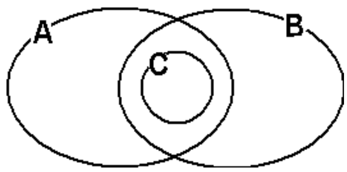
c) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...} e B = {3, 6, 9, 12, ...}

4) Sombreie, em cada diagrama, a região que indica a expressão correspondente.

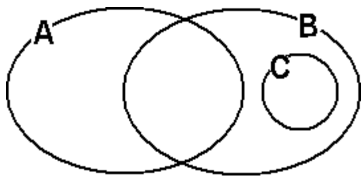
a) $A \cap B \cap C$



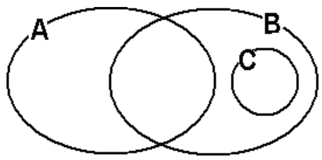
b) $(A \cap B) \cup C$



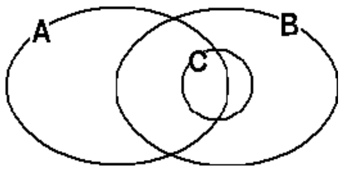
c) $A \cap B \cap C$



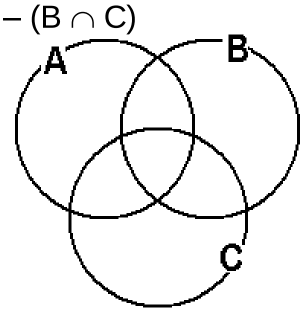
d) $(A \cap B) \cup C$



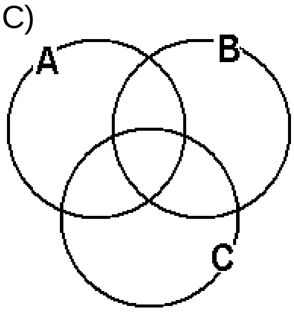
e) $A \cap B \cap C$



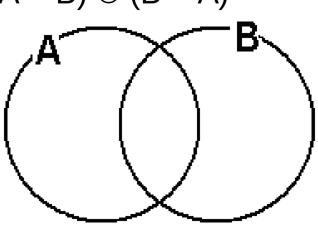
f) $A - (B \cap C)$



g) $A - (B \cup C)$



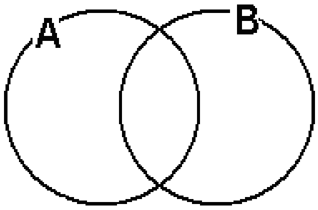
h) $(A - B) \cup (B - A)$



i) $(A \cup B) - (B \cup A)$

5) Uma prova de duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. 10 alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira questão e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

6) Numa pesquisa feita com 1000 famílias para se verificar a audiência dos programas



de televisão, os seguintes resultados foram encontrados: 510 famílias assistem ao programa A. 305 ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B. 60 assistem aos programas B e C. 25 assistem a A e C e 10 famílias assistem aos três programas.

a) Quantas famílias não assistem nenhum destes 3 programas?

b) Quantas famílias assistem somente o programa A?

c) Quantas famílias não assistem nem ao programa A nem ao programa B?

7) Um entrevista mostrou que 33% dos entrevistados lêem o Jornal A, 29% lêem o jornal B, 22% lêem o jornal C, 13% lêem A e B, 6% lêem B e C, 14% lêem A e C e 6% lêem os três jornais.

a) Quanto por cento não lê nenhum desses jornais?

b) Quanto por cento lê os jornais A e B e não lê C?

c) Quanto por cento lê pelo menos um jornal?

8) Numa pesquisa realizada com 190 pessoas foram anotadas três variáveis relativos a sexo (Masculino ou Feminino), Prática ou não de esportes e uso ou não do tabagismo. 6 homens fumam e praticam esportes. 58 homens não fumam. O número de mulheres que não fumam é igual ao total de homens entrevistados. 30 mulheres são fumantes e dentre as mulheres fumantes, 14 não praticam esportes. Também ficou constatado que 75 pessoas não praticam esportes. Dentre os esportistas, 43 são homens e, no grupo dos não fumantes, 55 não praticam esportes.

a) Monte um diagrama que representa este problema.

b) Quantas são as mulheres esportistas não fumantes?

9) Numa pesquisa sobre audiência de TV entre 125 entrevistados, obteve-se: 60 assistem ao canal X, 40 ao canal Y, 15 ao canal Z, 25 assistem a X e Y, 8 assistem a Y e Z e 3 a X e Z e 1 assiste aos três

a) Quantos não assistem nenhum desses canais?

b) Quantos assistem somente ao canal X?

c) Quantos não assistem nem a X nem a Y?

10) Na porta de um supermercado foi realizada uma enquete, com 100 pessoas, sobre três produtos. As respostas foram: 10 pessoas compram| somente o produto A, 30 pessoas compram| somente o produto B, 15 pessoas compram| somente o produto C, 8 pessoas compram A e B, 5 pessoas compram A e C, 6 pessoas compram| B e C e 4 compram o três produtos.

a) Quantas pessoas compram pelo menos um dos três produtos?
b) Quantas pessoas não compram nenhum destes três produtos?
c) Quantas pessoas compram os produtos A e B e não compram C?
d) Quantas pessoas compram o produto A?
e) Quantas pessoas compram o produto B?
f) Quantas pessoas compram os produtos A ou B?

Referências bibliográficas

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática, Temas e Metas**. São Paulo, Atual, 1988.

VIDIGAL, Cássio. **Apostila de Conjuntos**. Outro Preto, MG: IFMG – Campus Ouro Preto.