INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso
Campus Cuiabá
Bela Vista

Curso Tecnologia em Sistemas para Internet
UAB Núcleo de Educação a Distância

MATEMÁTICA APLICADA

Matrizes

Sérgio Candido de Gouveia Neto

Cuiabá, MT

1. DEFINIÇÃO

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Uma matriz genérica A, com m linhas e n colunas, pode ser representada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Essa é uma matriz do tipo 2 x 3 (2 linhas e 3 colunas). De acordo com Machado (1986), "os números que forma a matriz são chamados elementos da matriz." (p. 8). De uma forma geral, uma matriz também pode ser definida de acordo com seus índices i e j. Por exemplo, aij = i + j, para i de 1 a 3 e j de 1 a 2, define a matriz 3x2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIO

1. Determine a matriz A= $[a_{ij}]_{2X2}$ tal que $a_{ij}=2i + j$

2. Formar a matriz A = (a_{ij}) 3x2, definida por $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

3. Forme a matriz A = (a_{ij}) 3x2, definida por $a_{ij}= 2i + j-1$

2. TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

a) Matriz quadrada – é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Numa matriz quadrada de ordem n, os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}, isto é, os elementos a_{ij} com i = j, constituem a diagonal principal da matriz e os elementos a_{ij} para os quais verifica-se que i + j = n+1 constituem a diagonal secundária da matriz.

Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Matriz nula – é aquela em que todos os elementos são nulos, isto é, aij = 0, para todo i e j. É comum indicar-se a matriz nula por O = $[0_{ij}]_{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Matriz triangular – é uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

d) Matriz diagonal – é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

e) Matriz identidade – é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Indica-se a matriz identidade de ordem n por I_n.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Matriz linha – é aquela que possui apenas 1 linha (m = 1).

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Matriz coluna – é aquela que possui uma única coluna (n = 1)

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

h) Matriz simétrica – é uma matriz quadrada na qual se verifica que aij = aji.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & 11 \\ -7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

3. IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes A e B são ditas iguais se, e somente se, têm o mesmo tamanho e seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplos:

a) Se $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, temos que A = B, se x=1, y=2, z=3, a=6, b=5 e c=4

4. OPERAÇÕES COM MATRIZES

a) Adição e subtração: A adição e subtração de duas matrizes $A_{m \times n}$ e B_{mxn}, de mesma ordem, é uma matriz C m x n cujos elementos são obtidos pela soma ou diferença dos elementos correspondentes de A e B, respectivamente.

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A, B e C, de mesma ordem, são válidas as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

i) Comutativa: A + B = B + A
ii) Associativa: (A+B) + C = A + (B + C)
iii) Elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A
iv) Cancelamento: A = B $\Leftrightarrow$ A + C = B + C

b) Multiplicação de um número real por uma matriz:

Seja $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e α um número real. A matriz αA, m x n, é a matriz cujos elementos são bij =α.aij. Se $\alpha = -1$, obtém-se a matriz oposta de A, isto é, a matriz que somada com A dá como resultado a matriz nula.

Propriedades

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, e os números reais α, $\alpha 1$ e $\alpha 2$, verifica-se que:

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
ii) $(\alpha 1 + \alpha 2).A = \alpha 1 A + \alpha 2 A$

iii) 0.A = 0
iv) $\alpha1(\alpha2A) = (\alpha1\alpha2).A$

c) Transposição: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, denomina-se transposta de A a matriz $A^t = [b_{ij}]_{mxn}$, cujas linhas são as colunas de A.

Propriedades
i) $(A^t)^t = A$
ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$
iii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

d) Multiplicação de matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $= [b_{ij}]_{nxp}$ duas matrizes. O produto da matriz A pela matriz B, indicado por AB, é a matriz $C = [c_{ij}]_{mxp}$ tal que o elemento cij é obtido multiplicando-se ordenadamente m × p, os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos. Cabe ressaltar que o produto AB só é possível se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Propriedades
i) Geralmente, AB ≠ BA.
ii) AI = IA = A
iii) A(B + C) = AB + AC
iv) (A + B).C = AC + BC
v) (AB)C = A(BC)
vi) $(AB)^t = B^tA^t$
vii) 0.A = A.0 = 0

Multiplicando matrizes

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz AB^t.

$$AB^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.1 & 1.0 + 2.2 & 1.2 + 2.3 \\ 3.1 + 4(-1) & 3.0 + 4.2 & 3.2 + 4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

5. MATRIZES INVERSAS

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se X é uma matriz tal que AX = In e XA = In, então X é chamada de matriz inversa de A e é indicada por A^{-1}. Vale ressaltar que nem toda matriz quadrada admite uma matriz inversa.

Exemplo:

1. Determine, se existir, a inversa da matriz:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Sendo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da condição de igualdade de duas matrizes, seguem os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ -2a+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ -2b+d=1 \end{cases}$$

Portanto,

$$A^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

1. (UFRRJ) Uma fábrica de guarda-roupas utiliza três tipos de fechaduras (dourada, prateada e bronzeada) para guarda-roupas em mogno e cerejeira, nos modelo básico, luxo e requinte. A tabela 1 mostra a produção de móveis durante o mês de outubro de 2005, e a tabela 2, a quantidade de fechaduras utilizadas em cada tipo de armário no mesmo mês.

Tabela1: Produção de armários em outubro de 2005.

Modelo / Madeira	Básico	Luxo	Requinte
Mogno	3	5	4
Cerejeira	4	3	5

Tabela 2: Fechaduras usadas em outubro de 2005

Tipo \ Madeira	Mogno	Cerejeira
Dourada	10	12
Prateada	8	8
Bronzeada	4	6

A quantidade de fechaduras usadas nos armários do modelo requinte nesse mês foi de:

a) 170
b) 192
c) 120
d) 218
e) 188

2. (UEL-PR) uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1- Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C.
2- O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que MC=P, onde M é matriz mensagem a ser decodificada.
3- Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1=a, 2=b, 3=c, ...,23=z
4- Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k,w e y.
5- O número zero corresponde ao ponto de exclamação.
6- A mensagem é lida, encontrando a matriz **M**, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: m_{11} m_{12} m13 m21 m22 m23 m31 m32 m33

Considere as matrizes

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 01 \end{pmatrix}$$

Com base nos conhecimentos e informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

a) Boasorte!
b) Boaprova!
c) Boatarde!
d) Ajudeme!
e) Socorro!

3. (UFAM) Sejam A, B e C matrizes quadradas quaisquer de ordem n. Então é correto afirmar que:

a) Se AB = AC, então B = C.
b) AB = BA
c) Se $A^2 = 0n$ (matriz nula), então A = 0n
d) (AB)C = A(BC)
e) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB+B^2$

4. (UERJ) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.
Determine:

$$\begin{pmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{pmatrix}$$

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;
b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

Referências bibliográficas

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática elementar: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas lineares**. São Paulo: Editora Atual, 2012. Vol. 4, cap. 4 – Sequências, matrizes, determinantes e sistemas.

WINTERLE, Paulo**. Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.