MATEMÁTICA APLICADA

Conjuntos Numéricos

Sérgio Candido de Gouveia Neto

Cuiabá, MT

1. CONJUNTOS

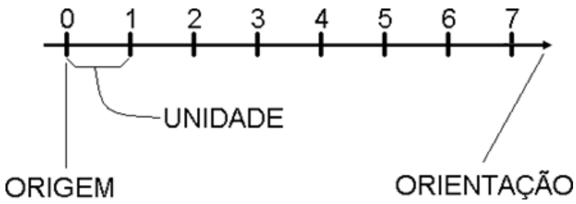
1.1 Conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é representado por uma letra N maiúscula com uma dupla barra, dessa forma:

$\mathbb{N}$

1. Os números naturais são os números de contagem mais o zero: $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \dots\}$

2. O conjunto dos números naturais pode ser representado sobre uma reta. Sobre esta reta, escolhemos um ponto que servirá de origem e corresponderá ao número zero. Tomaremos também uma unidade medida e uma orientação:



3. O conjunto dos números naturais possui importantes subconjuntos:

a) Conjunto dos números naturais não nulos:
$\mathbb{N}* = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7} \dots\}$

b) Conjunto dos números naturais pares:
$\boldsymbol{NP} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, \dots\}$

c) Conjunto dos números naturais ímpares:
$\boldsymbol{NI} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}, \mathbf{11}, \mathbf{13}, \dots\}$

d) Conjunto dos números naturais primos:
$\boldsymbol{P} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{17}, \mathbf{19}, \mathbf{23}, \dots\}$

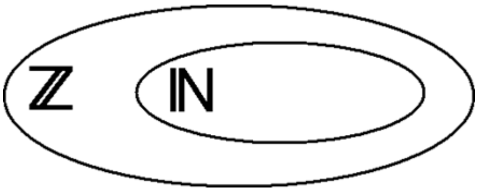
4. Dado dois números naturais m e n, podemos ter:
m=n ou m>n ou m<n
Sendo que:
Se m>n então (m-n) $\in \mathbb{N}*$
Se m<n então (m-n) $\notin \mathbb{N}$ (neste caso, precisamos de um outro conjunto, que representa os números negativos (inteiros).

1.2 Conjunto dos números inteiros

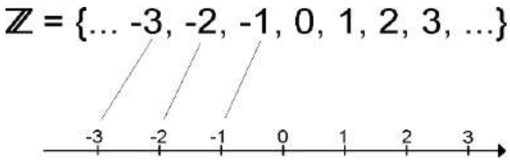
O conjunto é representado por uma letra Z com dupla barra, veja:

$\mathbb{Z}$

Os números inteiros são compostos pela união entre o conjunto dos números naturais e os números negativos. Assim, temos que:
$\mathbb{Z} = \{\dots -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}\ \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$



Podemos representar os números inteiros na reta numerada da seguinte forma:



Alguns subconjuntos dos inteiros são.

a) Conjunto dos números inteiros não nulos:
$\mathbb{Z}* = \{ . . . -3, -2, -1, 1, 2, 3 . . . \}$
b) Conjunto dos números inteiros não negativos:
$\mathbb{Z}+ = \{0, 1, 2, 3 . . . \} = \mathbb{N}$
c) Conjunto dos números inteiros positivos:
$\mathbb{Z}* = \{1, 2, 3, 4, . . . \}$
d) Conjunto dos números inteiros não positivos:
$\mathbb{Z}- = \{. . . -3, -2, -1, 0\}$
e) Conjunto dos números inteiros negativos:
$\mathbb{Z}* = \{. . . -5, -4, -3, -2, -1\}$

1.3. Valor absoluto (ou módulo) de um inteiro

Segundo Machado (1988), "Para todo número inteiro ***a*** existe um inteiro ***-a***, denominado oposto de a (ou simétrico de a), tal que $a+(-a)=0$" (p.34). Neste caso, um oposto de +5, é –(+5). Ainda de acordo com Machado (1988), "ao representarmos dois inteiros opostos na reta eles ficam situados um em cada lado e a mesma distância do zero. Esta distância é o valor absoluto (ou módulo) destes números" (p.34). Para todo inteiro k, definimos, então, o módulo de k e representamos por $| k |$ e lemos: "módulo de k".

Exemplo: O módulo de 5 e o módulo de -5 são iguais a 5. Podemos também, escrever desta forma: $| 5 | = 5$ e $| - 5| = 5$

1.4 Conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais é representado por uma letra Q com dupla barra:

$\mathbb{Q}$

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração: $\mathbb{Q} = \{x \mid x = a/b$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}*\}$

Todo número racional também pode ser escrito na forma de um decimal exato ou não exato desde que periódico.

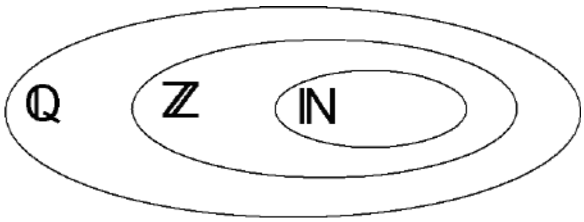
Por exemplo

a) Os decimais exatos finitos:
   ¼=0,25
   ½=0,5
b) Dízimas periódicas infinitas
   2/3= 0,66666…

No conjunto dos números racionais, podemos destacar os seguintes sub-conjuntos:

a) Conjunto dos números racionais não nulos, representado por $\mathbb{Q}^*$
b) Conjunto dos números racionais não negativos, representado por $\mathbb{Q}+$
c) Conjunto dos números racionais positivos, representado por $\mathbb{Q}*+$
d) Conjunto dos números racionais não positivos, representado por $\mathbb{Q}_-$
e) Conjunto dos números racionais negativos, representado por $\mathbb{Q}^*_-$

Todo número inteiro ou natural pode ser escrito como um fração com denominador 1, assim, consequentemente, os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Pelo diagrama, temos:



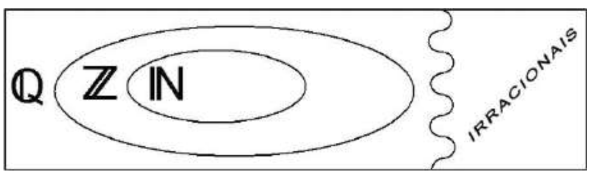
1.5 Conjunto dos números irracionais

Segundo Machado (1988), "há números decimais que podem ser escritos na forma decimal com infinitas casas decimais e não são periódicos" (p.40). Estes números não são racionais (não podem ser obtidos por divisão de dois inteiros). Eles são denominados de números irracionais.

Exemplos:

a) A raiz $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730\ \ldots$
b) A raiz $-\sqrt{3} = -1{,}73205080756\ \ldots$
c) O número $\pi = 3{,}1415926535897932\ \ldots$

Uma representação gráfica envolvendo todos os conjuntos numéricos que já estudamos: Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais pode ser:



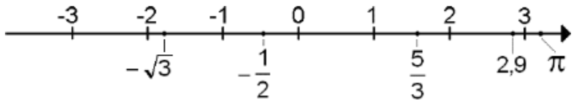
Até agora, cada conjunto que víamos continha o anterior, mas isto não acontece entre os racionais e os irracionais. Estes dois conjuntos se complementam e formam um novo conjunto chamado de CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS (representado pela letra $\mathbb{R}$)

1.6 Conjunto dos números reais

Denominamos número real a todo número racional ou irracional. Assim, o conjunto dos números reais, que representaremos por uma letra $\mathbb{R}$, é a união dos racionais ($\mathbb{Q}$) com os irracionais ($\mathbb{I}$). Podemos notar que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Os números reais podem ser representados numa reta de tal modo que todo número real corresponde a um e somente um ponto da reta e a todo ponto da reta corresponde um e somente um número real.



1.6.1 Inverso e Oposto

Todo número real com exceção do zero possui um inverso multiplicativo e um oposto aditivo. (o zero possui apenas o oposto).

O oposto aditivo (ou simplesmente oposto) de um número K é o número $-K$ e podemos dizer que:

$\forall k \in \mathbb{R}, \exists\ (-k) |\ k + (-k) = 0$ (Lemos: qualquer que seja k real, existe menos k tal que k mais menos k é igual a zero.)

O inversomultiplicativo (ou simplesmente inverso) de um número K é o número 1 e podemos dizer que:

$\forall k \in \mathbb{R}$- $\{0\}$, $\exists\ 1/k$ tal que $k \cdot (1/k) = 1$. (Lemos qualquer que seja k real não nulo, existe um sobre k tal que k vezes um sobre k é igual a um)

1.6.2 Intervalos Reais

O conjunto dos números reais possui subconjuntos denominados intervalos reais que são determinados por desigualdades como veremos agora. Para todas as situações a seguir, vamos considerar dois números reais a e b com a < b.

1. Intervalo aberto de extremos a e b.

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}\ |\ a < x < b\}$

2. Intervalo fechado de extremos a e b.

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}\ |\ a \leq x \leq b\}$

3. Intervalo aberto à direita (ou fechado à esquerda) de extremos a e b.

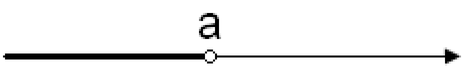
$[a;\ b\ [= \{x \in \mathbb{R}\ |\ a \leq x < b\}$

4. Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos **a** e **b**.

$]\,a;\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

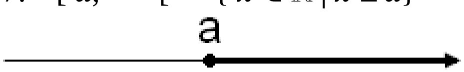
Temos também os intervalos indicados pelo infinito (∞).

5. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



6. $]-\infty, a\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

7. $[\,a, +\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



8. $]\,a, +\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Obs.:

- Os números **a** e **b** são denominados extremos dos intervalos.
- O intervalo é sempre **aberto** na notação de infinito.
- Podemos utilizar ( ) para indicar extremidade aberta nos intervalos

$[a;\ b\,[= [a;\ b)$, $]a;\ b] = (a;\ b]$ e $]a;\ b[= (a;\ b)$

1.6.3 Operações com Intervalos Reais

Exemplo: Dados os intervalos:

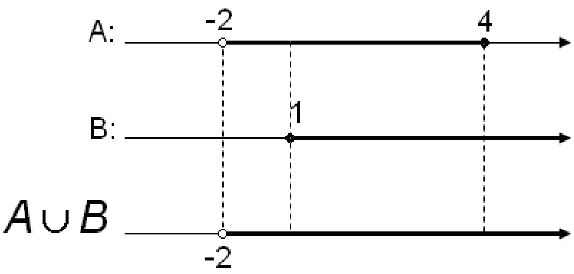
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$C = \,]-\infty; 3[$

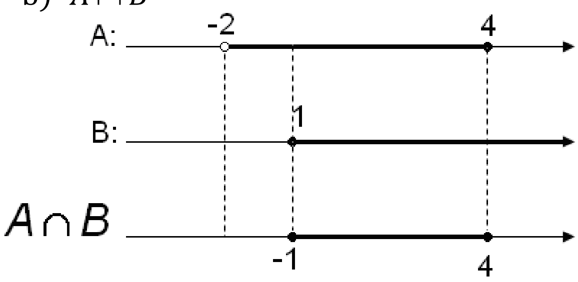
Determine:

a) $A \cup B$



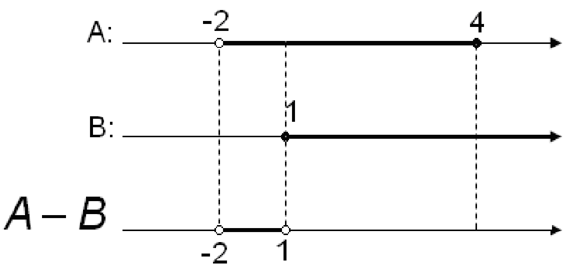
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$

b) $A \cap B$



$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

c) A – B



$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$$

EXERCÍCIOS

1. Determine $A \cap B$ e $A \cup B$ sendo
   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$.

2. Determine os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = -1\}$
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 0\}$

3. Calcule:

a) 20% de 1250
b) 160% de 450

4. No ano passado, o governo autorizou um aumento de 22% no preço dos remédios, porém a indústria resolveu aumentar apenas 80% da taxa autorizada. Responda:

a) Caso a indústria seguisse o aumento autorizado, qual seria o novo preço de um medicamento que originalmente custava $48,20?

b) De acordo com o aumento realizado pela indústria, qual o novo preço de um medicamento que custava $62,50?

5. Preencha as lacunas em cada item com $\in$ ou $\notin$:

a) $0,4$ _______ $\mathbb{Z}$

b) $\sqrt{2}$ __________ $\mathbb{Q}$

c) $0,343434\ldots$ __________ $\mathbb{Q}$

d) -1__________ $\mathbb{R}^*$

e) $\sqrt{16 \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ }}\mathbb{Q}$

f) $0,123456789101112\ldots$ __________ $\mathbb{Q}$

g) $\frac{16}{8}$ __________ $\mathbb{Z}$

h) 4__________ $\mathbb{Q}$

i) $\sqrt{-2}$ __________ $\mathbb{R}$

j) π__________ $\mathbb{R}$

k) $3,18$ __________ $\mathbb{Q}$

l) $\frac{1}{3}$__________ $\mathbb{Q}$

6. Faça a representação gráfica e a notação de intervalo para cada conjunto real abaixo:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

7. Determine $L \cup M$ e $L \cap M$ sendo:

$L = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \ ou \ x \geq 2\}$

$M =]-3, 3[$

8. Resolva, no campo dos reais, as seguintes inequações:
a)$5x - 20 > 0$
b) $-4x + 32 > 0$
c) $-3x + 8 < 6x + 2$

9. Determine o intervalo real que satisfaz, simultaneamente as duas inequações abaixo:
$4x - 3 < 6x + 7$
$3(x - 2) > 2x + 4$
(Dica: resolva independentemente cada uma das inequações e em seguida, faça a intersecção das soluções
10. Assim como foi feito na questão anterior, determine o intervalo real que satisfaz, simultaneamente as duas inequações:
a) $5 \leq 3x + 4$ e $6x + 1 < 4x + 7$
b) $3 - 2x \leq 1$ e $3x - 1 \leq 5$

Referências bibliográficas
MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática, Temas e Metas**. São Paulo, Atual, 1988.
VIDIGAL, Cássio. **Apostila de Conjuntos Numéricos**. Outro Preto, MG: IFMG – Campus Ouro Preto.