INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso

Campus Cuiabá
Bela Vista

Curso Tecnologia em Sistemas para Internet
UAB Núcleo de Educação a Distância

MATEMÁTICA APLICADA

Estudo das Funções

Sérgio Candido de Gouveia Neto

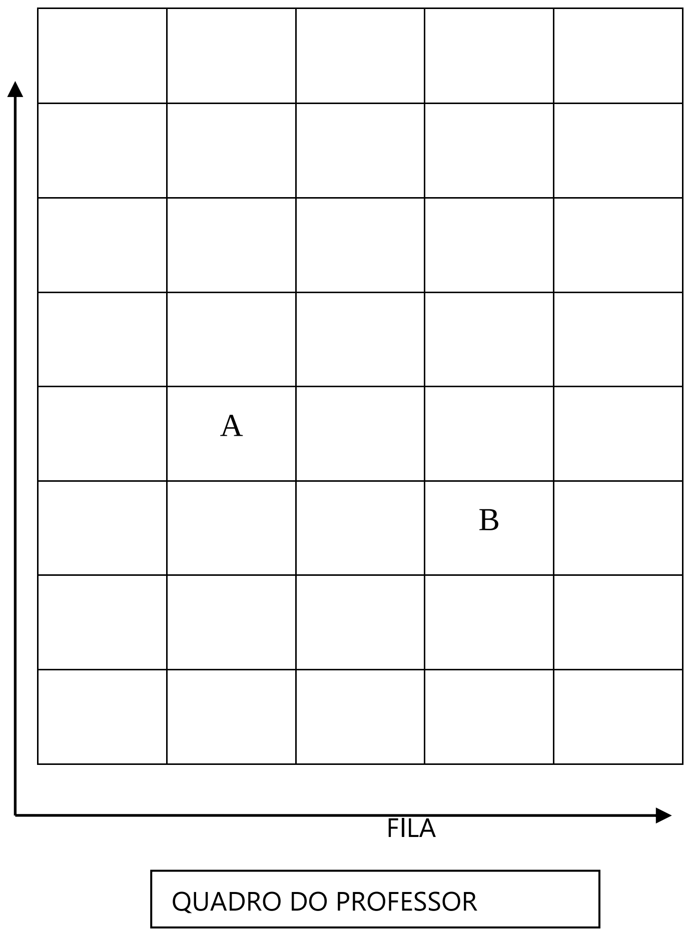
Cuiabá, MT

1. INTRODUÇÃO

Antes de estudar as funções, precisamos de algumas noções sobre par ordenado, produto cartesiano e relação.

2. PAR ORDENADO

Para discutirmos a noção de par ordenado, vamos imaginar uma sala de aula com 40 carteiras dispostas em 5 filas com 8 carteiras em cada fila. Se quisermos localizar a posição de um aluno, podemos dizer primeiro a fila e depois a posição da carteira. Por exemplo, um aluno A pode estar na segunda fila, na quarta carteira. Outro aluno B pode estar na quarta fila e terceira cadeira (Figura abaixo). De outra forma, podemos dar a localização destes alunos representando assim A = (2,4) e B = (4,3). Podemos adotar que o primeiro valor está no eixo x e o segundo valor no eixo y, assim, x=2 e y=4 para o aluno A.



3. PRODUTO CARTESIANO

Dado os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {1, 2}, podemos formar pares ordenados que tem o primeiro termo em A e o segundo em B. Dessa forma, segundo Machado (1988), "o conjunto formado pelos pares ordenados obtidos é denominado produto cartesiano de A por B e o indicamos por A x B (leia: A cartesiano B)". Temos, então,

A x B = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)}.

A x B = $\{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$

4. RELAÇÃO

Considere um subconjunto (R) de A x B, formado por uma lei de associação, por exemplo, onde o primeiro termo é menor ou igual ao segundo termo, neste caso, temos o seguinte subconjunto:

R = {(1,1), (1,2)}

R é uma relação de A em B $\Leftrightarrow R \subset AxB$

Exemplo: Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5, 7}. Determine as relações de A em B:

a) $R = \{(x, y) \in AxB$ |x+y=5}

Considerando a soma dos termos temos os pares: (2,3), (4,1)

Exercícios:

1) Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {4, 6, 8}, determinar, na forma tabular, os elementos da relação R entre A e B de tal modo que y seja o dobro de x

2) Dados os conjuntos: A = {-1, 0, 1, 2} B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e a relação R = {(x, y) $\in$ A X B | y = x + 1}, determinar: a) Os pares ordenados da relação R. b) O diagrama de flechas da relação. c) O gráfico cartesiano da relação. d) Os conjuntos D(R), CD(R) e Im (R).

3) Dados os conjuntos: M = {-3, -2, -1, 0, 1} N = {1, 2, 3, 5, 6} e a relação R = {(x, y) $\in$ A X B | y = x^2 + 1}, determinar: a) Os pares ordenados da relação R. b) O diagrama de flechas da relação. c) O gráfico cartesiano da relação. d) Os conjuntos D(R), CD(R) e Im (R)

5. FUNÇÃO

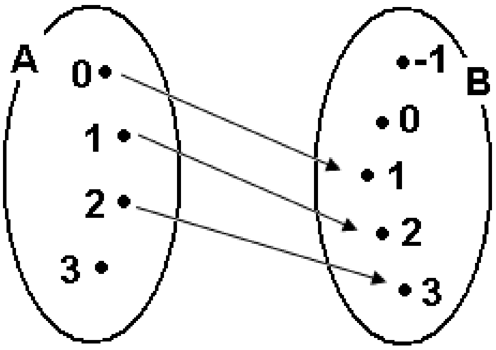
Dados dois conjuntos não vazios A e B*, uma relação f de A em B recebe a denominação de função de A em B se, e somente para todo $x \in A$ existe um único $(x; y) \in f$.

f é uma função de A em B $\Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists | \; y \in B \mid (x; y) \in f)$

É importante notar que:

• Todo elemento de A deve ser associado a um elemento de B; Para um dado elemento de A associamos um único elemento de B. De uma forma geral, f: A $\rightarrow$B é uma função se todo elemento do domínio possui somente uma imagem. Assim, nem toda relação é uma função, mas toda função é uma relação. Por exemplo, seja os os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = { -1, 0, 1, 2, 3} e as relações:

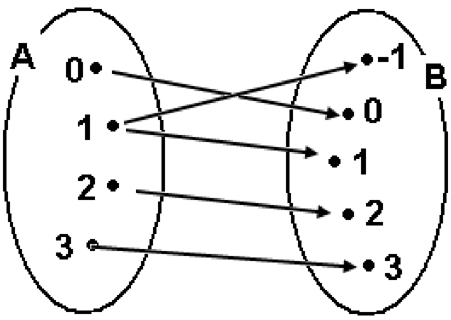
a) $R = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$. Nesta relação, temos:



Note que R = {(0; 1), (1; 2), (2; 3)}

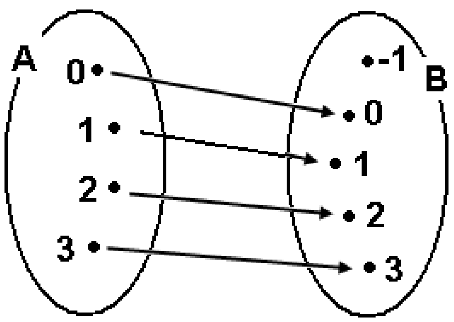
Observe também que para cada elemento $x \in A$ com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x; y) \in R$. Para o elemento $3 \in A$, não existe $y \in B$ tal que $(3; y) \in R$. Neste caso, como existe elemento de A que não possui imagem, R **NÃO** é uma função de A em B.

b) $S = \{(x; y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$. Nesta relação, temos:



S = {(0; 0), (1; -1), (1; 1), (2; 2), (3; 3)}. Note que para cada elemento x ∈ A, com exceção do 1, existe um só elemento y ∈ B tal que (x; y) ∈ S. Para o elemento 1, existem dois elementos de B, o 1 e o -1, tais que (1, -1) ∈ S e (1, 1) ∈ S. Assim, S **NÃO** é uma função pois existe elemento do domínio que possui mais de uma imagem.

c) T = {(x; y) ∈ A x B | y = x}. Nesta relação, temos:



T = {(0; 0), (1; 1), (2; 2), (; 3)}. Note que, para todo elemento x ∈ A sem exceção, existe um só elemento y ∈ B tal que (x; y) ∈ T. Então T **É UMA FUNÇÃO** de A em B.

De uma forma geral, devemos observar duas condições para que a relação de A em B seja uma função de A em B:

1. Deve sair flecha de TODOS os elementos de A.
2. Deve sair apenas uma flecha de cada elemento de A.

5.1. DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Dada uma função f: A → B sendo f = {(x, y) ∈ A x B}, assim como vimos nas relações, os valores que a ordenada y admite, formam o conjunto chamado IMAGEM.

Ex.: Dado A = {1, 2, 3, 4}, consideremos a função f(x) = 2x, temos:

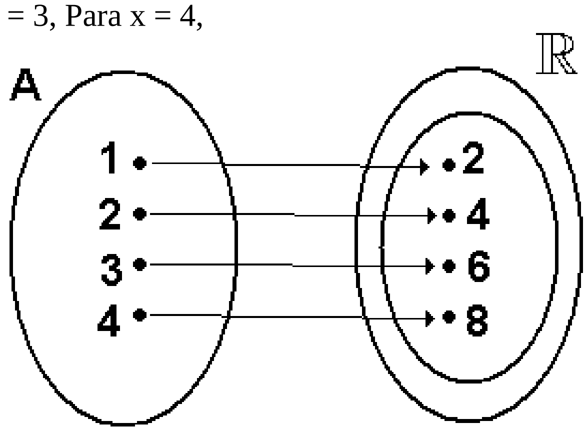
Para x = 1, Para x = 2, Para x = 3, Para x = 4,

$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$

$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$

$f(4) = 2 \cdot 4 = 8$



Considerando que toda função de A em B é uma relação binária então f tem uma imagem, e um domínio. Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x; y) \in f$. Como pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedades, temos, nas funções:

Domínio = conjunto de partida

É importante ressaltar que os elementos que formam o domínio são aqueles assumidos pela abscissa, desta forma, no plano cartesiano, o domínio são os valores neste eixo.

Exemplos:

a) Seja $f(x) = 2x$. Notemos que $2x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos, então que o $D = \mathbb{R}$

b)Seja $f(x) = 1/x$ Notemos que $1/x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, x é real diferente de zero, temos, então que $D = \mathbb{R}^*$

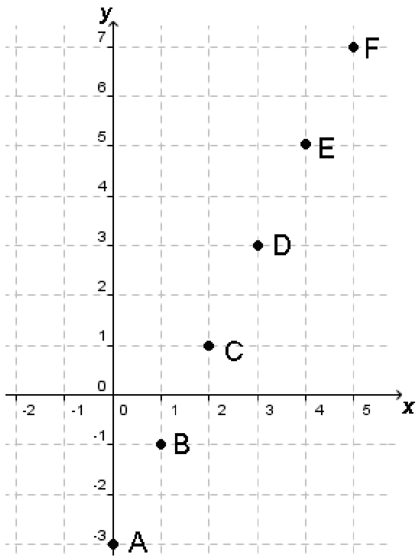
c) Seja $f(x) = \sqrt{x}$ Notemos que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, x é real e não negativo, então $D = \mathbb{R}_+$

5.2. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

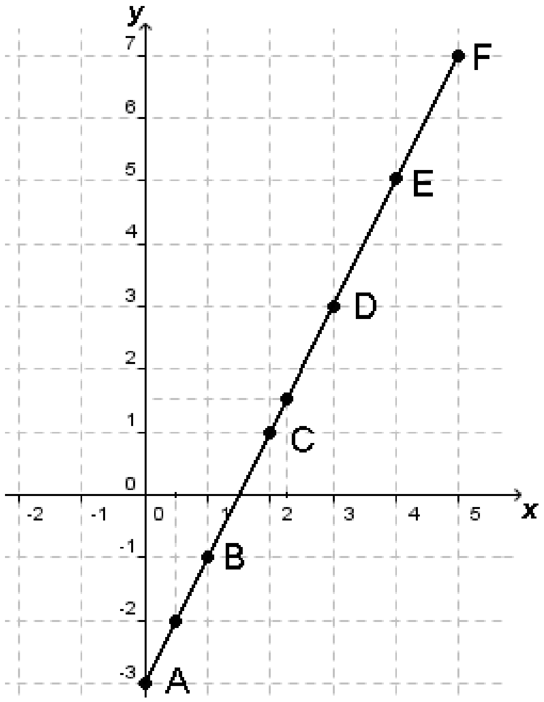
Quando o domínio e o contradomínio de uma função f são subconjuntos de $\mathbb{R}$, dizemos que f é uma função real de variável real. Neste caso, podemos fazer uma representação geométrica da função assinalando num sistema de coordenadas cartesianas os pontos $(x; y)$ com $x \in D$ e $y = f(x)$. Estes pontos formam o que chamamos de gráfico de f.

Exemplos:

a) Fazer o gráfico da função $f(x) = 2x-3$ definida no domínio $D(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Neste caso, O gráfico de f é formado pelos pontos A (0; -3), B (-1; 1), C (2; 1), D (3; 3), E (4; 5) e F (5; 7).



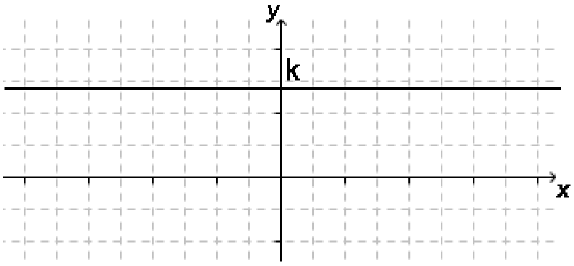
b) Fazer o gráfico da função f(x)=2x – 3 definida no domínio D(f) = {x ∈|0 ≤ x ≤ 5}.



5.3. FUNÇÃO CONSTANTE

Dado um número real k, podemos considerar uma função que a todo definida por f(x) = 2. Observamos que qualquer número real x faz corresponder o número k:

f: ℝ → ℝ, com f(x) = k (∀ x ∈ℝ). Esta função é denominada função constante. O gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas passado por todos os pontos de ordenada y = k. Observe que o domínio é D(f) = ℝ e a imagem é Im(f) = {k}.



EXERCÍCIOS

1) Faça o gráfico da função f(x) = 6 – x nos casos:

a) sendo o domínio D = {1; 2; 3; 4; 5}

b) sendo D = $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

c) D= $\mathbb{R}$

2) Faça o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por f(x) = - 1

5.4. FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas duas funções, podemos combiná-las de maneira que as saídas de uma função se tornem as entradas da outra. Isso define uma função composta.

Exemplo:

a) Se f(x)=3x-1 e g(x)=x^3+2, então quanto é f(g(3))?

Para calcular f(g(3)), uma forma é calcular "de dentro para fora". Em outras palavras, vamos calcular g(3), primeiro e então substituir esse resultado em f para encontrar nossa resposta. Vamos calcular g(x)= x^3+2, então g(3)=$(3)^3$+2=29. Como g(3)=29, então f(g(3))=f(29). Agora, vamos calcular f(29), então f(29)=3(29)-1=86.

Podemos compor a função g(x)=x3+2, podemos substituir x3+2 por g(x)

f(g(x)) = 3(g(x)) -1

f(g(x)) = 3(x^3+2) -1

f(g(x)) = 3x^3+6-1

f(g(x)) = 3x^3+5

Substituindo x em f(g(3))=3$(3)^3$+5=86

Definição: função *f* composta com a função *g*, podemos escrever $f \circ g$, que é lido como "*f composta* com *g*". Essa composição é definida pela seguinte regra: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

EXERCÍCIOS

1. Dadas as funções f(x)=2x e g(x)=x^3, calcule:

a) g(f(1)) b) g(f(10) c) f(g(1) d) f(g(10))

2. Dadas as funções f(x)=6x e g(x)=x^2, calcule:
a) $(g \circ f)(-1)$ b) $(g \circ f)(1)$

3. Seja f(x)=x^2+2x + 5. Calcule:
a) $f(\sqrt{2}+1)$ b) f(f(1)

5.5. FUNÇÃO INVERSA

De uma forma geral, Funções inversas são funções que "revertem" umas as outras. Por exemplo, se *f* leva a para b, então a inversa, f^{-1}, deve levar b para a.
Exemplo: Seja f(x) = 2x – 6 de R → R. Faremos f(x) = x e x = f(x), então temos que
x = 2 f(x) – 6
x+6=2f(x)

$$\frac{x+6}{2} = f(x)$$

$$f(x) = \frac{x+6}{2}$$

De uma forma geral, nem toda função é inversível, ou seja, nem sempre conseguimos encontrá-la. Para isso, a função precisa ser necessariamente bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Uma função é sobrejetora quando o conjunto imagem for igual ao contradomínio, isso significa que para todo elemento b no contradomínio existe um elemento em a, tal que f(a) = b. Para que uma função seja injetora, cada imagem possui um único correspondente associado a ela no contradomínio.

EXERCÍCIOS

1. Seja f: A → B, tal que f(x) = 5x – 3, uma função inversível, calcule o valor de $f^{-1}(7)$.
2. (UEL) Sendo f: R → R+* a função definida por f(x) = 2^x, determine a expressão que define a função inversa de f.

3. Seja a função f: R → R definida por f(x) = 4x – 3. Se f^{-1} é a função inversa de f, calcule $f^{-1}(5)$.

4. (UFPA) O gráfico de uma função f(x) = ax + b é uma reta que corta os eixos coordenados nos pontos (2, 0) e (0, -3). Determine o valor de f ($f^{-1}(0)$).

5. Suponha que a função f seja inversível e que sua lei de formação seja f(x) = 5x – 10. Determine a lei de formação da sua inversa.

6. Sabendo que a função f: A → B, com lei de formação f(x) = x^3 + 2, é inversível, determine a lei de formação da função inversa.

7. Dada a função bijetora f(x) = 2x – 4, determine o valor de f(f^{-1}(2)).

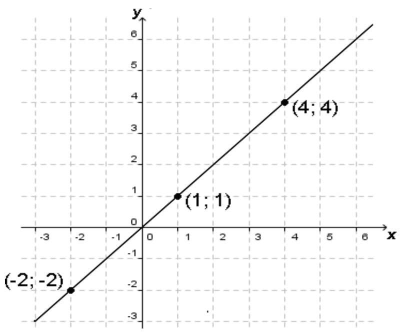
5.6. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

5.6.1. FUNÇÃO IDENTIDADE

Uma função f de ℝ em ℝ recebe o nome de função identidade quando associa a cada elemento x ∈ ℝ o próprio x, isto é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x$$

Desta forma, todos os pares ordenados que pertencem à função identidade são do tipo (a; a) e o gráfico que a representa contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

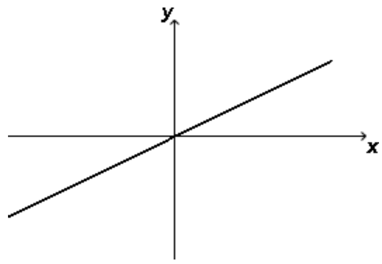


5.6.2. FUNÇÃO LINEAR

Uma função f de ℝ em ℝ recebe o nome de função linear quando associa a cada elemento x ∈ ℝ o elemento ax ∈ ℝ onde a ≠ 0 é o número real dado, isto é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = ax \; com \; a \neq 0$$

É possível demonstrar que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem, mas veremos esta demonstração mais a frente, num caso mais geral



Exemplo:

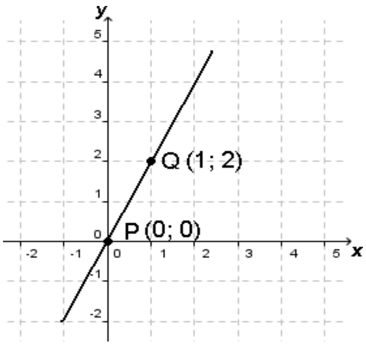
1) construir o gráfico da função $y = 2x$.

Vamos atribuir um valor não nulo a x e calcular o correspondente y = 2x.

x	$2 \cdot x$	y
1	$2 \cdot 1$	2

Agora devemos localizar, num sistema cartesiano, os pontos P(0; 0) e Q(1; 2) e traçar a reta PQ que será o gráfico procurado.

Note que Im(f) = ℝ.Veja o gráfico na coluna a seguir.



5.6.1. FUNÇÃO AFIM

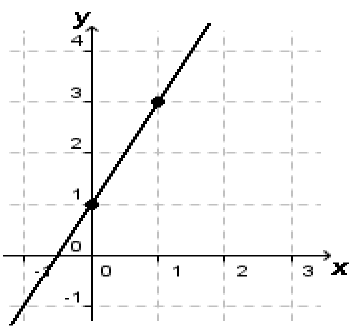
Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de Funão Afim quando associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $ax + b \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$, isto é: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.

Exemplos:

1) Construir o gráfico da função y = 2x + 1. Resolução: Sabendo que este gráfico é uma reta, vamos encontrar dois de seus pontos, localizá-los no plano cartesiano e, em seguida traçar a reta.

x	*2x+1*	***y***
0	*2 • 0 + 1*	***1***
1	*2 • 1 + 1*	***3***

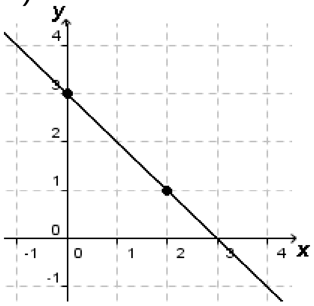
O gráfico da função, então, é uma reta que passa pelos pontos (0,1) e (1,3).



2) Construir o gráfico da função y = -x + 3. Resolução: De modo análogo, temos:

x	-x + 3	***y***
0	-0 + 3	***3***
2	-2 + 3	***1***

Assim, o gráfico da função, então, é a reta que passa pelos pontos (0; 3) e (2; 1)



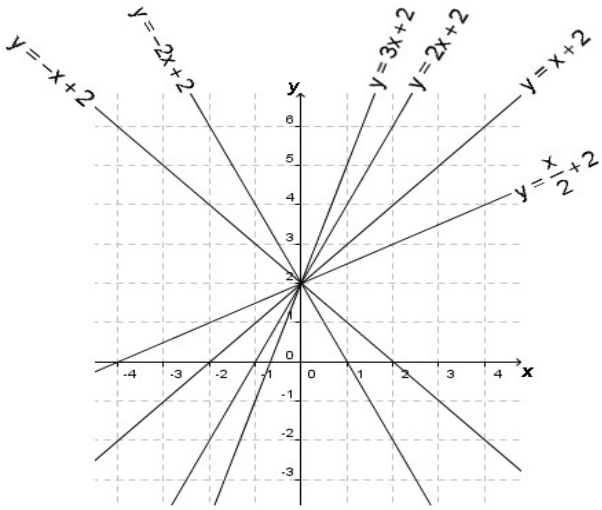
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

5.6.1.1. COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano. Já o coeficiente b da função $y = ax + b$ é denominado coeficiente linear. Os coeficientes a e b tem influência sensível no gráfico da função afim.

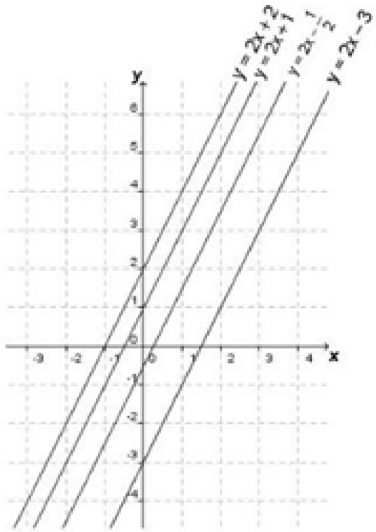
Exemplo:

a) Veja no plano cartesiano, gráficos de 6 funções. Note que em todos os casos, o coeficiente b não muda. A única variação é no coeficiente a.



Observe que a variação do coeficiente a faz variar a declividade da reta que representa o gráfico da função.

b) Agora você pode observar construções de funções que possuem o mesmo coeficiente angular variando, apenas, o coeficiente linear.



Veja neste caso, que a variação do coeficiente b faz variar o ponto em que a reta do gráfico da função toca o eixo OY.

5.6.1.21. ZERO DA FUNÇÃO AFIM

Zero ou raiz de uma função é todo número x cuja imagem é nula, isto é, f(x) = 0.

x é zero de y = f(x) ⇔ f(x) = 0

Assim, para determinar o zero de uma função afim, basta resolver a equação do 1º grau $ax + b = 0$ que apresenta uma única solução $x = -b$. Assim, para determinar o zero de uma função afim, basta resolver a equação do 1º grau $ax + b = 0$, que apresenta uma única solução $x = -b/a$.
Exemplo: Qual o zero da função f(x) = 2x – 1?
$2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = ½$. Logo, a raiz da função é ½

EXERCÍCIOS
1) Construa, num mesmo plano cartesiano, o gráfico das funções abaixo.
a) f(x) = x
b) g(x) = x + 3
c) h(x) = x – 3
d) f(x) = -x

e) g(x) = -x + 3

f) h(x) = -x – 3

2) Obter a equação da reta que passa pelo ponto (1; 3) e tem coeficiente angular igual a 2.

3) Obter a equação da reta que passa pelo ponto (-3; 1) e tem coeficiente angular igual a – 1.

4) Obter a equação da reta que passa pelo ponto (-2; 1) e tem coeficiente angular igual a 4.

5) Construa o gráfico de cada uma das funções apresentadas:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x+2$

c) $y = 3x+2$

6) Obter a equação da reta que passa pelos pontos:

a) (1; 2) e (3; -2).

b) (2; 3) e (3; 5)

c) (3; -2) e (2; -3)

d) (1; -1) e (-1; 2)

5.7. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

5.7.1. DEFINIÇÃO

Uma função quadrática ou função do 2º grau é toda função real do tipo $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais com $a \neq 0$.

Exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

onde a = 1, b = -3 e c = 2.

b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

onde a = _____b =____e c =

5.7.2. ZEROS ou RAÍZES

Chamam-se de raízes ou de zeros da função do 2º grau os valores de x que tornam nula a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Uma das técnicas utilizadas para encontrar as raízes de uma função do 2º grau é a Fórmula de Bhaskara amplamente conhecida e relativamente fácil de ser aplicada.

$$x = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo: Quais os zeros da função abaixo?

$f(x) = x^2 - 5x + 6.$

Resolvendo com a fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes 2 e 3.

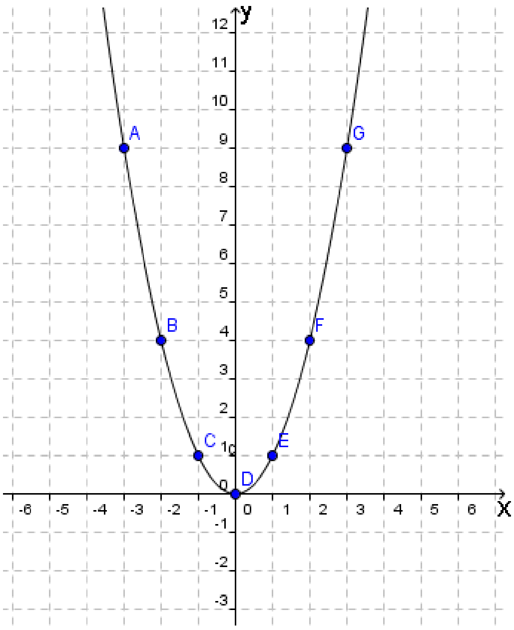
5.7.3. GRÁFICO

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exemplo: Construa o gráfico da função f(x) = x^2. Colocando alguns valores na tabela, temos:

x	x^2	y	
-3	$(-3)^2$	9	A = (-3; 9)
-2	$(-2)^2$	4	B = (-2; 4)
-1	$(-1)^2$	1	C = (-1; 1)
0	0^2	0	D = (0; 0)
1	1^2	1	E = (1; 1)
2	2^2	4	F = (2; 4)
3	3^2	9	G = (3; 9)

Vamos agora localizar, no plano cartesiano, os pontos encontrados na tabela.

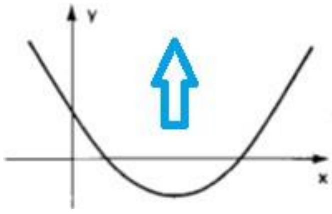


$D = \mathbb{R}$ e $Im = [0, \infty[$

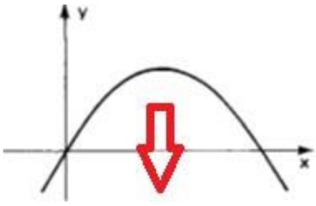
5.7.4. CONCAVIDE

A parábola que representa graficamente a função quadrática y = $ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo de acordo com o sinal do coeficiente a.

a) Se, a>0 a parábola tem a concavidade voltada para cima.



Se a<0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



5.7.5. VÉRTICE

No item anterior, vimos um gráfico da função do segundo grau, no formato de uma parábola. A parte mais baixa ou mais alta do gráfico, é chamado de vértice da parábola e está localizado sobre o seu eixo de simetria. As coordenadas no vértice da parábola podem ser encontradas a partir dos coeficientes por meio da fórmula:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Exemplo: Determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Colocando os valores de a=1, b=-4 e c=3, temos que o vértice é V (2,-1).

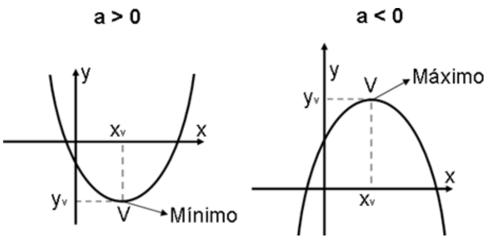
5.7.6. MÁXIMO OU MÍNIMO

Dada uma função f podemos dizer que ela admite máximo se, e somente se existe x_m, $x_m \in D(f)$ tal que: $f(x_m) \geq f(x)\ \forall x \mid x \in D(f)$

O número $f(x_m)$ é chamado de valor máximo de f. E podemos dizer que ela admite mínimo se, e somente se existe x_m, $x_m \in D(f)$ tal que:

$$f(x_m) \leq f(x)\ \forall x \mid x \in D(f)$$

O número $f(x_m)$ é chamado de valor mínimo de *f*. De uma forma geral, ser por um lado, uma função quadrática admite ponto de máximo no vértice quando a < 0. Por outro lado, uma função quadrática admite ponto de mínimo no vértice quando a > 0.



EXERCÍCIOS

1) Em cada uma das funções quadráticas a seguir, determine o vértice da parábola da representação gráfica e aponte a direção da concavidade da parábola. Determine também a imagem da função.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

b) $y = -x^2 + 4x$

c) $f(x) = -x2 + 5x - 3$

d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$

2) A produção de um funcionário, quando relacionada ao número de horas trabalhadas, leva à função $P= - 2t^2+24t+128$
a) Esboce o gráfico ressaltando os principais pontos
b) Em que momento a produção é máxima? Qual a produção máxima?
c) Em que momento a produção é igual à produção inicial?
d) Em que momento o funcionário não consegue mais produzir?
e) Quais os intervalos de crescimento e decrescimento para produção?

3) O preço do trigo varia no decorrer dos meses de acordo com a função $p=0,25t^2-2,5t+60$ para um período de um ano.
a) Esboce o gráfico ressaltando os principais pontos.
b) Em que momento o preço é mínimo? Qual o preço mínimo?
c) Qual a variação percentual entre o momento inicial e final do terceiro mês? E a variação percentual entre os finais do terceiro e sétimo mês?

Referências bibliográficas

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática, Temas e Metas**. São Paulo, Atual, 1988.

VIDIGAL, Cássio. **Apostilas Funções, Função Afim e Quadrática**. Outro Preto, MG: IFMG – Campus Ouro Preto.