→ número de courant

Ecuación de onda. (1r orden lineal) ($\lambda = \alpha \Delta t / \Delta x \leq 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\delta u}{\partial x} = 0$$

Donde:

u = Amplitud de onda

C : Velocidad de onda

Para hallar la estabilidad se usa el tiempo progresivo y espacio:

$$\frac{u_j^{p+1} - u_j^p}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^p - u_j^p}{\Delta x}$$

Despejamos u_j^{p+1}

$$u_j^{p+1} = \left[\frac{-C(u_{j+1}^p - u_j^p)}{\Delta x} \cdot \Delta t \right] + u_j^p$$

Ahora consideramos el error de la forma:

$$\varepsilon_j^p = e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$$

Reemplazamos en la formula anterior

$$\varepsilon_j^{p+1} = \left[\frac{-C(\varepsilon_{j+1}^p - \varepsilon_j^p) \Delta t}{\Delta x} \right] + \varepsilon_j^p$$

Reescribimos el error para cada termino ε

$$\varepsilon_j^{p+1} = e^{\gamma(p+1)\Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$$

$$= e^{\gamma \Delta t} e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$$

$$\varepsilon_{j+1}^p = e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m (j+1) \Delta x}$$

$$= e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x} e^{i \beta_m \Delta x}$$

$$\varepsilon_{j-1}^p = e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x} e^{-i \beta_m \Delta x}$$

$$\varepsilon_j^p = e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$$ (Igual que $p+1$ pero sin el primer termino $e^{\gamma(p+1)}$)

Reemplazando nuevamente:

$$e^{\gamma \Delta t} e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$$

$$= \left[-C(e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x} e^{i \beta_m \Delta x} - e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}) \Delta t \right] / \Delta x + e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$$

Factor comun:

$$= e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x} \left[\frac{-C(e^{i \beta_m \Delta x} - 1) \Delta t}{\Delta x} \right) + " "$$

= Pasamos a dividir el termino $e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}$

$$e^{\gamma \Delta t} = \frac{\cancel{e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}}}{\cancel{e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}}} \left[\frac{-C(e^{i \beta_m \Delta x} - 1) \Delta t}{\Delta x} \right] + \frac{\cancel{e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}}}{\cancel{e^{\gamma p \Delta t} e^{i \beta_m j \Delta x}}}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{-c(e^{i \beta_m \Delta x} - 1) \Delta t}{\Delta x} + 1$$

Usando en número de courant, reemplazamos en la fórmula de antes

$$\frac{C \Delta t}{\Delta x} = C$$

$$e^{\gamma \Delta t} = -C(e^{i \beta_m \Delta x} - 1) + 1 \quad \star$$

Usando un factor de amplificación

$$G = \frac{\varepsilon_j^{p+1}}{\varepsilon_j^p}$$

Reescribimos el error

$$\frac{e^{\gamma\Delta t} \; e^{\gamma p \Delta t} \; e^{i\beta m j \Delta x}}{e^{\gamma p \Delta t} \; e^{i\beta m j \Delta x}}$$

$$\Rightarrow e^{\gamma\Delta t} = G$$

Ahora volvemos a ⭐ para expandir

$$e^{\gamma\Delta t} = -C(e^{i\beta m \Delta x} - 1) + 1$$

$$= -Ce^{i\beta m \Delta x} + C + 1$$

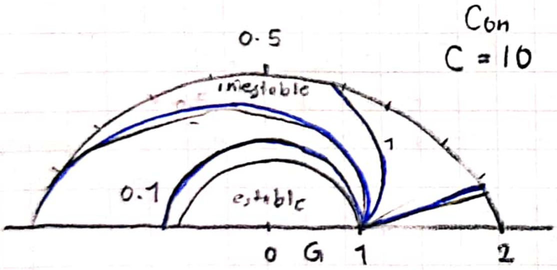
Tomamos el valor absoluto

$$|-Ce^{i\beta m \Delta x} + C + 1|$$

Para hallar la estabilidad usamos $G \leq 1$ o $e^{\gamma\Delta t} \leq 1$

$$|-Ce^{i\beta m \Delta x} + C + 1| \leq 1$$

Si graficamos el problema tenemos:



Con $C = 10$

Aqui se puede ver que no es estable para cualquier paso discretizado de tiempo o espacio

Pero al usar FTBS (Forward time backward space)

la formula se puede reescribir de la forma

$$\frac{e^{\gamma\Delta t} - 1}{\Delta t} + \frac{C(1 - e^{i\beta m \Delta x})}{\Delta x} = 0$$

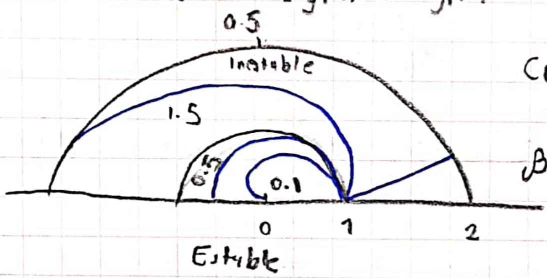
Con:

$$\frac{2\pi}{N} \leq \beta m \Delta x \leq \pi$$

Ahora usando nuevamente el valor absoluto:

$$|-Ce^{i\beta m \Delta x} + C + 1| = G$$

Obtenemos la siguiente gráfica:



Con $C = 10$ y $\beta m \Delta x / \pi$

Aqui se observa como para valores menores a 1 el valor esta en la zona estable