En este proyecto se utiliza la cuadratura Gaussiana la cual plantea que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Para el problema de integración más simple mencionado anteriormente, es decir, $f(x)$ está bien aproximado por polinomios en $[-1, 1]$, los polinomios ortogonales asociados son polinomios de Legendre, denotados por $P_n(x)$. Con el polinomio n-ésimo normalizado para dar $P_n(1) = 1$, el i-ésimo punto de Gauss, x_i, es la raíz i-ésima de P_n y los pesos están dados por la fórmula (Hildebrand 1956, pág. 324).

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{(n+1)^2[P_{n+1}(x)]^2}$$

Una integral sobre $[a, b]$ debe cambiarse por una integral sobre $[-1, 1]$ antes de aplicar la regla de la cuadratura gaussiana. Este cambio de intervalo se puede hacer de la siguiente manera:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2})d\xi$$

La aplicación de la cuadratura Gaussiana (ξ, w) para n puntos da como resultado la siguiente aproximación:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{a+b}{2})$$

El error de la Cuadratura Gaussiana se puede establecer de la siguiente manera (Stoer y Bulirsch 2002, Teorema 3.6.24). Para un integrando que tiene 2n derivadas continuas:

$$\int_{a}^{b} w(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(p_n, p_n)$$

Para algunos ξ en (a, b), donde p_n es el polinomio mónico ortogonal de grado n y donde

$$(f, g) = \int_{a}^{b} w(x)f(x)g(x)dx$$

En el caso especial importante de $w(x) = 1$, tenemos la estimación del error (Kahaner, Moler & Nash 1989, pág. 5.2)

$$\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \qquad a < \xi < b$$

Stoer y Bulirsch comentan que esta estimación de error es inconveniente en la práctica, ya que puede ser difícil estimar la derivada de orden $2n$, y además el error real puede ser mucho menor que un límite establecido por la derivada. Otro enfoque es utilizar dos reglas de cuadratura gaussianas de diferentes órdenes y estimar el error como la diferencia entre los dos resultados. Para este propósito, las cuadraturas de Gauss-Kronrod pueden ser útiles.