SUPORT PENTRU CURSUL 1
Proprietăţi remarcabile ale mulţimii numerelor reale
Şiruri fundamentale de numere reale

4 octombrie 2012

De-a lungul anilor de şcolă s-au întâlnit, treptat, aşa cum ele au fost construite de civilizaţia omenească, diferite submulţimi ale mulţimii numerelor reale: mulţimea numerelor naturale, mulţimea numerelor întregi, mulţimea numerelor raţionale, mulţimea numerelor iraţionale şi, ca o reuniune a ultimelor două, mulţimea numerelor reale. Ulterior, la începutul studiului analizei matematice, s-a dat definiţia axiomatică a mulţimii numerelor reale.

Scopul acestui curs este acela de a puncta câteva dintre cele mai importante proprietăţi ale numerelor reale, pornind de la acea definiţie a numerelor reale.

Cursul este însoţit de două anexe, cuprinzând noţiuni şi proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi şi a relaţiilor, respectiv o trecere în revistă a principalele proprietăţi ale şirurilor de numere reale, proprietăţi cunoscute din liceu.

1 Mulţimea numerelor reale

Definiţia axiomatică a mulţimii numerelor reale

Numim mulţime a numerelor reale un corp comutativ total ordonat $(R,+,\cdot,\leq)$ *în care este verificată axioma existenţei supremumului: orice submulţime nevidă şi minorată a lui* R *are un supremum.*

I) Ce înţelegem prin faptul că $(R,+,\cdot)$ este *corp comutativ*?

Sunt îndeplinite următoarele axiome:

R1. $(x+y)+z = x+(y+z),\ \forall\ x,y,z\in R$;

R2. există un element al lui R pe care-l notăm cu 0, şi-l numim elementul nul, astfel încât $x+0 = x, \forall x\in R$;

R3. pentru fiecare $x\in R$, există un element al lui R pe care îl notăm cu $-x$, şi-l numim opusul lui x, în aşa fel încât $x+(-x) = 0$;

R4. $x+y = y+x, \forall, x,y\in R$;

R5. $(xy)z = x(yz), \forall x,y,z\in R$;

R6. există un element în $R\setminus\{0\}$, pe care-l notăm cu 1 şi-l numim element unitate, astfel încât $x\cdot 1 = x, \forall x\in R$;
R7. pentru fiecare element $x\in R\setminus\{0\}$, există un element al lui R, pe care-l notăm cu x^{-1} sau $1/x$ şi-l numim inversul lui x, astfel încât $xx^{-1} = 1$;
R8. $xy = yx, \forall x,y\in R$;
R9. $x(y+z) = xy+xz, \forall x,y,z\in R$.

II) Ce înţelegem prin faptul că $(R,+,\cdot,\leq)$ este corp comutativ total ordonat ?

Am precizat ce înseamnă corp comutativ. Cuvintele adăugate în plus *total ordonat* implică faptul că $\leq$ este o *relatie de ordine totală, compatibilă cu structura algebrică.*

Relaţia $\leq$ este *relaţie de ordine* pe R dacă sunt adevărate următoarele propoziţii:
R10. $x\leq x, \forall x\in R$;
R11. dacă $x,y\in R$ şi dacă $x\leq y$, şi $y\leq x$, atunci $x=y$.
R12. dacă $x,y,z\in R$ şi dacă $x\leq y$ şi $y\leq z$, atunci $x\leq z$.

Relaţia $\leq$ este relaţie de ordine *totală*, dacă este relaţie de ordine şi, în plus,
$R13$. oricare ar fi x şi y elemente ale lui R avem $x\leq y$ sau $y\leq x$.

Relaţia $\leq$ este *compatibilă cu structura algebrică*, adică:
R14. dacă $x,y\in R$ şi $x\leq y$, atunci $x+z\leq y+z, \forall x, y, z\in R$;
R15. dacă $x,y\in R$, $x\leq y$ şi dacă $0\leq z$, atunci $xz\leq yz$.

III) Ce înţelegem prin: submulţimea nevidă şi mărginită a lui R are un supremum?

Mulţimi mărginite şi mulţimi nemărginite

Fie R o mulţime pe care s-a definit o relaţie de ordine totală $\leq$ şi fie $A\subseteq R$.

Un element $r\in R$ se numeşte:
- minorant al mulţimii A, dacă $r\leq a$, oricare ar fi $a\in A$;
- majorant al mulţimii A, dacă $a\leq r$, oricare ar fi $a\in A$.

O submulţime A a lui R poate avea sau nu majoranţi şi minoranţi.

Mulţimea $A\subseteq R$, se numeşte:
- mărginită inferior sau minorată, dacă ea are cel puţin un minorant, adică există $r\in\mathbb{R}$ a.î, $r\leq a, \forall a\in A$;
- mărginită superior sau majorată, dacă ea are cel puţin un majorant, adică există $r\in\mathbb{R}$ a.î, $a\leq r, \forall a\in A$;
- mărginită, dacă ea este majorată şi minorată, adică există $\underline{r},\overline{r}\in R$ a.î,

$$\underline{r}\leq a\leq\overline{r},\ \forall a\in A;$$

- nemărginită, dacă ea nu este mărginită.

Cel mai mic şi cel mai mare element al unei mulţimi

Fie R o mulţime pe care s-a definit o relaţie de ordine totală $\leq$ şi fie $A\subseteq R$.

Un element $a\in A$ se numeşte:
i) cel mai mic element al mulţimii A, dacă $a\leq x$, oricare ar fi $x\in A$;
ii) cel mai mare element al mulţimii A, dacă $x\leq a$, oricare ar fi $x\in A$.

O mulţime A poate să aibă sau să nu aibă un cel mai mic (respectiv cel mai mare element) dar, dacă acesta există, atunci el este unic şi se notează cu $\min A$ (respectiv cu $\max A$).

Supremumul şi infimumul unei mulţimi

Fie R o mulţime pe care s-a definit o relaţie de ordine totală $\leq$ şi fie $A \subseteq R$.

Un element $r \in \mathbb{R}$ se numeşte:
- infimum al mulţimii A, dacă este cel mai mare element al mulţimii minoranţilor lui A;
- supremum al mulţimii A, dacă este cel mai mic element al mulţimii majoranţilor lui A.

O submulţime A a lui R poate avea cel mult un supremum care, în caz de existenţă, se notează cu $\sup A$. De asemenea, o submulţime A a lui R poate avea cel mult un infimum care, în caz de existenţă, se notează cu $\inf A$.

Remarcăm că, dacă mulţimea A are supremum şi $\sup \in A$, atunci A are un cel mai mare element şi $\max A = \sup A$. De asemenea, dacă mulţimea A are infimum şi $\inf \in A$, atunci A are un cel mai mic element şi $\min A = \inf A$.

Prin urmare, numim mulţime a numerelor reale o mulţime R înzestrată cu două operaţii interne numite:

- adunare - care face ca fiecărei perechi $(x, y) \in R \times R$ să-i corespundă un element al lui R notat cu $x + y$ şi numit sumă a elementelor x şi y, respectiv
- înmulţire - care face ca fiecărei perechi $(x, y) \in R \times R$ să-i corespundă un element al lui R notat cu xy şi numit produs al numerelor x şi y, precum şi cu
- o relaţie binară, notată $\leq$ şi numită ordine,

astfel încât următoarele să fie verificate cerinţele [R1]-[R16], numite şi axiomele numerelor reale.

Observaţia 1.1. Ţinând cont de faptul că dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci şi $-a \in \mathbb{R}$, este uşor de arătat că axioma existenţei supremumului este echivalentă cu următoarea propoziţie: *orice submulţime nevidă şi mărginită inferior a lui $\mathbb{R}$ admite infimum*, propoziţie cunoscută sub denumirea de axioma existenţei infimumului.

Remarcăm faptul că:

- Axiomele R1-R16 nu constituie un sistem independent de axiome.
- Viaţa de zi cu zi ne dovedeşte intuitiv că există o mulţime care verifică axiomele mulţimii numerelor reale, dar matematicienii au dorit să arate efectiv cum poate fi construită ea riguros. Există diverse încercări de construire efectivă a mulţimii numerelor reale. Până în prezent, toate acestea se bazează pe existenţa unei mulţimi care verifică axiomele lui Giuseppe Peano (vezi teorema 1.3), mulţime care încă nu a putut fi obţinută decât făcând apel la axioma infinitului. Utilizând procedeul clasic de trecere de la mulţimea numerelor naturale la cea a numerelor întregi şi apoi la cea a numerelor raţionale, se ajunge uşor, plecând de la o mulţime care verifică axiomele lui G. Peano, la un corp comutativ total ordonat. Odată obţinut acesta, există cel

puţin patru modalităţi diferite de construire a unei mulţimi care să verifice axiomele R1-R16 şi anume:
- construcţia lui Richard Dedekind, care face apel la noţiunea de tăietură (a se vedea [5]);
- construcţia lui Georg Cantor care utilizează noţiunea de şir fundamental(a se vedea spre exemplu [6];
- construcţia lui Karl Weierstrass care se bazează pe fracţii zecimale (a se vedea spre exemplu [5]);
- construcţia cu ajutorul cleştilor (a se vedea spre exemplu [5]).

- Se poate demonstra (a se vedea [4]) că mulţimea numerelor reale este unică abstracţie făcând de un izomorfism.

În cele ce urmează vom fixa un sistem $(R, +, \cdot, \leq)$ care verifică axiomele R1-R16, sistem pe care, pentru a simplifica scrierea îl vom nota prin $\mathbb{R}$. Convenim ca prin scrierea $x \in \mathbb{R}$ să înţelegem faptul că x este un element al mulţimii R din sistemul $\mathbb{R}$. Orice element al mulţimii R din $\mathbb{R}$ va fi numit număr real. Orice număr real x, cu $0 \leq x$ se a numi număr pozitiv şi orice număr real x, cu $x \leq 0$ se a numi număr negativ. Numărul real 0 este singurul număr real care este atât număr pozitiv cât şi negativ.

Mulţimea numerelor reale pozitive o vom nota prin $\mathbb{R}_+$, iar mulţimea numerelor reale negative, prin $\mathbb{R}_-$. Avem deci:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x\} \quad \text{şi} \quad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}.$$

Vom mai introduce notaţiile

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^*_- = \mathbb{R}_- \setminus \{0\}.$$

Dacă x şi y sunt numere reale cu $x \leq y$ şi $x \neq y$, vom nota acest lucru scriind $x < y$. De asemenea utilizăm notaţia $x > y$ pentru $y < x$ şi notaţia $x \geq y$, în loc de $y \leq x$.

1.1 Submulţimi remarcabile ale mulţimii numerelor reale*

Mulţimi inductive O submulţime A a mulţimii numerelor reale se numeşte inductivă, dacă îndeplineşte următoarele cerinţe:
i) $0 \in A$;
ii) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in A$.

Exemplu. Mulţimea numerelor reale şi mulţimea numerelor reale pozitive sunt exemple de mulţimi inductive. Mulţimea numerelor reale negative nu este o mulţime inductivă.

Definiţie. *Intersecţia tuturor submulţimilor inductive ale lui* $\mathbb{R}$ *se numeşte mulţimea numerelor naturale şi se notează cu* $\mathbb{N}$.

Elementele lui $\mathbb{N}$ *se numesc numere naturale.*

Notăm $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Remarcăm că în unele lucrări, vezi spre exemplu [1], mulţimea inductivă se defineşte utilizând în locul condiţiei (i), condiţia (i') $1 \in A$. Înlocuirea condiţiei (i) cu (i') are ca şi consecinţă faptul că 0 nu mai este considerat număr natural şi, drept urmare, cel mai mic număr natural este 1. O tratare mai amănunţită a mulţimii $\mathbb{N}$ se găseşte în [2].

Teorema 1.1 *(principiul inducţiei matematice) ([2], teorema 6.6.1). Orice submulţime inductivă a lui $\mathbb{N}$ este egală cu $\mathbb{N}$.*

Principiul inducţiei matematice poate fi reformulat sub o formă mult utilizată în aplicaţiile practice.

Fie $p \in \mathbb{N}$. Să notăm prin PA mulţimea propoziţiilor adevărate, prin PF mulţimea propoziţiilor false şi prin $\mathbb{N}_p$ mulţimea

$$\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} \,|\, p \leq n\}.$$

Teorema 1.2 *(o formulare echivalentă a principiului inducţiei matematice) ([2], teorema 6.2.1). Dacă $f : \mathbb{N}_p \to PA \cup PF$ este o funcţie cu proprietăţile:*
i) $f(p) \in PA$ şi
ii) pentru $n \in \mathbb{N}_p$ cu $f(n) \in PA$ avem $f(n+1) \in PA$, atunci $f(k) \in PA$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}_p$.

Funcţia $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dată prin

$$s(n) = n + 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

se numşte funcţia de succesiune, iar numărul $n+1$ se numeşte succesorul lui n. Numărul 0 nu este succesorul nici unui alt număr natural. Succesorul lui 0 este 1. Succesorul numărului 1 este numărul 1+1, care se notează cu simbolul 2. Procedeul poate fi continuat la nesfârşit. Submulţimea numerelor naturale care se obţine prin aplicarea repetată a funcţiei de succesiune este egală cu mulţimea $\mathbb{N}$ în baza teoremei 1.1. Deci toate numerele naturale sunt cuprinse în succesiunea

$$0, 1, 2, ..., n, \; n+1, \; ...$$

care mai poartă numele de şirul numerelor naturale.

Teorema 1.3 *(axiomele lui G. Peano) ([2], observaţia 6.1.1). Orice submulţime M alui $\mathbb{R}$ care are proprietatea că $0 \in M$ şi pentru care există o funcţie $s : M \to M$ cu proprietăţile:*
i) s este injectivă;
ii) $s(p) \neq 0$, oricare ar fi $p \in M$;
iii) dacă $A \subseteq M$ şi $0 \in A$, atunci $s(A) \subseteq M$ implică $A = M$,
este egală cu mulţimea numerelor naturale.

1.2 Mulţimea numerelor întregi

DEFINIŢIE. *Se numeşte mulţime a numerelor întregi, şi se notează cu* $\mathbb{Z}$, *submulţimea mulţimii numerelor reale ale cărei elemente sunt numerele naturale şi opusele lor. Orice element al mulţimii* $\mathbb{Z}$ *se numeşte număr întreg.*

Notăm $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1.3 Mulţimea numerelor raţionale

DEFINIŢIE. *Se numeşte mulţime a numerelor raţionale şi se notează cu* $\mathbb{Q}$, *mulţimea*

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^* \}.$$

Elementele mulţimii $\mathbb{Q}$ *se numesc numere raţionale.*

Notăm $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

1.4 Mulţimea numerelor iraţionale

DEFINIŢIE.. *Mulţimea* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *se numeşte mulţimea numerelor iraţionale, iar elementele ei se numesc numere iraţionale.*

EXEMPLUL 1.1. În conformitate cu teorema lui Pitagora, pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel, cu lungimea catetei egală cu 1 este egal cu 2.

Să considerăm mulţimea $A = \{r \in \mathbb{R}_+ | r^2 \leq 2\}$. Această mulţime este nevidă căci $0 \in A$. Mulţimea este majorată, un majorant al său fiind 2. În baza axiomei existenţei supremumului, mulţimea A are un supremum. Să-l notăm cu c.

Să considerăm acum mulţimea $B = \{r \in \mathbb{R}_+ | r^2 \geq 2\}$. Această mulţime este nevidă căci $2 \in A$. Mulţimea este minorată, un minorant al său fiind 0. În baza observaţiei 1.1, mulţimea B are un infimum. Să-l notăm cu d.

Să observăm că $r \leq s$, oricare ar fi $r \in A$ şi oricare ar fi $s \in B$. Prin urmare $c \leq d$. Pe de altă parte avem $2 \leq c^2 \leq d^2 \leq 2$, ceea ce ne conduce la concluzia că $c^2 = d^2 = 2$. S-a făcut convenţia ca, numărul real cu proprietatea că pătratul său este doi, să fie notat cu $\sqrt{2}$. Ca urmare, lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel, cu lungimea catetei egală cu 1 este un număr real. El însă nu este un număr raţional. Dacă ar fi raţional, ar exista numerele naturale m şi n, prime între ele astfel încât intregi $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. De aici deducem că $m^2 = 2n^2$, ceea ce implică faptul că $2|m$. Există deci $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m = 2p$. Atunci avem $4p^2 = 2n^2$, adică $2p^2 = n^2$. Deducem că $2|n$. Prin urmare numerele naturale n şi m nu sunt prime, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea că $\sqrt{2}$ nu este un număr raţional.

Acest exemplu ne dovedeşte şi faptul că există numere reale care nu sunt raţionale, sau că există numere iraţionale.

2 Proprietăţi remarcabile ale lui $\mathbb{R}$

În cele ce urmează vom preciza câteva proprietăţi ale numerelor reale foarte importante. Doritorii pot găsi demonstraţii ale acestor proprietăţi de exemplu în [1], [2] sau [3].

Teorema 2.1 *(Caracterizarea cu ε a infimumului şi supremumului). Dacă $M \subseteq \mathbb{R}$ şi dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate.*
a) Avem $x = \inf M$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:
i) x este un minorant al lui M şi
ii) oricare ar fi un număr real $\varepsilon > 0$, există un element $m \in M$ astfel încât $m < x + r$.
b) Avem $x = \sup M$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii: i) x este un majorant al lui M şi
ii) oricare ar fi un număr real $\varepsilon > 0$, există un element $m \in M$ astfel încât $x - r < m$.

Teorema 2.2 *(Axioma lui G. Cantor). Oricare ar fi un şir de intervale închise $([a_n\,,\,b_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $[a_{n+1}\,,\,b_{n+1}] \subseteq [a_n\,,\,b_n]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ avem*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a_n\,,\,b_n] \neq \emptyset\,.$$

Teorema 2.3 *(axioma lui Arhimede). Oricare ar fi numerele reale x şi y, cu $0 < y$, există un număr natural n astfel încât $x < ny$.*

Consecinţa 2.4 *(existenţa părţii întregi a unui număr real). Oricare ar fi numărul real x, există un unic număr întreg m astfel încât*

$$m \le x < m + 1. \tag{1}$$

Numărul m din consecinţa 2.4 se numeşte partea întreagă a numărului real x şi se notează cu simbolul $[x]$. Numărul real $x - [x]$ se numeşte partea fracţionară a lui x şi, în acestă lucrare, se va nota prin $]x[$.

Evident că, oricare ar fi numărul real x, avem:

$$x = [x] +]x[\quad \text{şi} \quad]x[\in [0, 1[.$$

Densitatea mulţimilor $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ Dacă x şi y sunt două numere reale şi $x < y$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

- există cel puţin un număr raţional u cu proprietatea că $x < u < y$;
- există cel puţin un număr iraţional v cu proprietatea că $x < v < y$.

Valoarea absolută a unui număr real Fiind dat numărul real x, numărul real notat $|x|$,

$$|x| = \begin{cases} x, & 0 \le x \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

se numeşte *valoarea absolută* a lui x, iar funcţia $|\;| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dată prin $f(x) = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, se numeşte funcţia valoare absolută.

Oricare ar fi numerele reale x şi y sunt adevărate următoarele propoziţii:

- $|x| = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$.

- $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$.
- $|x| = max\{x, -x\} = x \cdot sgnx$.

Observaţie. Fie $a \in \mathbb{R}_+$.

Inegalitatea $|x| \leq a$ este echivalentă cu $-a \leq x \leq a$.

Inegalitatea $|x| \geq a$ este echivalentă cu $x \geq a$ sau $x \leq -a$.

Teorema 2.5 *Dacă x este un număr real cu proprietatea că $|x| \leq r$, oricare ar fi numărul real $r > 0$, atunci $x = 0$.*

Mulţimi finite şi mulţimi infinite

O mulţime A se numeşte finită dacă A este mulţimea vidă sau dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A \sim \{1, ..., n\}$.

O mulţime care nu este finită se numeşte infinită.

Mulţimea numerelor naturale, mulţimea numerelor întregi, mulţimea numerelor raţionale, mulţimea numerelor iraţionale sunt exemple de mulţimi infinite

2.1 Compactificarea lui $\mathbb{R}$. Mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$

Necesitatea de a îngloba într-o formulare unitară unele rezultate fundamentale ale analizei matematice a impus introducerea, pe lânga numerele reale, a două simboluri: $+\infty$, numit + infinit, şi $-\infty$, numit - infinit.
Adăugarea celor două simboluri poartă denumirea de *compactificarea* lui $\mathbb{R}$.

Notând

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

structura algebrică şi de ordine a lui $\mathbb{R}$ se poate extinde la $\overline{\mathbb{R}}$, punând prin definiţie:

$$\begin{aligned}
x + (+\infty) &= (+\infty) + x = +\infty, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}, \\
x + (-\infty) &= (-\infty) + x = -\infty, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}, \\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty, \\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty, \\
x \cdot (+\infty) &= (+\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x < 0, \\ +\infty, & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \\
x \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x < 0, \\ -\infty, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty,\\
(-\infty)\cdot(-\infty) &= +\infty,\\
(+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty,\\
(-\infty)\cdot(+\infty) &= -\infty,
\end{aligned}$$

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

$$-\infty < x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

$$x < +\infty, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

$$-\infty < +\infty.$$

Din acestea se deduce că

$$x^{+\infty} = \begin{cases} 0, \text{ dacă}\, 0 < x < 1,\\ +\infty, \text{ dacă}\, x > 1,\end{cases}$$

$$x^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă}\, 0 < x < 1,\\ 0, \text{ dacă}\, x > 1,\end{cases}$$

$$(+\infty)^{x} = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă}\, x > 0,\\ 0, \text{ dacă}\, x < 0,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(+\infty)^{+\infty} &= +\infty,\\
(+\infty)^{-}\infty &= 0,\\
0^{+\infty} &= 0.
\end{aligned}$$

În $\bar{\mathbb{R}}$ nu se pot defini:

$$(+\infty)+(-\infty),\ (-\infty)+(+\infty),\ 0\cdot(+\infty),\ 0\cdot(-\infty),\ (+\infty)\cdot 0,\ (-\infty)\cdot 0,$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty},$$
$$\frac{x}{0}, \text{ oricare ar fi } x \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$1^{+}\infty,\ 1^{-}\infty,\ (+\infty)^{0},\ 0^{0},$$

astfel încât să fie respectate proprietăţile uzuale de calcul.

Între mulţimea elementelor lui $\mathbb{R}$ şi mulţimea punctelor unei axe de coordonate se poate stabili o bijecţie (numărului 0 îi va corespunge originea axei, iar numărului 1, punctul aflat la distanţă de o unitate de origine, în sensul axei). Axa de coordonate astfel obţinută o vom numi axa reală. Vom completa axa reală adăugând la dreapta simbolul $+\infty$, iar la stanga, simbolul $-\infty$. Obţinem astfel axa reală încheiată.

3 Vecinătăţile unui număr real

Fie numerele reale a şi r, cu $r > 0$.

Se numeşte bilă cu centrul în x şi rază r sau interval centrat cu centrul în x şi rază r şi notează cu $B(x,r)$ mulţimea

$$B(x,r) \;=]x-r, x+r[.$$

În cele ce urmează vom da noţiunea de vecinătate a unui număr real.

DEFINIŢIE. *Se numeşte vecinătate a numărului $x \in \mathbb{R}$ orice mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ având proprietatea că există un număr real r, $r > 0$, astfel încât $B(x,r) \subseteq V$, ceea ce se poate scrie şi sub forma $]x-r,\, x+r[\subseteq V$.*

Convenim ca, în tot ceea ce urmează, mulţimea vecinătăţilor punctului x s-o notăm prin V_x.

EXEMPLU. Fie $x = 2 \in \mathbb{R}$. Mulţimea $V = [1,3]$ este o vecinătate a punctului $x = 2$, deoarece $B(2,1/2) =]3/2, 5/2[\subseteq V$, în timp ce mulţimea $U = [1,2]$ nu este vecinătate a lui $x = 2$ întrucât nu există $r > 0$ astfel ca $]2-r, 2+r[\subseteq U$.

Vecinătăţile numerelor improprii $+\infty$ şi $-\infty$

DEFINIŢIE. *Se numeşte vecinătate a lui $+\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$ orice submulţime V a lui $\overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că există un număr real $r > 0$ astfel încât $]r, +\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.*

DEFINIŢIE. *Se numeşte vecinătate a lui $-\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$ orice submulţime V a lui $\overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că există un număr real $r > 0$ astfel încât $[-\infty, -r[\subseteq \overline{\mathbb{R}}$.*

4 Şiruri de numere reale

DEFINIŢIE. *Se numeşte şir de numere reale orice funcţie f definită pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}^*$ (sau pe o mulţime $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} | p \leq n\}$, unde $p \in \mathbb{N}$) cu valori în mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.*

Pentru notarea şirului vom folosi simbolul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dacă şirul este definit pe $\mathbb{N}$ (respectiv notaţia $\sum\limits_{k=p}^{\infty} x_k$), unde

$$x_k \;=\; f(k),\ \textit{pentru fiecare}\ k \in \mathbb{N}\ (\textit{respectiv}\ k \in \mathbb{N}_p).$$

x_k se numeşte termenul de rang k al şirului iar numărul k, rangul termenului x_k.

Mulţimea $\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ se numeşte mulţimea termenilor şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

EXEMPLU. Cel mai simplu exemplu de şir este şirul numerelor naturale: $(k)_{k\in\mathbb{N}}$; avem $x_k = k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

4.1 Limita unui şir de numere reale

Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

DEFINIŢIE. *Un element* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte limită a şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dacă oricare ar fi* V *o vecinătate a lui* x *există un număr natural* k_V *astfel încât* $x_k \in V$, *oricare ar fi numărul natural* k, $k \geq k_V$.

Avem următorul rezultat deosebit de important.

Teorema 4.1 *(unicitatea limitei). Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere reale, atunci există cel mult un element* $x \in \bar{\mathbb{R}}$ *astfel încât* x *să fie limita şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Demonstraţie. Să presupunem că şirul ar avea două limite distincte x şi y. Patru cazuri trebuie analizate: x, $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$, $y = -\infty$ şi $x = +\infty$, $y = -\infty$.

Fie x, $y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Fie $d = |x - y|$. Luând $U = (x - \frac{d}{3}, x + \frac{d}{3})$ şi $V = (y - \frac{d}{3}, y + \frac{d}{3})$, avem $U \in V_x$ şi $V \in V_y$ astfel încât

$$U \cap V = \emptyset. \tag{2}$$

În acelaşi timp, vor exista numerele naturale k_U şi k_V astfel încât

$$x_k \in U \text{ şi } y_k \in V, \text{ oricare ar fi numărul natural } k \geq \max\{k_U,\, k_V\}. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) obţinem

$$x_k \in \emptyset \text{ şi } y_k \in \emptyset, \text{oricare ar fi numărul natural } k \geq \max\{k_U,\, k_V\},$$

ceea ce nu se poate. Întrucât am ajuns la o contradicţie, presupunerea că şirul are două limite distincte $x, y \in \mathbb{R}$ este falsă.

Contradicţia am demonstrat-o pe baza existenţei a două vecinătăţi disjuncte a celor două limite. Prin urmare, în cele trei cazuri rămase este suficient să punem în evidenţă două vecinătăţi disjuncte, raţionamentul ulterior urmând calea de mai sus. $\diamond$

Unicitatea limitei, în caz de existentă, ne permite să introducem pentru notarea ei un simbol. Astfel, convenim să notăm limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prin $\lim_{k\to\infty} x_k$. Pentru a preciza că x este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, vom utiliza notaţia

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k,$$

şi vom spune că x *este limita şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sau că *şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge către* x .

EXEMPLUL 4.1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul puterilor lui a, $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Avem

$$\lim_{k\to+\infty} a^k = \begin{cases} 0, \text{ dacă } |a| < 1, \\ 1, \text{ dacă } a + 1, \\ +\infty, \text{ dacă } a > 1, \\ \text{nu există, dacă } a \leq -1. \end{cases}$$

4.2 Şiruri convergente de numere reale

DEFINIŢIE. *Un şir* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de numere reale se numeşte convergent dacă are limită în* $\mathbb{R}$*(adică are limită şi limita este un număr real propriu). Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.*

4.3 Şiruri mărginite de numere reale

DEFINIŢIE. *Şirul de numere reale* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *se numeşte mărginit dacă mulţimea termenilor săi este o submulţime mărginită a lui* $\mathbb{R}$*, adică există numerele reale* a *şi* b*, astfel încât* $a \leq x_k \leq b$*, oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 4.2 *([1], teorema 2.3.11). Dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este convergent, atunci* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este mărginit.*

Demonstraţie. Fie x limita şirului. Luând $V = (x-1, x+1)$, va exista un număr natural m astfel încât $x_n \in V$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Fie $d = \max\{|x_1 - x|, \ldots |x_{m-1} - x|, 1\}$. Atunci vom avea $x_n - x \leq d$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Ca urmare $x_n \in [x-d, x+d]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Deci şirul este mărginit$_\diamond$

O altă proprietate a şirurilor mărginite de numere reale este dată în teorema 4.6.

4.4 Şiruri monotone de numere reale

DEFINIŢIE. *Şirul de numere reale* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *se numeşte:*

- *strict crescător dacă* $x_k < x_{k+1}$*, oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}^*$;
- *crescător dacă* $x_k \leq x_{k+1}$*, oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}^*$;
- *descrescător dacă* $x_k \geq x_{k+1}$*, oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}^*$;
- *strict descrescător dacă* $x_k > x_{k+1}$*, oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}^*$;
- *strict monoton dacă este strict descrescător sau strict crescător;*
- *monoton dacă este crescător sau descrescător .*

Reamintim următoarele proprietăţi ale şirurilor monotone.

OBSERVAŢIA 4.1. Dacă (m_k) este un şir strict crescător de numere naturale, atunci $m_k \geq k$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 4.3 *(teorema lui K. Weierstrass) Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere reale, următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este crescător şi mărginit superior, atunci* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sup\{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\};$$

- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi mărginit inferior, atunci el este convergent şi*
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \inf\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}^*\};$$
- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este monoton şi mărginit, atunci el este convergent;*
- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este crescător şi nemărginit, atunci el are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty;$$
- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi nemărginit, atunci el are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty;$$
- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este monoton, atunci* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită.*

O legătură între mulţimile $\bar{\mathbb{R}}$,$\mathbb{Q}$, şi $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ exprimată cu ajutorul şirurilor

Teorema 4.4 *Oricare ar fi* $x \in \bar{\mathbb{R}}$ *există cel puţin un şir* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *cu termeni numere raţionale şi există cel puţin un şir* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *cu termeni numere iraţionale astfel încât şirurile* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *să aibă limita* x*.*

4.5 Subşiruri ale unui şir

Definiţie. *Fie* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Se numeşte subşir al şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *orice şir* $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$*, cu proprietatea că există un şir strict crescător de numere naturale* $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *astfel încât* $y_j = x_{k_j}$*, pentru fiecare* $j \in \mathbb{N}$*.*

Pentru a nota un subşir al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *vom folosi scrierea* $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$

Să remarcăm că orice subşir al unui şir este la rândul său un şir.

Teorema 4.5 *. Dacă şirul de numere reale* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este convergent, atunci orice subşir* $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *al său este convergent şi*
$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Demonstraţie. Fie $\lambda = \lim_{k\to\infty} x_k$ şi fie $V \in V_\lambda$. Va exista un rang m cu proprietatea că $x_k \in V$, oricare ar fi numărul natural $k \geq m$. Pentru orice număr natural j, $j \geq m$, ţinând cont de observaţia 4.1, avem $k_j \geq j \geq m$. Acest lucru implică $x_{k_j} \in V$, oricare ar fi numărul natural $j \geq m$. Cum V a fost o vecinătate a lui λ arbitrar aleasă, avem, în baza definiţiei limitei unui şir, că $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = \lambda$.$\diamond$

O proprietate deosebit de importantă a şirurilor mărginite este dată în teorema ce urmează.

Teorema 4.6 *(teorema lui E. Cesàro) Orice şir mărginit de numere reale are un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. Vor exista atunci numerele reale a_0 şi b_0 astfel încât

$$a_0 \leq x_k \leq b_0, \text{ pentru fiecare } k \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Deoarece $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ are o infinitate de termeni, cel puţin unul dintre intervalele $[a_0, c_0]$ şi $[c_0, b_0]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului. Să notăm cu $[a_1, b_1]$ oricare dintre intervalele $[a_0, c_0]$ sau $[c_0, b_0]$ cu condiţia ca el să conţină o infinitate de termeni ai şirului. Prin urmare va exista un indice k_1 astfel încât

$$x_{k_1} \in [a_1, b_1].$$

Evident vom avea

$$a_0 \leq a_1 \leq x_{k_1} \leq b_1 \leq b_0 \text{ şi } b_1 - a_1 = (b-a)/2.$$

Cu intervalul $[a_1, b_1]$ vom proceda la fel ca şi cu intervalul $[a_0, b_0]$. Fie $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Deoarece intervalul $[a_1, b_1]$ conţinea o infinitate de termeni ai şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cel puţin unul dintre intervalele $[a_1, c_1]$ şi $[c_1, b_1]$ va conţine o infinitate de termeni ai şirului. Să notăm cu $[a_2, b_2]$ oricare dintre intervalele $[a_1, c_1]$ sau $[c_1, b_1]$ cu condiţia ca el să conţină o infinitate de termeni ai şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Va exista deci un indice $k_2 \in \mathbb{N}^*$, $k_2 > k_1$ astfel încât $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. Vom avea deci

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq x_{k_2} \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

şi

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Repetând construcţia, vom obţine intervalele $[a_j, b_j]$, $j \in \mathbb{N}$ şi numerele naturale distincte k_j $j \in \mathbb{N}$, ce au, pentru fiecare $j \in \mathbb{N}^*$ următoarele proprietăţi:

(1) $a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_j < b_j \leq ... \leq b_1 \leq b_0$;

(2) $b_j - a_j = \dfrac{b_0 - a_0}{2^j}$;

(3) $a_j \leq x_{k_j} \leq b_j$;

(4) $k_1 < k_2 < ... < k_j$.

Aplicând axioma lui G. Cantor (teorema 2.2) deducem că există

$$\lambda \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j].$$

Vom arăta că

$$\lambda = \lim_{j\to+\infty} x_{k_j}. \tag{4}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Va exista un număr natural j_0 cu proprietatea că

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{j_0}} < \varepsilon.$$

Atunci, din propritățile (2) şi (3), deducem că, oricare ar fi $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, avem

$$|x_{k_j} - \lambda| \leq b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{j_0}} < \varepsilon.$$

Şirul $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ este deci convergent convergent şi are loc (4). Proprietatea (4) implică faptul că $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ este un subşir al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Deci $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ are un subşir convergent.$\diamond$

5 Şiruri fundamentale de numere reale

DEFINIŢIE. *Şirul de numere reale $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se numeşte şir fundamental sau şir Cauchy, dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un rang s astfel încât să avem $|x_p - x_q| < \varepsilon$, oricare ar fi numerele naturale p şi q, $p \geq s$, $q \geq s$.*

OBSERVAŢIA 5.1. Fară greutate se vede că un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este fundamental dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, există un rang s astfel încât oricare ar fi numerele naturale p şi q, cu $q \geq s$, să avem $|x_{q+p} - x_q| < \varepsilon$.

Teorema 5.1 . *Orice şir fundamental de numere reale este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir fundamental. Alegând $\varepsilon = 1$, va exista un rang s astfel încât pentru orice numere naturale q şi p, cu $q \geq s$, să avem $|x_{q+p} - x_q| < 1$. De aici deducem că $|x_{s+p} - x_s| < 1$, oricare ar fi numărul natural p. Luând

$$r = \max\{1, |x_0 - x_s|, |x_1 - x_s|, ..., |x_{s-1} - x_s|\},$$

vom avea $r > 0$ şi $|x_k - x_s| \leq r$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare

$$x_s - r \leq x_k \leq x_s + r, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Deci şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este mărginit.$\diamond$

Teorema 5.2 . *Dacă un şir fundamental $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ are un subşir convergent, atunci şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir fundamental şi fie $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ un subşir convergent al său. Să notăm cu x limita subşirului.

Fie $r > 0$. Deoarece $x = \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j}$, va exista un rang m astfel încât

$$|x_{k_j} - x| < \frac{r}{2}, \text{ oricare ar fi } j \in \mathbb{N},\ j \geq m. \tag{5}$$

Întrucât şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este fundamental, va exista un rang s astfel încât

$$|x_p - x_q| < \frac{r}{2}, \text{ oricare ar fi } p, q \in \mathbb{N},\ q \geq s, p \geq s. \tag{6}$$

Fie $h = \max\{m, s\}$ şi fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq h$. Deoarece $k_h > h$, din (5) avem

$$|x_{k_h} - x| < \frac{r}{2}.$$

Pe de altă parte, din (6), avem

$$|x_k - x_{k_h}| < \frac{r}{2}.$$

Prin urmare vom avea

$$|x_k - x| \leq |x_k - x_{k_h}| + |x_{k_h} - x| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq h.$$

Cum $r > 0$ a fost ales oarecare, rezultă că $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent, având limita x.$_\diamond$

Teorema 5.3 *(Criteriul lui Augustin Louis Cauchy). O condiţie necesară şi suficientă ca un şir de numere reale să fie convergent este ca el să fie şir fundamental.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent şi fie x limita sa. Fie $r > 0$. Va exista un rang s astfel încât pentru orice număr natural k, $k \geq s$, să avem $\|x_k - x\| < r/2$. Atunci, evident, pentru orice numere naturale k şi m, cu $k \geq s$, vom avea

$$|x_{k+m} - x_k| \ \leq\ |x_{k+m} - x| \ +\ |x - x_k| \ <\ \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \ =\ r.$$

Cum $r > 0$ a fost ales oarecare, rezultă că $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este fundamental.

Suficienţa. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir fundamental. În conformitate cu teorema 5.1, şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Atunci, în baza teoremei 4.6, el are un subşir convergent. Aplicând acum teorema 5.2, deducem că $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent.$_\diamond$

Bibliografie

[1] ANDRICA D., DUCA I.D., PURDEA I., POP I., *Matematica de bază*, Cluj-Napoca: Editura Studium 2000.

[2] BREKCNER W.W., *Analiză matematică. Topologia spaţiului* $\mathbb{R}^n$. Cluj-Napoca: Universitatea din Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică 1985.

[3] COBZAŞ ŞT.: *Analiză matematică (Calculul diferenţial).* Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană 1997.

[4] POPA C., HIRIS V., MEGAN M.: *Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme.* Timişoara: Editura Facla 1976.

[5] POPOVICIU T.: *Curs de analiză matematică.* vol. I-III. Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj, Facultatea de Matematică - Mecanică 1970.

[6] PRECUPANU A.M.: *Analiza matematica.* vol. I si II. Universitatea "Alexandru Ioan Cuza", Facultatea de Matematica-Fizica, Iasi, 987.

6 Probleme

1.7) a) Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

b) Utilizând aceeaşi teoremă, arătaţi că oricare ar fi a un număr real strict pozitiv avem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

1.8) Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Demonstraţi că dacă subşirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ au aceeaşi limită x, atunci x este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1.9) Fie $a \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

1.10) Fie o matrice infinită de numere reale

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

satisfăcând condiţiile:

- $a_{nk} \geq 0$, oricare ar fi numărul natural n şi oricare ar fi numărul natural k, $k \in \{1, ..., n\}$,
- $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$, oricare ar fi numărul natural n,
- $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, oricare ar fi numărul natural k.

Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale având limita $x \in \bar{\mathbb{R}}$, demonstraţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, cu $y_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n$, pentru fiecare număr natural n, $n \geq 1$, are limita x (vezi [12], cap II, & 5, teorema 5.3 (teorema lui Toeplitz)).

1.11) Utilizând rezultatul de la exerciţiul 10, demonstraţi teorema lui Stolz-Cesàro: dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere reale satisfacând cerinţele:

- $(y_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător de numere pozitive, cu limita $+\infty$, şi
- există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = z \in \bar{\mathbb{R}}$,

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$ are limita z (vezi [12], cap II, & 5 , teorema 5.6).

1.12) Folosind teorema lui Stolz-Cesàro, demonstraţi că:

- dacă $(x_n)_{n\geq 1})$ este un şir de numere reale cu limita $x \in \bar{\mathbb{R}}$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+...+x_n}{n} = x;$
- dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive cu limita $x \in \bar{\mathbb{R}}$, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = x;$
- dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive şi există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z \in [0, +\infty]$, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = z.$

1.13) Arătaţi că

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+...+\sqrt[3]{n}}{n\cdot\sqrt[3]{n}} = \frac{3}{4}$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{\ln\, n} = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{1+2^2+3^3+...+n^n} = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdot...\cdot(n+n)}}{n} = 4e$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n(\ln\, n)} = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}} = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\, 2+\ln\, 3+...+\ln\, n}{n} = +\infty$.

1.14) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+\alpha^n}{5^n}$, α fiind un număr real.
1.15) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$, a şi b fiind numere reale pozitive.