SUPORT PENTRU CURSUL 9
Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile într-un punct
Derivabilitate de ordinul II

29 noiembrie 2012

În acest curs sunt prezentate unele proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile. Mai precis ne va interesa legatura dintre diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct şi continuitatea ei în acel punct precum şi între diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct şi derivatele ei parţiale în acel punct. Apoi vom analiza unele proprietaţi ale funcţiilor diferenţiabile într-un punct raportate la operaţii algebrice, compunere şi inversabilitate.

În ultima parte a cursului vom defini noţiunea de derivată parţială de ordinul II în raport cu două variabile precizate a unei funcţii într-un punct.

1 Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile într-un punct

Vom reaminti pentru început câteva dintre rezultatele de bază predate în cursul trecut şi la care facem apel în prezentul curs.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. O funcţie $f : A \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *diferenţiabilă* în punctul $a \in \operatorname{int} A$ dacă există o funcţie liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\lim_{h \to 0_n} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_n} = 0_p. \tag{1}$$

Acea unică funcţie liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ care satisface condiţia (1) am numit-o *diferenţiala lui f în punctul a* şi am notat-o prin $df(a)$, iar matricea ataşată ei prin $[df(a)]$. Evident că

$$df(a)(h) = [df(a)]h, \text{ oricare ar fi } h \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

În cazul particular $p = 1$ formula se scrie sub forma

$$df(a)(h) =< \nabla f(a)\, , \, h >, \text{ oricare ar fi } h \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

unde $\nabla f(a)$ notează gradientul lui f în a.

Remarcăm faptul că egalitatea (1) este echivalentă cu

$$\lim_{h\to 0_n} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|_p}{\|h\|_n} = 0. \tag{4}$$

De asemenea am dat următoarele rezultate:

Teorema 1.1 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in int\, A$, $\Omega_a = \{h \in \mathbb{R}^n |\ a+h \in A\}$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

i) dacă f este diferenţiabilă în punctul a, atunci există o funcţie $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$, continuă în 0_n, cu

$$\omega(0_n) = 0_p, \tag{5}$$

astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \|h\|_n \omega(h), \tag{6}$$

oricare ar fi $h \in \Omega_a$;

ii) dacă există o funcţie liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi o funcţie $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$, continuă în 0_n, cu $\omega(0_n) = 0_p$, astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\|_n \omega(h), \tag{7}$$

oricare ar fi $h \in \Omega_a$, atunci f este diferenţiabilă în a şi $df(a) = L$.

Teorema 1.2 *i) O funcţie $f = (f_1, \dots, f_p) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în punctul $a \in int(A)$ dacă şi numai dacă componentele sale scalare f_i, $i \in \{1, \dots, p\}$, sunt diferenţiabile în punctul a.*

ii) Dacă funcţia $f = (f_1, \dots, f_p) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în punctul $a \in int(A)$, atunci

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_p(a)), \tag{8}$$

unde, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, p\}$, prin $df_i(a)$ am notat diferenţiala componentei scalare f_i în punctul a.

Precizăm următoarea proprietate a funcţiilor liniare, la care vom face apel.

Teorema 1.3 *Dacă $L = (L_1, \dots, L_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie liniară, atunci matricea ataşată ei, $[L] = [L_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}$ se obţine astfel:*

$$L_{ij} = L_i(e^j),\ \forall\, i \in \{1, \dots p\},\ j \in \{1, \dots, n\}. \tag{9}$$

Observaţia 1.1. Notând cu $df(a)_{ij}$ elementul situat în linia i şi coloana j din matricea ataşată funcţiei liniare $df(a)$, în baza teoremelor 1.3 şi 1.2 avem

$$df(a)_{ij} = df_i(a)(e^j),\ \forall\, i \in \{1, \dots p\},\ j \in \{1, \dots, n\}. \tag{10}$$

Continuitatea funcţiilor diferenţiabile

Teorema 1.4 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este nevidă şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în punctul $a \in int\, A$, atunci f este continuă în a.*

Demonstraţie. Aplicând punctul (i) din teorema 1.1, rezultă că există $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$ încât să aibă loc (6) şi (5). Făcând pe h să tindă la 0_n în (6) şi ţinând cont de (5) şi de faptul că funcţia $df(a)$ fiind liniară este continuă şi deci avem

$$\lim_{h \to 0_n} df(a)(h) = df(a)(0_n) = 0_p,$$

obţinem

$$\lim_{h \to 0_n} (f(a+h) - f(x)) = \lim_{h \to 0_n} df(a)(h) + \lim_{h \to 0_n} \|h\|_n \omega(h) = 0_p,$$

adică

$$\lim_{h \to 0_n} f(a+h) = f(a).$$

Deci f este continuă în a.$\diamond$

Reciproca teoremei nu este întotdeauna adevărată.

Legătura dintre diferenţiala unei funcţii într-un punct şi derivatele ei parţiale

Teorema 1.5 *Dacă A este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ şi funcţia $f = (f_1, \dots, f_p) : A \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în punctul $a \in int\, A$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

i) oricare ar fi o direcţie $h \in \mathbb{R}^n$, funcţia f este derivabilă după direcţia h în a şi

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = ||h|| \frac{\partial f}{\partial h}(a); \tag{11}$$

ii) funcţia f admite derivate parţiale în raport cu fiecare variabilă x_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ în a;

iii) avem

$$[df(a)] = J(f; a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}; \tag{12}$$

iv) oricare ar fi $h \in \mathbb{R}^n$;

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a). \tag{13}$$

Demonstraţie. i) Fie $h \in \mathbb{R}^n$. Două cazuri sunt posibile: $h = 0_n$ şi $h \neq 0_n$.

Dacă $h = 0_n$, evident f este derivabilă în a după 0_n şi avem

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t0_n) - f(a)}{t} = 0_p.$$

Pe de altă parte se ştie că, deoarece $df(a)$ este funcţie liniară, avem $df(a)(0_n) = 0_p$. Deci (11) este adevărată.

Fie $h \neq 0_n$. În baza teoremei 1.1, va exista o funcţie $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$, continuă în origine, cu $\omega(0_n) = 0_p$, astfel încât

$$f(a+th) - f(x) = df(a)(th) + \|th\|_n \omega(th) = tdf(a)(h) + |t|\|h\|_n \omega(th).$$

Ţinând cont că, dacă $t \to 0$, atunci $th \to 0_n$ şi, deoarece ω este continuă în 0_n, trecând la limită în egalitatea de mai sus avem

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = df(a)(h) + \|h\|_n \lim_{t\to 0} (\operatorname{sgn} t \cdot \omega(th)) = df(a)(h).$$

Rezultă că (11) este adevărată.

ii) Fie $j \in \{1, ..., n\}$. Luând în particular $h = e^j$, aplicând rezultatul obţinut la punctul (i) şi ţinând cont de definiţia derivatei parţiale, rezultă că f este derivabilă parţial în raport cu x_j în a.

iii) În baza observaţiei 1.1 avem

$$[df(a)] = \begin{pmatrix} df_1(a)(e^1) & \dots & df_1(a)(e^n) \\ \dots & \dots & \dots \\ df_p(a)(e^1) & \dots & df_p(a)(e^n) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Fie $j \in \{1, \dots, n\}$. Din (11), ţinând cont de definiţia derivatelor parţiale obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^j) - f(a)}{t} = 1 \cdot df(a)(e^j), \tag{15}$$

egalitate care, ţinând cont de componentele scalare ale funcţilor $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ şi $df(a)(e^j)$, se rescrie sub forma

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = df_i(a)(e^j), \ \ \forall \ i \in \{1, \dots, p\}. \tag{16}$$

Din (14) şi (16), rezultă că

$$[df(x)] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Deci avem (12).

iv) Avem

$$df(a)(h) = [df(a)] \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) h_j \\ \dots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) h_j \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont că, în calculele cu matrici, elementele lui $\mathrm{I\!R}^n$ le considerăm matrici coloană, avem dreptul să scriem

$$df(a) = [df(a)] \cdot h = J(f; a) \cdot h. \diamond \tag{17}$$

Din această teoremă, ţinând cont şi de teorema 1.1, deducem că pentru ca funcţia $f : A \subseteq \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}^p$ să fie diferenţiabilă în punctul $a \in int\, A$ este necesar şi suficient ca f să admită derivate parţiale în a în raport cu fiecare variabilă x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ şi ca

$$\lim_{h \to 0_n} \frac{f(a+h) - f(a) - J(f; a) \cdot h}{\|h\|_n} = 0_p. \tag{18}$$

Deci, pentru a verifica dacă o funcţie este sau nu diferenţiabilă într-un punct putem proceda în modul următor:

- verificăm dacă funcţia admite toate derivatele parţiale în acel punct; dacă cel puţin una dintre derivatele parţiale în acel punct nu există, atunci sigur funcţia nu este diferenţiabilă;

- dacă funcţia admite toate derivatele parţiale în punctul dat, verificăm dacă (18) are loc; dacă (18) este adevărată, funcţia f este diferenţiabilă în punctul dat; în caz contrar, f nu este diferenţiabilă în punctul dat.

Exemplul 1.1. Fie $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Uşor se vede că funcţia f admite derivate parţiale atât în raport cu x cât şi cu y în fiecare punct $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ şi avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \cos \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2y}{x^2 + y^2} \cos \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Cum

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} h_1 - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} = 0,$$

funcţia f este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Mai trebuie să remarcăm că f este un exemplu de funcţie care este diferenţiabilă într-un punct în care funcţiile derivate parţiale de ordinul I nu sunt continue (spre exemplu luând şirul $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n}}$, pentru fiecare număr natural nenul n, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = (-1)^{n^2+1} \sqrt{2\pi \cdot n},$$

de unde rezultă imediat că nu există $\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)$, ceea ce implică faptul că $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în punctul $(0,0)$).

EXEMPLUL 1.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Cum $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$, dar

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nu există, funcţia f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$. Este un exemplu de funcţie care este continuă într-un punct, dar nu este diferenţiabilă în punctul respectiv.

Menţionăm, fără a da şi demonstraţia, următorul rezultat important.

Teorema 1.6 *Dacă A este o submulţime deschisă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ admite derivate parţiale de ordinul I pe o vecinătate $V \subseteq A$ a punctului $a \in \operatorname{int} A$ şi derivatele parţiale de ordinul I sunt continue în punctul a, atunci f este diferenţiabilă în punctul a.*

2 Operaţii algebrice cu funcţii diferenţiabile într-un punct

Teorema 2.1 *Dacă A este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă funcţiile $f : A \to \mathbb{R}^p$ şi $g : A \to \mathbb{R}^p$ sunt diferenţiabile în $a \in \operatorname{int} A$, atunci oricare ar fi numerele reale α şi β, funcţia $\alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă în a,*

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta g(a). \tag{19}$$

Teorema 2.2 *Dacă A este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă funcţiile $f : A \to \mathbb{R}^p$ şi $g : A \to \mathbb{R}^p$ sunt diferenţiabile în punctul $a \in \operatorname{int} A$, atunci funcţia $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în x şi*

$$d(fg)(a)(h) = \langle df(a)(h), g(a)\rangle + \langle dg(a)(h), f(a)\rangle. \tag{20}$$

Diferenţiabilitatea funcţiei compuse

Teorema 2.3 *Fie $f : A \to B \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $g : B \to \mathbb{R}^q$. Dacă funcţia f este diferenţiabilă Fréchet in punctul $a \in int\,A$ şi funcţia g este diferenţiabilă Fréchet în punctul $b = f(a) \in int\,B$, atunci funcţia $g \circ f$ este diferenţiabilă Fréchet în a şi sunt adevărate egalităţile*

$$d(g \circ f)(a) = (dg(f(a))) \circ df(a) \tag{21}$$

şi

$$[d(g \circ f)(a)] = [dg(f(a))] \cdot [df(a)]. \tag{22}$$

Demonstraţiile teoremelor enunţate se găsesc, spre exemplu, în [2].

Exemplul 2.1. Aplicând rezultatul din teorema precedentă, să se calculeze $dw(0, -1)$ dacă $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$w(x, y) = \sin(x + y^2 - 1), \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Considerând funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y^2 - 1$ pentru fiecare $(x, y) \in \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sin t$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, se vede imediat că $w = g \circ f$.

Deoarece funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

şi $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

sunt continue, funcţia f este diferenţiabilă în $(0, -1)$ şi avem $[df(0, -1)] = [1 \ \ -2]$.

De asemenea funcţia g este diferenţiabilă în punctul $0 = f(0, 1)$, căci funcţia $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g'(t) = \cos t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ este continuă. Avem $[g'(0)] = \cos 0 = 1$.

Prin urmare, aplicând teorema anterioară avem

$$[dw(0, -1)] = [dg(f(0, -1))] \cdot [df(0, -1)] = [g'(f(0, -1)] \cdot [df(0, -1)] = 1 \cdot [1 \ \ -2] = [1 \ \ -2].$$

Deci

$$dw(0, -1)(h) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle = h_1 - 2h_2, \ \forall\, h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Diferenţiabilitatea funcţiei inverse (facultativ)

Teorema 2.4 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $B \subseteq \mathbb{R}^p$ sunt mulţimi deschise şi dacă $f : A \to B$ este o funcţie bijectivă cu proprietatea că f este diferenţiabilă în a şi f^{-1} este diferenţiabilă în $b = f(a)$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) $n = p$;

b) aplicaţia liniară $df(a)$ este bijectivă şi

$$(df(a))^{-1} = df^{-1}(b); \tag{23}$$

c) matricea ataşată diferenţialei funcţiei f în punctul a este inversabilă şi avem

$$[d(f^{-1})(b)] = [df(a)]^{-1}. \tag{24}$$

Din teoremă rezultă că o condiţie necesară ca funcţia inversă să fie diferenţiabilă este ca matricea $[d(f^{-1})(b)]$ să fie nesingulară. În ipoteze suplimentare, condiţia este şi suficientă. Se poate demonstra că are loc următorul rezultat:

Teorema 2.5 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sunt mulţimi deschise nevide, şi funcţia $f : A \to B$ este bijectivă, diferenţiabilă în punctul $a \in int A$, atunci funcţia $f^{-1} : B \to A$ este diferenţiabilă în punctul $b = f(a) \in int B$ dacă şi numai dacă f^{-1} este continuă în b şi matricea $[df(a)]$ este nesingulară. şi are loc:*

$$df^{-1}(b) = (df(a))^{-1}. \tag{25}$$

Demonstraţii ale teoremelor pot fi găsite, spre exemplu, în [2].

3 Diferenţiabilitate pe o mulţime

Definiţie. *Dacă $D \subseteq A$ este o submulţime deschisă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă $f : A \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă (în sens Fréchet) în fiecare punct din D, spunem că funcţia f este diferenţiabilă (în sens Fréchet) pe D. În cazul în care $A = D$, se mai spune simplu că f este diferenţiabilă (în sens Fréchet).*

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi fie $D \subseteq A$ o submulţime deschisă, nevidă a lui A.

Definiţie. *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă pe mulţimea deschisă $D \subseteq A$, operatorul definit pe D cu valori în $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ care face ca fiecărui punct $a \in D$ să-i corespundă diferenţiala lui f în acel punct, adică operatorul care fiecărui $a \in D$ îi ataşează funcţia liniară $df(a)$, se notează cu df (în unele lucrări se utilizează notaţiile f' sau Df) şi se numeşte derivata (Fréchet) a funcţiei f pe D.*

4 Derivate parţiale de ordinul doi într-un punct

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, fie $a \in \operatorname{int} A$ şi fie numerele naturale i, j aparţinând mulţimii $\{1, ..., n\}$.

Definiţie. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ se numeşte derivabilă parţial de două ori în raport cu variabilele x_j şi x_i, în această ordine, în punctul $a \in A$ dacă există un număr real $r > 0$ astfel încât f să fie derivabilă parţial în raport cu x_j pe $B(a, r) \bigcap A$ şi dacă funcţia*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : B(a, r) \bigcap A \to \mathbb{R}^p$$

este derivabilă parţial în raport cu x_i în a, adică există în $\mathbb{R}^p$ limita

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}. \tag{26}$$

În caz de existenţă, limita (26) se notează prin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$*, sau prin* $f''_{ij}(a)$ *şi se numeşte derivata parţială de ordinul doi a lui* f *în raport cu* x_j *şi* x_i *în punctul* a*.*

Deoarece o funcţie vectorială este derivabilă parţial dacă şi numai dacă componentele sale scalare sunt derivabile parţial, din definiţia derivatelor parţiale de ordinul doi, deducem că funcţia $f = (f_1, \ldots, f_p) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial de două ori în raport cu x_j şi x_i în punctul $a \in \operatorname{int} A$ dacă şi numai dacă componentele sale scalare f_h cu $h \in \{1, \ldots, p\}$ sunt derivabile parţial de două ori în raport cu x_j şi x_i în punctul a.

Menţionăm că în literatura de specialitate derivatele parţiale de ordinul doi în care $i \neq j$ se numesc derivate parţiale mixte. Trebuie multă atenţie la ordinea în care se scriu varibilele în raport cu care se derivează pentru că în general derivatele parţiale mixte nu sunt egale $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$; a se vedea, în acest sens, exemplul 4.2. În cazul particular în care $i = j$, în locul notaţiei $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$ se utilizează notaţia $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$.

Exemplul 4.1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2 \ln\left(1 + \dfrac{x_1^2}{x_2^2}\right), & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Vrem să calculăm derivatele parţiale de ordinul doi într-un punct $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. În acest scop trebuie în prealabil să calculăm derivatele parţiale de ordinul I. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \end{cases}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) == \begin{cases} 2x_2 \ln\left(1 + \dfrac{x_1^2}{x_2^2}\right) - \dfrac{2x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Pentru un punct $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) |\ x_1 \in \mathbb{R}\}$, calculul derivatelor parţiale de ordinul II se face uşor aplicând regulile obişnuite de derivare. Vom avea

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial \dfrac{2x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_2^4 - 2x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial \dfrac{2x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{4x_1^3 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial \left(2x_2 \ln\left(1 + \dfrac{x_1^2}{x_2^2}\right) - \dfrac{2x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{4x_1^3 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)=\frac{\partial\left(2x_2\ln\left(1+\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)-\frac{2x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)}{\partial x_2}=2\ln\left(1+\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)-\frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}(x_2^2+3x_1^2).$$

Pentru un punct $(x_1,0)$, cu $x_1\in\mathbb{R}$, obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+t,0)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,0)}{t}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,t)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2x_1t}{x_1^2+t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+t,0)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0)}{t}=0.$$

Deoarece pentru $x_1\in\mathbb{R}^*$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,t)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(2\ln\left(1+\frac{x_1^2}{t^2}\right)-\frac{2x_1^2}{x_1^2+t^2}\right)=\infty,$$

rezultă că funcţia f nu este derivabilă parţial de două ori în raport cu x_2 în nici un punct $(x_1,0)$, cu $x_1\in\mathbb{R}^*$. Putem însă pune, prin extindere

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,0)=\infty,$$

dacă $x_1\in\mathbb{R}^*$. În $(0,0)$ avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t}=0.$$

Exemplul 4.2. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_2(x_1^4-x_2^4+4x_1^2x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0),\end{cases}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1(x_1^4 - x_2^4 - 4x_1^2 x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Calculând derivatele parţiale de ordinul doi în $(0,0)$ obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{t} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{t} = 0,$$

şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t} = 0.$$

Se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0).$$

Exemplul 4.3. Fie $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y^2+1}, x^2 - y^3 \right),$$

pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Calculând $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-3)$, avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-3) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(2,-3) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(y, \frac{1}{y^2+1}, 2x \right)(2,-3) = \left(1, \frac{3}{50}, 0\right).$$

5 Probleme

1) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul doi ale următoarelor funcţii, precizând domeniul lor de definiţie:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy - yz^3 + \cos z$;

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (2x - y^3 + e^z, xe^{yz})$;

c) $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \text{arctg}\dfrac{y}{xz}$;

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2) Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie, în variabilele u şi v, ce admite toate derivatele parţiale de ordinul II continue şi fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right),$$

pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
a) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei compuse $g \circ f$.
b) Ştiind că $\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 2$ şi că $\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -3$, construiţi diferenţiala funcţiei compuse în $(1,-1)$.
c) Calculaţi

$$\frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial y^2}.$$

3) Fie funcţiile $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 şi fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,t) = u(x+at) - v(x-at),$$

pentru fiecare $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, unde $a \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

numită şi ecuaţia coardei vibrante.

4) Fie $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, pentru fiecare $t > 0$, şi fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

pentru fiecare $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Arătaţi că funcţia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y,z) = (g \circ f)(x,y,z), \text{ pentru fiecare } (x,y,z) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\},$$

verifică ecuaţia lui Laplace

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

5) Arătaţi că dacă funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile, atunci funcţia $F : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = f(xy) + \sqrt{xy} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right), \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*,$$

este diferenţiabilă şi construiţi diferenţiala funcţiei F într-un punct $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. În ipoteza că funcţiile f şi g sunt de două ori diferenţiabile, calculaţi

$$x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y),$$

unde $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

6) Arătaţi că dacă funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt de două ori derivabile, atunci funcţia $F : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(x + g(y))$ pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R} \times A$, satisface ecuaţia funcţională

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

7) Fie $f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, şi $F = F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcţii diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea că

$$F(x, \frac{y}{x}) = f(x,y), \text{ pentru orice } (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

Demonstraţi că dacă

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y), \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

atunci

$$x\frac{\partial F}{\partial u}(x, \frac{y}{x}) = F(x, \frac{y}{x}), \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},$$

8) Să se calculeze $df(-1,2)$ dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = (1 + xy - e^{x^2+y^2}, x - 2y, \ln(1 + x^2 + y^2)).$$

9) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = f(3t - 2, \sin t^2)$ oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori diferenţiabilă. Se cere să se calculeze F' şi F''.

10) Ştiind că f este de două ori diferenţiabilă, să se calculeze $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$, dacă:

a) $F(x,y) = f(xy)$, pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
b) $F(x,y) = f(x/y)$ pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$;
c) $F(x,y) = f(x + y + y^2)$ pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

11) Ştiind că $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă, să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei F dacă:

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = f(x, xy, xyz),$, $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(x^2 + y^2, x, y)$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
c) $F : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $F(x,y) = xy + xf(y/x, y, 0)$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

12) Ştiind că $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă, să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei F dacă:

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = f(x, xy, xyz)$;
b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(x^2 + y^2, x, y)$;
c) $F : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $F(x,y) = xy + xf(y/x, y, 0)$.

Bibliografie

[1] COBZAŞ ŞT.: *Analiză matematică (Calculul diferenţial)*. Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană 1997.

[2] LUPŞA L., BLAGA L.: *Analiză matematică. Note de curs* 1. Cluj-Napoca, Presa Universitară Clujeană, 2003.