SUPORT PENTRU CURSUL 3
Polinomul lui Taylor. Aplicaţii. Partea I-a

18 octombrie 2012

IMPORTANT Conţinutul paragrafelor, care au inclus la sfârşitul titlului simbolul *, nu a fost predat la curs sau la seminar. Am inclus acest material deoarece am considerat ca poate aduce anumite precizări. De asemenea nu am demonstrat toate rezultatele. Pentru demonstraţiile care nu au fost făcute la curs, dar sunt incluse în acest material, am utilizat tot simbolul *; consultarea lor este obţională. Sunt incluse şi exemple importante. Unele dintre acestea au fost discutate la curs sau seminar. Altele, din lipsă de timp, nu.

Pentru început vom reaminti câteva noţiuni şi proprietăţi importante, cunoscute din liceu. Acestă parte I se încheie cu prezentarea polinomului lui Taylor.

1 Noţiuni preliminare

Vom aminti câteva noţiuni şi proprietăţi necesare pentru o bună înţelegere a rezultatelor noi din acest curs şi din cel următor.

1.1 Elemente de topologie pe axa reală

Vom reaminti noţiunile de vecinătate a unui element din $\mathbb{R}$, punct de acumulare, punct izolat, punct interior.

Vecinătăţile unui număr real. Fie numerele reale a şi r, cu $r > 0$. Se numeşte *bilă cu centrul în x şi rază r* sau interval centrat cu centrul în x şi rază r şi notează cu $B(x,r)$ intervalul deschis

$$B(x,r) \;=]x-r, x+r[.$$

Se numeşte *vecinătate* a elementului $x \in \mathbb{R}$ orice mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ având proprietatea că există un număr real $r,\ r > 0,$ astfel încât $B(x,r) \subseteq V$, ceea ce se poate scrie şi sub forma $]x-r,\ x+r[\subseteq V$.

Convenim ca, în tot ceea ce urmează, mulţimea vecinătăţilor punctului x s-o notăm prin V_x.

Exemplu. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $r > 0$, mulţimea $B(x,r) =]x-r,\ x+r[$ este o vecinătate a lui x.

EXEMPLU. Fie $x = 2 \in \mathbb{R}$. Mulţimea $V = [1, 3]$ este o vecinătate a punctului $x = 2$, deoarece $B(2, 1/2) =]3/2, 5/2[\subseteq V$, în timp ce mulţimea $U = [1, 2]$ nu este vecinătate a lui $x = 2$ întrucât nu există $r > 0$ astfel ca $]2 - r, 2 + r[\subseteq U$.

OBSERVAŢIA 1.1. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi fie V_x mulţimea vecinătăţilor sale. Uşor se arată că următoarele propoziţii sunt adevărate:
(i) $x \in V$, oricare ar fi $V \in V_x$;
(ii) dacă V şi U sunt vecinătăţi ale lui x, atunci $V \bigcap U \in V_x$;
(iii) dacă $V \in V_x$ şi dacă $V \subseteq U$, atunci $U \in V_x$;
(iv) dacă $y \in \mathbb{R}$ şi $y \neq x$, atunci există $V \in V_x$ şi există $U \in V_y$ astfel încât $U \bigcap V = \emptyset$.

Puncte interioare, puncte frontieră, puncte de acumulare, puncte izolate. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punct $x \in \mathbb{R}$ se numeşte:
i) *punct interior* al mulţimii A, dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \subseteq A$;
ii) *punct de acumulare* al mulţimii A, dacă $(V \setminus x) \bigcap A \neq \emptyset$, oricare ar fi V o vecinătate a lui x.
iii) *punct izolat* al mulţimii A, dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \bigcap A = \{x\}$.

Uşor se vede că orice punct interior al unei mulţimi aparţine mulţimii şi este, în acelaşi timp, un punct de acumulare al acelei mulţimi.

Un punct izolat al unei mulţimi nu este punct de acumulare al acelei mulţimi.

Un punct de acumulare al unei mulţimi poate să aparţină mulţimii sau poate să nu aparţină mulţimii.

Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A se notează prin $\operatorname{int} A$ şi se numeşte interiorul lui A.

Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A se notează prin A' şi se numeşte derivata lui A.

EXEMPLU. Fie $A = [-2, 3[\bigcup \{4\}$.

Punctul $x = 4$ este un punct izolat al mulţimii deoarece, luând $r = \frac{1}{2}$, avem $A \bigcap]4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}[= \{4\}$.

Orice punct $x^0 \in]-2, 3[$ este punct interior deoarece luând $r = \frac{1}{2} \min\{|x^0 + 2|, |3 - x^0|\}$ avem $]x^0 - r, x^0 + r[\subseteq [-2, 3[$.

Punctul $x = -2$ nu este punct interior deoarece, oricare ar fi $r > 0$, punctul $-2 - \frac{r}{2} \notin A$. Deci $\operatorname{int} A =]-2, 3[$. Ca urmare avem $]-2, 3[\subseteq A'$.

Vom arăta că şi punctele $x = -2$ şi $x = 3$ sunt puncte de acumulare. Oricare ar fi $r > 0$ avem:
$]-2 - r, -2 + r[\bigcap (A \setminus \{-2\}) \neq \emptyset$, deoarece avem $(-2 + \frac{1}{2} \min\{5, r\}) \in]3 - r, 3 + r[\bigcap (A \setminus \{3\})$;
$]3 - r, 3 + r[\bigcap (A \setminus \{3\}) \neq \emptyset$, deoarece $3 - \frac{1}{2} \min\{5, r\} \in]3 - r, 3 + r[\bigcap (A \setminus \{3\})$
Deci $A' = [-2, 3]$.

Mulţimi deschise, mulţimi închise, mulţimi compacte. O submulţime A a lui $\mathbb{R}$ se numeşte:
i) *deschisă*, dacă toate punctele sale sunt puncte interioare;

ii) *închisă*, dacă îşi conţine toate punctele de acumulare, adică dacă $A' \subseteq A$;
iii) *compactă*, dacă este mărginită şi închisă.

Remarcăm faptul că orice interval deschis este o multţime deschisă, orice interval închis este o mulţime închisă. Orice interval închis şi mărginit este o mulţime compactă.

1.2 Limite de funcţii

Vom reaminti pe scurt definiţia limitei unei funcţii într-un punct şi vom da câteva caractrizări ale limitei.

Noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct. Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$.

Elementul $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte limită a funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui λ, există o vecinătate U a lui a astfel încât să avem $f(x) \in V$, pentru orice $x \in (A \setminus \{a\}) \bigcap U$.

Utilizând definiţia vecinătăţii unui număr real propriu se vede imediat că:

Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, are limita $\lambda \in \mathbb{R}$ în punctul $a \in A' \subseteq \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, există un număr real $\delta > 0$ cu proprietatea că

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in A \setminus \{a\}, \text{ cu } |x - a\| < \delta. \tag{1}$$

Teorema 1.1 *(criteriul lui Heine). Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita λ în punctul $a \in A'$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir cu termeni din $A\setminus\{a\}$, convergent către a, şirul $(f(x_{\mathbf{k}}))_{k\in\mathbb{N}}$ are limita λ.*

Consecinţa 1.2 *Dacă pentru funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru punctul $a \in A'$ există două şiruri $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cu termeni din mulţimea $A \setminus \{a\}$, convergente la a, pentru care şirurile $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(f(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ au limite diferite, atunci funcţia f nu are limită în punctul a.*

Limite laterale Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, fie $a \in A'$ şi $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

În ipoteza că $a \in (A \cap (a, +\infty))'$, elementul $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *limita la dreapta* a funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$ în punctul a dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui λ, există o vecinătate U a lui a astfel încât să avem $f(x) \in V$, pentru orice $x \in (A \bigcap U \bigcap (a, +\infty))$.

În ipoteza că $a \in (A \cap (-\infty, a))'$, elementul $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *limita la stânga* a funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$ în punctul a dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui λ, există o vecinătate U a lui a astfel încât să avem $f(x) \in V$, pentru orice $x \in (A \bigcap U \bigcap (-\infty, a))$.

OBSERVAŢIA 1.2. Dacă $a \in \operatorname{int} A$, atunci funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ are limită în punctul a dacă şi numai dacă are atât limită la dreapta în a cât şi limită la stânga în A şi cele două limite sunt egale.

2 Derivata şi derivabilitatea unei funcţii într-un punct

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definiţie. *Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ admite derivată în punctul $a \in A \bigcap A'$, dacă există în $\bar{\mathbb{R}}$ limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2}$$

Limita (2), în caz de existenţă, se notează cu $f'(a)$ şi se numeşte derivata funcţiei f în punctul a.

Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte derivabilă în punctul $a \in A \bigcap A'$, dacă admite derivată în a şi derivata este finită, adică $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2.1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 2$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, şi fie $a \in \mathbb{R}$. Deoarece

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - x + 2 - (a^3 - a + 2)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x^3 - a^3) - (x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^2 + xa + a^2) - 1 = 3a^2 - 1,$$

rezultă că f are derivată în a şi $f'(a) = 3a^2 - 1$. Deoarece $f'(a) \in \mathbb{R}$, funcţia f este derivabilă în punctul $x = a$.

Proprietăţi legate de operaţii cu funcţii derivabile într-un punct, cunoscute din liceu, sunt reamintite în anexa de la sfârşitul acestui curs.

Derivabilitatea pe o mulţime Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $E \subseteq (A \cap A')$. Vom spune că *funcţia f este derivabilă pe E dacă f este derivabilă în fiecare punct din E.*

Toate proprietăţile funcţiei derivabile într-un punct se extind pentru funcţii derivabile pe o mulţime. Apar însă şi proprietăţi specifice.

3 Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat

Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ şi fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$.

Definiţie. *Un punct $x^0 \in A$ se numeşte:*
i) punct de maxim local al lui f dacă există un număr real $r > 0$ cu proprietatea că $f(x^0) \geq f(y)$, oricare ar fi $y \in B(x^0, r) \bigcap A$;
ii) punct de minim local al lui f dacă există un număr real $r > 0$ cu proprietatea că $f(x^0) \leq f(y)$, oricare ar fi $y \in B(x^0, r) \bigcap A$;
iii) punct de extrem local dacă x^0 este punct de minim local sau punct de maxim local al lui f.

Teorema care urmează dă o condiţie necesară, în cazul funcţiilor derivabile, pentru ca un punct interior al mulţimii de definiţie a funcţiei să fie punct de extrem local.

Teorema 3.1 *(teorema lui Pierre de Fermat). Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x^0 \in \mathrm{int}A$ şi dacă x^0 este un punct de extrem local al lui f, atunci $f'(x^0) = 0$.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea să presupunem că x^0 este un punct de maxim local. În mod analog se procedează dacă x^0 este un punct de minim local. Va exista o vecinătate $V \in V_{x^0}$ astfel încât

$$f(x) \leq f(x^0), \text{ oricare ar fi } x \in V \bigcap A. \tag{3}$$

Deoarece x^0 este un punct interior al mulţimii A şi f este derivabilă în x^0, deducem că există derivatele laterale ale funcţiei f în x^0, iar din (3) obţinem

$$\lim_{x \nearrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} \leq 0. \tag{4}$$

şi

$$\lim_{x \searrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} \geq 0. \tag{5}$$

Cum f este derivabilă în x^0, derivatele laterale sunt egale în acel punct. Egalitatea derivatelor laterale în punctul x^0 conduce la concluzia că $f'(x^0) = 0$.$\diamond$

DEFINIŢIE. *Un punct $x^0 \in A$ se numeşte punct critic sau punct staţionar pentru funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ dacă f este derivabilă în x^0 şi $f'(x^0) = 0$.*

Utilizând noţiunea de punct staţionar, putem da următoarea consecinţă a teoremei lui P. Fermat:

Consecinţa 3.2 *Orice punct de extrem local al unei funcţii definite şi derivabile pe un interval deschis este un punct critic (punct staţionar).*

Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată după cum rezultă din următorul exemplu:

EXEMPLUL 3.1. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, pentru fiecare $x \in [-1, 1]$. Avem $f'(0) = 0$ cu toate că $x^0 = 0$ nu este un punct de extrem local al funcţiei f.

Condiţiile din ipoteza teoremei lui P. Fermat sunt necesare în sensul că, dacă o condiţie nu este satisfăcută, concluzia teoremei poate să nu mai fie adevărată. Astfel, dacă punctul x^0 nu este punct interior, derivata funcţiei în x^0 poate să nu fie egală cu 0, cu toate că x^0 este punct de extrem local.

EXEMPLUL 3.2. Fie $f : [-1, 1[$, $f(x) = x^2$. Funcţia f este derivabilă pe domeniul de definiţie. Punctul $x = -1$ este un punct de maxim relativ, dar $f'(-1) = -2 \neq 0$.

De asemenea se pot da exemple de funcţii care au puncte de extrem deşi în acele puncte funcţia nu are derivată.

EXEMPLUL 3.3. Fie $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in]-1, 1[$. Uşor se vede că $x^0 = 0$ este un punct de minim al funcţiei f cu toate că f nu este derivabilă în acel punct.

4 Teoremele lui Rolle, Lagrange şi Cauchy

Teorema 4.1 *(teorema lui Michel Rolle). Dacă funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* $[a, b]$*, derivabilă pe* $]a, b[$ *şi* $f(a) = f(b)$*, atunci există cel puţin un punct* $c \in]a, b[$ *astfel încât* $f'(c) = 0$.

*Demonstraţie.** Deoarece funcţia f este continuă pe $[a, b]$, există $x', x'' \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x') = \max\{f(x)|x \in [a,\, b]\},\ \text{şi} f(x'') = \min\{f(x)|x \in [a,\, b]\}.$$

Dacă $f(x') = f(x'')$, atunci funcţia f este constantă pe $[a, b]$. Prin urmare avem $f'(x) = 0$, pentru fiecare $x \in]a, b[$. Putem lua aşadar $c = \dfrac{b+a}{2}$. Dacă $f(x') > f(x'')$, atunci $x' \notin \{a, b\}$, sau $x'' \notin \{a, b\}$. Dacă $x' \notin \{a, b\}$, atunci $x' \in]a, b[$. Aplicând teorema lui Fermat deducem că $f'(x') = 0$. Deci putem lua $c = x'$. Dacă $x'' \notin \{a, b\}$, atunci $x'' \in]a, b[$. Aplicând teorema lui Fermat deducem că $f'(x'') = 0$. Deci putem lua $c = x''$.$\diamond$

Teorema 4.2 *(teorema lui Joseph Louis Lagrange sau teorema creşterilor finite). Dacă* a *şi* b *sunt numere reale cu* $a < b$ *şi dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[a, b]$ *şi derivabilă pe* $]a, b[$*, atunci există un punct* $c \in]a, b[$ *astfel încât* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

*Demonstraţie.** Construim funcţia ajutătoare $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b - a),\ \text{pentru fiecare } x \in [a, b].$$

Din modul de construcţie a funcţiei h, rezultă că h este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $]a, b[$ şi $h(a) = h(b)$. Aplicând funcţiei h teorema lui Rolle deducem existenţa unui punct $c \in]a, b[$ astfel încât

$$0 = h'(c) = f(b) - f(a) - f'(c)(b - a).\diamond$$

Teorema 4.3 *(teorema lui A. L. Cauchy). Dacă* a *si* b *sunt două numere reale cu* $a < b$ *şi dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *şi* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sunt două funcţii continue pe* $[a, b]$ *şi derivabile pe* $]a, b[$*, cu proprietatea că* $g'(x) \neq 0$*, oricare ar fi* $x \in a, b[$*, atunci există un punct* $c \in a, b[$ *astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

*Demonstraţie.** Rezultatul se obţine imediat dacă se aplică teorema lui Lagrange funcţiei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x),$$

pentru fiecare $x \in [a, b]$.

5 Derivabilitate şi derivate de ordin superior

Fie funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie E_1 cea mai mare submulţime a lui $A \cap A'$, cea mai mare în sensul relaţiei de incluziune, pe care funcţia f este derivabilă. Putem construi o funcţie definită pe E_1 cu valori în $\mathbb{R}$, care face ca fiecărui punct $x^0 \in E_1$ să-i corespundă elementul $f'(x^0) \in \mathbb{R}$. Funcţia astfel construită se notează cu f' şi se numeşte derivata de ordinul I a lui f.

Pentru funcţia $f' : E_1 \to \mathbb{R}$ şi pentru un punct $x^0 \in E_1 \cap E_1'$ putem cerceta existenţa în $\overline{\mathbb{R}}$ a limitei

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f'(x) - f'(x^0)}{x - x^0}. \tag{6}$$

În caz de existenţă, limita (6) se notează cu $f''(x^0)$ şi se numeşte derivata de ordinul II a funcţiei f în x^0. Dacă, în plus, $f''(x^0) \in \mathbb{R}$, atunci spunem că f este de două ori derivabilă în punctul x^0.

Fie E_2 cea mai mare submulţime a lui $E_1 \cap E_1'$, cea mai mare în sensul relaţiei de incluziune, pe care funcţia $f' : E_1 \to \mathbb{R}$ este derivabilă. Putem construi o nouă funcţie definită pe E_2 cu valori în $\mathbb{R}$, funcţie care fiecărui $x^0 \in E_2$ face să-i corespundă elementul $f''(x^0) \in \mathbb{R}$. Această nouă funcţie se notează cu f'' şi se numeşte derivata de ordinul doi a funcţiei f.

Printr-un procedeu iterativ se poate introduce noţiunea de derivată de ordinul n a funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$, pentru orice număr natural n. Fie numărul natural $n \geq 2$. Să presupunem că ştim ce se înţelege prin derivata de ordinul $n-1$ a lui f, notată prin $f^{(n-1)}$ şi să presupunem că derivata de ordinul $n-1$ este definită pe $E_{n-1} \subseteq A$. Pentru funcţia $f^{(n-1)}$ şi pentru un punct $x^0 \in E_{n-1} \cap E_{n-1}'$ vom studia existenţa în $\overline{\mathbb{R}}$ a limitei

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x^0)}{x - x^0}. \tag{7}$$

În caz de existenţă, limita (7) se numeşte derivata de ordinul n a lui f în x^0 şi se notează cu $f^{(n)}(x^0)$. Dacă, în plus, $f^{(n)}(x^0) \in \mathbb{R}$, spunem că funcţia f este de n ori derivabilă în punctul x^0.

Să notăm cu E_n cea mai mare submulţime a lui $E_{n-1} \cap E_{n-1}'$, în sensul relaţiei de incluziune, pe care funcţia $f^{(n-1)}$ este derivabilă.

Definiţie. *Funcţia, notată prin $f^{(n)}$, definită pe E_n cu valori în $\mathbb{R}$, care face ca fiecărui punct $x^0 \in \mathbb{R}^n$ să-i corespundă elementul $f^{(n)}(x^0) \in \mathbb{R}$ se notează cu $f^{(n)}$ şi se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f.*

6 Polinomul lui B. Taylor

Fie $I \subseteq \mathrm{I\!R}$ şi fie n un număr natural, $n \geq 1$. Dacă funcţia $f : I \to \mathrm{I\!R}$ este de n ori derivabilă în punctul $x^0 \in I \cap I'$, putem construi următorul polinom notat prin $T_n(f; x^0)$, şi numit polinomul lui Brook Taylor de gradul n ataşat funcţiei f în punctul x^0:

$$T_n(f; x^0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x^0)}{j!}(\mathrm{x} - x^0)^j. \tag{8}$$

Acestui polinom i se ataşează funcţia polinomială corespunzătoare, pe care, pentru o mai uşoară înţelegere a celor ce urmează să le prezentăm, o vom nota prin T_n. Funcţia T_n este definită pe $\mathrm{I\!R}$ cu valori în $\mathrm{I\!R}$ şi legea de compoziţie este dată prin

$$T_n(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x^0)}{j!}(x - x^0)^j,\ \forall\, x \in \mathrm{I\!R}. \tag{9}$$

EXEMPLUL 6.1. Fie funcţia $f : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$, $f(x) = e^{2x}$ oricare ar fi $x \in \mathrm{I\!R}$, fie $x^0 = 0$ şi fie $n = 10$. Ţinând cont că $f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ pentru fiecare $x \in \mathrm{I\!R}$, polinomul $T_{10}(f; 0)$ este polinomul

$$T_{10}(f; 0) = 1 + \sum_{j=1}^{10} \frac{2^j}{j!}\mathrm{x}^j,$$

iar funcţia ataşată polinomului este funcţia $T_{10} : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$,

$$T_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{10} \frac{2^j}{j!}x^j,\ \forall\, x \in \mathrm{I\!R}.$$

Probleme propuse pentru seminar şi temă de casă

I. Arătaţi că următoarele egalităţi sunt adevărate:
i) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi oricare ar fi $x \in \mathrm{I\!R}$;
ii) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi oricare ar fi $x \in \mathrm{I\!R}$;
iii) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi oricare ar fi $x \in \mathrm{I\!R} \setminus \{-b/a\}$;
iv) $(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi oricare ar fi $x \in \mathrm{I\!R}$ cu $ax + b > 0$;
v) $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, şi oricare ar fi $x \in \mathrm{I\!R}$, în ipoteza că $a > 0$;
vi) $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & n \in \mathbb{N},\ n \leq m \\ 0, & n \in \mathbb{N},\ n > m \end{cases}.$

II. Calculaţi $f^{(n)}$ dacă

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$;

b) $f(x) = e^x \sin x$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = (\ln x)e^x$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$;

d) $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$.

III. Fie $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 2] \cap Q \\ 0, & x \in [-1, 2] \setminus Q \end{cases}$. Determinaţi punctele în care f este derivabilă.

IV. Studiaţi derivabilitatea în origine a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = |x^2 - 1|$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$.

V. Arătaţi că:

a) $x\mathrm{arctg}x > \ln(1 + x^2)$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;

b) $\dfrac{2}{e} < x^{\frac{1}{1-x}} + x^{\frac{x}{1-x}} < 1$, oricare ar fi $x \in]0, 1[$;

c) $\arcsin \dfrac{1}{x} + \arccos \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

d) $\arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2} = \begin{cases} 2\mathrm{arctg}x, & |x| \leq 1 \\ \mathrm{sgn}\, x - 2\mathrm{arctg}x, & |x| > 1 \end{cases}$.

VI. Să se demonstraze că există o unică funcţie $f : [0, +\infty[$ astfel încât

$$f^3(x) + xf(x) = 1, \text{ oricare ar fi } x \in [0, +\infty[.$$

Demonstraţi că f este derivabilă şi arătaţi că

$$f'(x) = -f(x)/(3f^2(x) + x), \forall\, x \in [0,\ +\infty[.$$

VII. Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ dacă } x < -1, \\ x^2, \text{ dacă } |x| \leq 1, \\ |1 - \ln\, x|, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

ii) $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{|x-2|} + \dfrac{x-2}{|x|}$, oricare ar fi $x \in D$, prin D notându-se domeniul maxim de definiţie.

7 COMPLETARE

Alte proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Continuitatea funcţiei derivabilă într-un punct

În tot ceea ce urmează presupunem că mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este nevidă.

Teorema 7.1 *Dacă funcţia* $f : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în punctul* $a \in A \cap A'$ *atunci* f *este continuă în* a.

Demonstraţie. Pentru fiecare $x \in A \setminus \{a\}$ avem

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a). \tag{10}$$

Întrucât f este derivabilă în punctul a, există $f'(a)$ şi $f'(a) \in \mathbb{R}$. Prin urmare, trecând la limită în (10), obţinem

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a),$$

ceea ce arată că funcţia f este continuă în punctul a.$\diamond$

Operaţii algebrice cu funcţii derivabile într-un punct

Teorema 7.2 *Dacă funcţiile* $f : A \to \mathbb{R}$ *şi* $g : A \to \mathbb{R}$ *sunt derivabile în punctul* $a \in A \cap A'$, *atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

i) Oricare ar fi numerele reale α *şi* β, *funcţia* $\alpha f + \beta g$ *este derivabilă în* a *şi*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a). \tag{11}$$

ii) Funcţia $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în* a *şi*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{12}$$

*Demonstraţie.** i) Pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$, putem scrie

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a)}{x - a} = \alpha \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{13}$$

Întrucât funcţiile f şi g sunt derivabile în a, putem trece la limită în (13) şi obţinem (11).

ii) Pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$, putem scrie

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{14}$$

Ţinând cont că funcţiile f şi g sunt derivabile în punctul a şi că, în baza teoremei 7.1 funcţia g este continuă în a, putem trece la limită în (14) şi, trecând la limită obţinem (12).$\diamond$

Teorema 7.3 *Dacă funcţia $g : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $a \in A \cap A'$ şi dacă $g(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate V a punctului a astfel încât $g(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in V \cap A$, funcţia $\frac{1}{g} : V \cap A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a şi*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}. \tag{15}$$

*Demonstraţie**. Deoarece g este derivabilă în punctul a, ea va fi continuă în acest punct, şi cum $g(a) \neq 0$, va exista o vecinătate V a punctului a astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru fiecare $x \in V \bigcap A$. Atunci, pentru orice $x \in V \bigcap A \setminus \{a\}$, avem

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right). \tag{16}$$

Deoarece funcţia g este derivabilă în punctul a şi $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in V \bigcap A$, putem trece la limită în (16) şi obţinem (15).$_\diamond$

Ca o consecinţă a teoremei anterioare obţinem rezultatul care urmează.

Consecinţa 7.4 *Dacă funcţiile $f : A \to \mathbb{R}$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în $a \in A \cap A'$ şi dacă $g(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate V a punctului a astfel încât $g(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in V \cap A$, funcţia $\dfrac{f}{g} : (V \cap A) \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a şi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - g'(a) \cdot f(a)}{g^2(a)}. \tag{17}$$

Proprietatea Darboux a derivatei.

Teorema 7.5 *Dacă I este un interval al lui $\mathbb{R}$ şi dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci funcţia $f' : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I.*

*Demonstraţie.** Vom demonstra în prealabil:
că dacă a şi b sunt două puncte din I, $a < b$, şi dacă $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, atunci există $c \in]a, b[$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Fără a restrânge generalitatea să presupunem că $f'(a) < 0$ şi $f'(b) > 0$. Deducem că va exista un număr $\delta > 0$, $\delta < \dfrac{b-a}{2}$, astfel încât

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0, \text{ pentru orice } x]a, a + \delta[,$$

şi

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0, \text{ pentru orice } x]b - \delta, b[.$$

Rezultă că

$$f(x) < f(a), \text{ pentru orice } x \in]a, a + \delta[$$

şi

$$f(x) < f(b), \text{ pentru orice } x \in]b-\delta, b[.$$

Deci, niciunul dintre punctele a şi b nu poate fi punct de minim al funcţiei f pe $[a, b]$. Funcţia f fiind derivabilă pe I, va fi şi continuă pe I, deci continuă şi pe intervalul $[a, b]$. Ca urmare va exista un $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = \min\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Cum a şi b nu pot fi puncte de minim ale funcţiei f pe $[a, b]$, deducem că $c \in]a, b[\subseteq I$. Punctul c fiind un punct de extrem local al funcţiei f, funcţia f fiind derivabilă în c şi $c \in]a,\ b[$, obţinem, în baza teoremei lui Fermat, câ $f'(c) = 0$.

Vom trece acum la demonstrarea propriuzisă a teoremei. Fie punctele a şi b în I, cu $a < b$. Trebuie să arătăm că, oricare ar fi γ cuprins între $f'(a)$ şi $f'(b)$ există $c \in [a, b]$ astfel încât $f'(c) = \gamma$. în acest scop construim funcţia ajutătoare $\varphi : [a,\ b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - \gamma x$, oricare ar fi $x \in [a,\ b]$. Funcţia φ este derivabilă pe $[a, b]$ şi $\varphi'(x) = f'(x) - \gamma$, oricare ar fi $x \in [a, b]$. Deoarece γ este cuprins între $f'(a)$ şi $f'(b)$, vom avea $\varphi'(a) \cdot \varphi'(b) = (f'(a) - \gamma)(f'(b) - \gamma) < 0$. În conformitate cu cele demonstrate mai înainte, 0există $c \in]a, b[$ astfel încât $\varphi'(c) = 0$, adică $f'(c) - \gamma = 0$, ceea ce im plică faptul că $f'(c) = \gamma$. Deci funcţia f' are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$.$\diamond$