SUPORT PENTRU CURSUL 6
1. Şiruri în $\mathbb{R}^n$. 2. Funcţii. 3. Limite de funcţii

8 noiembrie

1 Şiruri cu termeni din $\mathbb{R}^n$

Prin şir cu termeni din $\mathbb{R}^n$, sau, prescurtat, şir din $\mathbb{R}^n$ vom înţelege orice aplicaţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Pentru notarea şirului vom folosi simbolul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, unde $x_k = f(k)$, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Termenul x_k este termenul de rang k al şirului, iar numărul natural k este rangul termenului x_k.

Şiruri mărginite. Mulţimea $\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ se numeşte *mulţimea termenilor şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Un şir se numeşte mărginit dacă mulţimea termenilor săi este o mulţime mărginită.

Şirurile coordonatelor. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir cu termeni din $\mathbb{R}^n$. Cum fiecare termen x_k al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un element al spaţiului $\mathbb{R}^n$, el va avea n coordonate pe care le vom nota prin

$$x_{k1}, \ldots, x_{kn}.$$

Deci $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$.

Cu ajutorul termenilor şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^n$ putem forma următoarele n şiruri de numere reale:

$$(x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{k2})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{kn})_{k\in\mathbb{N}},$$

numite *şirurile coordonatelor*.

Exemplu. Fie $x_{\mathbf{k}} = ((-1)^k, \sin k\pi) \in \mathbb{R}^2$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Şirul $(x_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir cu elemente din $\mathbb{R}^2$.

Şirurile coordonatelor vor fi şirurile:
$(x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$, cu $x_{k1} = (-1)^k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, respectiv
$(x_{k2})_{k\in\mathbb{N}}$, cu $x_{k2} = \sin k\pi$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

Mulţimea termenilor săi este mulţimea

$$M = \{((-1)^k, \sin k\pi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, k \in \mathbb{N}\} = \{(-1,0),(1,0)\}.$$

Cum M este o mulţime mărginită, şirul este mărginit.

Limita unui şir. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}^n$.

Un element $\lambda \in \mathbb{R}^n$ se numeşte *limită a şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui λ, există un rang k_V cu proprietatea că $x_k \in V$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_V$.

Ţinând cont de modul în care s-a definit vecinătatea unui număr real, obţinem următoarea caracterizare a limitei, care poate fi luată ca definiţie:

Un element $\lambda \in \mathbb{R}^n$ este limită a şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^n$ dacă, oricare ar fi un număr real $\varepsilon > 0$, există un rang k_ε cu proprietatea că

$$\|\lambda - x_k\|_n < \varepsilon, \ \ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon. \tag{1}$$

Prin $\| \ \|_n$ am notat norma din $\mathbb{R}^n$. Prin urmare, dacă $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, atunci inegalitatea (1) se poate scrie şi sub forma

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - x_{kj})^2} < \varepsilon, \ \ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon. \tag{2}$$

Exemplu. Fie şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu $x_k = (\frac{1}{k+1}, 1 - \frac{2}{k+1})$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Vom arăta că punctul $(0,1)$ este o limită a şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Observăm că

$$\|(0,1) - (\frac{1}{k+1}, 1 - \frac{2}{k+1})\|_2 = \|(\frac{-1}{k+1}, \frac{2}{k+1})\|_2 = \sqrt{\left(\frac{-1}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{2}{k+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k+1}. \tag{3}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Să luăm $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem $k_\varepsilon \geq \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ (de exemplu $k_\varepsilon = \left[\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}\right] + 1$). Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_\varepsilon$, avem

$$k + 1 > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon},$$

ceea ce implică faptul că

$$\frac{\sqrt{5}}{k+1} < \varepsilon. \tag{4}$$

Atunci, din (3) şi (4) obţinem

$$\|(0,1) - (\frac{1}{k+1}, 1 - \frac{2}{k+1})\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{k+1} < \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales oarecare, deducem că $(0,1)$ este o limită a şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Reducerea calculului limitei unui şir la calculul limitelor şirurilor coordonatelor. Rezultatul pe care îl vom prezenta în continuare are foarte multe implicaţii atât teoretice cât şi practice.

Teorema 1.1 *(de reducere a calculului limitei unui şir la calculul limitelor şirurilor coordonatelor). Elementul* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ *este limită a şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *cu*

$$x_k = (x_{k1}, ..., x_{kn}) \in \mathbb{R}^n, \ \textit{oricare ar fi}\ k \in \mathbb{N},$$

dacă şi numai dacă

$$\lambda_j = \lim_{k\to\infty} x_{kj}, \ \textit{oricare ar fi}\ j \in \{1, ..., n\}. \tag{5}$$

Demonstraţie. Necesitatea**. Fie $\lambda = \lim_{k\to\infty} x_{\mathbf{k}}$. Oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, există un rang k_ε astfel încât pentru orice număr natural k, $k \geq k_\varepsilon$, să avem

$$\|\lambda - x_k\|_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - x_{kj})^2} < \varepsilon.$$

Deoarece toţi termenii sumei sunt numere nenegative, rezultă că avem $|\lambda_j - x_{kj}| < \varepsilon$, pentru fiecare $j \in \{1, ..., n\}$, oricare ar fi numărul natural $k \geq k_\varepsilon$. Deci, pentru fiecare $j \in \{1, ..., n\}$, avem $\lambda_j = \lim_{k\to\infty} x_{kj}$.

Suficienţa. Fie $\lambda_j = \lim_{k\to\infty} x_{kj}$, pentru fiecare $j \in \{1, ..., n\}$. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare $j \in \{1, ..., n\}$ va exista un rang s_j, astfel încât să avem

$$|\lambda_j - x_{kj}| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq s_j. \tag{6}$$

Fie $k_\varepsilon = \max\{s_1, \ldots, s_n\}$. Din (6), prin ridicare la pătrat şi sumare, obţinem

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - x_{kj})^2 < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon, \tag{7}$$

oricare ar fi numărul natural k, $k \geq k_\varepsilon$. Din (7), extrăgând radicalul şi ţinând cont de definiţia normei, obţinem $\|\lambda - x_k\|_n < \varepsilon$, oricare ar fi $k \geq k_\varepsilon$. Deoarece ε a fost ales oarecare, deducem că $\lambda = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$.$\diamond$

Teorema 1.1 ne permite să extindem o serie de proprietăţi ale şirurilor de numere reale şi pentru şiruri cu elemente din $\mathbb{R}^n$. Un prim rezultat deosebit de important este cel care urmează.

Teorema 1.2 *(unicitatea limitei). Dacă $(x_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}^n$, atunci există cel mult un $\lambda \in \mathbb{R}^n$ astfel încât λ să fie limită a şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Prin analogie cu cazul şirului de numere reale, un şir din $\mathbb{R}^n$ se va numi *convergent* dacă el are limită în $\mathbb{R}^n$. Deci un şir cu termeni din $\mathbb{R}^n$ este convergent dacă şi numai dacă toate şirurile coordonatelor sunt convergente.

Teorema 1.3 *(relativă la mărginirea şirurilor convergente). Orice şir convergent cu termeni din $\mathbb{R}^n$ este mărginit.*

Menţionăm faptul că noţiunea de subşir al unui şir se defineşte, pentru un şir cu elemente din $\mathbb{R}^n$, la fel cum am definit acest lucru pentru un şir de numere reale.

Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir cu termeni din $\mathbb{R}^n$. Se numeşte subşir al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ orice şir $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, cu proprietatea că există un şir strict crescător de numere naturale $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ astfel încât $y_j = x_{k_j}$, pentru fiecare $j \in \mathbb{N}$. Pentru a nota un subşir al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vom folosi scrierea $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$.

Ţinând cont de legătura dintre un şir convergent şi subşirurile sale, obţinem următoarele rezultate.

Teorema 1.4 . *Dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *cu termeni din* $\mathbb{R}^n$ *este convergent, atunci orice subşir* $(x_{k_h})_{h\in\mathbb{N}}$ *al său este convergent şi are limita egală cu limita şirului, adică*

$$\lim_{h\to\infty} x_{k_h} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Teorema 1.5 *(de existentă a unui şubsir convergent pentru un şir mărginit) Orice şir mărginit cu termeni din* $\mathbb{R}^n$ *are un subşir convergent.*

Relativ la operaţii cu şiruri convergente cu elemente din $\mathbb{R}^n$, amintim următoarele:

Teorema 1.6 . *Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sunt două şiruri cu termeni din* $\mathbb{R}^n$*, convergente, cu* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$*, respectiv* $\lim_{k\to\infty} y_k = y$*, şi* α*,* β *sunt numere reale, atunci şirul* $(\alpha x_k + \beta y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha x + \beta y.$$

Teorema 1.1 are şi o importanţă deosebită practică deoarece ea ne permite să reducem calculul limitei unui şir cu elemente din $\mathbb{R}^n$ la calcularea a n limite de şiruri de numere reale.

Observaţia 1.1. În cazul în care cel puţin unul dintre şirurile coordonatelor corespunzătoare şirului $(x_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ nu este convergent, şirul $(x_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ nu este nici el convergent şi nu are sens să vorbim despre limita lui. (Nu are sens un punct în care o coordonată este $+\infty$ sau $-\infty$).

Exemplu. Fie şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu

$$x_k = (\frac{1}{k+1}, \frac{k-1}{(k+1)^2}, 1 - \frac{1}{k+1}), \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Deoarece

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0, \ \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{(k+1)^2} = 0, \text{ şi } \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{1}{k+1}) = 1,$$

vom avea

$$\lim_{k\to\infty} (\frac{1}{k+1}, \frac{k-1}{(k+1)^2}, 1 - \frac{1}{k+1}) = (0, 0, 1).$$

Exemplu. Fie şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cu $x_k = (1/(k+1), k)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $\lim_{k\to\infty} k = +\infty$, în baza obsevaţiei 1.1 şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nu este convergent.

Şiruri fundamentale cu termeni din $\mathbb{R}^n$ **(opţional).** Şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^n$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă oricare ar fi numărul real ε, $\varepsilon > 0$, există un rang s astfel încât oricare ar fi numerele naturale k şi p, cu $k \geq s$, să avem $||x_{\mathbf{k+p}} - x_{\mathbf{k}}|| < \varepsilon$.

Fară greutate se vede că un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este fundamental dacă şi numai dacă şirurile coordonatelor sale sunt fundamentale.

Ca urmare, obţinem următorul rezultat important.

Teorema 1.7 *(Criteriul lui Cauchy). O condiţie necesară şi suficientă ca un şir din* $\mathbb{R}^n$ *să fie convergent este ca el să fie şir fundamental.*

2 Funcţii reale de mai multe variabile reale

Fie $A \subseteq {\rm I\!R}^n$.

Numim *funcţie reală definită pe* A, orice triplet $(A, {\rm I\!R}, \Gamma)$, unde $\Gamma \subseteq A \times {\rm I\!R}$ are proprietatea că pentru orice $x \in A$ există un unic $b \in {\rm I\!R}$ astfel încât $(a, b) \in \Gamma$.

Funcţii mărginite. O funcţie $f =: A \to {\rm I\!R}$, unde $A \subseteq {\rm I\!R}^n$, se numeşte *mărginită* dacă mulţimea $f(A) = \{f(a) \,|\, a \in A\}$ este o submulţime mărginită a lui ${\rm I\!R}^p$.

Noţiunea de limită a unei funcţii reale într-un punct. Fie $n \in {\rm I\!N}$, $n \geq 2$ şi fie A o submulţime nevidă a lui ${\rm I\!R}^n$.

Elementul $\lambda \in \bar{{\rm I\!R}}$ *se numeşte limită a funcţiei* $f : A \subseteq {\rm I\!R}^n \to {\rm I\!R}$ *în punctul* $a \in A'$ *dacă oricare ar fi* V *o vecinătate a lui* λ, *există o vecinătate* U_V *a lui* a *astfel încât să avem* $f(x) \in V$, *pentru orice* $x \in (A \setminus \{a\}) \bigcap U_V$.

În cazul în care $\lambda \in {\rm I\!R}$, ţinând cont de modul în care s-a definit vecinătatea unui număr real, obţinem următoarea caracterizare a limitei, care poate fi luată ca definiţie.

$\lambda \in {\rm I\!R}$ *este limită a funcţiei* f *în punctul* $a \in A'$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real* $\varepsilon > 0$, *există un număr real* $\delta_\varepsilon > 0$ *cu proprietatea că*

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in A \setminus \{a\}, \text{ cu } \|x - a\|_n < \delta_\varepsilon.. \tag{8}$$

Teorema 2.1 *(unicitatea limitei). Dacă* $A \subseteq {\rm I\!R}^n$ *şi* $a \in A'$, *atunci există cel mult un element* $\lambda \in {\rm I\!R}$ *astfel încât* λ *să fie limită a funcţiei* $f : A \subseteq {\rm I\!R}^n \to {\rm I\!R}$ *în punctul* a.

Demonstraţie. Să presupunem că f ar avea două limite distincte λ' şi λ'' în ${\rm I\!R}$. Deoarece $\lambda' \neq \lambda''$, vor exista două vecinătăţi $V' \in V_{\lambda'}$ şi $V'' \in V_{\lambda''}$ astfel încât

$$V' \bigcap V'' = \emptyset. \tag{9}$$

Mai precis, luând $0 < r \leq \frac{1}{2} d(\lambda', \lambda'')$ şi considerând vecinătăţile $V' = B(u', r)$ şi $V'' = B(u'', r)$, avem $V' \bigcap V'' = \emptyset$.

Deoarece λ' este limită a funcţiei f în a, va exista o vecinătate U' a lui a astfel încât

$$f(x) \in V', \text{ oricare ar fi } x \in (U' \setminus \{a\}) \bigcap A, \tag{10}$$

şi, deoarece λ'' este limită a funcţie f în a, va exista o vecinătate U'' a lui a astfel încât

$$f(x) \in V'', \text{ oricare ar fi } x \in (U'' \setminus \{a\}) \bigcap A. \tag{11}$$

Întrucât $U' \bigcap U''$ este o vecinătate a lui a şi a este un punct de acumulare al lui A, mulţimea $(A \bigcap (U' \bigcap U'')) \setminus \{a\}$ nu este vidă. Fie $x \in (A \bigcap (U' \bigcap U'')) \setminus \{a\}$. Din (10) avem $f(x) \in V'$, iar din (11) avem $f(x) \in V''$. Deci $f(x) \in V' \bigcap V''$, ceea ce contrazice (9). Presupunerea că f ar avea două limite distincte în punctul a este falsă.$\diamond$

Unicitatea limitei, în caz de existenţă, ne permite să introducem pentru ea o notaţie specifică. Prin analogie cu cazul real, dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ are limită în punctul $a \in A'$, atunci limita lui f în punctul a o vom nota prin $\lim_{x\to a} f(x)$. Atragem însă atenţia că, dacă cerinţa din definiţia limitei ca $a \in A'$ se înlocuieşte cu $a \in A$, unicitatea limitei nu mai este asigurată.

La curs am demonstrat unicitatea limitei în $\mathbb{R}$. Ea poate fi extinsă şi în $\bar{\mathbb{R}}$. Avem astfel următorul rezultat:
Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $a \in A'$, atunci există cel mult un element $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ astfel încât λ să fie limită a funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ în punctul a.
Demonstraţia este analogă. Prin absurd se presupune că f ar avea două limite distincte $\lambda', \lambda'' \in \bar{\mathbb{R}}$. Faţă de cazul discutat anterior, mai avem situaţiile în care cel puţin una dintre limite este infinită. În aceste situaţie, vecinătăţile V' şi V'' se aleg după cum urmează.
• Dacă $\lambda' = -\infty$ şi $\lambda'' = +\infty$, vom lua $V' = (-\infty, -1)$ şi $V'' = (1, +\infty)$. Evident $V' \bigcap V'' = \emptyset$.
• Dacă $\lambda' = -\infty$ şi $\lambda'' \in \mathbb{R}$, vom lua $V' = (-\infty, \lambda - 2)$ şi $V'' = (\lambda'' - 1, \lambda'' + 1)$. Evident $V' \bigcap V'' = \emptyset$.
• Dacă $\lambda' \in \mathbb{R}$ şi $\lambda'' = +\infty$, vom lua $V' = (\lambda - 1, \lambda + 1)$ şi $V'' = (\lambda + 2, +\infty)$. Evident $V' \bigcap V'' = \emptyset$.
Exemplul 2.1. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2},$$

pentru fiecare $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Să se demonstreze că $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ şi fie δ_ε un număr real strict mai mare decât 0. Condiţia $\|(x_1, x_2) - (0,0)\|_2 < \delta_\varepsilon$, echivalentă cu $\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} < \delta_\varepsilon$, implică

$$|\, x_1 \,| < \delta_\varepsilon \text{ şi } |\, x_2 \,| < \delta_\varepsilon. \tag{12}$$

Deoarece $|\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}| \leq 1$, avem

$$|f(x_1, x_2) - 0| = \left|\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}\right| \cdot |x_1| \leq |x_1|. \tag{13}$$

Luând acum $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, din (12) şi (13) obţinem

$$|f(x_1, x_2) - 0| \leq |x_1| < \delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu $\|(x_1, x_2) - (0,0)\|_2 < \delta_\varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = 0$.

Criteriul lui Heine de exitenţă a limitei unei funcţii într-un punct. În numeroase situaţii este foarte util de cunoscut următorul rezultat legat de existenţa limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema 2.2 *(criteriul lui Heine). Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are limita λ în punctul $a \in A'$ dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cu proprietăţile:*
i) $x_k \in A \setminus \{a\}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi
ii) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lambda$, şirul $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ are limita λ.

*Demonstraţie.** *Necesitatea*. Fie şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfăcând condiţiile i) şi ii). Fie V o vecinătate a lui λ. Deoarece $\lambda = \lim\limits_{x\to a} f(a)$, va exista o vecinătate $U \in V_a$ astfel încât dacă $x \in (A\setminus\{a\})\bigcap U$, să avem $f(x) \in V$. Întrucât, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, deducem că pentru fiecare $j \in \{1,\ldots,n\}$, avem $\lim k \to \infty x_{kj} = a_j$. Ca urmare, va exista un rang s încât

$$x_{kj} \in U, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N},\ k \geq s, \text{ oricare ar fi } j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{14}$$

În baza celor de mai sus, deducem că $f(x_{k1},\ldots,x_{kn}) \in V$, oricare ar fi numărul natural k, $k \geq s$.
Cum V a fost o vecinătate aleasă arbitrar, rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{k1},\ldots,x_{kn}) = \lambda,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Suficienţa o vom demonstra prin reducere la absurd. Să presupunem că $\lambda \neq \lim_{x\to a} f(x)$. Va exista atunci o vecinătate V a punctului λ astfel încât, pentru orice vecinătate U a punctului a, există $x \in (U\setminus\{a\})\bigcap A$ cu $f(x) \notin V$. Atunci, pentru fiecare număr natural k, $k \geq 1$, va exista un element $a_k \in A\setminus\{a\}$ astfel încât să avem $a_k \in B(a, 1/k)$ şi $f(a_k) \notin V$. Am obţinut astfel şirul $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, care satisface condiţiile i) şi ii), pentru care şirul $(f(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ nu converge către λ, în contradicţie cu ipoteza. Întrucât am ajuns la o contradicţie, presupunerea că λ nu este limita funcţiei f în punctul a este falsă. Deci $\lambda = \lim_{x\to a} f(x)$.$\diamond$

Consecinţa 2.3 *Dacă pentru funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi pentru punctul $a \in A'$ există două şiruri $(x_{\mathbf{k}})$ şi $(y_{\mathbf{k}})$, cu termeni din mulţimea $A\setminus\{a\}$, convergente la a, pentru care şirurile $(f(x_{\mathbf{k}}))$ şi $(f(y_{\mathbf{k}}))$ au limite diferite sau unul dintre aceste şiruri nu are limită, atunci funcţia f nu are limită în punctul a.*

Exemplul 2.2. Studiaţi existenţa limitei în punctul $(0,0)$ pentru funcţia $f \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ oricare ar fi } (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Să considerăm şirurile $(x_{\mathbf{k}})$ cu $x_{\mathbf{k}} = (0, 1/k)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, şi $(y_{\mathbf{k}})$, cu $y_{\mathbf{k}} = (1/k, 1/k)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Cum

$$\lim_{\mathbf{k}\to\infty} f(x_{\mathbf{k}}) = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{0 + (1/k)^2} = 0,$$

şi

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{\mathbf{k}}) = \lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},\frac{1}{k}) = \frac{1}{2},$$

în baza consecinţei 2.3, funcţia f nu admite limită în punctul $(0,0)$.

Exemplul 2.3. Fie $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ şi fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2^2}$, oricare ar fi $(x_1,x_2) \in A$. Să se cerceteze dacă funcţia f are limită în punctul $(0,0)$.

Observăm faptul că $(0,0) \in A'$ şi că şirurile $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, şi $(_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $y_k = (0, \frac{1}{k})$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$,
satisfac condiţiile i) şi ii) din teorema 2.2. Dacă funcţia f ar avea limită în $(0,0)$, ar trebui ca şirurile $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ şi $(f(_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ să aibă aceeaşi limită. Avem:
$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(1/k, 1/k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{(\frac{1}{k})^2} = \lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$
şi $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(0, 1/k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{0}{(\frac{1}{k})^2} = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0.$
Deducem că f nu are limită în punctul $(0,0)$.

3 Probleme propuse pentru seminar şi ca temă

1) Calculaţi limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathbb{R}^n$, dacă:

a) $n = 2$ şi $x_k = (\frac{\cos k}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{k} j(j+1)}{3k(k+1)(k+2)})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$;

b) $n = 2$ şi $x_k = (\frac{2^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^{2k}}, \frac{\alpha^k+1}{5^k+\alpha^k})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, α fiind un număr real;

c) $n = 2$ şi $x_k = (\frac{2^k}{k!}, \sqrt[k]{2})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$;

d) $n = 3$ şi $x_k = (\frac{k^2}{1+2+...+k}, \sqrt[k]{k}, \frac{2^k+\alpha^k}{3^k})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}_-$;

e) $n = 3$ şi $x_{\mathbf{k}} = ((\frac{k^2-3}{k^2+k+1})^k, \frac{\sin k}{k}, \frac{\alpha^k}{k})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

2) Determinaţi domeniul maxim de definiţie pentru următoarele funcţii:

i) $f(x,) = y \ln(\cos \frac{\pi}{x})$;

ii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} - \ln(9 - y^2)$;

iii) $f(x, y, z) = \sqrt{z} - \frac{z}{x^2 + y^2 - 1}$;

iv) $f(x, y) = \arcsin(\frac{x-y}{x+y})$.

3) Utilizând definiţia limitei sau propoziţia echivalentă cu definiţia, arătaţi că:

a) $\lim_{(x_1,x_2)\to(1,2)} (2x_1 + 3x_2) = 8$;

b) $\lim_{(x_1,x_2)\to(-1,0)} \frac{x_1+1}{1+x_2} = 0.$

4) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x_1 \cdot x_2 \neq 0, \\ 0, \text{ dacă } x_1 \cdot x_2 = 0, \end{cases}$$

nu are limită în origine.

5) Arătaţi că:

$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0;$

$b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1;$

$c)\ \lim_{(x,y)\to(1,2)} xy^2 = 4;$

$d)\ \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1(x_2)^2}{(x_1)^2+(x_2)^2} = 0;$

$e)\ \lim_{(x,y)\to(2,4)} (2xy + x) = 18.$

6) Cercetaţi existenţa limitelor

$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{3x^2+y^4};$

$b)\ \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2+1}-1}.$