SUPORT PENTRU CURSUL 10
Polinomul lui Taylor de gradul II pentru funcţii de mai multe variabile
Puncte de extrem

6 decembrie 2012

În acest curs se continuă cu prezentarea unor aspecte legate de proprietăţi ale funcţiilor de două ori derivabile într-un punct.

Se construieşte polinomul lui Taylor de gradul II corespunzător unei funcţii de mai multe variabile şi se dă o aplicaţie a acestuia legată de aproximarea funcţiilor.

Se discută apoi câteva aspecte legate de punctele de extrem local ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

1 Funcţii de două ori derivabile parţial

Funcţii de două ori derivabile parţial într-un punct. Hessiana unei funcţii într-un punct Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *derivabilă parţial de două ori în punctul* $a \in \operatorname{int} A$ dacă pentru orice numere naturale i şi j din $\{1, \ldots, n\}$ funcţia f este derivabilă parţial de două ori în raport cu variabilele x_i şi x_j în punctul a.

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă parţial în punctul $a \in \operatorname{int} A$, numim *hessiană* a funcţiei f în a, şi notăm cu $Hf(a)$ matricea

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1.1.

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se construiescă $H(0,0)$.

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_2(x_1^4-x_2^4+4x_1^2x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & (x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1(x_1^4-x_2^4-4x_1^2x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & (x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

Calculând derivatele parţiale de ordinul doi în $(0,0)$ obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{t}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{t}=0,$$

şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0)=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t}=0.$$

Se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0,0).$$

Avem

$$[f''(0,0)]=Hf(0,0)=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0,0)\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Derivabilitate parţială de ordinul doi pe o mulţime. Fie $i,j\in\{1,...,m\}$ şi fie $A\subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, nevidă.

DEFINIŢIE. *Funcţia $f:A\to\mathbb{R}^p$ se numeşte derivabilă parţial de două ori în raport cu x_j şi x_i pe A, dacă f este derivabilă parţial de două ori în raport cu x_j şi x_i în fiecare punct $a\in A$. Funcţia*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}:A\to\mathbb{R}^p,$$

care ataşează fiecărui punct $a\in A$ vectorul (numărul pentru $p=1$) egal cu derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în raport cu x_j şi x_i în punctul a, se numeşte derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în raport cu x_j şi x_i.

Exemplul 1.2. Să se calculeze toate derivatele parţiale de ordinul doi corespunzătoare funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2x_3 + 3x_2e^{x_3},$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -1 + 3e^{x^3},$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -1 + 3e^{x_3},$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = 3x_2e^{x_3},$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Criterii suficiente pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte.

Teorema 1.1 *(a lui Hermann Amandus Schwarz). Dacă există un $r > 0$ astfel încât funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial de două ori pe $B(a,r) \subseteq A$ atât în raport cu variabilele x_i şi x_j cât şi în raport cu variabilele x_j şi x_i şi dacă funcţiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : B(a,r) \to \mathbb{R}^p$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : B(a,r) \to \mathbb{R}^p$ sunt continue în a, atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \tag{1}$$

Pentru doritori, o demonstraţie se găseşte, spre exemplu, în [2].

Teorema lui H. A. Schwarz ne dă condiţii suficiente dar nu şi necesare pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte într-un punct. Într-adevăr, după cum rezultă din exemplul 5.5.1, derivatele partiale mixte de ordinul doi în $(0,0)$ sunt egale deşi ipoteza de continuitate a funcţiilor derivate parţiale mixte de ordinul doi în $(0,0)$ nu este verificată, deoarece nu există $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, t)$. Într-adevăr considerând şirurile $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\left(\dfrac{-1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4}{n^4}}{\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\right)^2} = 1,$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\dfrac{4}{n^4}}{\left(\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{n^2}\right)^2\right)^2} = -1.$$

Teorema 2.1 a lui W. H. Young, ne dă alte condiţii suficiente de egalitate a derivatelor parţiale mixte.

2 Diferenţiabilitate de ordinul doi

Necesităţi, de ordin în special matematic, impun definirea diferenţiabilităţii (în sens Fréchet) de ordin doi.

Funcţie de două ori diferenţiabilă într-un punct. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ se numeşte de două ori diferenţiabilă (în sens Fréchet) în punctul $x^0 \in \operatorname{int} A$ dacă sunt verificate condiţiile:

i) f este diferenţiabilă (în sens Fréchet) pe o vecinătate $V \subseteq A$ a lui x^0;

ii) pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$, derivata parţială de ordinul I, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : V \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă (în sens Fréchet) în x^0.

Exemplul 2.1. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = (xy^2 - z^3, 2x - yz), \text{ oricare ar fi } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Vom arăta că f este de două ori diferenţiabilă în $(2, 0, 1)$. Să observăm mai întâi că f admite derivate parţiale de ordinul întâi în orice punct $(x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$ în raport cu x, cu y şi cu z; avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0, z^0) = ((y^0)^2, 2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0, z^0) = (2x^0y^0, -z^0),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x^0, y^0, z^0) = (-3(z^0)^2, -y^0).$$

Prin urmare derivatele parţiale de ordinul I, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}$ sunt definite pe $\mathbb{R}^3$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (y^2, 2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (2xy, -z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (-3z^2, -y),$$

oricare ar fi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se vede imediat că derivatele parţiale de ordinul I sunt continue în fiecare punct $(x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$, ceea ce implică diferenţiabilitatea funcţiei f în (x^0, y^0, z^0). Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, sunt derivabile parţial în fiecare punct $(x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$ atât în raport cu x cât şi cu y şi cu z. Prin urmare putem defini pe $\mathbb{R}^3$ funcţiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

şi avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = (2y, 0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = (2y, 0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = (2x, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = (0, -1),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = (0, -1),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = (-6z, 0)$$

oricare ar fi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Uşor se vede că derivatele parţiale de ordinul doi sunt continue pe $\mathbb{R}^3$, deci şi în punctul $(2, 0, 1)$. Rezultă că funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sunt diferenţiabile în $(2, 0, 1)$. În conformitate cu definiţia diferenţiabilităţii de ordin doi, concludem că funcţia f este de două ori diferenţiabilă în $(2, 0, 1)$.

Teorema 2.1 *(teorema lui Young). Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este de două ori diferenţiabilă în $x \in int\, A$, atunci oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$ şi oricare ar fi $j \in \{1, ..., n\}$, funcţia f este de două ori derivabilă parţial în x atât în raport cu x_i şi x_j cât şi în raport cu x_j şi x_i şi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x). \tag{2}$$

Demonstraţie(facultativ). Fie $i \in \{1, ..., n\}$. Conform definiţiei există o vecinătate V a punctului x astfel încât, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$, f admite derivată parţială în raport cu x_i pe $V \subseteq A$ şi funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : V \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în x. Fie $j \in \{1, ..., n\}$. Funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ este derivabilă parţial în raport cu x_j. Ţinând cont de definiţia derivatei parţiale de ordinul doi, rezultă că f admite derivată de ordinul doi în x în raport cu x_i şi x_j. Schimbând rolul lui i cu j şi făcând un raţionament analog, rezultă că f admite derivată parţială de ordinul doi în x în raport cu x_j şi x_i. Rămâne să demonstrăm că are loc (2). Demonstrarea egalităţii derivatelor parţiale de ordinul doi în punctul x se face într-o manieră analoagă celei utilizate în demonstrarea teoremei lui Schwarz.$\diamond$

Definiţie. *i) Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de două ori diferenţiabilă în punctul $x^0 \in int\, A$, numim diferenţială (Fréchet) de ordinul doi a lui f în x^0, şi notăm cu $d^2 f(x^0)$, funcţia $d^2 f(x^0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$d^2 f(x^0)(h) = \langle h, Hf(x^0)h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) h_i h_j, \tag{3}$$

oricare ar fi $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

ii) Dacă funcţia vectorială $f = (f_1, \ldots, f_p) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este de două ori diferenţiabilă (Fréchet) în $x^0 \in int\, A$, numim diferenţială (Fréchet) de ordinul doi a lui f în x^0, şi notăm cu $d^2 f(x^0)$, funcţia

$$d^2 f(x^0) = (d^2 f_1(x^0), \ldots, d^2 f_p(x^0)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p.$$

Observaţia 2.1. Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de două ori diferenţiabilă în $x^0 \in \text{int}A$, atunci, în baza teoremei lui Young, matricea $Hf(x^0)$ este simetrică şi, prin urmare,

$$d^2 f(x^0)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0) h_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) h_i h_j,$$

oricare ar fi $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplul 2.2. Să se construiască $d^2 f(2, 0, 1)$, pentru funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = (xy^2 - z^3, 2x - yz),$$

oricare ar fi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Construim mai întâi hessiana componentei f_1. Avem

$$Hf_1(2,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix};$$

prin urmare

$$d^2 f_1(2,0,1)(h) = 4h_2^2 - 6h_3^2,$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}^3$. Construim hessiana componentei f_2. Avem

$$Hf_2(2,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

şi

$$d^2 f_2(2,0,1)(h) = -2h_2h_3,$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}^3$. Deci $d^2 f(2,0,1) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$d^2 f(2,0,1)(h) = (4h_2^2 - 6h_3^2, -2h_2h_3),$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplul 2.3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = xy - yz$$

pentru fiecare $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dorim să construim diferenţiala de ordinul doi a lui f într-un punct (x^0, y^0, z^0). Vom avea

$$d^2 f(x^0, y^0, z^0)(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x^0, y^0, z^0) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x^0, y^0, z^0)}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f(x^0, y^0, z^0)}{\partial y^2} h_2^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x^0, y^0, z^0)}{\partial z^2} h_3^2 + 2\frac{\partial^2 f(x^0, y^0, z^0)}{\partial x \partial y} h_1h_2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f(x^0, y^0, z^0)}{\partial x \partial z} h_1h_3 + 2\frac{\partial^2 (x^0, y^0, z^0)}{\partial y \partial z} h_2h_3 =$$

$$= 2h_1h_2 - 2h_2h_3,$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$.

Introducerea diferenţiabilităţii de ordin superior se face în mod inductiv, prin analogie cu modul în care s-a introdus diferenţiabilitatea de ordinul II. Doritorii pot citi mai multe lucruri legate de această tematică din [1] sau [2].

Funcţii pătratice. Fie $C \in \mathrm{I\!R}^{n\times n}$ o matrice simetrică.

DEFINIŢIE. *Funcţia* $u : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}$ *dată prin*

$$u(x) \; =< x, Cx >, \; \textit{pentru fiecare } x \in \mathrm{I\!R}^n.$$

se numeşte funcţia pătratică generată de matricea C.

Matricea C se numeşte matricea ataşată funcţiei pătratice u.

Din definiţia funcţiei de două ori diferenţiabile într-un punct şi din teorema lui Joung deducem că diferenţiala de ordinul 2 a unei funcţii reale de mai multe variabile reale este o funcţie pătratică.

DEFINIŢIE. *Funcţia pătratică* $u : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}$ *se numeşte:*
i) pozitiv definită dacă $u(x) > 0$, *oricare ar fi* $x \in \mathrm{I\!R}^n \setminus \{0_{\mathrm{I\!R}^n}\}$;
ii) negativ definită dacă $u(x) < 0$, *oricare ar fi* $x \in \mathrm{I\!R}^n \setminus \{0_{\mathrm{I\!R}^n}\}$;
iii) pozitiv semidefinită, dacă $u(x) \geq 0$, *oricare ar fi* $x \in \mathrm{I\!R}^n$;
iv) negativ semidefinită, dacă $u(x) \leq 0$, *oricare ar fi* $x \in \mathrm{I\!R}^n$;
v) indefinită, dacă există x' *şi* x'' *în* $\mathrm{I\!R}^n$ *astfel încât* $u(x') > 0$ *şi* $u(x'') < 0$.

EXEMPLUL 2.4. Fie $n = 2$. Să considerăm funcţia pătratică $u : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$,

$$u(h_1, h_2) \; = \; c_{11}h_1^2 + 2c_{12}h_1h_2 + c_{22}h_2^2, \;\; \forall \;\, h = (h_1, h_2) \in \mathrm{I\!R}^2,$$

unde $c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{12}^2 \neq 0$.

Fie $\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$. Distingem trei cazuri: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ şi $\Delta < 0$.

Dacă $\Delta \geq 0$, atunci, din condiţia $c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{12}^2 \neq 0$ deducem că $c_{11}^2 + c_{22}^2 \neq 0$. Fără a restrânge generalitatea, vom presupune că $c_{11} \neq 0$ (un raţinament analog se poate face dacă $c_{22} \neq 0$). Atunci

$$u(h_1, h_2) \; = \; \frac{1}{c_{11}} \left((c_{11}h_1 + c_{12}h_2)^2 \; + \; (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)h_2^2 \right), \;\; \forall \;\, (h_1, h_2) \in \mathrm{I\!R}^2. \tag{4}$$

Cazul I. Dacă $\Delta > 0$, atunci $u(h_1, h_2) > 0$, oricare ar fi $(h_1, h_2) \in \mathrm{I\!R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Deci, în acest caz, u este formă pătratică pozitiv definită.

Cazul II. Dacă $\Delta = 0$, atunci $u(h_1, h_2) \geq 0$, oricare ar fi $(h_1, h_2) \in \mathrm{I\!R}^2$. Deci, în acest caz, u este formă pătratică pozitiv semidefinită.

Cazul III. Dacă $\Delta < 0$, distingem două subcazuri: $c_{11}^2 + c_{22}^2 \neq 0$ şi $c_{11}^2 + c_{22}^2 = 0$.
Subcazul III.i). Dacă $c_{11}^2 + c_{22}^2 \neq 0$, atunci, fără a restrânge generalitatea, vom presupune că $c_{11} \neq 0$ (un raţinament analog se poate face dacă $c_{22} \neq 0$). În acestă situaţie, pentru $h = (-\frac{c_{12}}{c_{11}}, 1)$ avem $\operatorname{sgn} u(-\frac{c_{12}}{c_{11}}, 1) \; = \; -\operatorname{sgn} c_{11}$, iar pentru $h = (1, 0)$, avem $\operatorname{sgn} u(1, 0) \; = \; \operatorname{sgn} c_{11}$. Deci u este o formă pătratică indefinită.
Subcazul II.ii) Dacă $c_{11} = 0$ şi $c_{22} = 0$, avem $u(h_1, h_2) \; = \; 2c_{12}h_1h_2$, $\forall \; (h_1, h_2) \in \mathrm{I\!R}^2$. Luând $(h_1, h_2) = (1, 1)$, avem $\operatorname{sgn} u(1, 1) = \operatorname{sgn} c_{12}$, iar dacă luăm $(h_1, h_2) = (-1, 1)$, avem $\operatorname{sgn} u(1, 1) = -\operatorname{sgn} c_{12}$. Deci u este o formă pătratică indefinită.

În determinarea naturii formei pătratice ataşată lui $d^2 f(M)$ putem folosi criteriul lui Sylvester (a se vedea F.G. Gantmaher, Teoria matriţ, G.I.T.T.L., Moskva 1953, cap. X, & 4, teoremele 3 - 6):

Teorema 2.2 *(criteriul lui Sylvester). Dacă $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie pătratică, cu matricea asociată*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix},$$

atunci, notând

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & ... & c_{1k} \\ ... & ... & ... \\ c_{k1} & ... & c_{kk} \end{vmatrix},$$

pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$, următoarele propoziţii sunt adevărate:

i) u este funcţie pătratică pozitiv definită dacă şi numai dacă pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$ avem $\Delta_k > 0$;

ii) u este funcţie pătratică negativ definită dacă şi numai dacă pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$ avem $(-1)^k \Delta_k > 0$.

3 Formula lui Taylor pentru funcţii reale de mai multe variabile reale

Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ şi fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de 2 ori diferenţiabilă în punctul a.

Definiţie. *Se numeşte polinom al lui Taylor de gradul 2 ataşat funcţiei f în punctul a, şi se notează cu $T_2(f; a)$, polinomul*

$$T_2(f; a)(\mathrm{x}) = f(a) + df(a)(\mathrm{x} - a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(\mathrm{x} - a).$$

Funcţia polinomială ataşată polinomului lui Taylor de gradul 2 $T_2(f; a)(\mathrm{x})$ o vom nota prin $T_2(f; a)$. Avem $T_2(f; a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$T_2(f; a)(x) = f(a) +, \nabla f(a)\, , x - a > + \frac{1}{2} < x - a\, , Hf(a)(x - a) >, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplul 3.1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + \sin x_2 + x_2 e^{x_3}$$

pentru fiecare $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Vom scrie polinomul lui Taylor de gradul 2 ataşat funcţiei f în punctul $(-1, \pi/2, 0)$. Avem

$$df\left(-1, \frac{\pi}{2}, 0\right)\left(x_1 + 1, x_2 - \frac{\pi}{2}, x_3 - 0\right) = 3(x_1 + 1) + 1 \cdot \left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2}(x_3 - 0) = 3x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2} x_3 + 3 - \frac{\pi}{2},$$

$$d^2 f\left(-1, \frac{\pi}{2}, 0\right)\left(x_1 + 1, x_2 - \frac{\pi}{2}, x_3 - 0\right) =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2-\dfrac{\pi}{2} \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2-\dfrac{\pi}{2} \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= -6(x_1+1)^2 - \left(x_2-\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2x_3\left(x_2-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}x_3^2$$

şi

$$f\left(-1, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci

$$T_2\left(f; \left(-1, \frac{\pi}{2}, 0\right)\right)(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3 + \frac{\pi}{2}\mathrm{x}_3 + 3-$$

$$-\frac{1}{2}\left(6(\mathrm{x}_1+1)^2 + \left(\mathrm{x}_2-\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\mathrm{x}_3\left(\mathrm{x}_2-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\mathrm{x}_3^2\right).$$

Teorema 3.1 *(teorema lui G. Peano). Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie de 2 ori diferenţiabilă în punctul $a \in int\,A$, atunci*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_2(f;a)(x)}{\|x-a\|_n^2} = 0. \tag{5}$$

Demonstraţie(facultativ). Deoarece f este de două ori diferenţiabilă în punctul a rezultă că există o vecinătate V a lui a astfel încât

i) f este diferenţiabilă pe $V \cap A$;

ii) oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$, funcţia $F_i : V \cap A \to \mathbb{R}$,

$$F_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \text{ pentru fiecare } x \in V \cap A,$$

este diferenţiabilă în a, ceea ce implică faptul că

$$\lim_{x\to a} \frac{F_i(x) - F_i(a) - dF_i(a)(x-a)}{\|x-a\|_n} = 0,$$

pentru fiecare $i \in \{1, ..., n\}$. Prin urmare, pentru orice numărul real $\varepsilon > 0$, pentru fiecare $i \in \{1, ..., n\}$, va exista un $r_i > 0$ astfel încât $B(a, r_i) \subseteq A \cap V$ şi

$$|F_i(x) - F_i(a) - dF_i(a)(x-a)| \le \frac{\varepsilon}{2n}\|x-a\|.$$

Luăm $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ şi considerăm $B(a,r)$. Construim funcţia $g : B(a,r) \to \mathbb{R}$, dată prin

$$g(x) = f(x) - T_2(f;a)(x) =$$

$$= f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_h}(a)(x_j-a_j)(x_h-a_h),$$

pentru fiecare $x \in B(a, r)$. Funcţia g este diferenţiabilă pe $B(a, r)$ şi avem

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)(x_j - a_j) =$$

$$= F_i(x) - F_i(a) - dF_i(a)(x - a),$$

oricare ar fi $x \in B(a, r)$. Prin urmare avem

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n} \|x - a\|_n, \text{ pentru fiecare } i \in \{1, \ldots, n\},$$

oricare ar fi $x \in B(a, r)$. Pentru fiecare punct $x \in B(a, r)$ va exista, în baza teoremei lui Lagrange, un $\Theta_x \in]0, 1[$ astfel încât

$$g(x) - g(a) = dg(a + \Theta_x(x - a))(x - a).$$

Dar atunci

$$|g(x) - g(a)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(c)(x_i - a_i) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right| |x_i - a_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - a\|_n^2,$$

unde $c = a + \Theta_x(x - a)$. Ţinând cont de legea de compoziţie a funcţiei g şi de inegalităţile de mai sus, putem scrie

$$\frac{\left| f(x) - f(a) - df(a)(x - a) - \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x - a) \right|}{\|x - a\|^2} =$$

$$= \frac{|g(x) - g(a)|}{\|x - a\|^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă (5).

Formula lui Taylor cu restul de ordin 2. Polinomul lui Taylor poate fi utilizat ca polinom de aproximare. Ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă reală, se pune problema determinării restului, adică a diferenţei

$$R_2(x) = f(x) - T_2(f; (a))(x),$$

pentru fiecare $x \in A$. Se poate demonstra că,

Teorema 3.2 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este deschisă, convexă şi nevidă, $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de 2 ori diferenţiabilă pe A atunci, oricare ar fi a şi x elemente ale lui A, există un număr real $\theta \in]0, 1[$ astfel încât*

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \frac{1}{2} d^2 f(a + \theta(x - a))(x - a).$$

4 Puncte de extrem relativ la o mulţime

Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ şi fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$. Fie $M \subseteq A$, $M \neq \emptyset$.

Un punct $x^0 \in A$ se numeşte:

• *punct de maxim local al lui f relativ la M, dacă $x^0 \in M$ şi dacă există un număr real $r > 0$ cu proprietatea că $f(x^0) \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in B(x^0, r) \bigcap M$;*

• *punct de minim local al lui f relativ la M, dacă $x^0 \in M$ şi dacă există un număr real $r > 0$ cu proprietatea că $f(x^0) \leq f(x)$, oricare ar fi $x \in B(x^0, r) \bigcap M$;*

• *punct de extrem local relativ la M dacă x^0 este punct de minim local sau punct de maxim local al lui f relativ la M.*

În cazul în care $M = A$, convenim să spunem simplu că x^0 este un punct de maxim (minim) local al funcţiei f.

În legătură cu punctele de extrem se ridică două probleme importante: problema existenţei lor şi problema determinării lor efective. În ce priveşte prima problemă, un răspuns, pentru cazul particular în care funcţia f este continuă şi mulţimea pe care se caută extremele este compactă, îl avem, orice funcţie continuă pe un compact atingându-şi marginile. Pentru a rezolva a doua problemă să reamintim că, în cazul funcţiilor derivabile pe un interval deschis al lui $\mathbb{R}$, căutarea punctelor de extrem poate fi redusă la stabilirea naturii punctelor critice datorită teoremei lui Fermat. De aceea este firesc să încercăm să dăm o extindere a acestei teoreme şi în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

5 Generalizarea teoremei lui P. Fermat

Teorema 5.1 *(generalizarea teoremei lui P. Fermat). Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă parţial în punctul $x^0 \in intA$ şi dacă x^0 este un punct de extrem local al funcţiei f, atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \,=\, 0, \text{ oricare ar fi } j \in \{1, ..., n\}, \tag{6}$$

sau, echivalent,

$$\nabla f(x^0) \,=\, 0_n. \tag{7}$$

Demonstraţie. Demonstraţia o vom face în ipoteza că x^0 este un punct de minim local. Un raţionament analog se poate face dacă se presupune că x^0 este un punct de maxim local.

Deoarece x^0 este un punct interior al mulţimii A, există un număr real $r_1 > 0$ astfel încât $B(x^0, r_1) \subseteq A$. De asemenea, întrucât x^0 este un punct de minim local al funcţiei f rezultă că există un număr real r_2, $r_2 > 0$, astfel încât

$$f(x^0) \,\leq\, f(x), \text{ oricare ar fi } x \in A \bigcap B(x^0, r_2). \tag{8}$$

Fie $r = \min\{r_1, r_2\}$. Notând cu e^j, $j \in \{1, \ldots n\}$, vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}^n$, avem $||x^0 + te^j - x^0|| = |t| < r$, oricare ar fi $t \in]-r, r[$. Deci

$$(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 + t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0) \in B(x^0, r), \text{ oricare ar fi } t \in]-r, r[. \tag{9}$$

Pentru fiecare $j \in \{1, ..., n\}$, construim funcţia $g_j :]x_j^0 - r, x_j^0 + r[\to \mathbb{R}$ dată prin

$$g_j(t) = f(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, t, x_{j+1}^0, ..., x_n^0), \text{ pentru fiecare } t \in]x_j^0 - r, x_j^0 + r[. \tag{10}$$

Observăm că g_j este derivabilă în x_j^0 şi că

$$g_j'(x_j^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0). \tag{11}$$

Întrucât, în baza lui (8), (9) şi (10) avem

$$g_j(t) = f(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, t, x_{j+1}^0, ..., x_n^0) \geq f(x^0) = g_j(x_j^0), \text{ oricare ar fi } t \in]x_j^0 - r, x_j^0 + r[,$$

deducem că x_j^0 este un punct de minim local al funcţiei g_j. Aplicând teorema lui Fermat funcţiei g_j, rezultă că $g_j'(x_j^0) = 0$. Cum $j \in \{1, ..., n\}$ a fost ales oarecare, deducem că are loc (6). Ţinând cont de legătura dintre derivatele parţiale ale unei funcţii într-un punct şi gradientul ei în acelaşi punct, avem (7).$\diamond$

Trebuie subliniat faptul că dacă punctul x^0 nu este un punct interior al mulţimii relativ la care se determină punctele de extrem, concluzia teoremei nu rămâne adevărată după cum am văzut în cazul 1-dimensional.

Mai mult, pentru ca un punct să fie punct de extrem local nici nu este necesar ca funcţia să fie derivabilă parţial în acel punct.

Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$.

DEFINIŢIE. *Un punct $x^0 \in intA$ se numeşte punct staţionar sau punct critic al funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$ dacă f este diferenţiabilă în punctul x^0 şi dacă*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = 0, \text{ pentru fiecare } j \in \{1, ..., n\}. \tag{12}$$

Ca o consecinţă imediată a teoremei lui Fermat obţinem următoarea condiţie necesară pentru un punct de extrem:

Consecinţa 5.2 . *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este nevidă şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul $x^0 \in intA$, atunci o condiţie necesară ca x^0 să fie un punct de extrem local al funcţiei f este ca x^0 să fie un punct critic al funcţiei f.*

Cerinţa ca un punct să fie critic nu este o condiţie suficientă ca punctul să fie punct de extrem local.

EXEMPLU. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x-1)^2 - y^2$, pentru fiecare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Avem $\nabla f(1, 0) = 0_2$. Totuşi $(1, 0)$ nu este nici punct de maxim local, nici punct de minim local. Într-adevăr, dacă $(1, 0)$ ar fi un punct de extrem local, ar exista un număr real $r > 0$ cu proprietatea că

$$f(1, 0) \leq f(u, v), \text{ oricare ar fi } (u, v) \in B((1, 0), r), \text{ dacă } (x, y) \text{ este punct de minim local,}$$

respectiv

$$f(1,0) \geq f(u,v), \text{ oricare ar fi } (u,v) \in B((1,0),r), \text{ dacă } (x,y) \text{ este punct de maxim local.}$$

Considerând punctul

$$(u,v) = (1, \frac{r}{2}),$$

se vede imediat că $(u,v) \in B((1,0),r)$ şi că $f(1,0) > f(u,v)$. Deci $(1,0)$ nu poate fi punct de minim local. Dacă considerăm punctul

$$(u,v) = (1 + \frac{r}{2}, 0),$$

avem $(u,v) \in B((1,0),r)$ şi $f(u,v) > f(1,0)$, ceea ce contrazice ipoteza că $(1,0)$ ar fi punct de maxim local. Deci $(1,0)$ nu este punct de extrem local.

Există însă clase particulare de funcţii, spre exemplu funcţiile convexe, cu proprietatea că orice punct critic este şi punct de extrem. Precizăm faptul că:
i) o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *convexă* dacă

$$(1-t)x + ty \in A, \ \forall x, y \in A, \ t \in [0,1];$$

ii) o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *convexă* dacă

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \ \forall x, y \in A, \ t \in [0,1].$$

6 Probleme

1) În ipoteza că funcţia f este de două ori diferenţiabilă în punctul M construiţi $df(M)$ şi $d^2f(M)$ dacă:
a) $f :]0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^{yz}$ pentru fiecare $(x,y,z) \in]0,+\infty) \times \mathbb{R}^2$, şi $M = (1,2,0)$;
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$ cu

$$f_1(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x),$$

$$f_2(x,y,z) = xyz,$$

oricare ar fi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ şi $M = (2,1,-1)$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\sin t, \cos t, t^3)$ pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, şi $M = 0$.

2) Construiţi polinomul lui Taylor de gradul 2 ataşat funcţiei $f : D \to real$ în punctul $(x^0, y^0) \in D$, unde D este domeniul maxim de definiţie, dacă: a) $f(x,y) = e^y \sin x$, $(x^0, y^0) = (0,0)$;
b) $f(x,y) = e^y \sin x$, $(x^0, y^0) = (0,0)$;
c) $f(x,y) = e^{x+y}$, $(x^0, y^0) = (2,-2)$;
d) $f(x,y) = x^y$, $(x^0, y^0) = (1,1)$;
e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$, $(x^0, y^0) = (0,0)$;

Bibliografie

[1] COBZAŞ ŞT.: *Analiză matematică (Calculul diferenţial)*. Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană 1997.

[2] LUPŞA L., BLAGA L.: *Analiză matematică. Note de curs* 1. Cluj-Napoca, Presa Universitară Clujeană, 2003.