Anexa 2 pentru suportul de la cursul 1
Şiruri de numere reale

4 octombrie 2012

În acestă anexă sunt prezentate proprietăţi ale şirurilor de numere reale cunoscute din manualul de liceu. Nu intotdeauna ele sunt şi demonstrate în manual. De aceea, pentru demonstraţii am utilizat surse indicate ca bibliografie suplimentară, la curs.

1 ŞIRURI DE NUMERE REALE

DEFINIŢIE. *Se numeşte şir de numere reale orice funcţie* f *definită pe mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N}^*$ *(sau pe o mulţime* $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} | p \leq n\}$*, unde* $p \in \mathbb{N}$*), cu valori în mulţimea numerelor reale* $\mathbb{R}$*.*

Pentru notarea şirului vom folosi simbolul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *, dacă şirul este definit pe* $\mathbb{N}$ *(respectiv notaţia* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_p}$*), unde*

$$x_k = f(k), \text{ pentru fiecare } k \in \mathbb{N} \text{ (respectiv } k \in \mathbb{N}_p).$$

x_k *se numeşte termenul de rang* k *al şirului, iar* k *este rangul termenului* x_k*.*

Mulţimea $\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ *se numeşte mulţimea termenilor şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *.*

EXEMPLUL 1.1. Cel mai simplu exemplu de şir este şirul numerelor naturale: $(k)_{k\in\mathbb{N}}$; avem $x_k = k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLUL 1.2. Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Putem considera şirul: $(k^\alpha)_{k\in\mathbb{N}^*}$; avem $x_k = k^\alpha$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

EXEMPLUL 1.3. Fie $a, r \in \mathbb{R}$ $r \neq 0$. Şirul $(a + kr)_{k\in\mathbb{N}})$, adică şirul cu termenul general $x_k = a+kr$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, este numit şi şirul corespunzător progresiei aritmetice cu primul termen a şi raţia r.

EXEMPLUL 1.4. Fie $a, q \in \mathbb{R}$ $q \notin \{0, 1\}$. Şirul $(aq^k)_{k\in\mathbb{N}})$, adică şirul cu termenul general $x_k = a \cdot q^k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, este numit şirul corespunzător progresiei geometrice cu primul termen a şi raţia q.

EXEMPLUL 1.5. Şirul cu $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ şi $x_k = x_{k-2} + x_{k-1}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 3$, se numeşte şirul lui Fibonacci.

EXEMPLUL 1.6. Fie $a \in \mathbb{R}$. Şirul cu termenul general $x_k = a^k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, se numeşte şirul puterilor lui a.

2 Limita unui şir de numere reale

Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

DEFINIŢIE. *Un element* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte limită a şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dacă oricare ar fi* V *o vecinătate a lui* x *există un număr natural* k_V *astfel încât* $x_k \in V$, *oricare ar fi numărul natural* k, $k \geq k_V$.

Avem următorul rezultat deosebit de important.

Teorema 2.1 *([1], teorema 2.1.7). Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere reale, atunci există cel mult un element* $x \in \bar{\mathbb{R}}$ *astfel încât* x *să fie limita şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Demonstraţie. Să presupunem că şirul ar avea două limite distincte x şi y. Patru cazuri trebuie analizate: $x,\ y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$, $y = -\infty$ şi $x = +\infty$, $y = -\infty$.

Dacă $x,\ y \in \mathbb{R}$, atunci, cum $x \neq y$, vor exista două vecinătăţi $U \in V_x$ şi $V \in V_y$ astfel încât

$$U \cap V = \emptyset. \tag{1}$$

în acelaşi timp vor exista numerele naturale k_U şi k_V astfel încât

$$x_k \in U \text{ şi } y_k \in V, \text{ oricare ar fi numărul natural } k \geq \max\{k_U,\ k_V\}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$x_k \in \emptyset \text{ şi } y_k \in \emptyset, \text{oricare ar fi numărul natural } k \geq \max\{k_U,\ k_V\},$$

ceea ce nu se poate. întrucât am ajuns la o contradicţie, presupunerea că şirul are două limite distincte $x, y \in \mathbb{R}$ este falsă.

Contradicţia am demonstrat-o pe baza existenţei a două vecinătăţi disjuncte a celor două limite. Prin urmare, în cele trei cazuri rămase este suficient să punem în evidenţă două vecinătăţi disjuncte, raţionamentul ulterior urmând calea de mai sus. $\diamond$

Unicitatea limitei, în caz de existentă, ne permite să introducem pentru notarea ei un simbol. Astfel, convenim să notăm limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prin $\lim_{k\to\infty} x_k$. Pentru a preciza că x este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, vom utiliza notaţia

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k,$$

şi vom spune că x *este limita şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sau că *şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge către* x .

EXEMPLUL 2.1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul puterilor lui a, $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Avem

$$\lim_{k\to+\infty} a^k = \begin{cases} 0, \text{ dacă } |a| < 1, \\ 1, \text{ dacă } a + 1, \\ +\infty, \text{ dacă } a > 1, \\ \text{nu există, dacă } a \leq -1. \end{cases}$$

În continuare vom trece în revistă, fară a insista asupra demonstraţiei lor, principalele proprietăţi ale şirurilor de numere reale. Doritorii pot găsi demonstraţiile aferente lor, atât în manualele de analiză din liceu cât şi în lucrări de specialitate, spre exemplu în [1] sau [2].

Fară greutate se pot demonstra următoarele:
i) Proprietatea unui şir de numere reale de a avea limită nu se schimbă dacă se modifică valorile unui număr finit de termeni ai şirului sau dacă se schimbă între ei un număr finit de termeni ai şirului.
ii) Limita unui şir de numere reale rămâne aceeaşi dacă se modifică valorile unui număr finit de termeni ai şirului sau dacă se schimbă între ei un număr finit de termeni ai şirului.

Particularizând cerinţa din definiţia limitei pentru fiecare dintre cazurile: limita este număr real, limita este $+\infty$ şi limita este $-\infty$, obţinem următorul rezultat.

Teorema 2.2 *([1], teoremele 2.1.10 şi 2.1.12). Dacă $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *numărul real x este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dacă şi numai dacă pentru orice număr real ε, $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε astfel încât să avem $\mid x_n - x \mid < \varepsilon$, oricare ar fi numărul natural n, $n \geq n_\varepsilon$;*

- *$+\infty$ este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dacă şi numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât $x_n > \varepsilon$ oricare ar fi numărul natural n, $n \geq n_\varepsilon$;*

- *$-\infty$ este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dacă şi numai dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât $x_n < -\varepsilon$, oricare ar fi numărul natural n, $n \geq n_\varepsilon$.*

3 Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema 3.1 *. Dacă $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de numere reale, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *([1], teorema 2.2.8) dacă $y \in \mathbb{R}$, există un şir de numere reale $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent către 0 şi există un număr natural k_0 astfel încât $\mid y_k - y \mid \leq x_k$, oricare ar fi numărul natural k, $k \geq k_0$, atunci şirul $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent către y;*

- *([1], teorema 2.2.5) dacă există un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$, şi există un număr natural k_0 astfel încât $y_k \geq x_k$ oricare ar fi numărul natural k, $k \geq k_0$, atunci $\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty$;*

- *([1], teorema 2.2.5) dacă există un şir $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu $\lim_{k\to\infty} z_k = -\infty$, şi există un număr natural k_0 astfel încât $y_k \leq z_k$, oricare ar fi numărul natural k, $k \geq k_0$, atunci $\lim_{k\to\infty} y_k = -\infty$.*

Teorema 3.2 *([1], teoremele 2.1.13 şi 2.2.1). Dacă $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale cu limita $x \in \overline{\mathbb{R}}$, următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *dacă* $x > 0$ *(respectiv* $x < 0$ *), atunci există un număr natural* n_0, *astfel încât* $x_n > 0$ *(respectiv* $x_n < 0$ *), oricare ar fi numărul natural* n, $n \geq n_0$;
- *dacă* a *şi* b *sunt elemente ale lui* $\bar{\mathbb{R}}$ *şi* $a < x < b$, *atunci există un număr natural* n_0 *astfel încât*

$$a < x_n < b, \text{ oricare ar fi numărul natural } n, \, n \geq n_0.$$

Teorema 3.3 *([1], teoremele 2.2.2 şi 2.2.3).*

- *Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sunt două şiruri de numere reale având limita* x, *respectiv* y, *şi dacă* $x < y$, *atunci există un număr natural* k_0 *astfel încât* $x_k < y_k$, *oricare ar fi numărul natural* k, $k \geq k_0$.
- *Dacă şirurile* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *au limită şi dacă există un număr natural* k_0 *astfel încât* $x_k \leq y_k$, *oricare ar fi numărul natural* $k \geq k_0$, *atunci* $\lim_{k\to\infty} x_k \leq \lim_{k\to\infty} y_k$.

Teorema 3.4 *(teorema cleştelui pentru şiruri)([1], teorema 2.2.6). Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *şi* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sunt trei şiruri de numere reale cu proprietatea că există un număr natural* k_0 *astfel încât* $x_k \leq y_k \leq z_k$, *oricare ar fi numărul natural* $k \geq k_0$, *şi dacă şirurile* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *au limită şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} z_k,$$

atunci şirul $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} z_k.$$

4 Operaţii cu şiruri care au limită

În mulţimea $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ a şirurilor de numere reale introducem

- operaţia de adunare definită prin

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} + (y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

  oricare ar fi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, şi $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

- operaţia de înmulţire cu un scalar definită prin

$$t \cdot (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (tx_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

  oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, şi

- operaţia de înmulţire dată prin

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \cdot (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_k \cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

  oricare ar fi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Elementul nul, în raport cu adunarea, este şirul constant $(0)_{k\in\mathbb{N}}$, cu toţi termenii egali cu 0, iar opusul şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este şirul

$$-(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (-1)\cdot(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (-x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Dacă $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un şir având proprietatea că $y_k \neq 0$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, el admite un invers şi anume şirul $(y_k)^{-1}_{k\in\mathbb{N}}$ dat prin

$$(y_k)^{-1}_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{y_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Teorema 4.1 . *Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sunt două şiruri de numere reale cu* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, *respectiv* $\lim_{k\to\infty} y_k = y$, *atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *([1], teorema 2.4.1.) Dacă x+y are sens în* $\bar{\mathbb{R}}$, *atunci şirul* $(x_k+y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x + y\,.$$
- *([1], teorema 2.4.5.) Dacă* $t \in \mathbb{R}$, *atunci şirul* $(tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty} tx_k = \begin{cases} t\cdot x, & \text{dacă}\, t\neq 0,\\ 0, & \text{dacă}\, t = 0.\end{cases}$$
- *([1], teorema 2.4.6.) Dacă* $x\cdot y$ *are sens în* $\bar{\mathbb{R}}$, *atunci şirul* $(x_k\cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty}(x_k\cdot y_k) = xy\,.$$
- *(consecinţă a lui i) şi ii).) Dacă x-y are sens, atunci şirul* $(x_k-y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty}(x_k - y_k) = x - y\,.$$
- *([1], teorema 2.4.8.) Dacă* $x_k\neq 0$, *oricare ar fi numărul natural k şi dacă* $x\neq 0$, *atunci şirul* $(\frac{1}{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *are limita* $1/x$.
- *([1], teorema 2.4.8.) Dacă* $x_k > 0$ *(respectiv* $x_k < 0$*), oricare ar fi numărul natural k, şi dacă* $x = 0$, *atunci şirul* $(\frac{1}{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *are limita* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*).*
- *([1], teorema 2.4.10.) Dacă* $y_k\neq 0$, *oricare ar fi* $k\in\mathbb{N}$, *şi dacă* $\frac{x}{y}$ *are sens în* $\bar{\mathbb{R}}$, *atunci şirul* $(\frac{x_k}{y_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k}{y_k} = \frac{x}{y}.$$
- *([1], observaţia 2.4.11.) Dacă* $y_k\neq 0$ *oricare ar fi* $k\in\mathbb{N}$, $x\neq 0$ *şi* $y = 0$, *atunci şirul* $(\frac{|x_k|}{|y_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*
$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\,x_k\,|}{|\,y_k\,|} = +\infty.$$

5 Şiruri convergente de numere reale

DEFINIŢIE.. *Un şir* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de numere reale se numeşte convergent dacă are limită în* $\mathbb{R}$*(adică are limită şi limita este un număr real propriu). Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.*

5.1 Şiruri mărginite de numere reale

DEFINIŢIE.. *Şirul de numere reale* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *se numeşte mărginit dacă mulţimea termenilor săi este o submulţime mărginită a lui* $\mathbb{R}$, *adică există numerele reale* a *şi* b, *astfel încât* $a \le x_k \le b$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.1 *([1], teorema 2.3.11). Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este un şir convergent de numere reale, atunci* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este mărginit.*

O altă proprietate a şirurilor mărginite de numere reale este dată în teorema 5.7.

5.2 Şiruri monotone de numere reale

DEFINIŢIE.. *Şirul de numere reale* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *se numeşte:*

- *strict crescător dacă* $x_k < x_{k+1}$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$;
- *crescător dacă* $x_k \le x_{k+1}$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$;
- *descrescător dacă* $x_k \ge x_{k+1}$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$;
- *strict descrescător dacă* $x_k > x_{k+1}$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$;
- *strict monoton dacă este strict descrescător sau strict crescător;*
- *monoton dacă este crescător sau descrescător .*

Teorema 5.2 *(teorema lui K. Weierstrass) ([1], teoremele 2.3.13 şi 2.3.19). Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere reale, următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este crescător şi mărginit superior, atunci* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi*
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sup\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\};$$
- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi mărginit inferior, atunci el este convergent şi*
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \inf\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\};$$
- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este monoton şi mărginit, atunci el este convergent.*

- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este crescător şi nemărginit, atunci el are limită şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty;$$

- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi nemărginit, atunci el are limită şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty;$$

- *dacă şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este monoton, atunci* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *are limită.*

Teorema 5.3 *([1], teorema 2.3.3). Dacă* (m_k) *este un şir strict crescător de numere naturale atunci* $m_k \geq k$ *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.4 *(teorema lui G. Cantor) ([1], teorema 2.3.20). Dacă* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sunt două şiruri de numere reale având proprietăţile:*

$$x_k \leq x_{k+1} < y_{k+1} \leq y_k,$$

oricare ar fi numărul natural $k \in \mathbb{N}$ *şi*

$$\lim_{k\to\infty} (y_k - x_k) = 0,$$

atunci $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sunt convergente şi*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k.$$

O legătură între mulţimile $\bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Q}$, şi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ exprimată cu ajutorul şirurilor

Teorema 5.5 *Oricare ar fi* $x \in \bar{\mathbb{R}}$ *există cel puţin un şir* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *cu termeni numere raţionale şi există cel puţin un şir* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *cu termeni numere iraţionale astfel încât şirurile* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *să aibă limita* x.

5.3 Subşiruri ale unui şir

DEFINIŢIE. *Fie* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale. Se numeşte subşir al şirului* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *orice şir* $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, *cu proprietatea că există un şir strict crescător de numere naturale* $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *astfel încât* $y_j = x_{k_j}$, *pentru fiecare* $j \in \mathbb{N}$.

Pentru a nota un subşir al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *vom folosi scrierea* $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$

Să remarcăm că orice subşir al unui şir este la rândul său un şir.

Teorema 5.6 . *Dacă şirul de numere reale* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este convergent, atunci orice subşir* $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *al său este convergent şi*

$$lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Demonstraţie. Fie $\lambda = \lim_{k\to\infty} x_k$ şi fie $V \in V_\lambda$. Va exista un rang k_0 cu proprietatea că $x_k \in V$, oricare ar fi numărul natural $k \geq k_0$. Pentru orice număr natural j, $j \geq k_0$, ţinând cont de teorema 5.3, avem $k_j \geq j \geq k_0$. Acest lucru implică $x_{k_j} \in V$, oricare ar fi numărul natural $j \geq k_0$. Cum V a fost o vecinătate a lui λ arbitrar aleasă, avem, în baza definiţiei limitei unui şir, că $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lambda$.$\diamond$

O proprietate deosebit de importantă a şirurilor mărginite este dată în teorema ce urmează.

Teorema 5.7 *(teorema lui E. Cesàro) Orice şir mărginit de numere reale are un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. Vor exista atunci numerele reale a_0 şi b_0 astfel încât

$$a_0 \leq x_k \leq b_0, \text{ pentru fiecare } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Deoarece $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ are o infinitate de termeni, cel puţin unul dintre intervalele $[a_0, c_0]$ şi $[c_0, b_0]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului. Să notăm cu $[a_1, b_1]$ oricare dintre intervalele $[a_0, c_0]$ sau $[c_0, b_0]$ cu condiţia ca el să conţină o infinitate de termeni ai şirului. Prin urmare va exista un indice k_1 astfel încât

$$x_{k_1} \in [a_1, b_1].$$

Evident vom avea

$$a_0 \leq a_1 \leq x_{k_1} \leq b_1 \leq b_0 \text{ şi } b_1 - a_1 = (b-a)/2.$$

Cu intervalul $[a_1, b_1]$ vom proceda la fel ca şi cu intervalul $[a_0, b_0]$. Fie $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Deoarece intervalul $[a_1, b_1]$ conţinea o infinitate de termeni ai şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cel puţin unul dintre intervalel $[a_1, c_1]$ şi $[c_1, b_1]$ va conţine o infinitate de termeni ai şirului. Să notăm cu $[a_2, b_2]$ oricare dintre intervalele $[a_1, c_1]$ sau $[c_1, b_1]$ cu condiţia ca el să conţină o infinitate de termeni ai şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Va exista deci un indice $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$ astfel încât $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. Vom avea deci

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq x_{k_2} \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

şi

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Repentând construcţia, vom obţine intervalele $[a_j, b_j]$ $j \in \mathbb{N}$ şi numerele naturale distincte k_j $j \in \mathbb{N}$, ce au, pentru fiecare $j \in nat^*$ următoarele proprietăţi:

(1) $a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_j < b_j \leq ... \leq b_1 \leq b_0$;
(2) $b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j}$;
(3) $a_j \leq x_{k_j} \leq b_j$;
(4) $k_1 < k_2 < ... < k_j$.

Aplicând axioma lui G. Cantor (teorema 6.4 din anexa 1) deducem că există

$$\lambda \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j].$$

Vom arăta că

$$\lambda = \lim j \to +\infty x_{k_j}. \tag{3}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Va exista un număr natural j_0 cu proprietatea că

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{j_0}} < \varepsilon.$$

Atunci, din proprităţile (2) şi (3), deducem că

$$|x_{k_j} - \lambda| \leq b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{j_0}} < \varepsilon$$

oricare ar fi numărul natural j, $jgeqj_0$. Şirul $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ este convergent şi are loc (3). Proprietatea (4) implică faptul că $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ este un subşir al şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Deci $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ are un subşir convergent.$\diamond$

Bibliografie

[1] ANDRICA D., DUCA I.D., PURDEA I., POP I., *Matematica de bază*, Cluj-Napoca: Editura Studium 2000.

[2] BREKCNER W.W., *Analiză matematică. Topologia spaţiului* $\mathbb{R}^n$. Cluj-Napoca: Universitatea din Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică 1985.