SUPORT PENTRU CURSUL 8
Derivabilitate şi diferenţiabilitate

22 noiembrie 2012

În acest curs sunt introduse noţiunile de: derivate parţiale de ordinul I pentru funcţii reale de mai multe variabile reale. Apoi se introduce noţiunea de derivată după o direcţie şi diferenţială de ordinul I pentru funcţii reale şi funcţii vectoriale. Sunt prezentate unele proprietăţi ale funcţiilor derivabile parţial.

1 Derivate parţiale ale unei funcţii într-un punct

Fie n un număr natural nenul şi $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definiţie. *Funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se numeşte derivabilă parţial în raport cu variabila* x_j *în punctul* $a \in int\, A$, *dacă există în* $\mathbb{R}$ *limita*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t}. \qquad (1)$$

În caz de existenţă, limita (1) o vom nota prin $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *sau prin* $f'_{x_j}(a)$ *şi o vom numi derivata parţială a lui* f *în raport cu variabila* x_j *în punctul* a.

Exemplul 1.1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 2(x_2)^2 - 3(x_3)^3, \ \forall\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu x_1, cu x_2 şi cu x_3 în fiecare punct $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

şi avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0,x_3^0) &= \lim_{x_1\to x_1^0}\frac{-x_1+2(x_2^0)^2-3(x_3^0)^3-(-x_1^0+2(x_2^0)^2-3(x_3^0)^3)}{x_1-x_1^0}\\
&= \lim_{x_1\to x_1^0}\tfrac{-x_1+x_1^0}{x_1-x_1^0}=-1,\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0,x_3^0) &= \lim_{x_2\to x_2^0}\frac{-x_1^0+2(x_2)^2-3(x_3^0)^3-(-x_1^0+2(x_2^0)^2-3(x_3^0)^3)}{x_1-x_1^0}\\
&= \lim_{x_2\to x_2^0}\frac{2(x_2)^2-2(x_2^0)^2}{x_2-x_2^0}=\lim_{x_2\to x_2^0}2(x_2+x_2^0)=4x_2^0,\\
\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1^0,x_2^0,x_3^0) &= \lim_{x_3\to x_3^0}\frac{-x_1^0+2(x_2^0)^2-3(x_3)^3-(-x_1^0+2(x_2^0)^2-3(x_3^0)^3)}{x_3-x_3^0}\\
&= \lim_{x_3\to x_3^0}\frac{-3(x_3)^3-(-3(x_3^0)^3}{x_3-x_3^0}=\lim_{x_3\to x_3^0}-3(x_3^2+x_3x_3^0+(x_3^0)^2)=-9(x_3^0)^2.
\end{aligned}$$

Exact aşa cum am definit derivata parţială în raport cu o variabilă pentru o funcţie reală de mai multe variabile reale, putem defini noţiunea de derivată în raport cu o variabilă pentru funcţii vectoriale de una sau mai multe variabile reale.

Fie n şi p numere naturale nenule şi fie $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Definiţie. *Funcţia $f:A\subseteq \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ se numeşte derivabilă parţial în raport cu variabila x_j în punctul $a\in int\,A$, dacă există în $\mathbb{R}^p$ limita*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n)}{t}. \tag{2}$$

În caz de existenţă, limita (2) o vom nota prin $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ sau prin $f'_{x_j}(a)$ şi o vom numi derivata parţială a lui f în raport cu variabila x_j în punctul a.

Limita (2) are numeroase aplicaţii în fizică.

Fie un mobil M care se mişcă în intervalul de timp $[0,T]$. Presupunem că mişcarea mobilului se face faţă de un sistem cartezian de coordonate $Oxyz$ şi că în fiecare moment $t\in[0,T]$, coordonatele mobilului sunt date prin $f(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)):[0,T]\to\mathbb{R}^3$ pentru fiecare $j\in\{1,2,3\}$. Vectorul viteză medie a mobilului va fi vectorul

$$v_m=(\frac{f_1(T)-f_1(0)}{T},\frac{f_2(T)-f_2(0)}{T},\frac{f_3(T)-f_3(0)}{T}).$$

Vectorul viteză instantanee, în fiecare moment $t_0\in[0,T]$, este

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=$$

$$\lim_{t\to t_0}(\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0},\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0},\frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0})=$$

$$(\lim_{t\to t_0}\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0}).$$

Să presupunem că mobilul M se deplasează de-a lungul unei drepte ce are versorul director $d = (d_1, d_2, d_3)$ şi care trece prin punctul $P = (x^0, y^0, z^0)$. Deplasarea se produce în intervalul de timp [-T,T]. Ne interesează viteza mobilului în punctul P, presupunând că mobilul se află la momentul 0 în punctul P, funcţia care ne dă spaţiul parcurs în funcţie de timp fiind $f : [-T, T] \to \mathbb{R}$. Ecuaţiile parametrice ale dreptei pe care se deplasează mobilul sunt:

$$x = x^0 + td_1,\ y = y^0 + td_2,\ z = z^0 + td_3,\ t \in [-T, T].$$

Viteza instantanee în momentul 0 este

$$v(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + td_1, y^0 + td_2, z^0 + td_3) - f(x^0, y^0, z^0)}{t}.$$

Acest exemplu a condus la considerarea aşa numitei derivate după o direcţie.

1.1 Derivata după o direcţie a unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială

Să observăm faptul că existenţa limitei (1) este echivalentă cu existenţa limitei

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + te^j) - f(a)}{t}, \tag{3}$$

unde e^j este versorul axei Ox_j. În locul vectorului e^j, putem lua orice vector $d \in \mathbb{R}^n$, obţinând în acest mod derivată după direcţia d.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi fie $d \in \mathbb{R}^n$.

Definiţie. *Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă după direcţia d în punctul $a \in int\, A$ dacă există în $\mathbb{R}^p$ limita*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + td) - f(a)}{t}. \tag{4}$$

Limita (4), în caz de existenţă, o vom nota prin $\delta f(a, d)$.

Observaţia 1.1. Uşor se vede că pentru $d = 0_n \in \mathbb{R}^n$, avem

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + td) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a) - f(a)}{t} = 0_p.$$

Deci orice funcţie este derivabilă după direcţia nulă în orice punct interior al domeniul său de definiţie şi $\delta f(a, 0) = 0$.

Definiţie. *Dacă $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă după direcţia $d \in \mathbb{R}^n$ în punctul $a \in int\, A$, se numeşte derivata lui f în a după direcţia $d \in \mathbb{R}^n$, şi se notează cu $\frac{\partial f}{\partial d}(a)$, vectorul (numărul dacă $p = 1$)*

$$\frac{\partial f}{\partial d}(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|d\|_n} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a + td) - f(a)}{t}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Exemplul 1.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xy, 2x, y)$ pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Fie $d = (-1, 2)$ şi fie $a = (2, -3)$. Cum

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(2-t, -3+2t) - f(2,-3)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(7t - 2t^2, -2t, 2t)}{t} = (7, -2, 2),$$

rezultă că f este derivabilă după direcţia d în a şi

$$\frac{\partial f}{\partial d}(a) = \frac{1}{\sqrt{5}}(7, -2, 2) = \left(\frac{7}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

1.2 Proprietăţile unei funcţii derivabilă parţial în raport cu o variabilă într-un punct

După cum am văzut, derivabilitatea în raport cu o direcţie reprezintă o generalizarea a derivabilităţii în raport cu o variabilă. Întrucât suntem interesaţi în primul rând de derivatele parţiale în raport cu o variabilă ale unei funcţii, vom enunţa în aceşti termeni teoremele, ele rămânând adevărate dacă derivabilitatea parţială în raport cu o variabilă într-un punct se înlocuieşte cu derivata după o direcţie în acel punct.

Teorema 1.1 *(legătura cu derivabilitatea parţială a componentelor scalare).*

a) Funcţia $f = (f_1, \ldots, f_p) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în punctul $a \in \operatorname{int} A$ dacă şi numai dacă, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, p\}$, funcţia $f_i : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în a.

b) Dacă $f = (f_1, \ldots, f_p) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în $a \in \operatorname{int} A$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a)\right) \in \mathbb{R}^p. \tag{6}$$

Demonstraţia este imediată şi se bazează pe teorema de reducere a calcului limitei unei funcţii vectoriale la calculul limitei componentelor sale scalare.

Proprietăţile funcţiilor derivabile parţial în raport cu o variabilă x_j într-un punct se deduc imediat din proprietăţile funcţiilor derivabile într-un punct, dacă se ţine cont de observaţia care urmează.

Observaţia 1.2. (legătura cu derivabilitatea unei funcţii vectoriale de o variabilă reală). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ şi $a \in \operatorname{int} A$. Notăm

$$T_j = \{t \in \mathbb{R} |\ a + te^j \in A\}.$$

Atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

i) funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în punctul a dacă şi numai dacă funcţia $F_j : T_j \to \mathbb{R}^p$ dată prin

$$F_j(t) = f(a + te^j), \quad \text{pentru fiecare} \quad t \in T_j,$$

este derivabilă în punctul 0.

ii) dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în punctul a, atunci

$$F_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a). \tag{7}$$

Obţinem astfel următoarele proprietăţi ale funcţiilor derivabile în raport cu o variabilă într-un punct.

Teorema 1.2 *Dacă funcţiile $f : A \to \mathbb{R}^p$ şi $g : A \to \mathbb{R}^p$ sunt derivabile parţial în raport cu x_j în punctul $a \in int\, A$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

i) oricare ar fi numerele reale α şi β, funcţia $\alpha f + \beta g$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în a şi

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_j}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_j}(a); \tag{8}$$

ii) funcţia $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, dată prin

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) g_i(x),$$

oricare ar fi $x \in A$, este derivabilă în raport cu x_j în punctul a şi

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) g(a) + f(a) \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) g_i(a) + f_i(a) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right). \tag{9}$$

Demonstraţie (opţional). Fie $T_j = \{t \in \mathbb{R} |\ a + te^j \in A\}$.

i) Construim funcţia $H_j : T_j \to \mathbb{R}^p$, $H_j(t) = \alpha f(a + te^j) + \beta g(a + te^j)$, pentru fiecare $t \in T_j$. Observăm că

$$H_j = \alpha F_j + \beta G_j, \tag{10}$$

unde

$$F : T_j \to \mathbb{R}^p, \quad F_j(t) = f(a + te^j), \text{ pentru fiecare } \quad t \in T_j$$

şi

$$G : T_j \to \mathbb{R}^p, \; G_j(t) = g(a + te^j) \text{ pentru fiecare } t \in T_j.$$

Dacă funcţiile f şi g sunt derivabile parţial în raport cu x_j în a, în baza teoremei 1.2 rezultă că funcţiile F_j şi G_j sunt derivabile în 0. Deducem că funcţia $\alpha F_j + \beta G_j$ este derivabilă în 0 şi că

$$(\alpha F_j + \beta G_j)'(0) = \alpha F_j'(0) + \beta G_j'(0).$$

Atunci (10) implică faptul că H_j va fi derivabilă în 0 şi că avem $H_j'(0) = (\alpha F_j + \beta G_j)'(0) = \alpha F_j'(0) + \beta G_j'(0)$. În baza observaţiei 1.2 rezultă că $\alpha f + \beta g$ este derivabilă parţial în raport cu x_j în a şi

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{x_j}(a) = \alpha \frac{\partial f}{x_j}(a) + \beta \frac{\partial g}{x_j}(a).$$

Punctul ii) se demonstrează asemănător.$\diamond$

Tot într-o manieră asemănătoare se poate demonstra şi teorema care urmează.

Teorema 1.3 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in int A$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ şi fie $T_j = \{t | a + te^j \in A\}$. Dacă funcţia $g : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în raport cu x_j în punctul a şi dacă $g(a) \neq 0$, atunci există $\delta > 0$ astfel încât $]-\delta, \delta[\subseteq T_j$, $g(a + td) \neq 0$, pentru orice $t \in]-\delta, \delta[$, funcţia $\frac{1}{g} : V \to \mathbb{R}^p$, unde $V = \{a + td | t \in]-\delta, \delta[\}$, este derivabilă în raport cu x_j în punctul a şi*

$$\frac{\partial \frac{1}{g}}{\partial x_j}(a) = -\frac{1}{g^2(a)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(a). \tag{11}$$

Teorema 1.4 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in int A$ şi $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dacă funcţiile $f : A \to \mathbb{R}$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în raport cu x_j în punctul a şi dacă $g(a) \neq 0$, atunci există un $\delta > 0$ astfel încât $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V = \{a + td | t \in \delta, \delta\}$, funcţia $\frac{f}{g} : V \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă în raport cu x_j în punctul a şi*

$$\frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial x_j}(a) = \frac{1}{g^2(a)} \cdot \left(g(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) f(a) \right). \tag{12}$$

Demonstraţia este imediată dacă se aplică teoremele 1.2 şi 1.3.$\diamond$

Remarcăm faptul că teorema rămâne adevărată dacă funcţia reală f se înlocuieşte cu funcţia vectoriale $f : A \to \mathbb{R}^p$.

dorim să atragem atenţia asupra faptului că, în general, compunerea a două funcţii derivabile parţial nu este derivabilă parţial după cum rezultă şi din exemplul care urmează.

Exemplul 1.3. Fie funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2), \quad \text{pentru fiecare} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{y_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2}, & y_1^2 + y_2^2 > 0 \\ 0, & y_1^2 + y_2^2 = 0 \end{cases}.$$

Fără greutate se vede că funcţia f este derivabilă parţial în punctul $x^0 = (0, 0)$ şi că funcţia g este derivabilă parţial în punctul $y^0 = f(0, 0) = (0, 0)$. Să considerăm funcţia compusă $\varphi = g \circ f$. Avem

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^4 - x_2^4}{2(x_1^4 + x_2^4)}, & (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0, & (x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Funcţia φ nu este derivabilă parţial în punctul $x^0 = (0, 0)$. Într-adevăr nu există

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\frac{1}{2}}{x_1 - 0}.$$

Analog nu există

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{f(0, x_2) - f(0, 0)}{x_2 - 0} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{\frac{-1}{2}}{x_2 - 0}.$$

2 Derivatele parţiale ale unei funcţii

În acest paragraf vom discuta despre derivabilitate şi derivatele parţiale ale unei funcţii.

Derivabilitatea parţială în raport cu o variabilă şi derivata parţială în raport cu o variabilă. Fie mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi nevidă, fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ şi fie $j \in \{1, \ldots, n\}$.

DEFINIŢIE. *Spunem că f este derivabilă parţial în raport cu x_j pe A dacă f este derivabilă parţial în raport cu x_j în fiecare punct $a \in A$.*

Dacă $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial în raport cu x_j pe A, funcţia definită pe A cu valori în $\mathbb{R}^p$ care face ca fiecărui $a \in A$ să-i corespundă vectorul $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sau cu $D_j f$ şi se numeşte derivata parţială de ordinul I a lui f în raport cu x_j.

EXEMPLUL 2.1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_2 x_3),$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ şi fie $j = 2$. Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu x_2 pe $\mathbb{R}$ şi derivata sa parţială în raport cu x_2 este funcţia

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 3 - x_3),$$

oricare ar fi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Derivabilitate parţială într-un punct. Gradientul unei funcţii într-un punct. Matricea lui Jacobi într-un punct. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, nevidă.

DEFINIŢIE. *Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial în punctul $a \in \operatorname{int} A$, dacă f este derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în punctul a.*

Se numeşte *gradient* al funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$, derivabilă parţial în punctul a, şi se notează cu $\nabla f(a)$, vectorul

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Simbolul ∇ se citeşte nabla.

Se numeşte *matricea lui Jacobi* ataşată funcţiei $f : A \to \mathbb{R}^p$, derivabilă parţial în punctul $a \in A$, şi se notează cu $J(f;a)$ sau cu $[f'(a)]$, matricea

$$J(f;a) = [f'(a)] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

În cazul particular $n = p$, matricea lui Jacobi este o matrice pătratică; determinantul ei se numeşte *jacobianul* funcţiei f în a şi se notează cu $\det J(f;a)$ sau $|J(f;a)|$. Deci

$$\det J(f;a) = |J(f;a)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}.$$

EXEMPLUL 2.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1 - x_2, x_1x_2, \frac{x_2}{x_1^2 + 1}\right) \text{ pentru fiecare } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Fie $a = (1, -2)$. Avem

$$J(f;(1,-2)) = [f'(1,-2)] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

EXEMPLUL 2.3. Fie $A = (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şi fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3, \frac{x_2x_3}{x_1}\right), \ \forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in A.$$

Funcţia f este derivabilă parţial în fiecare punct $a = (a_1, a_2, a_3)$. Ca urmare, în fiecare punct $a = (a_1, a_2, a_3) \in A$, avem

$$J(f;a) = [f'(a_1, a_2, a_3)] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -\dfrac{a_2a_3}{(a_1)^2} & \dfrac{a_3}{a_1} & \dfrac{a_2}{a_1} \end{pmatrix}$$

şi

$$|J(f;a)| = \frac{3a_2a_3 - 3a_1a_3 + 2a_2a_1}{(a_1)^2}.$$

OBSERVAŢIA 2.1. i) În cazul particular $n = 1$, dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă în punctul $a \in int\, A$, atunci

$$J(f;a) = [f'(a)] = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \dots \\ f_p'(a) \end{pmatrix}.$$

ii) În cazul particular $p = 1$, dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in \operatorname{int} A$, atunci

$$J(f;a) = [f'(a)] = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)),$$

şi, ţinând cont că $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$, datorită convenţiei făcute că, în calculele cu matrici, elementele lui $\mathbb{R}^n$ le considerăm matrici coloană, avem

$$J(f;a) = \nabla^T f(a).$$

Legătura dintre derivabilitate parţială şi continuitate. Trebuie să remarcăm faptul că o funcţie care este derivabilă parţial în raport cu o variabilă într-un punct, nu este, în general, şi continuă în acel punct după cum rezultă din exemplul următor.

EXEMPLUL 2.4. Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

este discontinuă în punctul $x^0 = (0,0)$, deoarece pentru şirul $(1/n, 1/n)_{n \geq 1}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Funcţia f este însă derivabilă parţial în raport cu x_1 în x^0 pentru că

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(0+t)\cdot 0}{(0+t)^2 + 0^2}}{t} = 0.$$

În mod analog se arată că f este derivabilă parţial şi în raport cu x_2 în x^0.

Derivabilitate parţială pe o mulţime. Funcţii de clasă C^1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, deschisă şi nevidă.

DEFINIŢIE. *Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă parţial pe A dacă f este derivabilă parţial în fiecare punct $a \in A$.*

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $M \subseteq A$, nevidă şi deschisă.

DEFINIŢIE. *Vom spune că funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este de clasă C^1 pe M dacă f este derivabilă parţial în fiecare punct $a \in M$ şi dacă toate derivatele parţiale de ordinul I sunt continue pe M.* Atragem atenţia asupra faptului că există funcţii care sunt derivabile parţial, dar nu sunt de clasă C^1, după cum rezultă din exemplul care urmează.

EXEMPLUL 2.5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \cos \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Funcţia f este continuă şi derivabilă parţial pe $\mathbb{R}^2$ şi avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2) = \begin{cases} 2x_j \cos \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \dfrac{x_j}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

pentru fiecare $j \in \{1,2\}$. Funcţiile derivate parţial de ordinul I, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ nu sunt continue. Deci f este derivabilă parţial, dar nu este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

Difeomorfisme (opţional) Fie A şi B submulţimi deschise, nevide ale lui $\mathbb{R}^n$.

DEFINIŢIE. *Funcţia $f : A \to B$ se numeşte difeomorfism dacă:*
- f este de clasă C^1 pe A,
- f este bijectivă
şi
- f^{-1}, inversa funcţiei f, este de clasă C^1 pe B.

Ca şi consecinţe ale proprietăţilor funcţiilor diferenţiabile şi continue, obţinem:

OBSERVAŢIA 2.2. a) Dacă A şi B sunt submulţimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă $f : A \to B$ este un difeomorfism, atunci f^{-1} este tot un difeomorfism.

b) Dacă A, B şi C sunt mulţimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt difeomorfisme, atunci funcţia $g \circ f : A \to C$ este un difeomorfism.

c) Dacă A şi B sunt submulţimi deschise ale lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă $f : A \to B$ este un difeomorfism, atunci oricare ar fi o submulţime deschisă C a lui A, mulţimea $f(C)$ este deschisă.

3 Funcţie diferenţiabilă şi diferenţiala unei funcţii

Înainte de a trece la definiţia diferenţialei unei funcţii într-un punct, vom aminti câteva lucruri legate de funcţii liniare.

Funcţii liniare. O funcţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *liniară* dacă satisface următoarele condiţii :
i) este aditivă, adică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^n$, şi
ii) este omogenă, adică $f(tx) = tf(x)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}^n$.

Convenim ca mulţimea funcţiilor liniare definite pe $\mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^p$ s-o notăm cu $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Funcţiile de proiecţie sunt funcţii liniare.

OBSERVAŢIE. O funcţie $f = (f_1, ..., f_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este liniară dacă şi numai dacă componentele sale scalare $f_1, ..., f_p$ sunt liniare.

În conformitate cu rezultate cunoscute din algebră, avem următoarele proprietăţi.

Teorema 3.1 *O funcţie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *este liniară dacă şi numai dacă există o matrice* $C = [c_{ij}]_{p\times n}$ *de numere reale astfel încât*

$$f(x) = Cx = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j}x_j \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{pj}x_j \end{pmatrix}, \text{ oricare ar fi } x = (x_1, \dots, n) \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Dacă $f = (f_1, ..., f_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este liniară, atunci există o unică matrice C pentru care are loc egalitatea (13). Acea matrice se numeşte matricea ataşată funcţiei liniare. Convenim ca, dacă f este funcţie liniară, atunci matricea ataşată o vom nota prin $[f]$.

Definiţia funcţiei diferenţiabile Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$.

DEFINIŢIE. *Funcţia* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *se numeşte diferenţiabilă (în sens Fréchet) în punctul* $a \in int\, A$ *dacă există o funcţie liniară* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *astfel încât*

$$\lim_{h\to 0_n} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_n} = 0_p. \tag{14}$$

OBSERVAŢIA 3.1. Dacă A este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în punctul $a \in int\, A$, atunci există o unică funcţie liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ care să satisfacă condiţia (14).

Diferenţiala unei funcţii într-un punct .

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în punctul $a \in int\, A$, funcţia liniară L, care în baza observaţiei 3.1 este unică, se numeşte *diferenţiala* (*Fréchet*) a funcţiei f în a şi se notează cu $df(a)$.

Dacă $h \in \mathbb{R}^n$, valoarea funcţiei L pe h, adică $L(h) \in \mathbb{R}^p$, se mai numeşte şi diferenţiala funcţiei f în punctul a pe creşterea h şi se notează cu $df(a)(h)$. Deci avem

$$df(a)(h) = L(h), \text{ oricare ar fi } h \in \mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Matricea ataşată funcţiei liniare $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ o vom numi matricea ataşată diferenţialei funcţiei f în a şi o vom nota prin $[df(a)]$.

Ţinând cont de aceasta şi de convenţia făcută că în calculele matriceale vectorii din $\mathbb{R}^n$ îi vedem ca matrici coloană, (15) se rescrie sub forma

$$df(a)(h) = [df(a)] \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}, \text{ oricare ar fi } h \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Teorema 3.2 *Dacă* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in int\, A$, $\Omega_a = \{h \in \mathbb{R}^n |\ a + h \in A\}$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *este o funcţie, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

i) dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul a, atunci există o funcţie $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$, cu

$$\omega(0_n) = 0_p, \tag{17}$$

continuă în 0_n, astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \|h\|_n \omega(h), \tag{18}$$

oricare ar fi $h \in \Omega_a$;

ii) dacă există o funcţie liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi o funcţie $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$, cu $\omega(0_n) = 0_p$, continuă în 0_n, astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\|_n \omega(h), \tag{19}$$

oricare ar fi $h \in \Omega_a$, atunci f este diferenţiabilă în a şi $df(a) = L$.

Demonstraţie. i) Construim funcţia $\omega : \Omega_a \to \mathbb{R}^p$ dată prin

$$\omega(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a) - df(a)(h)}{\|h\|_n}, & h \neq 0_n \\ 0_p, & h = 0_n \end{cases}.$$

Din construcţie rezultă că are loc (18). Deoarece f este diferenţiabilă în a, avem

$$\lim_{h \to 0_n} \omega(h) = \lim_{h \to 0_n} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a)(h)}{\|h\|_n} = 0_p$$

deci funcţia ω este continuă în 0_n.

ii) Deoarece funcţia ω este continuă în 0_n, din $\omega(0_n) = 0_p$ deducem că $\lim\limits_{h \to 0_n} \omega(h) = 0_p$. Ţinând cont acum de (19), avem

$$\lim_{h \to 0_n} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_n} = 0_p.$$

În baza definiţiei, f este diferenţiabilă în punctul a. Cum diferenţiala unei funcţii într-un punct este unică şi cum L satisface condiţia din definiţie, rezultă că $L = df(a)$.$\diamond$

Teorema 3.2 are o mare importanţă practică. Astfel, dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$, unde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, este diferenţiabilă Fréchet în $x \in int\, A$, putem aproxima diferenţa $f(x+h) - f(x)$ cu $df(x)(h)$, adică să luăm

$$f(x+h) - f(a) \approx df(x)(h).$$

Notând $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ şi $\Delta x = h$ obţinem

$$\Delta f(x) \approx [df(x)] \cdot \Delta x. \tag{20}$$

4 Probleme

1) Utilizând definiţia derivatelor parţiale într-un punct, calculaţi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial x_2}(M)$$

dacă:
a) $f(x_1,x_2) = 2x_1x_2 + x_2^3$ pentru fiecare $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $M = (1,2)$;
b) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$ şi $M = (0,0)$;
c) $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = x_1 \ln x_2 + x_2^{x_1}$ în fiecare punct $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ şi $M = (0,1)$;
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^6 + x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

şi $M = (0,0)$.

2) Fie $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

pentru fiecare $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Calculaţi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$.

3) Fie funcţia dată prin $f(x,y,z) = \ln(xy + z)$ pentru fiecare $(x,y,z) \in D$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Determinaţi D şi calculaţi $\nabla f(1,2,0)$.

4) Cercetaţi dacă următoarele funcţii sunt derivabile după direcţia $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ în punctul $(0,0)$, dacă:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ şi $h = (1, 1/2)$;
b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ şi $h = (0,1)$ sau $h = (1,0)$;
c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z,t) = x^2 + u^2 + z^2 + t^2$, şi $h = (1,2,0,0) \in \mathbb{R}^4$.

5) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

este derivabilă după direcţia $e^1 = (1,0)$ în punctul $(0,0)$, dar nu este derivabilă după direcţia $h = (1,1)$ în punctul $(0,0)$.

6) Fie $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln \dfrac{x^2+y^2}{y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

Arătaţi că f este derivabilă parţial şi construiţi derivatele parţiale de ordinul I.

7) Fie $D = \{(x,y) |\ x^2 > y^2 > 0\}$. Arătaţi că funcţia $f : D \to \mathrm{I\!R}$, dată prin $f(x,y) = y\ln(x^2-y^2)$, pentru fiecare $(x,y) \in D$, satisface ecuaţia funcţională

$$y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} = xf.$$

8) Arătaţi că funcţia

$$f : D = \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 |\ y \neq z\} \to \mathrm{I\!R},$$

$$f(z,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$$

pentru fiecare $(x,y,z) \in D$, verifică ecuaţia funcţională

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

9) Calculaţi derivatele parţiale ale următoarelor funcţii precizând domeniul maxim de definiţie al funcţiilor precum şi domeniile de definiţie ale derivatelor parţiale:
a) $f(x,y,z) = x^{y^z}$;
b) $f(x,y,z) = e^{xy} \sin z$;
c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$;

10) Se consideră funcţia $= (f_1, f_2) : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}^2$,

$$f(x,y,z) = (xe^y, \frac{y}{x^2+z^4+1}),\ \forall\ (x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3.$$

Să se construiască matricea lui Jacobi într-un punct $(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{I\!R}^3$.