SUPORT PENTRU CURSUL 7
Funcţii vectoriale de mai multe variabile
Limite şi continuitate

15 noiembrie

1 Funcţii vectoriale de mai multe variabile reale

Fie n şi p numere naturale nenule, $p \geq 2$, şi fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Numim *funcţie vectorială definită pe* A, orice triplet $f = (A, \mathbb{R}^p, \Gamma)$, unde $\Gamma \subseteq A \times \mathbb{R}^p$ are proprietatea că pentru orice $x \in A$ există un unic $b \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $(a, b) \in \Gamma$. Ca în cazul funcţiilor reale, convenim ca acel unic $b \in \mathbb{R}^p$, cu proprietatea că $(a, b) \in \Gamma$, să îl notam prin $f(a)$ şi să-l numim valoarea funcţiei f în a. Deoarece $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$, lui b îi putem ataşa coordonatele $b_1, \ldots, b_n$. Cu ajutorul acestor p coordonate putem construi p funcţii scalare astfel: pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, p\}$, considerăm funcţia $f_i : A \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că, dacă $a \in A$ şi $f(a) = b = (b_1, \ldots, b_p)$, atunci $f_i(a) = b_i$, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, p\}$. În cele ce urmează vom indica mai precis modul în care se construiesc funcţiile f_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Funcţiile de proiecţie. Componentele scalare ale unei funcţii vectoriale. Fie p şi j numere naturale, $0 < j \leq p$.

DEFINIŢIE. *Funcţia* $pr_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, *dată prin*

$$pr_j(x) = x_j, \text{ pentru orice } x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,$$

se numeşte proiectorul sau funcţia de proiecţie pe axa j.

Componentele scalare ale unei funcţii vectoriale. Fie n şi p numere naturale nenule, fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$.

DEFINIŢIE. *Funcţiile*

$$f_j = pr_j \circ f, \quad j \in \{1, ..., p\},$$

se numesc componentele scalare ale funcţiei vectoriale f.

Pentru a pune în evidenţă componentele scalare ale funcţiei f vom folosi notaţia $f = (f_1, ..., f_p)$. Această notaţie este foarte sugestivă, ea atrăgând atenţia asupra faptului că, de fapt, a defini o funcţie vectorială de la A la $\mathbb{R}^p$ revine la a defini p funcţii reale pe A.

Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = (1 + x_1 + x_2, x_1, x_2 - x_1) \text{ pentru orice } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Funcţiile:
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2$, pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1$, pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
şi
$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x_1, x_2) = x_2 - x_1$, pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
constituie componentele scalare ale funcţiei f.

2 Limita unei funcţii vectoriale într-un punct

În acest paragraf vom extinde noţiunea de limită pentru funcţii vectoriale de variabile reale şi vom arăta legătura cu limita unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Limita unei funcţii vectoriale într-un punct. Fie n şi p numere naturale nenule, fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi fie $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială. Un elemenet $\lambda \in \mathbb{R}^p$ se numeşte *limită a funcţiei* f în punctul $x^0 \in A'$, dacă oricare ar fi V o vecinătete a lui λ, există o vecinătate U a lui x^0 astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \bigcap A$.

Reducerea calculului limitei unei funcţii vectoriale la calculul limitelor componentelor sale scalare. Un rezultat important, legat de calculul limitei unei funcţii vectoriale, este cel ce urmează.

Teorema 2.1 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *să fie limita funcţiei* $f = (f_1, ..., f_p) : A \to \mathbb{R}^p$ *în punctul* $a \in A'$ *este ca*

$$\lambda_j = \lim_{x \to a} f_j(x), \text{ pentru fiecare } j \in \{1, ..., p\}. \tag{1}$$

Demonstraţia este imediată dacă se aplică teorema lui Heine şi teorema de reducere a calculului limitei unui şir la calculul limitelor şirurilor coordonatelor.

Vom aminti o teoremă utilă în calculul limitei unei funcţii de mai multe variabile.

Teorema 2.2 *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^p$ *şi fie funcţiile* $f : D \to E$ *şi* $g : E \to \mathbb{R}^q$. *Dacă* $x^0 \in E'$, *există* $\lim_{x \to x^0} f(x) = y^0$, $y^0 \in E'$, *există* $\lim_{y \to y^0} g(y) = \lambda$ *şi* $f(x) \neq y^0$, *oricare ar fi* $x \in D$, *atunci funcţia* $g \circ f$ *admite limită în* x^0 *şi* $\lim_{x \to x^0} (g \circ f)(x) = \lambda$.

*Demonstraţie**. Fie $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un şir cu elemente din $D \setminus \{x^0\}$, convergent la x^0. În baza teoremei lui Heine, şirul $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = y^0. \tag{2}$$

Să considerăm acum şirul $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cu $y_k = f(x_k)$, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $f(x) \neq y^0$, oricare ar fi $x \in E$, deducem că $y_k \neq y^0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Aplicând din nou teorema lui Heine, de această dată pentru funcţia g, deducem că

$$\lim_{k\to\infty} g(y_k) \;=\; \lambda. \tag{3}$$

Ţinând cont de (2) şi (3), obţinem

$$\lim_{k\to\infty} (g \circ f)(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(f(x_k)) = \lim_{k\to\infty} g(y_k) = \lambda. \diamond$$

Exemplu. Să se calculeze

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2+1}-1}.$$

Considerăm mulţimea $D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1x_2 + 1 \geq 0,\ x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\}$, funcţia $f : D \to \mathbb{R}^*$, $f(x_1,x_2) = x_1x_2$, oricare ar fi $(x_1,x_2) \in D$. De asemenea considerăm mulţimea $E = \{t \in \mathbb{R} | t > -1,\ t \neq 0\}$ şi funcţia $g : E \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}-1}$, oricare ar fi $t \in E$.

Observăm că $(0,0) \in D'$. Funcţia f are limită în punctul $(0,0)$ şi $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to\{0,0)} x_1x_2 = 0$. Cum $0 \in E'$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t+1}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{t+1-1} = \lim_{t\to 0}(\sqrt{t+1}+1) = 2$$

şi $f(x_1,x_2) \neq 0$, oricare ar fi $(x_1,x_2) \in D$, în baza teoremei 2.2 avem

$$\lim_{t\to 0} \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2+1}-1} = 2.$$

3 Noţiunea de funcţie continuă într-un punct

Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$.

Definiţie. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ se numeşte continuă în punctul $a \in A$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că*

$$||f(x) - f(a)||_p < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } x \in A, \text{ cu } ||x-a||_n < \delta. \tag{4}$$

Observaţia 3.1. Din definiţie deducem imediat că:
(a) Orice funcţie este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiţie.
(b) Analizând definiţia limitei unei funcţii într-un punct şi definiţia funcţiei continue într-un punct, rezultă că o funcţie este continuă într-un punct din domeniul său de definiţie, punct care este punct de acumulare al domeniului de definiţie, dacă şi numai dacă are limită în acel punct şi limita funcţiei este egală cu valoarea funcţiei în acel punct.
(c) Nu se pune problema continuităţii unei funcţii în puncte care nu aparţin domeniului de definiţie al funcţiei.

OBSERVAŢIA 3.2. În baza punctelor a) şi b) din observaţia precedentă şi a teoremei de reducere a calculului limitei unei funcţii vectoriale la calculul limitelor componentelor sale scalare, deducem că o funcţie $f = (f_1, ..., f_p) : A \to \mathbb{R}^p$ este continuă într-un punct $a \in A$ dacă şi numai dacă componentele sale scalare f_1, ..., f_p sunt continue în acel punct.

OBSERVAŢIA 3.3. Fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ şi fie $a \in A$. În baza punctelor a) şi b) din observaţia 3.1 şi a criteriului lui Heine de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct, deducem:
a) funcţie f este continuă în a dacă şi numai dacă oricare ar fi un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ cu elemente din A, convergent la a, avem $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$;
b) dacă există un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu elemente din A, convergent la a, pentru care şirul $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ nu este convergent sau limita sa nu este egală cu $f(a)$, atunci f nu este continuă în a.

EXEMPLUL 3.1. Fie $D = (0, +\infty) \times \mathbb{R} \bigcup \{(-1, 0), (0, 0)\}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) = (-1, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \dfrac{y}{x}, & (x, y) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deoarece $(-1, 0)$ este un punct izolat al mulţimii de definiţie a funcţiei, f va fi continuă în $(-1, 0)$. Întrucât pentru şirul $(1/k, 1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, convergent către $(0, 0) \in D'$, avem

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 1 \neq 0 = f(0, 0),$$

f nu va fi continuă în $(0, 0)$. Fie $(x^*, y^*) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ Oricare ar fi $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un şir cu termeni din D, convergent către (x^*, y^*), va exista un rang k_0 de la care începând vom avea $x_k \neq 0$; deci are sens $\frac{x_k}{y_k}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Obţinem

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{x_k} = \frac{y^*}{x^*} = f(x^*, y^*).$$

În baza observaţiei 3.3, rezultă că f este continuă în (x^*, y^*). Deci f este continuă în fiecare punct din $D \setminus \{(0, 0)\}$ şi discontinuă în punctul $(0, 0)$.

EXEMPLUL 3.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Considerând şirurile $(\frac{1}{k}, 0)_{k\in\mathbb{N}^*}$ şi $(0, \frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, avem

$$\lim_{k\to\infty} (\frac{1}{k}, 0) = (0, 0) \quad \text{şi} \quad \lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, 0) = 1$$

şi

$$\lim_{k\to\infty} (0, \frac{1}{k}) = (0, 0) \quad \text{şi} \quad \lim_{k\to\infty} f(0, \frac{1}{k}) = -1$$

Deci nu există $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Cum $(0, 0)$ este punct de acumulare al lui $\mathbb{R}^2$ rezultă, în baza observaţiei 3.1, că f nu este continuă în $(0, 0)$.

EXEMPLUL 3.3. Fie funcţia $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\ln x^2, \sin x)$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^*$. Deoarece funcţiile:

$f_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \ln\, x^2,$ pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^*$
şi
$f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \sin\, x,$ pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^*$
sunt continue în fiecare punct din mulţimea de definiţie, rezultă, în baza observaţiei 3.2, că f este continuă în fiecare punct din $\mathbb{R}^*$.

EXEMPLUL 3.4. Fie funcţia $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x^2, \sin x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R}^* \\ (3, 0), & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Deoarece $\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \ln\, x^2 = -\infty$, rezultă că f_1 nu este continuă în 0 şi deci, în baza observaţiei 3.2, funcţia f nu este continuă în 0.

Majoritatea funcţiilor care descriu anumite relaţii existente în natură sunt funcţii continue în fiecare punct din domeniul de definiţie. În mecanica clasică, conform principiului perfectei localizări, se face ipoteza că spaţiul, viteza şi acceleraţia sunt funcţii continue de timp (se exclude cazul ciocnirilor). Există însă şi fenomene cărora li se ataşează funcţii care nu sunt continue. De exemplu, funcţia care exprimă variaţia volumului unui corp solid în funcţie de temperatură este o funcţie discontinuă în punctul corespunzător temperaturii de topire (vezi *Compendiu de fizică*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1988, pag. 342). La fel, considerând funcţia care exprimă alungirea relativă $\frac{\Delta l}{l_0}$ a unei bare de lungime l_0 şi secţiune normală S în funcţie de efortul unitar $\sigma = \frac{|\vec{F}|}{S}$, această funcţie va fi discontinuă în punctul F de rupere (vezi ibidem, pag. 144-145). De asemenea, să luăm un fir material ideal, fixat într-un punct, fir asupra căruia acţionează o forţa $\vec{F}$. Forţa va crea în fir o tensiune $\vec{T}$. Dacă considerăm funcţia care exprimă variaţia modulului tensiunii în funcţie de forţă, se obţine o funcţie discontinuă într-un punct şi anume, în punctul corespunzător valorii forţei ce rupe firul căci, după rupere, modulul tensiunii în fir va fi egal cu 0.

4 Proprietăţi ale funcţiilor continue într-un punct

Teorema 4.1 *(Proprietatea funcţiei continue într-un punct de a păstra semnul).*
Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este continuă în punctul* $a \in A$ *şi dacă* $f(a) \neq 0$, *atunci există un* $r > 0$ *astfel încât*

$$\mathrm{sgn}(f(x)) = \mathrm{sgn}(f(a)),\ \forall\, x \in A \bigcap B(a, r).$$

*Demonstraţie**. Aplicând definiţia continuităţii şi luând $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$, deducem că există un $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}, \text{ oricare ar fi } x \in A,\ ||x - a||_n < \delta.$$

Relaţia poate fi rescrisă sub forma

$$f(a) - \frac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a)| + \frac{|f(a)|}{2}, \text{ oricare ar fi } x \in A,\ ||x - a||_n < \delta. \qquad (5)$$

Dacă $f(a) > 0$, avem $|f(a)| = f(a)$ şi din (5) obţinem

$$0 < \frac{f(a)}{2} < f(x), \text{ oricare ar fi } x \in A, \ ||x-a||_n < \delta.$$

Dacă $f(a) < 0$, avem $|f(a)| = -f(a)$ şi din din (5) obţinem

$$f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0, \text{ oricare ar fi } x \in A, \ ||x-a||_n < \delta.$$

Deci, in ambele cazuri semnul lui $f(x)$ este acelaşi cu semnul lui $f(a)$ pentru orice $x \in A$, cu $||x-a||_n < \delta$.$\diamond$

Consecinţa 4.2 *Să observăm că, dacă funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este continuă în punctul* $a \in A$ *şi dacă oricare ar fi numărul real* $r > 0$ *există punctele* u *şi* v *în* $B(a,r) \bigcap A$ *astfel încât* $f(u) \cdot f(v) < 0$, *atunci* $f(a) = 0$.

Fără dificultate se poate demonstra că mulţimea funcţiilor continue într-un punct formează un spaţiu vectorial real. În plus mai avem următorul rezultat important:

Teorema 4.3 *Dacă* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *şi* $B \subseteq \mathbb{R}^p$ *şi dacă funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B$ *este continuă în punctul* $a \in A$ *şi funcţia* $g : B \to \mathbb{R}^q$ *este continuă în punctul* $b = f(a) \in B$, *atunci funcţia* $g \circ f : A \to \mathbb{R}^q$ *este continuă în* a.

5 Proprietăţi ale funcţiilor continue pe o mulţime

Fie A o submulţime nevidă a spaţiului $\mathbb{R}^n$ şi fie E o submulţime nevidă a lui A.

Definiţie. *Funcţia* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *se numeşte continuă pe* E *dacă* f *este continuă în fiecare punct din* E.

În cazul în care $E = A$, convenim să spunem simplu că f este continuă, subînţelegându-se prin aceasta că f este continuă pe tot domeniul său de definiţie.

Exemplul 5.1. Fie $c \in \mathbb{R}^n$ şi fie funcţia liniară $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = < c, x >, \text{ pentru fiecare } x \in \mathbb{R}^n.$$

Fie $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Vom arăta că f este continuă în x^0. Avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^0)| &= |\textstyle\sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_j^0)| \leq \\ &\leq \textstyle\sum_{j=1}^n |c_j| \cdot |x_j - x_j^0| \leq \\ &\leq (\max\{|c_j| \mid j \in \{1,...,n\}) \cdot \textstyle\sum_{j=1}^n |x_j - x_j^0| \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă notăm $d = max\{| c_1 |, ..., | c_n |\}$, atunci avem

$$|f(x) - f(x^0)| \leq d \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^0|. \tag{7}$$

Fie acum $\delta > 0$. Condiţia $||x - x^0||_n < \delta$, echivalentă cu

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2} < \delta,$$

implică $|x_j - x_j^0| < \delta$, oricare ar fi $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ca urmare, luând, pentru orice număr real $\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2n \cdot d}$ şi ţinând cont de (7), vom avea $| f(x^0) - f(x) | \leq dn\frac{\varepsilon}{2n \cdot d} < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$, cu $\|x - x^0\|_n < \delta_\varepsilon$. Deci f este continuă în x^0. Cum $x^0 \in \mathbb{R}^n$ a fost ales oarecare, deducem că f este continuă pe $\mathbb{R}^n$.

5.1 Funcţii continue pe mulţimi compacte

Reamintim că, o submulţime M a lui $\mathbb{R}^n$ o numim compactă dacă este mărginită şi închisă. Uneori este utilă următoarea caracterizare a acestor mulţimi.

Teorema 5.1 *Mulţimea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ este compactă dacă şi numai dacă oricare ar fi un şir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu elemente din M, el conţine un subşir $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergent şi $\lim\limits_{j \to \infty} x_{k_j} \in M$.*

În continuare vom prezenta câteva proprietăţi deosebit de importante ale funcţiilor continue pe mulţimi compacte.

Teorema 5.2 . *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime compactă şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie continuă pe A, atunci $f(A)$ este o mulţime compactă.*

Demonstraţie. Va fi suficient să arătăm că oricare ar fi $(y_\mathbf{k})_{k \in \mathbb{N}}$ un şir cu elemente din $f(A)$, el are un subşir convergent la un element din $f(A)$.

Fie deci $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un şir cu elemente din $f(A)$. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, din $y_k \in f(A)$, deducem că există $x_k \in A$ astfel încât $f(x_k) = y_k$. Deoarece A este o mulţime mărginită, şirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ va fi un şir mărginit. El conţine un subşir $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergent. Fie $a = \lim_{j \to \infty} x_{k_j}$. Deoarece A este mulţime închisă, avem $a \in A$.

Cum $a \in A$, funcţia f este continuă pe A, deci implicit şi în a, şi şirul $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge către a, şirul $f(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{j \to \infty} f(x_{k_j}) = f(a)$. Ţinând cont de faptul că $f(x_{k_j}) = y_{k_j}$, pentru fiecare $j \in \mathbb{N}$, deducem că şirul $(y_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{j \to \infty} y_{k_j} = \lim_{j \to \infty} f(x_{k_j}) = f(a). \diamond$$

Ţinând cont de faptul că orice submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^p$ este mărginită, în baza teoremei 5.2 obţinem:

Teorema 5.3 . *Dacă A este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă $f : A \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie continuă pe A, atunci funcţia f este mărginită.*

Demonstraţie. În conformitate cu teorema 5.2, mulţimea $f(A)$ este mărginită. Atunci, în conformitate cu definiţia funcţiei mărginite, f este mărginită pe A.$\diamond$

Teorema 5.4 . *Dacă A este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^n$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f îşi atinge marginile, adică există cel puţin un punct $x' \in A$ astfel încât*

$$f(x') = \max\{f(x) \mid x \in A\}$$

şi există cel puţin un puţin un punct $x'' \in A$ astfel încât

$$f(x'') = \min\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Demonstraţie. Vom da demonstraţia pentru existenţa maximului. Analog se demonstrează existenţa minimului.

Din teorema 5.3, deducem că există $\mu = \sup\{f(x)|x \in A\}$. Să presupunem, prin absurd, că minimul nu este atins. Atunci vom avea $f(x) < \mu$, oricare ar fi $x \in A$. Să construim funcţia $g : A \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{\mu - f(x)}, \ \forall\, x \in A.$$

Evident $g(x) > 0$, oricare ar fi $x \in A$. Funcţia g este continuă pe A. Deci va fi mărginită. Fie $\nu = \sup\{g(x)|x \in A\}$. Avem

$$0 < \frac{1}{\mu - f(x)} \leq \nu, \ \forall\, x \in A.$$

De aici deducem că

$$f(x) \leq \mu - \frac{1}{\nu}, \ \forall\, x \in A,$$

ceea ce contrazice ipoteza că $\mu = \sup\{f(x)|x \in A.\diamond$

5.2 Funcţii uniform continue (opţional)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

DEFINIŢIE. *O funcţie $f : A \to \mathbb{R}^p$ se numeşte uniform continuă pe A dacă oricare ar fi un număr real $e > 0$, există un număr real $\delta > 0$ astfel încât*

$$\|f(x) - f(y)\|_p < e, \tag{8}$$

oricare ar fi x şi y elemente ale lui A ce satisfac condiţia

$$\|x - y\|_n < \delta. \tag{9}$$

EXEMPLUL 5.2. . Fie funcţia $f :]0,1] \to \mathbb{R},$, $f(x) = 1/x$, pentru fiecare $x \in]0,1]$. Funcţia f nu este uniform continuă pe $]0,1]$ deoarece pentru $e = 1/2$, oricare ar fi $\delta > 0$, luând $x = 1/m$ şi $y = 1/(m+1)$, unde $m = [1/\delta] + 1$, avem

$$x \in]0,1], \ y \in]0,1], \ | x - y | = | \frac{1}{m(m+1)} | < \frac{1}{m} < \delta \text{ şi } | f(x) - f(y) | = 1 > e.$$

Observaţia 5.1. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este uniform continuă pe A, atunci f este continuă pe A.

Reciproca nu este în general adevărată, după cum rezultă şi din exemplul 5.2. Totuşi, în anumite condiţii suplimentare, o funcţie continuă este uniform continuă, după cum se vede în teorema care urmează.

Teorema 5.5 . *Dacă A este o submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^n$ şi dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$ este continuă pe A, atunci f este uniform continuă pe A.*

Demonstraţie. (nu se cere). Să presupunem că f nu este uniform continuă pe A. Exista deci un număr real $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$ există $x \in A$ şi $y \in A$ astfel încât $\|x - y\|_n < \delta$ şi cu $\|f(x) - f(y)\|_p \geq \varepsilon$. Luând $\delta = 1/k$ şi făcând pe k să parcurgă mulţimea $\mathbb{N}^*$, vom pune în evidenţă şirurile $(x_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ cu elemente din A, având proprietăţile

$$\|x_{\mathbf{k}} - y_{\mathbf{k}}\|_n < \frac{1}{k} \text{ şi } \|f(x_{\mathbf{k}}) - f(y_{\mathbf{k}})\|_p \geq \varepsilon_0. \tag{10}$$

Cum A este compactă, şirul $(x_{\mathbf{k}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ va avea un subşir $(x_{\mathbf{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent către un element $a \in A$. Vom arăta că subşirul $(y_{\mathbf{k_j}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge tot la a. Fie $e > 0$. Va exista un număr natural j_e astfel încât

$$\frac{1}{j_e} < \frac{e}{2}. \tag{11}$$

Pe de altă parte, a fiind limita subşirului, va exista un rang j_0 astfel încât să avem

$$\|x_{\mathbf{k_j}} - a\|_n < \frac{e}{2}, \text{ pentru orice } j \in \mathbb{N},\, j \geq j_0 \tag{12}$$

Utilizând proprietăţile normei putem scrie:

$$\|y_{\mathbf{k}} - a\|_n = \|y_{\mathbf{k}} - x_{\mathbf{k}} + x_{\mathbf{k}} - a\|_n \leq \|y_{\mathbf{k}} - x_{\mathbf{k}}\|_n + \|x_{\mathbf{k}} - a\|_n, \tag{13}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Din (10)-(13) rezultă că pentru orice rang j, $j \geq \max\{j_e, j_0\}$ vom avea

$$\|y_{\mathbf{k_j}} - a\|_n \leq \|y_{\mathbf{k_j}} - x_{\mathbf{k_j}}\|_n + \|x_{\mathbf{k_j}} - a\|_n < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e.$$

Deci subşirul $(y_{\mathbf{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ converge la a.

Deoarece f este continuă pe A, deci şi în a, vom avea $\lim_{j\to\infty} f(x_{\mathbf{k_j}}) = f(a)$, şi $\lim_{j\to\infty} f(y_{\mathbf{k_j}}) = f(a)$. Prin urmare pentru $\varepsilon_0 > 0$ vor exista rangurile j' şi j'' astfel încât

$$\|f(a) - f(x_{\mathbf{k_j}})\|_p < \frac{\varepsilon_0}{2}, \text{ pentru orice număr natural } j \geq j'$$

şi

$$\|f(a) - f(y_{\mathbf{k_j}})\|_p < \frac{\varepsilon_0}{2}, \text{ pentru orice număr natural } j \geq j''.$$

Aşadar, oricare ar fi numărul natural j, $j \geq \max\{j', j''\}$, avem

$$\|f(x_{\mathbf{k_j}}) - f(y_{\mathbf{k_j}})\|_p \leq \|f(x_{\mathbf{k_j}}) - f(a)\|_p + \|f(a) - f(y_{\mathbf{k_j}})\|_p <$$

$$< \frac{e_0}{2} + \frac{e_0}{2} = e_0.$$

Aceasta contrazice (10). Presupunerea că f n-ar fi uniform continuă este deci falsă. $\diamond$