SUPORT PENTRU CURSUL 12
Integrale improprii

20 decembrie 2012

Integrala Riemann pe interval necompact, numită şi integrala Riemann improprie, apare ca o extindere a integralei Riemann clasice în cazul în care intervalul compact $[a,\, b]$, unde a şi b sunt numere reale, cu $a \,\leq\, b$, este înlocuit cu un interval necompact. Întâlnim opt tipuri de intervale necompacte dintre care trei sunt mărginite: $]a,\, b[$, $[a,\, b[$, $]a,\, b]$ şi cinci sunt nemărginite: $[a,\, +\infty[$, $]a,\, +\infty[$, $]-\infty,\, b[$, $]-\infty,\, b]$, $]-\infty,\, +\infty[$. Aceste opt tipuri pot fi împărţite în trei categorii:
1) $[a,\, b[$, cu $a \in \mathrm{I\!R}$, $b \in \mathrm{I\!R} \bigcup \{+\infty\}$, $a \,<\, b$,
2) $]a,\, b]$, cu $a \in \mathrm{I\!R} \bigcup \{-\infty\}$, $b \in \mathrm{I\!R}$, $a \,<\, b$ şi
3) $]a,\, b[$, cu $a \in \mathrm{I\!R} \bigcup \{-\infty\}$, $b \in \mathrm{I\!R} \bigcup \{+\infty\}$, $a \,<\, b$.

În cele ce urmează vom prezenta extinderea noţiunii de integrală Riemann pentru aceste trei categorii de intervale. Menţionez că noţiunea de integrală improprie apare în teoria probabilităţilor, în reprezentarea funcţiei de repartiţie, fiind deci o noţiune indispensabilă pentru această ramură a matematicii. Din acest considerent vom face câteva precizări privind integrala lui Poisson şi integralele Beta şi Gamma ale lui Euler.

La sfârşitul cursului am adăugat o anexă unde am trecut câteva proprietăţi ale funcţiilor integrabile impropriu, am dat în plus câteva criterii de convergenţă şi demonstraţiile pentru cele două variante ale criteriul comparaţiei. De asemenea am dat teorema de schimbare a variabilei şi de integrare prin părţi în cazul integralelor improprii.

1 Noţiunea de integrală Riemann improprie

Fie $I \subseteq \mathrm{I\!R}$ un interval.

DEFINIŢIE. *O funcţie $f : I \to \mathrm{I\!R}$ se numeşte local integrabilă pe I dacă este integrabilă pe orice interval compact $[c,\, d] \subseteq I$.*

Definirea integralei improprii în cazul intervalui $[a,\, b[$. Fie $a \in \mathrm{I\!R}$, $b \in \mathrm{I\!R} \bigcup \{+\infty\}$, cu $a \,<\, b$, şi fie $f \,:\, [a,\, b[\to \mathrm{I\!R}$ o funcţie local integrabilă pe $[a,\, b[$. Construim funcţia $F : [a, b[\to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$F(v) \,=\, \int_a^v f(x)dx,\ \text{pentru fiecare}\, v \in [a,\, b[. \tag{1}$$

Definiţie. *Funcţia f se numeşte integrabilă impropriu pe $[a,\, b[$ dacă există în $\mathbb{R}$ limita*

$$\lim_{v\to b} F(v). \tag{2}$$

În caz de existenţă, limita (2) se notează cu $\displaystyle\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$, *sau când nu este pericol de confuzie, prin* $\displaystyle\int\limits_a^{b} f(x)dx$, *şi se numeşte integrala improprie a lui f pe $[a,\, b[$. Tot în caz de existenţă a limitei (2) în $\mathbb{R}$ se mai spune că* $\displaystyle\int\limits_a^{b} f(x)dx$ *este convergentă.*

Cu alte cuvinte, funcţia $f; [a,\, b[\to \mathbb{R}$ este integrabilă impropriu pe $[a,\, b[$, adică $\displaystyle\int\limits_a^{b} f(x)dx$ este convergentă, dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

i) f este local integrabilă pe $[a, b[$ şi

ii) există şi este finită limita

$$\lim_{v\to b}\int_a^v f(x)dx. \tag{3}$$

Dacă funcţia $f : [a,\, b[\to \mathbb{R}$ este integrabilă impropriu pe $[a,\, b[$, convenim să numim integrală a lui f pe $[a,\, b[$ şi să notăm prin $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ numărul

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{v\to b}\int_a^v f(x)dx. \tag{4}$$

În cazul în care limita (3) nu există sau există dar este infinită, convenim să spunem că funcţia f nu este integrabilă impropriu pe $[a, b[$ sau că integrala $\displaystyle\int\limits_a^{b} f(x)dx$ este divergentă.

Interpretare geometrică

Fie funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ integrabilă impropriu pe $[a,\, b[$. Numărul $\displaystyle\int_a^v f(x)dx$ este egal, pentru fiecare $v \in [a,\, b[$, cu aria figurii plane mărginite de axa Ox, de graficul funcţiei f, de dreapta $x = a$ şi de dreapta $x = v$. Prin urmare, dacă f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, interpretăm numărul real $\int_a^b f(x)dx$ ca fiind egal cu aria figurii plane mărginită de: axa Ox, graficul funcţiei f, dreapta $x = a$ şi, în cazul $b \in \mathbb{R}$, de dreapta $x = b$. În cazul $b = +\infty$, dreapta Ox este asimptotă la graficul lui f, şi, de aceea, în acest caz figura plană va fi mărginită numai de axa Ox, de graficul funcţiei f şi de dreapta $x = a$.

Exemplul 1.1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ oricare ar fi } x \in [0, 1[.$$

Cum, pentru orice $v \in [0,\, 1[$, funcţia f este integrabilă pe $[0,\, v]$ şi

$$\lim_{v \nearrow 1} \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \;=\; \lim_{v \nearrow 1} (\arcsin v \,-\, \arcsin 0) \;==\; \arcsin 1 \;=\; \frac{\pi}{2},$$

rezultă că funcţia f este integrabilă impropriu pe $[0,\, 1[$. Mai putem spune că integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ este convergentă şi avem $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \;=\; \frac{\pi}{2}$. În conformitate cu interpretarea geometrică dată, aria figurii plane, mărginite de axele de coordonate, de dreapta de ecuaţie $x \,=\, 1$, şi de reprezentarea în plan a graficului funcţiei f, este egală cu $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemplul 1.2. Fie numerele reale a şi b, cu $a < b$, şi fie $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) \;=\; (b-x)^p, \text{ pentru fiecare } x \in [a, b[,$$

unde p este un număr real. Se pune problema determinării valorilor lui p pentru care funcţia f este integrabilă impropriu pe $[a,\, b[$. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,\, v]$, oricare ar fi $v \in [a,\, b[$, ea este integrabilă Riemann pe $[a,\, v]$, şi avem

$$\int_a^v (b-x)^p dx \;=\; \begin{cases} -\dfrac{(b-v)^{p+1} \,-\, (b-a)^{p+1}}{p+1}, \text{ dacă } p \;\neq\; -1 \\ \\ -\ln \dfrac{b\,-\,v}{b\,-\,a}, \text{ dacă } p \;=\; -1 \end{cases} .$$

Rezultă că

$$\lim_{v \nearrow b} \int_a^t (b\,-\,x)^p dx \;=\; \begin{cases} \dfrac{(b\,-\,a)^{p+1}}{p+1}, \text{ dacă } p \;>\; -1 \\ \\ +\infty, \text{ dacă } p \;\leq\; -1 \end{cases} .$$

Deci, dacă $p \;>\; -1$, atunci f este integrabilă impropriu pe $[a,\, b[$, şi $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \;=\; \frac{(b-a)^{p+1}}{p+1}$.

Cu alte cuvinte integrala $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ este convergentă pentru $p \;>\; -1$ şi divergentă pentru $p \leq -1$.

Exemplul 1.3. Fie a şi p numere reale, cu $a \;>\; 0$, şi fie funcţia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; x^p, \text{ pentru fiecare } x \in [a,\, +\infty[.$$

Să se determine pentru ce valori ale lui p funcţia f este impropriu integrabilă pe $[a,\, +\infty[$. Fie $v \in [a, +\infty[$. Uşor se vede că f este integrabilă pe $[a,\, v]$ şi

$$\int_a^v x^p dx \;=\; \begin{cases} \ln \dfrac{v}{a}, \text{ dacă } p \;=\; -1 \\ \\ \dfrac{v^{p+1} \,-\, a^{p+1}}{p+1}, \text{ dacă } p \;\neq\; -1 \end{cases} .$$

Prin urmare

$$\lim_{v \nearrow +\infty} \int_a^v x^{-p} dx \;=\; \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } p \;\geq\; -1 \\ \\ -\dfrac{a^{p+1}}{p+1}, \text{ dacă } p \;<\; -1 \end{cases} .$$

Rezultă că funcţia f este integrabilă impropriu pe $[a, +\infty[$ dacă şi numai dacă $p < -1$. Cu alte cuvinte, integrala este convergentă dacă şi numai dacă $p < -1$.

EXEMPLUL 1.4. Integrala $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$, este convergentă deoarece

$$\int_0^v e^{-x}dx = -(e^{-v} - e^0),$$

şi

$$\lim_{v\to\infty} (-e^{-v} + e^0) = 1.$$

Următorul exemplu subliniază rolul pe care îl au integralele improprii în studierea unor fenomene fizice.

EXEMPLU. (optional) Se consideră un circuit simplu format din următoarele componente ideale: o sursă de curent cu intensitatea I_0, un sezistor cu rezistenţa R, şi o bobină cu inductanţa L. La momentul t_0 se intrerupe curentul dat de sursa de curent (prin scurtcircuitarea sursei). Curentul din circuit variază după legea:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t - t_0)}.$$

Se cere cantitatea de căldură disipată în rezistorul R din momentul $t_0 = 0$ şi până la anularea curentului.

Cantitatea elementară de căldură în intervalul de timp dt este

$$dQ = I^2 R dt.$$

Prin urmare cantitatea totală de căldură Q degajată de acest curent, prin efect Joule, va fi

$$Q = \int_0^{+\infty} I^2 R dt = R I_0^2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

Remarcăm faptul că deşi după un interval finit de timp curentul devine practic insesizabil, totuşi, pentru determinarea cantităţii totale de energie a curentului care se transformă în căldură, trebuie să se integreze pe intervalul infinit.

Definirea integralei improprii în cazul intervalui]a,b]. Fie $a \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\}$ şi fie $b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$.

DEFINIŢIE. *Funcţia* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *se numeşte integrabilă Riemann impropriu pe* $]a, b]$ *dacă este local integrabilă pe* $]a, b]$ *şi dacă există în* $\mathbb{R}$ *limita*

$$\lim_{u\searrow a} \int_u^b f(x)dx. \tag{5}$$

în caz de existenţă, limita (5) se numeşte integrala improprie a funcţiei f pe $]a, b]$ *şi se notează prin*

$$\int_{a-0}^{b} f(x)dx, \text{ sau, simplu, prin } \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{6}$$

Dacă limita (5) nu există sau există dar nu este finită, se spune că f *nu este integrabilă impropriu pe* $]a, b]$ *sau că integrala (6) este divergentă.*

EXEMPLU. Fie funcţia $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln x, \text{ pentru fiecare } x \in]0, 1].$$

Ne propunem să stabilim dacă f este sau nu impropriu integrabilă pe $]0, 1]$. Deoarece

$$\int_u^1 \ln x\, dx = -1 - u \cdot \ln u + u,$$

şi

$$\lim_{u \searrow 0} (-1 - u \cdot \ln u + u) = -1,$$

funcţia f este integrabilă impropriu pe $]0, 1]$ şi

$$\int_0^1 \ln x\, dx = -1.$$

EXEMPLUL 1.5. Fie a, b numere reale cu $a < b$, fie p un număr real şi fie funcţia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)^p$, pentru fiecare $x \in]0, 1]$. Ne propunem să stabilim dacă f este sau nu impropriu integrabilă pe $]a, b]$. Pentru fiecare $u \in]a, b]$, avem

$$\int_u^b (x - a)^p = \begin{cases} \ln \dfrac{b - a}{u - a}, \text{ dacă } p = -1, \\ \\ \dfrac{(b - a)^{p+1} - (u - a)^{p+1}}{1 + p}, \text{ dacă } p \neq -1. \end{cases}$$

Cum

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^b (x - a)^p dx = \begin{cases} \dfrac{(b - a)^{1+p}}{1 + p}, \text{ dacă } p > -1, \\ \\ +\infty, \text{ dacă } p \leq -1, \end{cases}$$

deducem că f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$ dacă şi numai dacă $p > -1$. Pentru $p > -1$ avem $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b - x)^p} = \frac{(b - a)^{1+p}}{1 + p}$.

OBSERVAŢIA 1.1. Fie $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, şi fie $u \in]a, b]$. Funcţia f este integrabilă pe $[u, b]$, dacă şi numai dacă funcţia $g : [-b, -a[$,

$$g(x) = f(-x), \text{ pentru fiecare } x \in [-b, -a[,$$

este integrabilă pe $[-b,\ -u]$, şi

$$\int_u^b f(x)dx = -\int_{-u}^{-b} g(x)dx = \int_{-b}^{-u} g(x)dx = \int_{-b}^{-u} f(-x)dx.$$

Prin urmare, putem reduce studiul integralelor improprii în cazul intervalului de tipul $]a, b]$, la studiul integralelor improprii pe intervale de primul tip.

Definirea integralei improprii în cazul intervalului]a,b[. Fie $a \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$ şi fie $b \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$, cu $a < b$.

DEFINIŢIE. *Spunem că funcţia* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann impropriu pe* $]a,\ b[$ *dacă* f *este local integrabilă pe* $]a, b[$, *şi dacă există şi este finită limita*

$$\lim_{v\nearrow b,\, u\searrow a} \int_u^v f(x)dx. \tag{7}$$

Limita (7), în caz de existenţă în $\mathbb{R}$, *se numeşte integrala improprie a functiei* f *pe]a,b[şi se notează prin*

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)dx, \quad \text{sau, atunci când nu este pericol de confuzie, prin} \quad \int_a^b f(x)dx.$$

OBSERVAŢIA 1.2. Fără greutate se poate arăta că dacă funcţia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann impropriu pe $]a, b[$, atunci oricare ar fi un punct $c \in]a, b[$, funcţia f este integrabilă Riemann impropriu pe $]a, c]$ şi pe $[c, b[$. De asemenea, dacă există un punct $c \in]a, b[$ astfel încât funcţia f este integrabilă Riemann impropriu pe $]a, c]$ şi pe $[c, b[$, atunci f este integrabilă Riemann impropriu pe $]a, b[$. Prin urmare, studiul integrabilităţii în sens impropriu a funcţiei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ se poate reduce la studiul integrabilităţii în sens impropriu a funcţiei f pe intervalele $]a, c]$ şi $[c, b[$.

EXEMPLU. Fie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

este convergentă şi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{v\nearrow\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{v\nearrow\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

De asemenea şi integrala

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$$

este convergentă şi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = -\lim_{u\searrow-\infty} \operatorname{arctg} u = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare integrala este convergentă şi avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

EXEMPLU. (opţional) În plan se consideră un sistem de coordonate carteziene cu originea în O. Fie punctele $A(a,0)$, $B(a,s_1)$ şi $C(a,s_2)$, cu $s_1 < s_2$. Dacă în O, este situată o sarcină magnetică m şi dacă prin segmentul BC trece un curent de intensitate I, atunci, în baza legii lui Biot şi Savart, curentul acţionează asupra sarcinii magnetice cu o forţă

$$F = aI \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{(a^2 + s^2)^{3/2}} = \frac{I}{a}\left(\frac{s_2}{\sqrt{a^2+s_2^2}} - \frac{s_1}{\sqrt{a^2+s_1^2}}\right).$$

Considerăm acum cazul unui conductor infint (în ambele sensuri). Atunci

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aI}{(a^2 + s^2)^{3/2}}ds = \lim_{t\searrow+\infty,\, r\nearrow-\infty} \int_r^t \frac{aI}{(a^2 + s^2)^{3/2}}ds == 2\frac{I}{a}.$$

Deşi în realitate conductori infiniţi nu există, în cazul conductorilor foarte lungi se poate aplica ultimul rezultat.

În legătură cu integralele improprii se ridică mai multe probleme dintre care ne propunem să răspundem la următoarele:

- studierea unor proprietăţi ale funcţiilor care sunt integrabile impropriu,

- găsirea unor criterii de convergenţă şi

- determinarea unor metode de calcul. Ţinând cont de observaţiile 1.1 şi 1.2, putem reduce studiul integrabilităţii improprii a funcţiei pe un interval de forma $]a,b[$, la studiul integrabilităţii improprii a funcţiei pe intervale de forma $[\gamma,\delta[$. Această constatare justifică studierea proprietăţilor integralelor improprii şi găsirea unor criterii de convergenţă numai în cazul intervalele de forma $[\gamma,\delta[$. De asemenea, ţinând cont de faptul că orice funcţie integrabilă impropriu este local integrabilă, de proprietatea de aditivitate şi ereditate a funcţiilor integrabile, putem face observaţia care urmează.

OBSERVAŢIA 1.3. Dacă funcţia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ este integrabilă impropriu pe $[a,b[$, atunci f este integrabilă impropriu pe orice interval de forma $[c,b[$ cu $a \le c < b$ şi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2 Condiţii suficiente de convergenţă

Teorema 2.1 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă funcţia continuă $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ poate fi prelungită prin continuitate pe $[a,b]$ prin funcţia g, atunci f este integrabilă impropriu pe $[a,b[$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx. \tag{8}$$

Demonstraţie. Deoarece g este o funcţie continuă pe $[a,\ b]$, o primitivă a sa este funcţia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$G(t) \ = \ \int_a^t g(x)dx \,\text{pentru fiecare}\, t \in [a, b].$$

Funcţia G fiind continuă pe $[a, b]$ avem

$$G(b) \ = \ \lim_{t\to b} G(t) \ = \ \lim_{t\to b} \int_a^t g(x)dx. \tag{9}$$

Funcţia g fiind o prelungire prin continuitate a funcţiei f, avem

$$g(x) \ = \ f(x), \forall \ x \in [a, b] \setminus \{b\}. \tag{10}$$

Cum f este continuă pe $[a,\ b[$, ea este local integrabilă pe $[a,\ b]$. Ţinând cont de (10), avem

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^t g(x)dx, \ \ \forall \ t \in [a,\ b[. \tag{11}$$

Din (11) şi (9) deducem că există $\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx$ şi că

$$\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to b} \int_a^t g(x)dx = G(b) \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Deci f este impropriu integrabilă pe $[a,\ b[$. Ca urmare, obţinem

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to b} \int_a^t g(x)dx \ = \ \int_a^b g(x)dx. \diamond$$

Rezultate analoage se pot stabilii şi în cazul în care $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ sau în care $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

Exemplul 2.1. Fie $f :]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \ = \ \frac{x}{\operatorname{tg} x}, \text{ pentru fiecare}\, x \in]0, \frac{\pi}{2}].$$

Deoarece funcţia $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \ = \ \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{tg} x}, & x \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & x \ = \ 0 \end{cases} ,$$

este o prelungire prin continuitate a funcţiei f la $[0, \frac{\pi}{2}]$, rezultă că funcţia f este integrabilă impropriu pe $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Criterii de convergenţă pentru funcţii pozitive

Teorema 2.2 *(criteriul comparaţiei). Dacă* $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ *şi* $g : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ *sunt funcţii local integrabile pe* $[a, b[$ *având proprietatea că*

$$f(x) \le g(x), \text{ oricare ar fi } x \in [a, b[, \tag{13}$$

atunci:

i) dacă $\int_a^b g(x)dx$ *este convergentă, atunci şi* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă;*

ii) dacă $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă, atunci şi* $\int_a^b g(x)dx$ *este divergentă.*

Demonstraţia teoremei este inclusă în Anexa de la sfârşitul cursului.

Exemplul 2.2. (Integrala lui Euler–Poisson) Integrala

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

se numeşte integrala lui Euler–Poisson.

Funcţia $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$, va fi integrabilă impropriu pe $[0, +\infty[$ dacă şi numai dacă este integrabilă impropriu pe $[1, +\infty[$. Pentru fiecare $x \in [1, +\infty[$ avem

$$0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$$

Pe de altă parte integrala

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

este convergentă, căci

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \to +\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = \frac{1}{e}.$$

Aplicând criteriul comparaţiei deducem că integrala

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

este convergentă. Deci integrala $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă.

De multe ori este dificil de arătat că

$$f(x) \le g(x), \text{ oricare ar fi } x \in [a, +\infty[.$$

De aceea, în practică, putem utiliza următorul rezultat:

Teorema 2.3 *(criteriul comparaţiei sub forma raportului).*

Dacă $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+^*$ *şi* $g : [a, b[\to \mathbb{R}_+^*$ *sunt funcţii local integrabile pe* $[a, b[$, *şi există*

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = r, \tag{14}$$

atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

i) dacă $0 < r < +\infty$, *atunci integralele* $\int_a^b g(x)dx$, *şi* $\int_a^b f(x)dx$ *au aceeaşi natură;*

ii) dacă $r = 0$ *şi* $\int_a^b g(x)dx$ *este convergentă, atunci* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă;*

iii) dacă $r = +\infty$ *şi dacă* $\int_a^b g(x)dx$ *este divergentă, atunci* $\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Demonstraţia se găseşte în anexă.

Utilizând acestă teoremă şi ţinând cont de exemplele 1.3 şi 1.2, putem determina natura unei integrale improprii $\int\limits_a^b f(x)dx$, utilizând:

i) dacă $b < +\infty$, funcţia $g : [a,\, b[\to \mathbb{R}$, $g(x) = (b-x)^p$, pentru fiecare $x \in [a,\, b[$, unde numărul real p este ales astfel încât limita (14) să fie finită şi, când este posibil, diferită de 0, iar

ii) dacă $b = +\infty$, funcţia $g : [a,\, b[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x^p$, pentru fiecare $x \in [a,\, b[$, unde numărul real p este ales astfel încât limita (14) să fie finită şi, când este posibil, diferită de 0.

Exemplul 2.3. Fie $a > 0$, fie funcţia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ local integrabilă şi fie p un număr real cu proprietatea că există şi este finită limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^p}. \tag{15}$$

Atunci integrala

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{16}$$

este:

i) convergentă, dacă $p < -1$;

ii) divergentă, dacă $p \geq -1$ şi dacă limita (15) este nenulă.

Într-adevăr, luând funcţia $g : [a, \infty[\to \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x^p$, oricare ar fi $x \in [a, +\infty[$, ţinând cont de faptul că $\int\limits_a^{+\infty} x^p dx$ este convergentă pentru $p < -1$ şi divergentă pentru $p \geq -1$ şi aplicând teorema 2.3, deducem că $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă dacă $p < -1$ şi divergentă, dacă $p \geq -1$ şi dacă limita (15) este nenulă.

Exemplul 2.4. Integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx$ este convergentă, căci luând $p = -2$, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1+2x^3}}{x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

şi $\int\limits_1^{+\infty} x^{-2}dx$ este convergentă. Deci, aplicând teorema 2.3, deducem că $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx$ este convergentă.

Exemplul 2.5. Fie $a > 0$, fie funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+^*$ local integrabilă pe $[a, b[$ şi p un număr real cu proprietatea că există şi este finită limita

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{(b-x)^p}. \tag{17}$$

Atunci integrala

$$\int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

este:
i) convergentă, dacă $p<1$, şi
ii) divergentă, dacă $p\geq 1$ şi dacă limita (17) este nenulă.

Într-adevăr, luând funcţia $g:[a,\,b[\to \mathbb{R}_+^*,\ g(x)\,=\,(b-x)^p$, oricare ar fi $x\in[a,\,b[$, ţinând cont de faptul că $\int\limits_a^b (b-x)^p dx$ este convergentă pentru $p>-1$ şi divergentă pentru $p\leq -1$ şi aplicând teorema 2.3, deducem că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă, dacă $p>-1$, şi divergentă, dacă $p\leq -1$.

Exemplul 2.6. Integrala $\int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt[5]{9-x^2}}dx$ este convergentă deoarece, pentru $p=-\frac{1}{5}$, avem

$$\lim_{t\nearrow 3}\frac{\frac{x+1}{\sqrt[5]{9-x^2}}}{(3-x)^{-\frac{1}{5}}}=\lim_{t\nearrow 3}\frac{(x+1)(3-x)^{\frac{1}{5}}}{(3+x)^{\frac{1}{5}}(3-x)^{\frac{1}{5}}}\;=\;\frac{4}{\sqrt[5]{6}}$$

şi itegrala $\int_0^3 (3-x)^{-\frac{1}{5}}dx$ este comvergentă.

3 Integralele Beta şi Gamma ale lui Euler

Integrala Beta .

Fie numerele reale a şi b cu $a<b$ şi funcţia $f:]0,1[\to\mathbb{R}$, dată prin

$$f(x)\;=\;x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1},\ \text{pentru fiecare}\, x\in]0,1[.$$

Integrala

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \tag{19}$$

se numeşte integrala Beta a lui Euler.

Ne propunem să determinăm numerele reale a şi b pentru care integrala (19) este convergentă.

Dacă $a\geq 1$ şi $b\geq 1$, atunci integrala Beta este convergentă pentru că funcţia f poate fi prelungită prin continuitate la intervalul $[0,\,1]$.

Deoarece luând $p\;=\;a-1$, avem

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{x^{a-1}}\;=\;1,$$

rezultă că integrala $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ este convergentă dacă şi numai dacă integrala $\int_0^1 x^{a-1}dx$ este convergentă, adică dacă şi numai dacă, în conformitate cu exemplul 1.5, avem $a-1>-1$, adică $a>0$.

Analog, întrucât luând $p = b-1$ avem

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{b-1}} = 1,$$

rezultă, aplicând consecinţa 2.5, că este necesar ca $1-b < 1$, adică $b > 0$.

Prin urmare integrala Beta este convergentă dacă şi numai dacă $a > 0$ şi $b > 0$.

În cele ce urmează vom pune în evidenţă câteva proprietăţi ale integralei Beta.

Teorema 3.1 *Dacă $a > 0$ şi $b > 0$, atunci sunt adevărate următoarele propoziţii:*
i) $B(a,b) = B(b,a)$;
ii) Dacă $a > 1$ şi $b > 1$, atunci

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a,b-1) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,b).$$

iii) Dacă n este număr natural nenul, atunci

$$B(a,n) = \frac{(n-1)!}{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a+n-1)}.$$

iv) Dacă m şi n sunt numere naturale nenule, avem

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Demonstraţie. i) Aplicând teorema de schimbare a variabilei şi făcând substituţia $x = 1-y$, obţinem

$$\int_u^v x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = -\int_{1-u}^{1-v} (1-y)^{a-1} y^{b-1} dy = \int_{1-v}^{1-u} y^{b-1}(1-y)^{a-1}dy.$$

Făcând acum $u \searrow 0$ şi $v \nearrow 1$ şi ţinând cont de faptul că integrala este convergentă, obţinem

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \lim_{u\searrow 0,\, v\nearrow 1} \int_u^v x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \lim_{u\searrow 0,\, v\nearrow 1} \int_{1-v}^{1-u} y^{b-1}(1-y)^{a-1}dy =$$

$$\int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1}dy = B(b,a).$$

ii) Vom aplica teorema de integrare prin părţi. Obţinem

$$\int_u^v x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{x^a}{(1-x)^{b-1}}\Big|_u^v + \int_u^v \frac{x^a}{a+b-1}(1-x)^{b-2}dx. \qquad (20)$$

Făcând acum $u \searrow 0$ şi $v \nearrow 1$ şi ţinând cont de faptul că integrala este convergentă, obţinem

$$B(a,b) = \lim_{u\searrow 0,\, v\nearrow 1} \int_u^v x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Atunci, din (20), avem

$$B(a,b) = \lim_{u\searrow 0,\, v\nearrow 1}\left(v^a(1-v)^{b-1} - u^a(1-u)^{b-1} + \frac{b-1}{a}\int_u^v x^a(1-x)^{b-2}dx\right) =$$

$$\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx = \frac{b-1}{a}B(a+1,b-1),$$

adică

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a+1,b-1). \tag{21}$$

Ţinând cont că

$$x^a = x^a + x^{a-1} - x^{a-1} = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x),$$

avem

$$B(a+1,b-1) = \int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx -$$

$$-\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = B(a,b-1) - B(a,b).$$

Deci

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}(B(a,b-1) + B(a,b)),$$

de unde obţinem

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b+1}B(a,b-1). \tag{22}$$

Inversând rolul lui a cu b, obţinem

$$B(b,a) = \frac{a-1}{a+b+1}B(b,a-1). \tag{23}$$

Ţinând cont de i), din (23), avem

$$B(b,a) = \frac{a-1}{a+b+1}B(b,a-1) = \frac{a-1}{a+b+1}B(a-1,b). \tag{24}$$

Din i) şi din egalităţile (24) şi (22) rezultă ii).

iii) Aplicând succesiv prima egalitate din formula de la ii), obţinem

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}B(a,n-1) = \ldots =$$

$$= \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\cdot B(a,1).$$

Ţinând cont că

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^0dx = \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},$$

obţinem egalitatea de la iii).

iv) Din i) şi iii) avem

$$B(m,n) = B(n,m) = \frac{(m-1)!}{n(n+1)...(n+m-1)} =$$

$$= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!} \diamond$$

Alte proprietăţi ale integralei Beta

Fără demonstraţie dăm următoarele rezultate:

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du, \tag{25}$$

$$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} t \cos^{2b-1} t\, dt, \tag{26}$$

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \tag{27}$$

Din (26) obţinem imediat

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \tag{28}$$

Integrala Γ. Fie a un număr real.

Integrala

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \tag{29}$$

se numeşte integrala Gamma a lui Euler.

Să observăm mai întâi că integrala

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

este convergentă oricare ar fi numărul real a; putem aplica, spre exemplu, consecinţa 2.3, cu $p = -2$, deoarece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}\cdot e^{-x}}{x^2} dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0.$$

De asemenea, întrucât

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{x^{a-1}e^{-x}}{x^{a-1}} = 1,$$

în baza exemplului 2.5 deducem că

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

este convergentă dacă şi numai dacă $a-1 \,<\, -1$, adică $a>0$.

Proprietăţi ale integralei Gamma

Teorema 3.2 *Dacă $a>0$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*
i) Dacă $a>1$, atunci $\Gamma(a) \,=\, (a-1)\cdot\Gamma(a-1)$;
ii) Dacă n este un număr natural nenul, atunci

$$\Gamma(n) \,=\, (n-1)!.$$

Demonstraţie. i) Aplicând formula de integrare prin părţi obţinem

$$\Gamma(a-1) \,=\, \int_0^\infty x^{a-2}e^{-x}dx \,=\, \lim_{t+\infty}\int_0^t x^{a-2}e^{-x}dx \,=$$

$$= \lim_{t+\infty}\left(\frac{t^{a-1}}{a-1}e^{-x} \,+\, \frac{1}{a-1}\int_0^t x^{a-1}e^{-x}dx\right) \,=\, \frac{1}{a}\Gamma(a).$$

Deci i) este adevărată.

ii) Aplicând succesiv rezultatul de la punctul i), obţinem

$$\Gamma(n) \,=\, (n-1)\cdot\Gamma(n-1) \,=$$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \,=\, (n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 2\cdot\Gamma(1).$$

Cum

$$\Gamma(1) \,=\, \int_0^{+\infty} x^0e^{-x}dx \,=\, 1, \tag{30}$$

rezultă

$$\Gamma(n) \,=\, (n-1)!.$$

Legătura dintre funcţiile Beta şi Gamma . Oricare ar fi numerele reale $a>0$ şi $b>0$, avem

$$B(a,b) \,=\, \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma b}{\Gamma(a+b)}. \tag{31}$$

Ţinând cont că $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$, din (30) obţinem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{32}$$

4 Temă

1. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

2. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

3. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_0^{1} \ln(1-x)dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

4. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

5. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{x}{e^x}dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

6. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^2}dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

7. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx$ este convergentă; discuţie în funcţie de parametrul real p.

8. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

9. Utilizând definiţia integralei improprii stabiliţi dacă integrala $\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea ei.

10. Calculaţi $B(2,2)$ şi $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

11. Calculaţi $\Gamma(3)$ şi $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

12. Calculaţi $\int\limits_0^1 \sqrt{x^5 - x^6}dx$.

13. Efectuând o schimbare de variabilă adecvată şi utilizând funcţia Gamma, calculaţi $\int\limits_0^\infty x^6 e^{-3x^2} dx$.

14. Efectuând o schimbare de variabilă adecvată şi utilizând funcţia Gamma, calculaţi $\int\limits_0^\infty x^m e^{-x^n} dx$.

15. Calculaţi $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{5}} dx$.

16. Calculaţi $\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^3)^2}dx$.

17. Efectuând o schimbare de variabilă adecvată şi utilizând funcţia Beta, calculaţi $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx$.

18. a) Efectuaţi, în integrala $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^4}dx$, schimbarea de variabilă $x = \frac{t}{1-t}$.

b) Cercetaţi dacă integrala $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^4}dx$ este convergentă şi, în caz afirmativ, calculaţi integrala.

5 Anexă (opţional)

În cele ce urmează considerăm doar cazul integralelor improprii pe intervale de forma $[a, b[$, cu $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \bigcup +\infty$, şi $a < b$.

5.1 Proprietăţi ale integralei improprii

Teorema 5.1 *(proprietatea de liniaritate faţa de funcţia de integrat). Dacă funcţiile* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *şi* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *sunt integrabile impropriu pe* $[a, b[$, *atunci oricare ar* *fi numerele reale α şi β, funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă impropriu pe $[a, b[$ şi avem*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx. \tag{33}$$

Demonstraţie. Fie $t \in [a, b[$. Uzând de proprietatea de liniaritate a integralei Riemann deducem că

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^t f(x)dx + \beta \cdot \int_a^t g(x)dx. \tag{34}$$

Funcţiile f şi g fiind integrabile impropriu pe $[a, b[$, vor exista şi vor fi finite limitele $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ şi $\lim_{t\to\infty} \int_a^t g(x)dx$. Prin urmare, făcând $t \to +\infty$ în (34), rezultă că şi membrul stâng are limită finită şi că are loc (33).$\diamond$

Teorema 5.2 *(proprietatea de monotonie). Dacă funcţiile $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ şi $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sunt integrabile impropriu pe $[a, b[$ şi dacă*

$$f(x) \le g(x), \ \forall\ x \in [a, b[,$$

atunci

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{35}$$

Demonstraţie. Tinând cont de proprietatea de monotonie a integralei Riemann, pentru orice $t \in [a, b[$ vom avea

$$\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx. \tag{36}$$

Făcând pe $t \to +\infty$ in (36) şi ţinând cont de definiţia integralei improprii rezultă (35).$\diamond$

OBSERVAŢIA 5.1. Dacă funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, atunci, în baza teoremei 5.2, luănd funcţia g egală cu funcţia nulă, obţinem

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Teorema 5.3 *(proprietatea de aditivitate). Dacă funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, atunci f este integrabilă impropriu pe orice interval de forma $[c, b[$ cu $a \le c < b$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstraţie. Fie $c \in [a, b[$ ales oarecare. Deoarece f este local integrabilă pe $[a, b[$, rezultă că f este local integrabil—a pe $[c, b[$. Fie $t \in]c, b[$. In baza proprietăţii de aditivitate faţă de interval a integralei Riemann, avem

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^t f(x)dx.$$

Întrucât membrul stâng are limită finită când $t \to b$, va exista şi va fi finită şi

$$\lim_{t\to b} \int_c^t f(x)dx$$

şi vom avea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.\diamond$$

Teorema 5.4 *(teorema de ereditate). Dacă funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe $[a, b[$, atunci ea este impropriu integrabilă pe $[a, b[$ dacă şi numai dacă există un $c \in]a, b[$ astfel încât f să fie impropriu integrabilă pe $[c, b[$.*

Demonstraţie. Necesitatea rezultă imediat din teorema 5.3.

Suficienţa. Deoarece f este local integrabilă pe $[a, b[$, rezultă că f va fi integrabilă pe $[a, c]$. Pe de altă parte, deoarece f este impropriu integrabilă pe $[c, b[$, ea va fi integrabilă pe $[c, t]$, oricare ar fi $t \in [c, b[$ şi va exista în $\mathbb{R}$ limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_c^t f(x)dx. \tag{37}$$

Uzând de proprietatea de aditivitate faţă de interval a integralei Riemann, rezultă că oricare ar fi $t \in [c, b[$, f este integrabilă pe $[a, t]$ şi avem

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^t f(x)dx,$$

Trecând la limită în egalitatea de mai sus şi ţinând cont că limita (37) există în $\mathbb{R}$, deducem că există în $\mathbb{R}$ limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

adică f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$.$\diamond$

5.2 Condiţii necesare şi suficiente de convergenţă

Teorema 5.5 *(criteriul lui Cauchy-Bolzano). Dacă funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe $[a, b[$, atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $\int_a^b f(x)dx$ să fie convergentă este ca pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ să existe o vecinătate $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_b$ cu proprietatea că pentru orice numere reale $b' \in V_\varepsilon$ şi $b'' \in V_\varepsilon$, cu $b' < b''$, să avem*

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{38}$$

Demonstraţie. Fie $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ funcţia dată prin (1). Să observăm că

$$F(b'') - F(b') = \int_a^{b''} f(x)dx - \int_a^{b'} f(x)dx = \int_{b'}^{b''} f(x)dx. \tag{39}$$

Necesitatea. Deoarece f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, funcţia F are limită în b. Aplicând criteriul lui Cauchy-Bolzano de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct, deducem că pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_b$ astfel încât pentru orice elemente $b' \in V_\varepsilon \bigcap [a, b[$ şi $b'' \in V_\varepsilon \bigcap [a, b[$, cu $b' < b''$, să avem

$$|F(b'') - F(b')| < \varepsilon, \tag{40}$$

inegalitate care, ţinând cont de (39), este echivalentă cu (38).

Suficienţa. Fie $\varepsilon > 0$. Va exista o vecinătate $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_b$ astfel încât pentru orice elemente $b' \in V_\varepsilon \bigcap [a, b[$ şi $b'' \in V_\varepsilon \bigcap [a, b[$, cu $b' < b''$, să avem (39). Inegalitatea (38) este echivalentă, în baza lui (refimp3.2), cu (40). Aplicînd acum criteriul lui Cauchy-Bolzano de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct, deducem că funcţia F are limită finită în punctul b. Prin urmare funcţia f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$.$\diamond$

Criteriul din teorema 5.5 permite găsirea altor criterii de convergenţă pentru integralele improprii.

Teorema 5.6 *Fie funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$. Următoarele propoziţii sunt adevărate:*

i) Funcţia $F : [a, b[\to \mathbb{R}$, dată prin (1) este crescătoare.

ii) Dacă f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, atunci F este mărginită superior pe $[a, b[$, şi avem

$$F(t) \le \int_a^b f(x)dx.$$

iii) Funcţia f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$ dacă şi numai dacă funcţia F este superior mărginită.

Demonstraţie.

i) Fie t', t'' puncte din $[a, b[$, cu $t' < t''$. Avem

$$F(t'') = \int_a^{t''} f(x)dx = \int_a^{t'} f(x)dx +$$

$$+ \int_{t'}^{t''} f(x)dx = F(t') + \int_{t'}^{t''} f(x)dx$$

Deci

$$F(t'') = F(t') = \int_{t'}^{t''} f(x)dx. \tag{41}$$

Deoarece f este integrabilă local pe $[a, b[$, ea va fi integrabilă pe $[t', t'']$ şi prin urmare va fi mărginită pe $[t', t'']$. Aplicând teorema de medie a calculului integral, deducem că există un număr real μ, cu

$$inf\,\{f(x)\,|\,x \in [a, b[\} \le \mu \le sup\{f(x)\,|\,x \in [a, b[\}$$

astfel încât

$$\int_{t'}^{t''} f(x)dx = \mu(t'' - t').$$

Deoarece $f(x) \geq 0,$ oricare ar fi $x \in [a, b[,$ avem $\mu \leq 0.$ Prin urmare

$$\int_{t'}^{t''} f(x)dx \geq 0,$$

ceea ce, ţinănd cont de (41 ne conduce la concluzia că $F(t'') = F(t') \geq 0.$ Deci funcţia F este crescătoare.

ii) Fie $t \in [a, b[.$ Deoarece f este integrabilă impropriu pe $[a, b[,$ în baza teoremei 5.3 avem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx = F(t) + \int_t^b f(x)dx$$

Dar, în baza observaţiei 5.1, avem

$$\int_t^b f(x)dx \geq 0.$$

Prin urmare

$$F(t) \leq \int_a^{,b} f(x)dx.$$

iii) Demonstrea teoremei revine la a arăta că funcţia F are limită în punctul b dacă şi numai dacă este mărginită superior.

Să remarcăm faptul că funcţia F este crescătoare pe $[a, b[.$ Se ştie că o funcţie crescătoare are limită la stânga finită în capătul drept al intervalului pe care este definită dacă şi numai dacă este mărginită superior. Prin urmare, cum F este funcţie crescătoare, ea are limită finită în punctul b dacă şi numai dacă este mărginită superior.$\diamond$

Teorema 5.7 *Dacă* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *este o funcţie local integrabilă pe* $[a, b[$ *şi dacă integrala*

$$\int_a^b f(x)dx$$

este absolut convergentă, atunci integrala

$$\int_a^b f(x)dx$$

este convergentă.

Demonstraţie. Aplicând funcţiei $|f|$ teorema 5.5, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $b_\varepsilon \in [a, b[$ cu proprietatea că oricare ar fi $b', b'' \in]b_\varepsilon, b[$ avem

$$\int_{b'}^{b''} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Cum însă

$$|\int_{b'}^{b''} f(x)dx| <= \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx,$$

rezultă că avem

$$|\int_{b'}^{b''} f(x)dx| < \varepsilon.$$

Aplicând suficienţa condiţiei din teorema 5.5, deducem că integrala

$$\int_a^b f(x)dx$$

este convergentă.$_\diamond$

Exemplul 5.1. Fie funcţia $f : [1, +\infty[\to \mathrm{I\!R}$,

$$f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x^2,} \text{ pentru fiecare } x \in [1, +\infty[,$$

unde $[x]$ notează partea intreagă a lui x. Evident că

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2}, \text{ pentru fiecare } x \in [1, +\infty[.$$

Deoarece

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}dx$$

este convergentă (vezi exemplul 1.3, rezultă, aplicând teorema 5.7, că f este integrabilă improriu pe $[1, +\infty[$.

Teorema 5.8 *(criteriul comparaţiei). Dacă $f : [a, b[\to \mathrm{I\!R}$ şi $g : [a, b[\to \mathrm{I\!R}$ sunt funcţii local integrabile pe $[a, b[$ având proprietatea că*

$$f(x) \leq g(x), \text{ oricare ar fi } x \in [a, b[, \tag{42}$$

atunci:

i) dacă $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci şi $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
ii) dacă $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci şi $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Demonstraţie.

i) În baza teoremei anterioare este suficient să arătăm că funcţia F, dată prin (1), este mărginită superior.

Funcţia g fiind pozitivă şi impropriu integrabilă pe $[a, b[$, deducem, în baza teoremei 5.6, că funcţia $G : [a, b[\to \mathrm{I\!R}$,

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx, \text{ pentru fiecare } t \in [a, b[$$

este superior mărginită şi vom avea

$$G(t) \leq \int_a^b g(x)dx, \text{ pentru fiecare } t \in [a, b[.$$

Ţinând cont de (42) şi de proprietatea de monotonie a integralei Riemann, deducem că

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx =$$

$$= G(t) \le \int_a^b g(x)dx, \text{ pentru fiecare } t \in [a, b[,$$

ceea ce ne conduce la concluzia că F este mărginită superior.

ii) Dacă $\int_a^b g(x)dx$ n-ar fi divergentă, atunci aplicând concluzia de la punctul i) ar rezulta că $\int_a^b f(x)dx$ ar fi convergentă, în contradicţie cu ipoteza.$_\diamond$

Teorema 5.9 *(criteriul comparaţiei sub forma raportului).*

Dacă $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+^*$ *şi* $g : [a, b[\to \mathbb{R}_+^*$ *sunt funcţii local integrabile pe* $[a, b[$, *şi există*

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha,$$

atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

i) dacă $0 < \alpha < +\infty$, *atunci integralele* $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$, *şi* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *au aceeaşi natură;*

ii) dacă $\alpha = 0$ *şi* $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *este convergentă, atunci* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă;*

iii) dacă $\alpha = +\infty$ *şi dacă* $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *este divergentă, atunci* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *este divergentă.*

Demonstraţie. i) Fie $0 < \alpha < +\infty$. Să luăm $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. Aplicând definiţia limitei unei funcţii într-un punct, rezultă că va exista un număr real $r > 0$ astfel încât $a \le b - r$ şi oricare ar fi $x \in]b - r, b[$ să avem

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

adică

$$\frac{1}{2}\alpha g(x) < f(x) < \frac{3}{2}\alpha g(x), \text{ pentru orice } x \in [b - r/2, b[. \tag{43}$$

În conformitate cu teorema 5.4, funcţiile f şi g vor fi integrabile Riemann impropriu pe $[a, b[$ dacă şi numai dacă vor fi integrabile Riemann impropriu pe $[b - r/2, b[$.

Dacă f este integrabilă Riemann impropriu pe $[b - r/2, b[$, ţinând cont de prima inegalitate din (43) şi aplicând teorema 2.2 deducem că funcţia $\frac{1}{2}g$ este integrabilă Riemann impropriu pe $[b - r/2, b[$. Atunci, în baza teoremei 5.1, funcţia g va fi integrabilă impropriu pe $[b - r/2, b[$.

Dacă g este integrabilă impropriu pe $[b - r/2, b[$, în baza teoremei 5.1, funcţia $\frac{3}{2}g$ va fi integrabilă impropriu pe $[b - r/2, b[$. Ţinând cont de a doua inegalitate din (43) şi de teorema 2.2, obţinem că f este integrabilă impropriu pe $[b - r/2, b[$.

Dacă f nu este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, atunci şi g nu este integrabilă impropriu pe $[a, b[$ deoarece în caz contrar, aplicând raţionamentul de mai sus, ar rezulta ca f este integrabilă impropriu pe $[a, b[$.

ii) Fie $\alpha = 0$, Să luăm $\varepsilon = 1$. Aplicând definiţia limitei unei funcţii într-un punct, rezultă că va exista un număr real $r > 0$ astfel încât $a \leq b-r$ şi oricare ar fi $x \in]b-r, b[$ să avem $|\frac{f(x)}{g(x)}| < 1$. Prin urmare, deoarece funcţiile iau valori pozitive, avem

$$f(x) < g(x) \text{ pentru orice } x \in [b - r/2, b[.$$

Deoarece g este integrabilă impropriu pe $[a, b[$, g va fi integrabilă impropriu şi pe $[b-r/2, b[$. Aplicând teorema 2.2, deducem că f este integrabilă impropriu pe $[b - r/2, b[$. Deci f va fi integrabilă impropriu şi pe $[a, b[$.

iii) Fie $\alpha = +\infty$. Luănd $\varepsilon = 1$, va exista un $r > 0$ astfel încât

$$f(x) > g(x) \text{ oricare ar fi } x \in [b - r/2, b[. \tag{44}$$

Deoarece g nu este integrabilă impropiu pe $[a, b[$, nu va fi integrabilă impropriu nici pe $[b-r/2, b[$. Atunci, din (44), aplicând teorema 2.2 deducem că funcţia f nu este integrabilă impropriu pe $[b - r/2, b[$, deci nici pe $[a, b[$.$\diamond$

Teorema 5.10 *(criteriul integral al lui Mac-Lourin,Cauchy) Fie* $a \in \mathbb{R}_+$. *Dacă funcţia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *este descrescătoare, atunci* f *este impropriu integrabilă pe* $[a, +\infty[$ *dacă şi numai dacă seria* $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ *este convergentă, unde* $n_0 = [a] + 1$.

Demonstraţie. Întrucât f este monotonă pe $[a, +\infty[$, rezultă că f este integrabilă pe orice interval $[c, d] \subseteq [a, +\infty[$. Deci f este local integrabilă pe $[a, +\infty[$.

Să notă $n_0 = [a] + 1$.

Fie k un număr natural, $k > n_0$. Deoarece f este descrescătoare, vom avea

$$f(k - 1) \geq f(x) \geq f(k), \text{ oricare ar fi } x \in [k - 1, k].$$

Aplicând proprietatea de monotonie a integralei obţinem

$$f(k-1) = \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx \geq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq$$

$$\geq \int_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k) \geq 0.$$

Fie acum n un număr natural $n > n_0$. Să observăm câ avem

$$[n_0, n] = \bigcup_{k=n_0+1}^{n} [k - 1, k].$$

Aplicând acum proprietatea de aditivitate faţă de interval a integralei Riemann, şi ţinând cont de inegalităţile de mai sus deducem că

$$0 \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(x)dx \leq sum_{k=n_0+1}^{n} f(k-1).$$

Considerând funcţia $F : [n_0, +\infty]$, dată prin 1, din inegalitatea de mai sus obţinem

$$0 \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq F(n) \leq sum_{k=n_0+1}^{n} f(k-1). \tag{45}$$

Necesitatea Dacă f este integrabilă impropriu pe $[a, +\infty[$, atunci, f este integrabilă impropriu şi pe $[n_0, +\infty[$. Aplicând teorema 5.6 deducem că funcţia F este mărginită superior şi

$$F(n) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Ţinând cont acum de (45), obţinem

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx,$$

oricare ar fi n un număr natural, $n \geq n_0$. Seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ fiind cu termeni pozitivi şi şirul sumelor parţiale fiind mărginit, rezultă că seria este convergentă.

Suficienţa. Dacă seria $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ este convergentă, şirul sumelor parţiale ale sale este mărginit. Fie $M \in \mathbb{R}$ un majorant al său. Vom avea deci

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k-1) \leq M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 + 1.$$

Ţinând cont de (45), deducem că avem

$$F(n) \leq M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Deducem că funcţia F este mărginită superior pe $[n_0, \infty[$. Aplicând acum teorema 5.6 deducem că funcţia f este integrabilă impropriu pe $[n_0, \infty[$. Ţinând cont de proprietatea de ereditate a integralei improprii deducem că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.$\diamond$

6 Metode de calcul

Teorema de integrare prin părţi Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie $b \in \mathbb{R} \bigcup +\infty$.

Teorema 6.1 *(de integrare prin părţi). Dacă f şi g sunt două funcţii reale de clasă C^1 pe $[a, b[$ având proprietatea că există şi este finită*

$$\lim_{x \to b} f(x)g(x)$$

şi dacă una dintre integralele $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sau $\int_a^b g(x)f'(x)dx$ este convergentă, atunci şi cealaltă este convergentă şi avem

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = \lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) - int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx. \tag{46}$$

Demonstraţie. Fie $b' \in [a, b[$. Funcţiile f şi g sunt de clasă C^1 şi pe $[a, b']$. Putem aplica teorema de integrare prin părţi funcţiilor f şi g pe [a,b'] şi obţinem

$$\int_a^{b'} f(x) \cdot g(x)dx = f(b') \cdot g(b') - f(a) \cdot g(a) - \int_a^{b'} g(x) \cdot f'(x)dx. \tag{47}$$

Presupunând că $\int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$ este convergentă şi trecând la limită în (47) cu $b' \nearrow b$, rezultă că membrul drept al egalităţii (47) are limită finită. Atunci şi membrul stâng are limită finită şi este adevărată egalitatea (46).$_\diamond$

Teorema se transpune cu uşurinţă în cazul intervalelor necompacte $]a, b]$ cu $a \in \mathbb{R} \bigcup -\infty$ şi al intervalelor $]a, b[$ cu $a \in \mathbb{R} \bigcup -\infty$ şi $b \in \mathbb{R} \bigcup +\infty$.

Exemplul 6.1. Să se precizeze dacă integrala $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ este convergentă. Se vede imediat că funcţiile $f :]0, \pi/2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln \sin x. \text{ pentru fiecare } x \in]0, \pi/2],$$

, şi $g :]0, \pi/2] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x, \text{ pentru fiecare } x \in]0, \pi/2[,$$

sunt de clasă C^1. Avem

$$\lim_{x \nearrow 0} x \cdot \ln \sin x = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{\sin x} \cdot (x \cdot cos\, x) = 0$$

Cum funcţia $h : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = 0, \\ \frac{x}{\operatorname{tg} x}, \text{ dacă } x \in]0, \pi/2[, \\ 0, \text{ dacă } x = \pi/2, \end{cases}$$

este continuă, integrala improprie

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx \tag{48}$$

este convergentă Aplicând acum teorema 6.1 deducem că $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ este şi ea convergentă.

Fie a şi b numere reale cu $a < b$.

Teorema 6.2 *(de schimbare de variabilă).*

Dacă funcţia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *este continuă, funcţia* $\gamma : [\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ *este strict crescătoare, de clasă* C^1 *pe* $[\alpha, \beta[$, *cu* $\gamma(\alpha) = a$ *şi* $\lim_{t \to \beta} \gamma(t) = b$ *şi dacă una dintre integralele* $\int_a^b f(x)dx$, $int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$ *este convergentă, atunci şi cealaltă integrală este convergentă şi*

$$\int_a^b f(x)dx = int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt. \tag{49}$$

Demonstraţie. Deoarece funcţia $\gamma : [\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ este continuă şi strict crescătoare pe $[\alpha, \beta[$, rezultă că este inversabilă şi că inversa sa, adică funcţia $\gamma sup{-1} : [a, b[\to [\alpha, \beta[$ este continuă şi tot strict crescătoare. Fie $c \in]a, b[$ şi fie $t = \gamma^{-1}(c)$. Evident $t \in]\alpha, \beta[$.

Pe intervalul compact $[a, c]$ sunt îndeplinite ipotezele din teorema de schimbare a variabilei pentru integrala Riemann. Prin urmare avem

$$\int_a^c f(x)dx = int_\alpha^t f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt. \tag{50}$$

Dacă $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă, atunci facând în (50) pe c să tindă către b, membrul stâng al egalităţii are limită finită egală cu $\int_a^b f(x)dx$. Rezultă că şi membrul drept va avea limită finită şi, cum

$$\lim_{c \to b} \gamma^{-1}(c) = \beta,$$

rezultă că integrala $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$ este convergentă şi are loc (49).

Dacă integrala $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$ este convergentă, trecând la limită cu $t \to \beta$ în (50) şi ţinând cont de că $\lim_{t\to\beta} \gamma(t) = b$ rezultă că $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$ este convergentă şi are loc (49).$_\diamond$

Teorema 6.2 poate servi şi pentru stabilirea naturii unei integrale improprii.

EXEMPLUL 6.2. În fizică apar aşa numitele integrale ale lui Fresnel

$$\int_0^\infty sin\, x^2\, dx \text{ şi } int_0^\infty cos\, x^2\, dx.$$

Ne propunem să stabilim natura lor. Luăm în studiu prima dintre integrale. Deoarece funcţia $sin\, x^2$ este integrabilă pe $[0, 1]$, vom studia integrabilitatea improprie a funcţiei $sin\, x^2$ pe $[1, +\infty[$. Considerăm în acest scop funcţiile $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = sin\, x^2, \text{ pentru fiecare } x \in [1, +\infty[$$

şi $\gamma : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = sqrtt \text{ pentru fiecare } t \in [1, +\infty[.$$

Integrala $\int_1^\infty \frac{sin\, t}{sqrtt}dt$ este convergentă (a se vedea exemplul 8. Aplicând acum teorema 6.2 conchidem că şi $\int_0^\infty sin\, x^2\, dx$ este convergentă. Analog se arată că $\int_0^\infty cos\, x^2\, dx$ este convergentă.