Precizâri legate de lucrarea de control

5 decembrie 2012

Teoreme care trebuie cu demontraţie:
1) Teorema relativă la unicitatea limitei unui şir.
2) Teorema comparaţiei pentru şiruri cu termeni pozitivi.
3) Teorema de păstrare a semnului unei funcţii continue într-un punct.
4) Teorema lui Fermat.
5) Teorema de atingere a mărginirii pentru funcţii continue pe un compact.

Exemple de probleme - exerciţii

1. Daţi caracterizarea cu ε a infimumului unei mulţimi.
a) Determinaţi infimumul mulţimii $M = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$.
b) Arătaţi că mulţimea $M = \{-n | n \in \mathbb{N}\}$ nu are infimum în $\mathbb{R}$.
c) Determinaţi infimumul mulţimii $M = \{\frac{n+5}{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$.

2. Daţi caracterizarea cu ε a supremumului unei mulţimi.
a) Determinaţi supremumul mulţimii $M = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$.
b) Arătaţi că mulţimea $M = \{n | n \in \mathbb{N}\}$ nu are supremum în $\mathbb{R}$.
c) Determinaţi supremumul mulţimii $M = \{-\frac{n+5}{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$.

3. Daţi definiţia punctului de acumulare al unei mulţimi din $\mathbb{R}^n$.
a) Fie mulţimea $M = \{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{R}^*\}$. Arătaţi că 0 este un punct de acumulare al mulţimii M. Daţi un exemplu şi de alt punct de acumulare al lui M.
b) Fie mulţimea $M = \{(-1)^n \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$. Daţi un exemplu de punct de acumulare şi un exemplu de punct izolat al acestei mulţimi.

4. Daţi definiţia punctului izolat al unei mulţimi din $\mathbb{R}^n$.
a) Fie mulţimea $M = \{(-1)^n \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$. Daţi un exemplu de punct izolat al acestei mulţimi.
b) Fie mulţimea $M = \{(\frac{1}{n}, n) \in \mathbb{R}^2 \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Daţi un exemplu de punct izolat al acestei mulţimi.

5. Daţi definiţia mulţimii mărginite din $\mathbb{R}^n$. Studiaţi mărginirea următoarelor mulţimi:
a) $M = \{(\frac{1}{n}, n) \in \mathbb{R}^2 \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$.
b) $M = \{(-1)^n \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$.

6. Daţi definiţia punctului interior al unei mulţimi din $\mathbb{R}^n$. Daţi un exemplu de punct interior pentru mulţimea:
a) $M = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
b) $M = [1, 2] \times [-1, 1]$.
c) $M = [2, 4] \times [1, 2] \bigcup [-2, -1] \times \{2\}$.

7. Daţi definiţia bilei deschise $B(x^0, r)$ din $\mathbb{R}^n$, cu centrul într-un punct x^0 şi rază r. Precizaţi care dintre punctele $P_1(1,1)$, $P_2(0,0)$, $P_3(-1,1)$ aparţin bilei $B((1,-1),2)$, justificând răspunsul.

8. Daţi definiţia vecinătăţii unui punct din $\mathbb{R}^n$.
Precizaţi care dintre mulţimile $U = [-1,2] \times [0,1]$ şi $V = [-2,2] \times \{0\}$ sunt vecinătăţi ale punctului $(0,0)$, justificând răspunsul.

9. Daţi definiţia limitei unui şir.
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Demonstraţi că, dacă subşirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ au aceeaşi limită x, atunci x este limita şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10. Daţi definiţia seriei convergente.
Utilizând definiţia seriei convergente, arătaţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$ este convergentă.

11) Daţi definiţia sumei unei serii.
Calculaţi suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n}$.

12) Determinaţi natura următoarelor serii şi enunţaţi proprietatea utilizată pentru stabilirea naturii seriei.

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(a\dfrac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, unde $a > 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{\sqrt{n!}}$, unde $a > 0$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(an)^n}{n!}$, unde $a > 0$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{\ln n}$, unde $a > 0$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3n+2}{n^2+1}$.

g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin n^2$.

h) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

i) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n}{\ln n}$.

(ca şi criterii pot fi folosite, în funcţie de situaţia concretă: criteriul rădăcinii, criteriul raportului, criteriul lui Raabe-Duhamel, criteriul comparaţiei directe sau sub forma de raport, condiţia necesara de convergenţă provenită din criteriul general de convergenţă a lui Cauchy, criteriul lui Leibniz).

13) Daţi definiţia seriei absolut convergente şi definiţia seriei semiconvergente.
Studiaţi absolut convergenta şi semiconvergenţa următoarelor serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n-1)}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^\alpha}$, unde $a \notin \{-n | n \in \mathbb{N}\}$, iar $\alpha > 0$.

14) Fie seria $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, unde $a \geq 0$. Pentru ce valori ale lui a seria este convergentă.

15) Daţi definiţia punctului de extrem local.
Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x < -1, \\ x^2 - 1, \text{ dacă } |x| \leq 1, \\ |1 - \ln x|, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, \text{ dacă } |x| < 1, \\ e^{x^2} - e, \text{ dacă } |x| \geq 1. \end{cases}$$

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

16) Enunţaţi teorema relativă la formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.
a) Scrieţi formula lui Taylor cu restul de ordin n, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - x)e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, în punctul $x^0 = 0$.
b) Scrieţi formula lui Taylor cu restul de ordin n, dacă $f : -1, 1 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, în punctul $x^0 = 0$.
c) Scrieţi formula lui Taylor cu restul de ordin 5, dacă $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 1)$, în punctul $x^0 = 0$.

17) Să se dea formula de calcul a normei unui element din $\mathbb{R}^n$.
Să se calculeze $||x||$, dacă $x = (2, -1, 0, 3) \in \mathbb{R}^n$.

18) Să se dea formula de calcul a distanţei dintre două elemente din $\mathbb{R}^n$.
Să se calculeze distanţa dintre x şi y, dacă $x = (-1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ şi $y = (-3, -1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

19) Să se enunţe teorema relativă la reducerea calculului limitei unui şir cu termeni din $\mathbb{R}^n$ la calculul a n limite de şiruri de numere reale.
Calculaţi $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$, dacă $x_k \in \mathbb{R}^3$,

$$x_k = \left(\frac{\sqrt[k]{2^{k+1} + 3^k}}{\sqrt[k+1]{3^k + 5^{k+1}}}, \left(\frac{k^4 - k + 1}{k^4 + k^2 + k}\right)^{\dfrac{k^3+5}{2k+1}}, \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}}{\ln k} \right).$$

20) Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $g(0, 0) > 0$ şi fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\sin x, \ln(y^2 + 1))$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că există o vecinătate V a punctului $(\pi, \ln 1)$ cu proprietatea că $f(x, y) > 0$, oricare ar fi $(x, y) \in V$.

- Alte enunţuri cerute:
- Definiţia limitei unei funcţii într-un punct.
- Enuntul teoremei lui Heine relativă la existenţa limitei unei funcţii într-un punct.
- Definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct.

- Enunţul teoremei relative la păstrarea semnului unei funcţii continue.
- Enunţul teoremei relative la mărginirea unei funcţii continue.