SUPORT PENTRU CURSUL 11
1. Condiţii suficiente de extrem
2. Funcţii implicite
3. Probleme de extrem cu legături (facultativ)

13 decembrie 2012

În prima parte a cursului se dau condiţii suficiente pentru ca un punct staţionar să fie punct de extrem local, în ipoteza că punctul staţionar este punct interior al mulţimii relativ la care se determină punctele de extrem.

În paragraful al doilea este discutată problema funcţiilor implicite şi a modului în care se pot calcula derivatele unei funcţii definite implicit.

În partea a treia este discutat cazul în care mulţimea relativ la care se determină punctul de extrem este o submulţime a mulţimii de definiţie a funcţiei, egală cu mulţimea soluţiilor unei ecuaţii.

1 Condiţii suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem

Pentru deducerea unor condiţii suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem vom face apel la teorema lui Peano (teorema 3.1 din cursul anterior) şi apoi la formula lui Taylor (teorema 3.2 din cursul anterior). De asemenea vom utiliza faptul că diferenţiala de ordinul doi a unei funcţii într-un punct este o funcţie pătratică şi ne vom folosi de următoarea proprietate importantă a acestor funcţii.

Lema 1.1 . *Dacă* $\hat{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este o funcţie pătratică, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *dacă* $\hat{u}$ *este pozitiv definită, atunci există un număr real* $m > 0$ *astfel încât*

$$\hat{u}(h) \ \geq \ m \cdot \|h\|_n^2, \ \textit{oricare ar fi}\ h \in \mathbb{R}^n; \tag{1}$$

- *dacă* $\hat{u}$ *este negativ definită, atunci există un număr real* $M > 0$ *astfel încât*

$$\hat{u}(h) \ \leq \ -M \cdot \|h\|_n^2, \ \textit{oricare ar fi}\ h \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Utilizâd rezultatele amintite vom da două condiţii suficiente pentru ca un punct staţionar să fie punct de extrem.

Teorema 1.2 . *Dacă* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *este o mulţime deschisă nevidă, funcţia* $f : A \to \mathbb{R}$ *este de două ori diferenţiabilă în punctul* $x^0 \in A$ *şi* x^0 *este un punct critic al funcţiei* f, *atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

- *dacă* $d^2 f(x^0)$ *este pozitiv definită, atunci* x^0 *este un punct de minim local;*
- *dacă* $d^2 f(x^0)$ *este negativ definită, atunci* x^0 *este un punct de maxim local;*

Demonstraţie. Mulţimea A fiind deschisă şi $x^0 \in A$, rezultă că există un număr real $r_0 > 0$ astfel încât $B(x^0, r_0) \subseteq A$. Evident că $x = x^0 + h \in B(x^0, r_0) \subseteq A$, oricare ar fi $h \in B(0_n, r_0)$. Funcţia f fiind de clasă C^2 pe A, avem

$$\lim_{h \to 0_n} \frac{f(x^0 + h) - T_2(f; x^0)(x^0 + h)}{\| h \|^2} = 0,$$

de unde, ţinând cont că x^0 este un punct critic, obţinem

$$\lim_{h \to 0_n} \frac{f(x^0 + h) \;-\; f(x^0) \;-\; \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(h)}{\| h \|_n^2} = 0. \tag{3}$$

Prin urmare, pentru orice număr real $\epsilon > 0$ va exista un număr r_ϵ, $0 < r_\epsilon < r_0$, astfel încât

$$-\epsilon \| h \|^2 < f(x^0 + h) - f(x^0) - \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(h) < \epsilon \| h \|^2, \tag{4}$$

oricare ar fi $h \in B(0_n, r_\epsilon)$.

a) Dacă $d^2 f(x^0)$ este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă că există un număr real $m > 0$ astfel încât $d^2 f(x^0)(h) \geq m \cdot \| h \|^2$, oricare ar fi $h \in \mathbb{R}^n$. Luând $\epsilon = \frac{m}{4}$, deducem că

$$f(x^0 + h) - f(x^0) \geq \frac{m}{2} \| h \|^2 - \frac{m}{4} \| h \|^2 \geq 0,$$

oricare ar fi $h \in B(0, r_{\frac{m}{4}})$. Prin urmare $f(x) - f(x^0) \geq 0$, oricare ar fi $x \in B(x^0, r_{\frac{m}{4}})$. Deci x^0 este un punct de minim local.

ii) Se demonstrează într-o manieră analoagă.$\diamond$

Observaţia 1.1. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă nevidă, funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este de două ori diferenţiabilă în punctul $x^0 \in A$, x^0 este un punct staţionar (critic) al funcţiei f şi $d^2 f(x^0)$ este indefinită, adică există $h' \in \mathbb{R}^n$ şi există $h'' \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$d^2 f(x^0)(h') < 0 \quad \text{şi} \quad d^2 f(x^0)(h'') > 0,$$

atunci x^0 nu este punct de extrem.

Justificare (opţional). Vom arăta că, oricare ar fi $r' > 0$, există $x^1, x^2 \in B(x^0, r') \cap A$ astfel încât $f(x^1) < f(x^0)$ şi $f(x^2) > f(x^0)$, ceea ce conduce la concluzia că x^0 nu este punct de extrem local.

Să remarcăm mai întâi că avem $h' \neq 0_n$ şi $h'' \neq 0_n$, căci $d^2 f(x^0)(0_n) = 0$. Atunci, luând

$$\epsilon_1 \;=\; -\,\frac{d^2 f(x^0)(h')}{4 \parallel h' \parallel^2} \tag{5}$$

şi

$$\epsilon_2 \;=\; \frac{d^2 f(x^0(h'')}{4 \parallel h'' \parallel^2} \tag{6}$$

avem $\epsilon_1 > 0$ şi $\epsilon_2 > 0$. În conformitate cu (4), vor exista numerele reale $r_1,\ 0 < r_1 < r'$, şi $r_2,\ 0 < r_2 < r'$, astfel încât

$$-\epsilon_1 \parallel h \parallel^2 < \; f(x^0 + h) - f(x^0) - \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(h) \;<\; \epsilon_1 \parallel h \parallel^2, \tag{7}$$

oricare ar fi $h \in B(0_n, r_1)$, şi

$$-\epsilon_2 \parallel h \parallel^2 < \; f(x^0 + h) - f(x^0) - \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(h) \;<\; \epsilon_2 \parallel h \parallel^2, \tag{8}$$

oricare ar fi $h \in B(0_n, r_2)$. Fie $r = \min\{r', r_1, r_2\}$. Luăm

$$h_1 = \frac{r}{3||h'||} h' \text{ şi } h_2 = \frac{r}{3||h''||} h''.$$

Evident $h_1 \in B(0,r) \subseteq B(0,r_1) \bigcap B(0,r')$ şi $h_2 \in B(0,r) \subseteq B(0,r_2) \bigcap B(0,r')$. Ţinând cont cine este ϵ_1, din (7) obţinem

$$\frac{d^2 f(x^0)(h')}{4 \parallel h' \parallel^2} \parallel h_1 \parallel^2 < \; f(x^0 + h_1) - f(x^0) - \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(h_1) \;<\; -\frac{d^2 f(x^0)(h')}{4 \parallel h' \parallel^2} \parallel h_1 \parallel^2,$$

sau înlocuind pe h_1 cu expresia lui, avem

$$\frac{d^2 f(x^0)(h')}{4 \parallel h' \parallel^2} \cdot \frac{r^2}{9} \;<\; f(x^0 + h_1) - f(x^0) - \frac{r^2}{18||h'||^2} d^2 f(x^0)(h') \;<\; -\frac{d^2 f(x^0)(h')}{4 \parallel h' \parallel^2} \frac{r^2}{9}.$$

De aici rezultă că

$$\frac{1}{12||h'||^2} d^2 f(x^0)(h') < f(x^0 + h_1) - f(x^0) < \frac{1}{36||h'||^2} d^2 f(x^0)(h') < 0.$$

Prin urmare, alegând punctul $x^1 = x^0 + \frac{r}{3||h'||} h'$, avem $x^1 \in B(x^0, r')$ şi $f(x^1) < f(x^0)$. Analog, ţinând cont cine este ϵ_2, din (8) obţinem

$$-\frac{d^2 f(x^0)(h'')}{4 \parallel h'' \parallel^2} \parallel h_2 \parallel^2 < \; f(x^0 + h_2) - f(x^0) - \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(h_2) \;<\; \frac{d^2 f(x^0)(h'')}{4 \parallel h'' \parallel^2} \parallel h_2 \parallel^2,$$

sau înlocuind pe h_2 cu expresia lui, avem

$$-\frac{d^2 f(x^0)(h'')}{4 \parallel h'' \parallel^2} \cdot \frac{r^2}{9} \;<\; f(x^0 + h_2) - f(x^0) - \frac{r^2}{18||h''||^2} d^2 f(x^0)(h'') \;<\; \frac{d^2 f(x^0)(h'')}{4 \parallel h'' \parallel^2} \frac{r^2}{9}.$$

De aici rezultă că

$$0 < \frac{1}{36||h''||^2} d^2 f(x^0)(h'') < f(x^0 + h_2) - f(x^0) < \frac{1}{12||h''||^2} d^2 f(x^0)(h'').$$

Prin urmare, alegând punctul $x^2 = x^0 + \frac{r}{3||h''||} h''$, avem $x^2 \in B(x^0, r')$ şi $f(x^2) > f(x^0)$.$\diamond$

Observaţia 1.2. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este deschisă, funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este de două ori diferenţiabilă pe A şi dacă în punctul x^0, punct critic pentru f, $d^2 f(x^0)$ este numai pozitiv semidefinită sau numai negativ semidefinită, nu rezultă că x^0 este un punct de extrem local, după cum se vede şi din exemplul următor.

Exemplul 1.1. Cercetaţi dacă punctul $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este un punct de extrem local al funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy, \quad \text{pentru fiecare } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Fără greutate se arată că punctul dat este un punct critic. Diferenţiala $d^2 f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este pozitiv semidefinită, căci $d^2 f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (h_1 - h_2)^2$, oricare ar fi $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, este o formă pătratică pozitiv semidefinită, dar nu este şi pozitiv definită. Considerând punctul $(\frac{-1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + h_2)$ avem $f(\frac{-1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + h_2) - f(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) = 12(h_1 - h_2)^2 + 2(h_2^3 - h_1^3) + h_1^4 + h_2^4$. Prin urmare, oricare ar fi $r > 0$, dacă luăm $h_1 = h_2 = \frac{r}{4}$, punctul $(\frac{-1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + h_2) \in B((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}), r)$ şi

$$f(\frac{-1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + h_2) - f(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) = 2h_1^4 > 0,$$

ceea ce ne arată că punctul $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ nu este un punct de maxim local.

Considerând acum ecuaţia

$$2(h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2) - h_1 + h_2 = 0$$

în necunoscuta h_2, observăm că ea are o rădăcină reală pozitivă

$$\alpha(h_1) = \frac{-(2h_1 + 1) + \sqrt{-12h_1^2 + 12h_1 + 1}}{4}, \text{ oricare ar fi } h_1 \in]0, 1/2[.$$

Cum $\lim_{h_1 \to 0} \alpha(h_1) = 0$, deducem că pentru orice $r > 0$, există un $h_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ astfel încât $(h_1, \alpha(h_1)) \in B((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}), r)$. Deoarece

$$f(\frac{-1}{2} + h_1, \frac{1}{2} + \alpha(h_1)) - f(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) = -[h_1^4 + \alpha^4(h_1) +$$

$$+ 4h_1\alpha(h_1)(h_1^2 + + \alpha^2(h_1)) + 6h_1^2\alpha^2(h_1)] < 0,$$

deducem că $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ nu poate fi nici punct de minim local.

Totuşi are loc următorul rezultat important.

Teorema 1.3 . *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este deschisă, $x^0 \in intA$, există un număr real $r > 0$, astfel încât funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ să fie de două ori diferenţiabilă în fiecare punct x din $B(x^0, r) \subseteq A$ şi dacă x^0 este un punct critic pentru funcţia f, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) dacă există un număr real r_1, cu $0 < r_1 \leq r$, astfel încât $d^2f(x)$ este pozitiv semidefinită oricare ar fi $x \in B(x^0, r_1)$, atunci x^0 este un punct de minim local;

b) dacă există un număr real r_2, cu $0 < r_2 \leq r$, astfel încât $d^2f(x)$ este negativ semidefinită oricare ar fi $x \in B(x^0, r_2)$, atunci x^0 este un punct de maxim local.

Demonstraţie. a). Fie $x \in B(x^0, r_1)$. În conformitate cu formula lui Taylor, va exista $\theta \in]0, 1[$ astfel încât

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2}d^2f(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0). \tag{9}$$

Să observăm că $x^0 + \theta(x - x^0) \in B(x^0, r_1)$. Prin urmare

$$d^2f(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0) \geq 0. \tag{10}$$

Ţinând cont că x^0 este punct staţionar, din (9) şi (10) obţinem

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2}d^2f(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0) \geq 0.$$

Cum $x \in B(x^0, r_1)$ a fost ales arbitrat, deducem că x^0 este un punct de minim local.

Analog se demonstrează cazul b. $\diamond$

Algoritm pentru determinarea punctelor de extrem în cazul funcţiilor de două ori diferenţiabile pe mulţimi deschise

1. Se determină punctele critice.

2. Pentru fiecare punct critic M se construieşte $d^2f(M)$. Dacă $d^2f(M)$ este funcţia identic nulă, nu putem aplica algoritmul; în caz contrar:

- Dacă $d^2f(M)$ este formă pătratică pozitiv definită, punctul M este punct de minim local;

- Dacă $d^2f(M)$ este formă pătratică negativ definită, punctul M este punct de maxim local;

- Dacă $d^2f(M)$ este formă pătratică nedefinită, adică există h', $h'' \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

  $$d^2f(M)(h') < 0 \text{ şi } d^2f(M)(h'') > 0,$$

  punctul M nu este punct de extrem local.

- Dacă $d^2f(M)$ este pozitiv semidefinită pe o vecinătate V a punctului M, atunci M este punct de minim local.

- Dacă $d^2f(M)$ este negativ semidefinită pe o vecinătate V a punctului M, atunci M este punct de minim local.

- Dacă în orice vecinătate V există puncte pe care $d^2f(P)$ este negativ definită şi puncte în care este pozitiv definită, nu putem preciza nimic.

- Dacă $d^2f(M)$ este funcţia nulă, putem încerca să stabilim natura punctului utilizând formula lui Taylor cu rest mai mare decât doi şi procedând prin analogie cu raţionamentul utilizat în demonstrarea teoremelor anterioare. De asemenea putem încerca să stabilim natura punctului utilizând definiţia punctului de maxim local, respectiv de minim local.

În determinarea naturii formei pătratice ataşată lui $d^2f(M)$ putem folosi criteriul lui Sylvester (a se vedea F.G. Gantmaher, Teoria matriţ, G.I.T.T.L., Moskva 1953, cap. X, & 4, teoremele 3 - 6):

Teorema 1.4 *(criteriul lui Sylvester). Dacă $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie pătratică, cu matricea asociată*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix},$$

atunci, notând

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & ... & c_{1k} \\ ... & ... & ... \\ c_{k1} & ... & c_{kk} \end{vmatrix},$$

pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$, următoarele propoziţii sunt adevărate:

i) u este funcţie pătratică pozitiv definită dacă şi numai dacă pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$ avem $\Delta_k > 0$;

ii) u este funcţie pătratică negativ definită dacă şi numai dacă pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$ avem $(-1)^k \Delta_k > 0$.

Exemplul 1.2. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy,$$

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vom determina punctele ei de extrem. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x,$$

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Punctele critice vor fi soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Cum sistemul de mai sus are soluţie unică, rezultă că vom avea un singur punct critic şi anume punctul $M(x = 0, y = 0)$. Deoarece

$$Hf(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

avem

$$\Delta_1 = 2 > 0 \quad \text{şi} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

În baza teoremei lui Sylvester, forma pătratică $d^2 f(M)$ este pozitiv definită, ceea ce implică faptul că $M(0,0)$ este un punct de minim local.

Exemplul 1.3. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - x^2 + xy,$$

pentru fiecare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vom determina punctele ei de extrem. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2x + y \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x,$$

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Punctele critice vor fi soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x + y & = 0 \\ 2y + x & = 0. \end{cases}$$

Rezultă că avem următoarele puncte critice:

$$M_1(0,0), \quad M_2(\frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{-\sqrt{10}}{8}) \text{ şi } M_3(\frac{-\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{8}).$$

Calculând hessiana lui f în punctele M_2 şi M_3, avem

$$H(f; M_2) = H(f; M_3) = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_1 = \frac{11}{2}$, şi $\Delta_2 = 10$, în baza criteriului lui Sylvester rezultă că $d^2 f(M_2)$ şi $d^2 f(M_3)$ sunt forme pătratice pozitiv definite; deci punctele M_2 şi M_3 sunt puncte de minim local. Întrucât

$$H(f; (0,0)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ avem } \Delta_2 = -5 < 0.$$

Deci punctul M_1 nu este punct de extrem local.

Exemplul 1.4. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x, y, z) = x^4 + xyz,$$

pentru fiecare $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Să se determine punctele ei de extrem. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4x^3 + yz, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz, \ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy,$$

oricare ar fi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Punctele critice vor fi soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 4x^3 + yz & = 0 \\ xz & = 0 \\ xy & = 0. \end{cases}$$

Sistemul are o infinitate de soluţii; soluţia generală va fi de forma $M_\alpha = (0, \alpha, 0)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, sau de forma $M_\beta = (0, 0, \beta)$, cu $\beta \in \mathbb{R}$. Cum

$$Hf(0,\alpha,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } Hf(0,0,\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avem $d^2 f(0, \alpha, 0)(h) = 2\alpha h_1 h_3$, şi $d^2 f(0, 0, \beta)(h) = 2\beta h_1 h_2$.

Dacă $\alpha \neq 0$, atunci, deoarece

$$d^2 f(0,\alpha,0)(1,0,1) \cdot d^2 f(0,\alpha,0)(1,0,-1) < 0,$$

rezultă că forma pătratică $d^2 f(0, \alpha, 0)$ nu este definită, ceea ce implică faptul că punctul $(0, \alpha, 0)$ nu este punct de extrem.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $d^2 f(0, \alpha, 0) = 0_{(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})}$ şi nu putem preciza natura punctului M_α utilizând algoritmul propus. Observăm însă că oricare ar fi numărul real $r \in]0, 1[$, luând punctele $M' = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ şi $M'' = (\frac{-r}{2}, \frac{-r}{2}, \frac{-r}{2})$ ele aparţin bilei $B((0, 0, 0), r)$ şi avem

$$f(M') = \frac{r^4}{2^4} + \frac{r^3}{2^3} > 0 = f(0,0,0),$$

$$f(M'') = \frac{r^4}{2^4} - \frac{r^3}{2^3} < 0 = f(0,0,0).$$

Deci $(0, 0, 0)$ nu este punct de extrem.

În mod analog se poate cerceta natura punctului M_β. Vom ajunge la concluzia că punctul nu este punct de extrem local, oricare ar fi $\beta \in \mathbb{R}$.

2 Funcţii implicite

Considerăm următoarele exemple.

Exemplul 2.1. Fie ecuaţia $16x^2 + 9y^2 = 0$. Fără greutate se vede că acestă ecuaţie are o unică soluţie şi anume $(x^0 = 0, y^0 = 0)$.

Exemplul 2.2. Fie ecuaţia

$$x^2 + y^2 - 9 = 0. \tag{11}$$

Această ecuaţie are o infinitate de soluţii. Mai precis:
pentru fiecare $x_0 \in [-3, 3]$, luând $y^0 = \sqrt{9 - x_0^2}$, perechea (x^0, y^0) este o soluţie a ecuaţiei (11); analog, perechea $(x^0, -y^0)$ este tot o soluţie a ecuaţiei (11).
Ca urmare putem construi două funcţii:
$f_1 : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{9 - x_0^2}$, oricare ar fi $x \in [-3, 3]$, şi
$f_2 : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -\sqrt{9 - x_0^2}$, oricare ar fi $x \in [-3, 3]$.
Cele două funcţii le putem considera ca generate de ecuaţia (11).

Cele două exemple justifică introducerea noţiunii de funcţie definită implicit de o ecuaţie.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţimi nevide şi fie funcţia $F : A \times B \to \mathbb{R}^p$.

Considerăm mulţimile
$S = \{(x, y) \in (A \times B) | F(x, y) = 0_p\}$
şi
$S_1 := \{x \in A | \exists\, y \in B \text{ astfel încât } (x, y) \in S\}$.
Fie acum $(x^0, y^0) \in S$

DEFINIŢIE. *Spunem că ecuaţia*

$$F(x, y) \;=\; 0_p \tag{12}$$

defineşte implicit pe y ca funcţie de x în jurul punctului (x^0, y^0), dacă există numerele reale $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ astfel încât pentru fiecare $x^* \in B(x^0, \alpha) \bigcap S_1$ ecuaţia

$$F(x^*, y) = 0_p, \tag{13}$$

în necunoscuta y, are o soluţie în mulţimea $B(y^0, \beta)$ şi una singură.

Funcţia $f : B(x^0, \alpha) \to B(y^0, \beta)$, care fiecărui $x^* \in (B(x^0, \alpha \bigcap S_1)$ îi ataşează unica soluţie a ecuaţiei vectoriale (13), se numeşte funcţie definită implicit de ecuaţia (12) în jurul punctului (x^0, y^0).

Convenim ca în acest caz să identificăm pe y cu funcţia f.

Denumirea de funcţie definită implicit provine de la faptul că, în general, nu putem rezolva ecuaţia (13), deci nu putem să dăm explicit legea care o defineşte. În cele ce urmează vom da condiţii suficiente pentru ca ecuaţia (12) să definească implicit o funcţie în jurul unui punct dat (x^0, y^0) şi vom pune în evidenţă câteva proprietăţi ale funcţiilor definite implicit.

Pentru a prezenta rezultatele ce urmează, introducem unele notaţii specifice acestui paragraf.

- Plecând de la egalitatea $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, orice punct din $\mathbb{R}^{n+p}$ îl vom vedea ca o pereche (x, y) cu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$,

- Dacă $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ este o mulţime nevidă şi $F = (F_1, \ldots, F_p) : A \times B \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie diferenţiabilă în $(x^0, y^0) \in \mathrm{int}(A \times B)$, notăm

$$J_x(F; (x^0, y^0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^0, y^0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^0, y^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial x_1}(x^0, y^0) & \ldots & \dfrac{\partial F_p}{\partial x_n}(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

şi

$$J_y(F; (x^0, y^0)) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_p}(x^0, y^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \ldots & \dfrac{\partial F_p}{\partial y_p}(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

Matricea $J_y(F; (x^0, y^0))$ este o matrice pătratică. Convenim ca determinantul ei să-l notăm prin $\det J_y(F; (x^0, y^0))$.

Exemplul 2.3. În cazul particular $n = 3, p = 2, k = 2$ şi $j = 3$, dacă funcţia $F = (F_1, F_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ admite derivate parţiale de ordinul I în punctul $(x^0, y^0) \in A$, cu convenţiile făcute avem

$$J_x(F, (x^0, y^0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

şi

$$J_y(F, (x^0, y^0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$\det J_y(F; (x^0, y^0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Acceptăm fără demonstraţie următorul rezultat:

Teorema 2.1 *(teorema funcţiei implicite). Dacă $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, $(x^0, y^0) \in (A \times B)$ şi funcţia $F : A \times B \to \mathbb{R}^p$ satisface condiţiile:*

i) este de clasă C^1 pe $A \times B$,

ii) $F(x^0, y^0) = 0_p$,

iii) $\det J_y(F; (x^0, y^0)) \neq 0$,

atunci există o vecinătate deschisă U a lui x^0, există o vecinătate deschisă V a lui y^0, cu $U \times V \subseteq (A \times B)$, şi există o unică funcţie

$$f = (f_1, \ldots, f_p) : U \to V$$

cu proprietăţile

1) $f(x^0) = y^0$,

2) $F(x, f(x)) = 0_p$, oricare ar fi $x \in U$,

3) f este de clasă C^1 pe U,

Datorită unicităţii funcţiei f, teorema 2.1 ne dă condiţii suficiente pentru ca ecuaţia $F(x, y) = 0_p$ să definească pe y ca funcţie de x în jurul punctului (x^0, y^0).

Observaţia 2.1. Dacă ipotezele teoremei funcţiei implicite sunt verificate, calculul derivatelor parţiale ale funcţiei definite implicit se face pe baza teoremei de diferenţiere a funcţiei compuse, plecând de la egalitatea

$$F(x, f(x)) = 0_p, \text{ oricare ar fi } x \in U. \tag{14}$$

Exemplul 2.4. Fie $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y_1, y_2) = (x + y_1 y_2 - y_2^3 - 1, x^5 - x y_1), \tag{15}$$

oricare ar fi $(x_1, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Ecuaţia $F(x, y_1, y_2) = 0_2$, defineşte implicit, în jurul punctului $(1, 1, 0)$, pe $y = (y_1, y_2)$ ca funcţie de x deoarece sunt verificate ipotezele teoremei funcţiilor implicite. Astfel se vede uşor că F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ întrucât

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (1, 5x^4 - y_1), \text{ pentru fiecare } (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \\ &\tfrac{\partial F}{\partial y_1}(x, y_1, y_2) = (y_2, -x), \text{ pentru fiecare } (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \\ &\tfrac{\partial F}{\partial y_2}(x, y_1, y_2) = (y_1 - 3y_2^2, 0), \text{ pentru fiecare } (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Avem şi $F(x^0, y^0) = (0,0)$ şi

$$\det J_y(F; (1,1,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

În baza teoremei 2.1, vor exista vecinătăţile deschise U şi V, $U \in V_1$, $V \in V_{(1,0)}$, şi o funcţie $f = (f_1, f_2) : U \to V$, de clasă C^1, cu $f(1) = (1,0)$, astfel încât $F(x, f_1(x), f_2(x)) = (0,0)$ oricare ar fi $x \in U$.

Pentru a calcula derivata funcţiei f în punctul 1, plecăm de la egalitatea

$$F(x, f_1(x), f_2(x)) = (0,0), \text{ oricare ar fi } x \in U,$$

pe care o scriem sub forma sistemului

$$\begin{cases} x + f_1(x)f_2(x) - (f_2(x))^3 = 1 \\ x^5 - xf_1(x) = 0. \end{cases}$$

În baza teoremei de diferenţiere a funcţiei compuse, f este diferenţiabilă în punctul 1. Prin urmare f este derivabilă în acest punct. Derivând fiecare ecuaţie în raport cu x, obţinem

$$\begin{cases} 1 + f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x) - 3(f_2(x))^2 f_2'(x) = 0 \\ 5x^4 - f_1(x) - xf_1'(x) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

oricare ar fi $x \in U$. Particularizând pe x la valoarea 1, adică făcând în (16) înlocuirile $x = 1$, $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 0$, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 1 + f_1'(1) \cdot 0 + 1 \cdot f_2'(1) - 3 \cdot 0 \cdot f_2'(1) = 0 \\ 5 - 1 - f_1'(1) = 0, \end{cases}$$

ce are ca necunoscute pe $f_1'(1)$ şi $f_2'(1)$. Rezolvând sistemul obţinem

$$f_1'(x) = 4, \ \ f_2'(x) = -1.$$

Rezultatul obţinut putem să-l prezentăm şi sub forma: ecuaţia $F(x, y_1, y_2) = 0_2$, funcţia F fiind dată prin legea (15), defineşte implicit, în jurul punctului $(1,1,0)$, pe $y = (y_1, y_2)$ ca funcţie de x. Funcţia y este de clasă C^1 şi $y'(1) = (4, -1)$.

EXEMPLUL 2.5. Fie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy - z^2$, oricare ar fi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Se cere să se arate că ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ defineşte implicit o funcţie în vecinătatea punctului $(1,0,1)$ şi apoi să se calculeze derivatele parţiale ale acestei funcţii.

În enunţul problemei nu se specifică care dintre variabile sunt definite implicit ca funcţie de celelalte în jurul punctului dat. Deoarece $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, una dintre variabile va fi definită implicit, în jurul punctului dat, ca funcţie de celelalte două. Astfel, dacă considerăm că rolul lui x_1, respectiv x_2 este jucat de x, respectiv y, iar rolul lui y, de z, se vede imediat că sunt îndeplinite condiţiile din teorema funcţiilor implicite pentru că F este de clasă C^2 şi avem

$$|J_z(F; (1,0,0))| = \det \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = -2 \neq 0.$$

Prin urmare va exista o vecinătate deschisă U a lui $(1,0)$, există o vecinătate deschisă $V \in V_1$ şi există o unică funcţie $f : U \to V$, astfel încât

$$x^2 + y^2 + xy - f^2(x,y) = 0, \text{ oricare ar fi } (x,y) \in U.$$

Derivăm egalitatea mai întâi în raport cu x, apoi în raport cu y, ţinând cont că x şi y sunt variabile independente. Obţinem astfel egalităţile

$$2x + y - 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \tag{17}$$

respectiv

$$2y + x - 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{18}$$

Pentru a calcula derivatele parţiale de ordinul I în punctul dat, vom face în (17) şi (18) înlocuirile: $x = 1,\ y = 0,\ f(1,0) = 1$ şi apoi vom rezolva ecuaţiile astfel obţinute având ca necunoscute pe $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$. Obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{2}.$$

Remarcăm că în numeroase lucrări ştiinţifice, în special din domeniul tehnicii şi fizicii, în loc să se înlocuiască z cu $f(x,y)$ se utilizează scrierea $z = z(x,y)$. Cu această convenţie putem conclude că ecuaţia dată la începutul exemplului defineşte pe z ca funcţie de x şi y în jurul punctului $(1,0,1)$ şi că avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = 1, \text{ şi } \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{2}.$$

Întrucât în enunţul problemei nu se specifica care dintre variabile este definită implicit, mai aveam următoarele două posibilităţi de rezolvare:

i) Să aplicăm teorema funcţiilor implicite considerând că rolul lui x_1, respectiv x_2 este jucat de x, respectiv z. Ipotezele teoremei fiind verificate, rezultă ca există o vecinătate deschisă U a punctului $(1,1)$, există o vecinătate deschisă V a punctului 0 şi o funcţie $y : U \to V$, de clasă C^1, astfel încâ $y(1,1) = 0$ şi

$$x^2 + y^2(x,z) + xy(x,z) - z^2 = 0, \tag{19}$$

oricare ar fi $(x,z) \in U$. Derivând parţial în raport cu x, şi apoi cu z, din 19, obţinem

$$2x + 2y(x,z)\frac{\partial y}{\partial x}(x,z) + y(x,z) + x\frac{\partial y}{\partial x}(x,z) = 0,$$

şi

$$2y(x,z)\frac{\partial y}{\partial z}(x,z) + x\frac{\partial y}{\partial z}(x,z) - 2z = 0,$$

oricare ar fi $(x,z) \in U$, de unde avem

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1,1) = -2 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial y}{\partial z}(1,1) = 2.$$

ii) Să aplicăm teorema funcţiilor implicite considerând că rolul lui x_1, respectiv x_2 este jucat de y, respectiv z. Ipotezele teoremei fiind verificate, rezultă ca există o vecinătate deschisă U a punctului $(0,1)$, există o vecinătate deschisă a punctului 1 şi o funcţie $x : U \to V$, de clasă C^1, astfel încât $x(0,1) = 1$ şi

$$x^2(y,z) + y^2 + x(y,z)y - z^2 = 0, \tag{20}$$

oricare ar fi $(y,z) \in U$. Derivând parţial în raport cu y, şi apoi cu z, din 20, obţinem

$$2x\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) + 2y + y\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) + x = 0,$$

şi

$$2x(y,z)\frac{\partial x}{\partial z}(y,z) + y\frac{\partial x}{\partial z}(y,z) - 2z = 0,$$

de unde avem

$$\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) = -\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0,1) = 1.$$

Deci ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ defineşte implicit, în jurul punctului $(1,0,1)$, trei funcţii de clasă C^1.

Exemplul 2.6. Fie funcţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{21}$$

Vom arăta că:

i) ecuaţia

$$F(x,y) = 0$$

defineşte implicit pe x ca funcţie de y, în jurul punctului $(1,0)$ şi vom calcula $x'(1)$.

ii) funcţia x de la punctul anterior este de clasă C^2 şi vom calcula $x''(1)$.

ii) ecuaţia

$$F(x,y) = 0$$

nu defineşte pe y ca funcţie de x în jurul punctului $(1,0)$.

Să observăm că funcţia F este de clasă C^1, $F(1,0) = 0$, şi $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0$. În baza teoremei funcţiilor implicite (în care de data acesta rolul lui x este jucat de y şi rolul lui y este jucat de x), rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului 0, o vecinătate deschisă V a punctului 1 şi o funcţie $f : U \to V$, de clasă C^1 cu $f(0) = 1$, astfel încât

$$f^2(y) + y^2 - 1 = 0, \text{ oricare ar fi } y \in U.$$

Derivând în raport cu y, obţinem

$$2f(y)f'(y) + 2y = 0, \text{ oricare ar fi } y \in U, \tag{22}$$

de unde, pentru $y = 0$ şi $f(0) = 1$, deducem că $f'(0) = 0$.

ii) Deoarece funcţia $f : U \to V$ este de clasă C^1 şi $f(0) = 1 \neq 0$, va exista o vecinătate $\tilde{U}$ a punctului 0, cu $\tilde{U} \subseteq U$, astfel încât $f(y) \neq 0$, oricare ar fi $y \in \tilde{U}$. Din (22) deducem că

$$f'(y) = -\frac{y}{f(y)}, \text{ pentru fiecare } y \in \tilde{U}.$$

Prin urmare restricţia funcţiei f' la $\tilde{U}$ este o funcţie de clasă C^1. Deci f este funcţie de clasă C^2 pe $\tilde{U}$. Derivând ecuaţia (22), obţinem

$$2f'(y)f'(y) + 2f(y)f''(y) + 2 = 0, \text{ pentru fiecare } y \in \tilde{U}.$$

De aici, ţinând cont că în cazul particular $y = 1$, avem $f(0) = 1$ şi $f'(0) = 0$, obţinem $f''(0) = -1$. Deci, luând $x = f$, x va fi o funcţie de clasă C^2 pe mulţimea $\tilde{U}$ şi $x''(0) = -1$.

iii) Să presupunem că ecuaţia (21) defineşte implicit pe y ca funcţie de x în jurul punctului $(1,0)$. În baza definiţiei funcţiei definite vor exista numerele reale $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ astfel încăt pentru fiecare $x^* \in B(1,\alpha)$ ecuaţia

$$(x^*)^2 + y^2 - 1 = 0,\ y \in B(0,\beta)$$

are o unică soluţie. Uşor se observă că luând $x^* = 1 + \frac{\alpha}{2}$ avem $x^* \in B(1,\alpha)$ dar ecuaţia

$$(1 + \frac{\alpha}{2})^2 + y^2 - 1 = 0,$$

nu are soluţii, pentru că

$$\alpha + \frac{\alpha}{4} + y^2 > 0.$$

3 Extreme condiţionate (opţional)

Numeroase probleme provenite din viaţa de zi cu zi conduc la determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ relativ la o submulţime S a lui A egală cu mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii:

$$S = \{x \in A \,|\, g(x) = 0_p\}, \tag{23}$$

unde $g : A \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie. Menţionăm că, în cazul în care S este dată prin (23), un punct de extrem al lui f relativ la S se mai numeşte şi punct de extrem al lui f cu legătura $g(x) = 0_p$ sau punct de extrem condiţionat de $g(x) = 0_p$. În cele ce urmează vom studia cum putem determina punctele de extrem condiţionat, făcând apel la un rezultat deosebit de important cunoscut sub numele de regula multiplicatorilor lui Lagrange. Cei care doresc să cunoască demonstraţia, o pot găsi în [1]

Fie n şi p numere naturale, $n > p$.

Teorema 3.1 *(teorema multiplicatorilor lui J. L. Lagrange). Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi nevidă, funcţiile $f : A \to \mathbb{R}$ şi $g = (g_1, ..., g_p) : A \to \mathbb{R}^p$ sunt de clasă C^1 pe A, x^0 este un punct de extrem local al lui f relativ la mulţimea*

$$S = \{x \in A \,|\, g(x) = 0_p\}$$

şi dacă

$$rang \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^0) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^0) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(x^0) & ... & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} = p, \tag{24}$$

atunci există $\lambda^0 \in \mathbb{R}^p$ astfel încât punctul $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ este un punct critic al funcţiei $L : A \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată prin

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot g_i(x) \tag{25}$$

pentru fiecare $(x,\lambda) = (x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_p) \in A \times \mathbb{R}^p$.

Definiţie. *Funcţia* $L : A \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *dată prin*

$$L(x, \lambda) = f(x) + < \lambda, g(x) >, \text{ pentru fiecare } (x, \lambda) \in A \times \mathbb{R}^p,$$

se numeşte funcţia lui Lagrange, iar λ *se numeşte multiplicatorul lui Lagrange.*

Orice punct $x^0 \in A$ *având proprietăţile*

a) $g(x^0) = 0_p$,

b) $rang\, J(g; x^0) = p$,

şi

c) există λ^0 *astfel încât* (x^0, λ^0) *este punct critic pentru funcţia lui Lagrange* L, *se numeşte punct critic al funcţiei* f *condiţionat de* $g(x) = 0_p$.

În esenţă, teorema multiplicatorilor lui Lagrange dă condiţii necesare pentru ca un punct de extrem condiţionat să fie punct critic pentru funcţia lui Lagrange. Altfel spus, în ipoteza că în orice punct de extrem condiţionat matricea lui Jacobi ataşată funcţiei ce dă condiţia este nesingulară, punctele de extrem condiţionat trebuie căutate printre punctele critice ale funcţiei lui Lagrange.

Algoritm pentru determinarea punctelor de extrem condiţionat

Se lucrează în ipotezele:

i) A este submulţime deschisă, nevidă a lui $\mathbb{R}^n$,
ii) $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pe A,
iii) $g : A \to \mathbb{R}^p$ este o funcţie de clasă C^2 pe A,
iv) $n > p$.

Se cere să se determine punctele de extrem condiţionat ale funcţiei f cu condiţia $g(x) = 0_p$. În acest caz se procedează în modul următor:

1) Se construieşte funcţia lui Lagrange, L.

2) Se determină punctele critice ale funcţiei L, rezolvându-se în acest scop sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x,\lambda) = 0 \\ \quad ... \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x,\lambda) = 0 \\ \quad ... \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_p}(x,\lambda) = 0. \end{cases}$$

3) Se cercetează natura fiecărui punct critic condiţionat $M(x^0, \lambda^0)$ soluţie a sistemului de la punctul 2), procedându-se astfel:

3.1) Se construieşte funcţia $\bar{L} : A \to \mathbb{R}$, dată prin

$$\bar{L}(x) = L(x, \lambda^0) \text{ pentru fiecare } x \in A;$$

3.2) Se rezolvă sistemul

$$dg(x^0)(h) = 0_p,\ h \in \mathbb{R}^n. \tag{26}$$

Deoarece $\operatorname{rang} dg(x^0) = p$, soluţia generală a acestui sistem liniar de p ecuaţii cu n necunoscute va depinde de $n-p$ parametrii $\alpha_1, ..., \alpha_{n-p}$, ceea ce implică faptul că $n-p$ dintre componentele lui h vor rămâne variabile; fie acestea $h_{j_1}, ..., h_{j_{n-p}}$. Soluţia generală h^* a sistemului (26) va fi

$$h_i^* = \mu_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-p}),\ i \in \{1, ..., n\},$$

unde $\mu_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-p}) = \alpha_i$, dacă $i \in \{j_k \,|\, k \in \{1, ..., n-p\}\}$.

3.3 Se studiază natura formei pătratice

$$\Psi(\alpha_1, ..., \alpha_{n-p}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial x_j \partial x_k}(x^0) h_j^* h_k^*. \tag{27}$$

3.4 În urma studierii formei pătratice constatăm că:

i) forma pătratică Ψ este pozitiv definită; atunci x^0 este un punct de minim condiţionat;
ii) forma pătratică Ψ este negativ definită; atunci x^0 este un punct de maxim condiţionat;
iii) forma pătratică Ψ nu este definită; atunci x^0 nu este punct de extrem condiţionat;
iv) nu suntem în nici unul dintre primele trei cazuri, situaţie în care algoritmul acesta nu permite precizarea naturii punctului critic cercetat.

Explicaţia variantei propuse este următoarea:

- dacă $x \in S$, atunci $f(x) = L(x, \lambda^0) = \bar{L}(x)$ (deoarece $x \in S$ implică $g_j(x) = 0$ pentru fiecare $j \in \{1, ..., p\};$)

- deoarece funcţiile f şi g sunt de clasă C^2 pe A, funcţia $\bar{L}$ este de clasă C^2 pe A;

- aplicând formula lui Taylor cu restul lui Lagrange de ordinul 2 funcţiei $\bar{L}$ şi ţinând cont că (x^0, λ^0) fiind punct critic condiţionat avem $d\bar{L}(x^0) = dL(x^0, \lambda_0) = 0_{(\mathbb{R}^{n+p}, \mathbb{R})}$, rezultă că, pentru orice $x \in S$, există un $\theta_x \in]0, 1[$ astfel încât:

$$f(x) - f(x^0) = \bar{L}(x) - \bar{L}(x^0) = d^2\bar{L}(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0);$$

- deoarece pentru fiecare $i \in \{1, ..., p\}$ avem $g_i(x) = 0$, rezultă că

$$dg_i(x^0)(x - x^0) = 0,\ i \in \{1, ..., p\},$$

pentru orice $x \in S$. Notând $h = x - x^0$, este evident că h va fi soluţie a sistemului

$$dg_i(x^0)(h) = 0_{(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}.$$

Din ipoteza $\operatorname{rang} dg(x^0) = p$, rezultă că soluţia generală a acestui sistem liniar de p ecuaţii cu n necunoscute $h_1, ..., h_n$, va depinde de $n - p$ parametri $\alpha_1, ..., \alpha_{n-p}$, ceea ce implică faptul că $n - p$ dintre componentele lui h vor rămâne variabile; fie acestea $h_{j_1}, ..., h_{j_{n-p}}$. Soluţia generală h^* a sistemului va fi

$$\begin{aligned} h^*_{j_k} &= \alpha_k,\ k \in \{1, ..., n-p\} \\ h^*_k &= \mu(\alpha_1, ..., \alpha_{n-p}),\ k \in \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_{n-p}\}. \end{aligned}$$

Algoritmul nu se aplică cazului în care $d^2L(x^0, \lambda^0)$ este funcţia identic nulă.

Dacă $d^2L(x^0, \lambda^0)$ nu este funcţia identic nulă, întrucât L este de clasă C^2, va exista un număr real $r > 0$, astfel încât $B(x^0, r) \subseteq A$ şi, pentru orice $z \in B(x^0, r)$,

$$\operatorname{sgn} d^2L(x^0, \lambda^0)(u, v) = \operatorname{sgn} d^2L(z, \lambda^0)(u, v),$$

oricare ar fi $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Atunci, pentru orice $x \in B(x^0, r)$, alegând $z = x^0 + \theta_x(x - x^0)$ vom avea $z \in B(x^0, r)$ şi deci, luând $u = v = h^*$, obţinem

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(f(x) - f(x^0)) &= \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}(x^0, \lambda^0) h^*_j h^*_k\right) \\ &= \operatorname{sgn} \psi(\alpha). \end{aligned}$$

În continuare vom determina, pentru câteva exemple, punctele de extrem condiţionat.

EXEMPLUL 3.1. Vom determina punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2, \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

cu condiţia

$$9x^2 + 4(y - 1)^2 = 36.$$

Introducând funcţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = 9x^2 + 4(y - 1)^2 - 36, \quad \text{pentru fiecare } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

condiţia se rescrie sub forma $g(x, y) = 0$. Funcţia lui Lagrange corespunzătoare acestei probleme este $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(9x^2 + 4(y-1)^2 - 36),$$

pentru fiecare $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. Avem

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) &= 2(1 + 9\lambda)x, \\ \tfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) &= 2(1 + 4\lambda)(y - 1), \\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= 9x^2 + 4(y-1)^2 - 36, \end{aligned}$$

oricare ar fi $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. Punctele critice condiţionate se vor găsi printre soluţiile sistemului

$$\begin{cases} 2x(1 + 9\lambda) & = 0 \\ 2(y-1)(1 + 4\lambda) & = 0 \\ 9x^2 + 4(y-1)^2 - 36 & = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obţinem următoarele puncte susceptibile de a fi puncte critice condiţionate

$$M_1(0, 4, -\frac{1}{4}),\ M_2(0, -2, -\frac{1}{4}),\ M_3(2, 1, -\frac{1}{9}) \text{ şi } M_4(-2, 1, -\frac{1}{9}).$$

Deoarece $J(g; (x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x & 8(y-1) \end{pmatrix}$, rezultă că

$$\operatorname{rang} J(g; (0, 4)) = 1,\ \operatorname{rang} J(g; (0, -2)) = 1,\ \operatorname{rang} J(g; (2, 1)) = 1,$$

şi $\operatorname{rang} J(g; (-2, 1)) = 1$, ceea ce implică faptul că toate punctele sunt puncte critice condiţionate. Vom analiza pe rând natura fiecăruia dintre ele. Pentru punctul M_1, avem

$$\bar{L}(x, y) = L(x, y, -\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}x^2 + 9,$$

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Din condiţia $dg(0, 4)(h_1, h_2) = 0_{(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$, echivalentă cu

$$18 \cdot 0 \cdot h_1 + 8 \cdot 3 \cdot h_2 = 0, \tag{28}$$

obţinem $h_2 = 0$, soluţia generală a ecuaţiei (28) fiind $(h_1 = \alpha,\ h_2 = 0)$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Vom avea deci

$$\Psi(\alpha) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial x^2}(0, 4) + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial x \partial y}(0, 4) + 0 \cdot \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial y^2}(0, 4) = -\frac{5}{2}\alpha^2 < 0,$$

pentru $\alpha \neq 0$. Prin urmare Ψ este formă pătratică negativ definită, ceea ce implică faptul că $(0, 4)$ este punct de maxim condiţionat.

Pentru punctul M_2, procedând analog, obţinem că $(0, -2)$ este tot punct de maxim condiţionat.

Pentru punctul M_3, avem

$$\bar{L}(x, y) = L(x, y, -\frac{1}{9}) = \frac{5}{9}(y-1)^2 + 4,$$

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soluţia generală a ecuaţiei $dg(2, 1)(h_1, h_2) = 0_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$, este $(h_1 = 0;\ h_2 = \alpha)$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Forma pătratică dată prin (27) este pozitiv definită deoarece

$$\Psi(\alpha) = \frac{10}{9} \cdot \alpha^2 > 0,$$

oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Punctul M_3 este deci punct de minim condiţonat. Analog se tratează şi punctul M_4, obţinându-se că şi acesta este un punct de minim condiţionat.

Exemplul 3.2. Vom cerceta punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 - y + z, \text{ pentru fiecare } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

condiţionate de

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{şi} \quad z - y = 0.$$

Funcţia lui Lagrange corespunzătoare va fi $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 - y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \lambda_2(z - y),$$

pentru fiecare $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^5$. Deoarece

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2x + 2\lambda_1 x = 2x(1 + \lambda_1) \\
\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -1 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 2\lambda_1 y - (1 + \lambda_2) \\
\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 2\lambda_1 z + (1 + \lambda_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z - y,
\end{array}$$

punctele susceptibile de a fi puncte critice condiţionate vor fi soluţii ale sistemului

$$\begin{cases}
2x(1 + \lambda_1) & = 0 \\
2\lambda_1 y - (1 + \lambda_2) & = 0 \\
2\lambda_1 z + (1 + \lambda_2) & = 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 - 4 & = 0 \\
z - y & = 0.
\end{cases}$$

Soluţiile sistemului sunt

$$\begin{array}{l}
(x = 0, y = \sqrt{2}, z = \sqrt{2}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1), \\
(x = 0, y = -\sqrt{2}, z = -\sqrt{2}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1), \\
(x = 2, y = 0, z = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1), \\
(x = -2, y = 0, z = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1).
\end{array}$$

Verificăm dacă ele sunt puncte critice condiţionate. Pentru aceasta trebuie să calculăm rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

în punctele corespunzătoare soluţiilor sistemului. Deoarece

$$rang \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rang \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rang \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

şi
$$rang\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$
toate punctele vor fi puncte critice condiţionate. Rămâne să stabilim natura lor.

Pentru $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, -1)$ construim funcţia $\bar{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$\bar{L}(x, y, z) = x^2 - y + z - z + y = x^2,$$
pentru fiecare $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, şi rezolvăm sistemul
$$\begin{cases} d(x^2 + y^2 + z^2)(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})(h) & = 2\sqrt{2}h_2 + 2\sqrt{2}h_3 & = 0 \\ d(-z + y)(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})(h) & = -h_2 + h_3 & = 0, \end{cases}$$
cu $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$. Soluţia generală a sistemului este
$$(h_1 = \alpha,\ h_2 = 0,\ h_3 = 0), \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R}.$$
Construind forma pătratică corespunzătoare şi cercetând natura ei observăm că
$$\Psi(\alpha) = d^2\bar{L}(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})(\alpha, 0, 0) = 2\alpha^2 > 0,$$
oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Forma pătratică fiind pozitiv definită, rezultă că punctul $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, -1)$ este un punct de minim local condiţionat. În mod analog se tratează punctul $(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, -1)$.

În cazul punctului $(2, 0, 0, -1, -1)$ funcţia $\bar{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, este dată prin
$$\bar{L}(x, y, z) = x^2 - y + z - x^2 - y^2 - z^2 + 4 - z + y = -y^2 - z^2 + 4,$$
pentru fiecare $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sistemul
$$\begin{cases} d(x^2 + y^2 + z^2 - 4)(2, 0, 0)(h) = 4h_1 + 0 \cdot h_2 + 0 \cdot h_3 = 0 \\ d(z - y)(2, 0, 0)(h) = h_3 - h_2 = 0 \end{cases}$$
are soluţia generală
$$(h_1 = 0,\ h_2 = \alpha,\ h_3 = \alpha), \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R}.$$
Construind forma pătratică corespunzătoare, observăm că
$$\Psi(\alpha) = d^2\bar{L}(2, 0, 0)(0, \alpha, \alpha) = -4\alpha^2 < 0,$$
oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Rezultă că forma pătratică este negativ definită ceea ce implică faptul că punctul $(2, 0, 0)$ este un punct de maxim local condiţionat. Analog se tratează cazul ultimului punct critic condiţionat.

Exemplul 3.3. Vom determina punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată prin
$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz,$$
oricare ar fi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu condiţia
$$xyz = 4.$$

Introducând funcţia $g : \mathrm{I\!R}^3 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$g(x, y, z) = xyz - 4, \text{ pentru fiecare } (x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3,$$

condiţia se rescrie sub forma $g(x, y, z) = 0$.

Construim funcţia lui Lagrange, $L : \mathrm{I\!R}^4 \to \mathrm{I\!R}$,

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4),$$

pentru fiecare $(x, y, z, \lambda) \in \mathrm{I\!R}^4$.

Calculând derivatele parţiale de ordinul întâi obţinem

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = y + 2z + \lambda yz \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = x + 2z + \lambda xz \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2x + 2y + \lambda xy \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = xyz - 4. \end{array}$$

Punctele critice vor fi soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2y + 2x + \lambda xy = 0 \\ xyz - 4 = 0. \end{cases}$$

Ultima ecuaţie implică faptul că pentru orice soluţie $(x^0, y^0, z^0, \lambda^0)$ a sistemului avem $x^0 \neq 0$, $y^0 \neq 0$ şi $z^0 \neq 0$. Cu aceste precizări rezultă că sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} \frac{1}{z} + \frac{2}{y} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{z} + \frac{2}{x} + \lambda = 0 \\ \frac{2}{y} + \frac{2}{x} + \lambda = 0 \\ \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{z} = 1, \end{cases}$$

sistem ce se rezolvă simplu introducând variabilele $u = 2/x$, $v = 2/y$, $w = 1/z$. Se obţine astfel sistemul

$$\begin{cases} w + v + \lambda = 0 \\ w + u + \lambda = 0 \\ u + v + \lambda = 0 \\ u \cdot v \cdot w = 1, \end{cases}$$

a cărui soluţie este $u = v = w = 1, \lambda = -2$. Rezultă că avem un singur punct critic condiţionat şi anume punctul

$$x = 2, y = 2, z = 1, \lambda = -2.$$

Pentru acest punct construim funcţia $\bar{L} : \mathrm{I\!R}^3 \to \mathrm{I\!R}$,

$$\bar{L}(x, y, z) = L(x, y, z, -2) = xy + 2xz + 2yz - 2xyz + 8,$$

oricare ar fi $(x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3$, şi apoi construim $d^2\bar{L}(2, 2, 1)$. Avem

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial x^2}(2, 2, 1) = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial y^2}(2, 2, 1) = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial z^2}(2, 2, 1) = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial x \partial y}(2, 2, 1) = -1, \\ \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial x \partial z}(2, 2, 1) = -2, \\ \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial y \partial z}(2, 2, 1) = -2. \end{array}$$

Deci
$$d^2\bar{L}(2,2,1)(h_1,h_2,h_3) \;=\; -2h_1h_2 \;-\; 4h_1h_3 \;-\; 4h_2h_3,$$
oricare ar fi $(h_1,h_2,h_3 \in \mathbb{R}^3$. Pe de altă parte, din condiţia $dg(x^0,y^0,z^0) \;=\; 0_{(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}$ deducem că, oricare ar fi $h \;=\; (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$, vom avea
$\frac{\partial(xyz-4)}{\partial x}(2,2,1)\cdot h_1 + \frac{\partial(xyz-4)}{\partial y}(2,2,1)\cdot h_2 + \frac{\partial(xyz-4)}{\partial z}(2,2,1)\cdot h_3 \;=\; 0,$
adică
$$2h_1 \;+\; 2h_2 \;+\; 4h_3 \;=\; 0.$$
O soluţie generală a ecuaţiei de mai sus este:
$$h_1 \;=\; \alpha_1,\; h_2 \;=\; \alpha_2,\; h_3 \;=\; -\frac{\alpha_1 \;+\; \alpha_2}{2},\text{ cu } (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2.$$
Forma pătratică Ψ corespunzătoare va fi
$$\begin{array}{rl}\Psi(\alpha_1,\alpha_2) & = -2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \;+\; 4\alpha_2\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\\ & = 2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2) \;>\; 0,\end{array}$$
oricare ar fi $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Punctul $(2,2,1)$ va fi deci un punct de minim condiţionat.

Exemplul 3.4. Fie ecuaţia
$$x_1^2 \;+\; x_2^2 \;+\; y^2 \;-\; 2x_1 \;+\; 2x_2 \;-\; 4y \;-\; 10 \;=\; 0 \tag{29}$$
Arătaţi că există o vecinătate V a punctului $(1,-1)$ şi o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$, astfel încât
$$f(1,-1) \;=\; 6 \tag{30}$$
şi
$$x_1^2 \;+\; x_2^2 \;+\; (f(x_1,x_2))^2 \;-\; 2x_1 \;+\; 2x_2 \;-\; 4f(x_1,x_2) \;-\; 10 \;=\; 0, \tag{31}$$
oricare ar fi $(x_1,x_2) \in V$. Arătaţi că punctul $(1,-1)$ este un punct de extrem al funcţiei f şi, în ipoteza că funcţia f este de clasă C^2 pe V, determinaţi natura lui.

Fără greutate se vede că sunt îndeplinite condiţiile din teorema funcţiilor implicite. Va exista deci o vecinătate deschisă V a punctului $(1,-1)$ şi va exista o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$ astfel încât să fie satisfăcute condiţiile (30) şi (31). În ipoteza ca funcţia f este derivabilă parţial pe V, derivatele parţiale ale ei vor fi definite prin sistemul obţinut în urma derivării parţiale în raport cu x_1 şi x_2 a ecuaţiei (31), adică prin sistemul
$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 \;+\; 2f(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \;-\; 2 \;-\; 4\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \;=\; 0\\ 2x_2 \;+\; 2f(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \;+\; 2 \;-\; 4\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \;=\; 0.\end{array}\right. \tag{32}$$
Ţinând cont că $f(1,-1) = 6$, şi luând $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$, din (32) obţinem
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,-1) \;=\; 0 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,-1) \;=\; 0.$$
Deci $(1,-1)$ este un punct critic al funcţiei f.

Pentru a-i determina natura vom studia natura formei pătratice $d^2f(1,-1)$. În ipoteza că funcţia f este derivabilă parţial de două ori pe V, vom deriva ecuaţiile sistemului (32) în raport cu x_1 şi x_2. Obţinem astfel

$$\begin{array}{l} 1 + (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2))^2 + f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) - \\ \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) + f(x_1,x_2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2) - \\ \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) + f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2) - \\ \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2) = 0, \\ 1 + (\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2))^2 + f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) - \\ \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 0. \end{array}$$

Înlocuind acum $x_1 = 1, x_2 = -1$ şi ţinând cont că $f(1,-1) = 6$, obţinem

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2}(1,-1) = -\frac{1}{4}, \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1 x_2}(1,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(1,-1) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(1,-1) = \frac{-1}{4}. \end{array}$$

Rezultă

$$d^2 f(1,-1)(h_1,h_2) = -\frac{1}{4}(h_1^2 + h_2^2) < 0,$$

pentru orice $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Forma pătratică $d^2 f(1,-1)$ fiind negativ definită rezultă că punctul $(1,-1)$ este un punct de maxim local al lui f.

Exemplul 3.5. Vom determina punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 - xy - y^2, \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

relativ la mulţimea

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}.$$

Problema o vom rezolva în mai multe etape. Mai întâi vom determina punctele de extrem necondiţionat ale funcţiei f relativ la $\operatorname{int} S$. Apoi vom determina punctele de extrem ale funcţiei f relativ la frontiera lui S.

i) Avem $\operatorname{int} S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$. Punctele critice ale lui f din $\operatorname{int} S$ se obţin rezolvând sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ x + y < 1. \end{array}\right.$$

Obţinem un singur punct şi anume $(0,0)$. Diferenţiala de ordinul doi a lui f în $(0,0)$ este funcţia $d^2 f(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$d^2 f(0,0)(h_1,h_2) = 2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_2^2,$$

oricare ar fi $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.. Observând că $d^2 f(0,0)(1,0) = 2 > 0$ şi $d^2 f(0,0)(0,1) = -1$, deducem că forma pătratică $d^2 f(0,0)$ este nedefinită, ceea ce implică faptul că $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

ii) Frontiera lui S este

$$\mathrm{bd}\, S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}.$$

Deci a determina punctele de extrem ale lui f situate pe frontieră revine la a rezolva problema de extrem condiţionat a funcţiei f cu legătura $x + y = 1$. Funcţia lui Lagrange corespunzătoare este $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - xy - y^2 + \lambda(x + y - 1),$$

pentru fiecare $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$. Funcţia L are un singur punct critic

$$(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}, \lambda = \frac{5}{2}).$$

Funcţia $\bar{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este dată prin

$$\bar{L}(x,y) = L(x,y,\frac{5}{2}) = x^2 - xy - y^2 + \frac{5}{2}(x + y - 1),$$

pentru fiecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Condiţia $d(x+y-1) = 0_{(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$, ne conduce la ecuaţia $h_1 + h_2 = 0$ a cărei soluţie generală este $(h_1 = \alpha,\, h_2 = -\alpha)$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Deoarece

$$\Psi(\alpha) = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha^2 = 2\alpha^2 > 0,$$

oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}^*$, rezultă că ea este pozitiv definită ceea ce implică faptul că punctul $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ este un punct de mimim local condiţionat.
Deci mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei f relativ la mulţimea S este $\{(-1/2, 3/2)\}$.

4 Probleme

Probleme de extrem

1) Să se determine punctele de extrem local ale următoarelor funcţii:
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x,y,z) = x^4 - 2x^2y + 3y^2 - 2yz + z^2 - 4y,\ \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

b) $f :]0,+\infty[^3 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x,y,z) = 1 - x - \frac{y^2}{4x} - \frac{z^2}{y} - \frac{2}{z};$$

pentru fiecare $(x,y,z) \in]0,+\infty[^3$;
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 6xy - 2x,$$

pentru fiecare $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
d) $f :]0,+\infty[^3 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x,y,z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz},$$

pentru fiecare $(x, y, z) \in]0, +\infty[^3$;
e) $f :]0, +\infty[^3 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

pentru fiecare $(x, y, z) \in]0, +\infty[^3$;
f) $f :]0, +\infty[^3 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} x_j \ln \frac{a_j}{x_j},$$

pentru fiecare $(x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, unde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.
g) $f : \mathrm{I\!R}^3 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z,$$

pentru fiecare $(x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3$;
h) $f : \mathrm{I\!R}^* \times \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x, y) = xy + \frac{a}{x},$$

pentru fiecare $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^* \times \mathrm{I\!R}$; unde a este un număr real dat;;
i) $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - \alpha xy,$$

pentru fiecare $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$, unde α este un număr real nenul;
j) $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x, y) = (\cos x) \cdot (\cos y) \cdot \sin(x + y),$$

pentru fiecare $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$;
h) $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$, dată prin

$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2 + c),$$

pentru fiecare $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$, unde $c > 0$.

2) Să se arate că funcţia $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$,

$$f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y, \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \mathrm{I\!R}^2,$$

are o infinitate de maxime locale şi nici un minim.

Probleme legate de funcţii implicite

1) Fie $F = (F_1, F_2) : \mathrm{I\!R} \times \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}^2$,

$$F(x, y, z) = (x + y + z - 4, x^3 + y^2 + z^3 - 10). \tag{33}$$

Să se determine $y'(1)$ şi $z'(1)$ dacă y şi z sunt funcţii definite implicit, în jurul punctului $(1,1,2)$, prin ecuaţia $F(x,y,z) = 0_2$.

2) Fie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Arătaţi că oricare ar fi punctul $(x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$, cu $F(x^0, y^0, z^0) = 0_2$ şi $(y^0)^2 \neq (z^0)^2$, există $U \in V(x^0)$ şi există o unică funcţie $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$, de clasă C^1, cu proprietăţile $f(x^0) = (y^0, z^0)$ şi $F(x, f_1(x), f_2(x)) = 0_2$, pentru orice $x \in U$; calculaţi $f_1'(x^0)$ şi $f_2'(x^0)$.

3) Considerăm sistemul

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z - 5 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 + 19 = 0 \end{array} \right. . \tag{34}$$

Arătaţi că sistemul defineşte implicit, în jurul punctului $(2, 0, -3)$, funcţiile de clasă C^1, $y = y(x)$ şi $z = z(x)$. Calculaţi $y'(2)$ şi $z'(2)$.

4) Studiaţi aplicabilitatea teoremei funcţiilor implicite pentru funcţia $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată prin (33), şi punctul $(0, (1, 3))$.

5) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ defineşte implicit, în vecinătatea punctului $(0, 0, 1)$, pe z ca funcţie de x şi y. Arătaţi că există o vecinătate $\tilde{U}$ a punctului $(0, 0)$ astfel încât restricţia la $\tilde{U}$ a funcţiei definite implicit este de clasă C^2 şi calculaţi toate derivatele parţiale de ordinul II ale acestei funcţii în punctul $(0, 0)$.

6) Fie $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y, z) = (x + 2y - z - 3, x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz - 2).$$

Arătaţi că există $U \in V(1)$ şi există o unică funcţie $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 cu proprietatea că $f(1) = (1, 0)$ şi $F(x, f_1(x), f_2(x)) = 0_2$ pentru orice $x \in U$ şi apoi calculaţi $f_1'(1)$ şi $f_2'(1)$.

7) Fie $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y, z, u) = (x + 2y - u + v - 2, x^3 + y^3 + u^3 - 3xyu - 3v).$$

Daţi un exemplu de condiţii pe care trebuie să le îndeplinească punctul (x_0, y_0, u_0, v_0) astfel încât să existe $U \in V(x_0, y_0)$ şi să existe o unică funcţie $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 cu proprietatea că $f(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$ şi $F(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0_2$ pentru orice $(x, y) \in U$. Verifică punctul $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 0)$, acele condiţii ?; dacă da, calculaţi $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1, 1)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1, 1)$.

8) Studiaţi aplicabilitatea teoremei funcţiilor implicite în cazul ecuaţiilor de mai jos, în punctele indicate:
a) $x^2 + y^2 + 2y = 8$, în punctul (0,2);
b) $x^2 + y^2 + 2y = 8$, în punctul (0,0);
c) $x^2 + y^2 + 2y = 8$, în punctul (0,-4);
d) $y^3 + x^2y + xy^2 = 1$ în punctul (0,1).

9) Cercetaţi dacă următoarele ecuaţii definesc implicit pe y ca funcţie de x sau pe x ca funcţie de y în jurul punctului M dacă:
a) $x^2 + y^2 + y = 4$ şi M=(2,0);

b) $\sin(xy) + \sqrt{xy} = 1 + \dfrac{\pi}{2}$ şi $M = \left(\pi, \dfrac{1}{2}\right)$.

10) Fie $f : A \subseteq \mathrm{I\!R}^3 \to \mathrm{I\!R}$ de două ori diferenţiabilă.
a) Presupunând că ecuaţia $f(x,y,z) = 0$ defineşte în fiecare punct (x^0, y^0, z^0) pe fiecare dintre cele trei variabile ca funcţie de celelalte două, arătaţi că

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y^0, z^0) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(y^0, z^0) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(y^0, z^0) \;=\; -1.$$

b) Presupunând că pentru punctul $(x^0, y^0, z^0) \in A$ cu $f(x^0, y^0, z^0) = 0$ există $U \in V(y^0, z^0)$ şi există o unică funcţie $g : U \to \mathrm{I\!R}$ de clasă C^2 verificând condiţiile:

$$(g(y,z), y, z) \in A, \text{ pentru orice } (y,z) \in V$$

şi

$$f(g(y,z), y, z) = 0, \text{ pentru orice } (y,z) \in U$$

calculaţi $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(y^0, z^0)$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y^0, z^0)$.

11) Calculaţi $y'(1)$ şi $z'(1)$ dacă z şi y sunt definite implicit ca funcţii de x în vecinătatea punctului $(1, 0, 1)$ prin sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \end{cases}.$$

Probleme legate de extreme cu legături

1) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f relativ la mulţimea S dacă:
a) $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$, este dată prin

$$f(x,y) \;=\; x^2 \;+\; y^2, \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathrm{I\!R}^2$$

şi $S \;=\; \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 \mid ax \;+\; by \;=\; c\}$, a, b şi c fiind numere reale date;
b) $f : \mathrm{I\!R}^3 \to \mathrm{I\!R}$, este dată prin

$$f(x,y,z) \;=\; x \;-\; 2y \;+\; 2z, \text{ pentru fiecare } (x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3$$

şi $S \;=\; \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 \,|\, x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;=\; 4\}$;
c) $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$, este dată prin

$$f(x,y) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;+\; 1, \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathrm{I\!R}^2,$$

şi $S \;=\; \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 \,|\, xy \;=\; 1;$
d) $f : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$, este dată prin

$$f(x,y) \;=\; xy, \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathrm{I\!R}^2,$$

şi $S \;=\; \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 \mid x^2 \;-\; y^2 \;=\; 1\}$;
e) $f : \mathrm{I\!R}^* \times \mathrm{I\!R}^* \to \mathrm{I\!R}$, este dată prin

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{x} \;-\; \frac{1}{y}, \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathrm{I\!R}^* \times \mathrm{I\!R}^*,$$

şi $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/2 = 1\}$;
f) $f :]0,\infty[^3 \to \mathbb{R}$, este dată prin

$$f(x,y,z) = xy + xz + zx,$$

pentru fiecare $(x,y,z) \in]0,+\infty[^3$, şi

$$S = \{(x,y,z) \in]0,\infty[^3 \mid xyz = 1\};$$

g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, este dată prin

$$f(x,y,z) = xyz, \text{ pentru fiecare } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

şi

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 5,\ xy + yz + zx = 8\};$$

h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, este dată prin

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y, \text{ pentru fiecare } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

şi $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, este dată prin

$$f(x,y,z) = x^2 - 12xy + y^2 + 16y + z^2 + z,$$

pentru fiecare $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, şi

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 25\}.$$

2) Fie $x, y, z \in [0,1]$ astfel încât $x + y + z = 1$. Arătaţi că $0 \le xy + yz \le 7/27$.

3) Fie $a_1, ..., a_n \in [0,\infty[$, şi fie funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x_1, ..., x_n) = a_1(x_1)^2 + ... + a_n(x_n)^2,$$

pentru fiecare $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f relativ la mulţimea

$$S = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + ... + x_n = 1\},$$

şi arătaţi că

$$\min\{f(x) \mid x \in S\} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

4) Să se determine distanţa de la punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ la planul π de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$.

5) Fie mulţimea

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 \le 2\}$$

şi funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 6x + 8y - 5z,$$

oricare ar fi $(x, y, z) \in real^3$. Să se determine punctele de extrem ale lui f relativ la S.

6) Fie mulţimea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 9, \; x + y + z = 5\}$$

şi funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2, \text{ pentru fiecare } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinaţi max $f(S)$ şi min $f(S)$.

Bibliografie

[1] LUPŞA L., BLAGA L.: *Analiză matematică. Note de curs* 1. Cluj-Napoca, Presa Universitară Clujeană, 2003.