CURS 5
Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$

8 noiembrie 2012

În acest curs este descrisă structura spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$.

1 Mulţimea $\mathbb{R}^n$

Fie n un număr natural, $n \geq 2$, şi fie

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}},$$

adică

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \,|\, x_j \in \mathbb{R}, \text{ pentru fiecare } j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Este binecunoscut faptul că între mulţimea punctelor de pe o axă şi mulţimea numerelor reale se poate stabili o corespondenţă biunivocă. Acest lucru permite să se stabilescă o corespondenţă biunivocă şi între mulţimea punctelor unui plan, în care s-a fixat un sistem de coordonate, şi mulţimea $\mathbb{R}^2$, precum şi între mulţimea punctelor din spaţiu, în care s-a fixat un sistem de coordonate, şi mulţimea $\mathbb{R}^3$. Datorită acestui fapt elementelor mulţimii $\mathbb{R}^n$ li se mai spune şi puncte. Tot din acestă cauză, dacă $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, numerele reale x_j, $j \in \{1, ..., n\}$, se numesc coordonate ale punctului x; x_j poartă denumirea de coordonata a j-a a lui x.

În fizică, în teoria relativităţii, se lucrează frecvent cu spaţiul $\mathbb{R}^4$ numit şi spaţiul-timp al lui Einstein-Minkowski. De asemenea spaţiul fazelor precum şi spaţiul impulsurilor din fizica cuantică sunt spaţii de tip $\mathbb{R}^n$.

Pe mulţimea $\mathbb{R}^n$ se definesc

- o operaţie internă, numită adunare şi notată cu $+$, care face ca oricăror două elemente $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, ..., y_n)$ din $\mathbb{R}^n$ să le corespundă elementul $x + y$ din $\mathbb{R}^n$ dat prin

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \tag{1}$$

şi

- o operaţie externă cu operatori în $\mathbb{R}$, numită înmulţire cu scalar şi notată cu $\cdot$, care face ca oricărui număr real t şi oricărui element $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ să-i corespundă elementul $t \cdot x$ din $\mathbb{R}^n$ dat prin

$$t \cdot x = (tx_1, ..., tx_n). \tag{2}$$

Dorim să remarcăm faptul că:
a) în membrul drept al formulei (1), semnul + notează semnul de adunare din mulţimea numerelor reale;
b) prin analogie cu cazul real, pentru simplificarea notaţiei în loc de $t \cdot x$ vom scrie tx;
c) elementul neutru faţă de operaţia de adunare, (0,...,0), se va nota prin $0_{\mathbb{R}^n}$ sau, când nu este pericol de confuzie, simplu, prin 0_n. El se numeşte şi originea spaţiului $\mathbb{R}^n$;
d) dacă $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, convenim ca punctul

$$(-1)x = ((-1)x_1, ..., (-1)x_n) = (-x_1, ..., -x_n)$$

să-l notăm simplu prin -x;
e) dacă $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, şi $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, convenim ca elementul $x + (-y)$ să-l notăm simplu prin $x - y$; evident $x - y = (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)$;
f) două elemente $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, ..., y_n)$ se vor numi egale dacă $x_j = y_j$, oricare ar fi $j \in \{1, ..., n\}$.

Exemplu. Dacă $x = (-1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (2, 4, -6) \in \mathbb{R}^3$ şi $t = 2$, atunci

$$\begin{aligned} x + y &= (-1, 0, 3) + (2, 4, -6) = (1, 4, -3); \\ t \cdot x &= 2 \cdot (-1, 0, 3) = (-2, 0, 6); \\ x - y &= (-1, 0, 3) - (2, 4, -6) = (-3, -4, 9). \end{aligned}$$

Fără greutate se poate arăta că mulţimea $\mathbb{R}^n$ înzestrată cu operaţiile de adunare şi de înmulţire cu un scalar definite mai sus formează un spaţiu vectorial (spaţiu liniar) real. De aceea elementele lui $\mathbb{R}^n$ se mai numesc şi vectori.

Mulţimea $B = \{e^1, ..., e^n\}$, unde $e^j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, 1 fiind situat pe poziţia j, este o bază în $\mathbb{R}^n$, numită baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n$. Deoarece oricare ar fi $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, avem

$$x = x_1 e^1 + ... + x_n e^n, \tag{3}$$

numerele reale x_1, ..., x_n se numesc şi componentele vectorului x.

Observaţie. În toate calculele cu matrici pe care le vom face, vom considera un element $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ca fiind matricea coloană

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$.

Numim produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ funcţia $<,>: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dată prin

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j, \tag{4}$$

oricare ar fi $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, ..., y_n)$ din $\mathbb{R}^n$.

Fără greutate se vede că produsul scalar are următoarele proprietăţi:

- $< x, x > \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$ şi $< x, x >> 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;
- $< x, y >=< y, x >$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$;
- $< tx, y >= t < x, y >$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $t \in \mathbb{R}$.

Exemplu. Produsul scalar al vectorilor $x = (-1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ şi $y = (4, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ este egal cu

$$< x, y >= (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 2,$$

iar produsul scalar $< x, x >$ cu

$$< x, x >= (-1)^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

Teorema 1.1 . *Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^n$, avem*

$$|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}. \tag{5}$$

Inegalitatea (5) poartă denumirea de inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakovski.

*Demonstraţie.** Dacă $y = 0_{\mathbb{R}^n}$, inegalitatea este evident adevărată pentru că avem $< x, 0_{\mathbb{R}^n} >= 0$, şi $< 0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n} >= 0$. Fie deci $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. În baza proprietăţii (i), avem $< y, y >\neq 0$. Tot în baza acestei proprietăţi

$$< x - \frac{< x, y >}{< y, y >} y \, , \, x - \frac{< x, y >}{< y, y >} y > \geq 0 \, . \tag{6}$$

Efectuând calculele în membrul stâng al formulei, obţinem

$$< x - \frac{< x, y >}{< y, y >} y \, , \, x - \frac{< x, y >}{< y, y >} y >=$$

$$< x, x > - \frac{1}{< y, y >} (< x, y >)^2.$$

Rezultă

$$< x, x > - \frac{1}{< y, y >} (< x, y >)^2 \geq 0,$$

ceea ce conduce la

$$< x, x >< y, y > \geq (< x, y >)^2 \, ,$$

de unde, prin extragerea radicalului din ambii membri, se obţine (5).$\diamond$

2 Distanţa euclidiană în $\mathbb{R}^n$

Funcţia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, dată prin

$$d(x,y) = \|x-y\|_n, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

se numeşte metrica euclidiană.

Este uşor de văzut că:

M1. $d(x,y) = 0$, dacă şi numai dacă $x = y$;

M2. $d(x,y) = d(y,x)$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}^n$;

M3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Fie x, $y \in \mathbb{R}^n$. Numărul $d(x,y)$ se numeşte distanţa (euclidiană) dintre x şi y.

În cazul $n = 1$, avem $d(x,y) = \mid x - y \mid$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}$, iar în cazul $n = 2$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi orice $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplu. Fie $x = (-2, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ şi $y = (2, -2, 5, 0) \in \mathbb{R}^4$. Avem

$$d(x,y) = \|(-4, 3, -5, 1)\| = \sqrt{51}$$

3 Norma euclidiană

Funcţia $\| \, \|_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, dată prin

$$\|x\|_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{8}$$

oricare ar fi $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se numeşte norma euclidiană sau, simplu, norma lui $\mathbb{R}^n$. Pentru simplificarea scrierii convenim ca, atunci când nu este pericol de confuzie, în loc de $\| \, \|_n$ să folosim notaţia $\| \, \|$.

Nu este dificil de arătat că următoarele propoziţii sunt adevărate:

N1. $\|x\|_n = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0_{\mathbb{R}^n}$;

N2. $\|x+y\|_n \leq \|x\|_n + \|y\|_n$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}^n$;

N3. $\|tx\|_n = \mid t \mid \|x\|_n$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$.

OBSERVAŢIE. i) Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$, avem $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
ii) În cazul $n = 1$ avem $\|x\|_1 =| x |$.

Fie $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Numărul real

$$\|x\|_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

se numeşte norma vectorului x.

EXEMPLU. Fie x=(4,0,-3). Avem

$$\|x\|_3 = \|x\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5.$$

Mulţimea $\mathbb{R}^n$ înzestrată cu norma euclidiană se numeşte spaţiu normat euclidian $\mathbb{R}^n$.

4 Vecinătăţi în $\mathbb{R}^n$

În acest paragraf dăm definiţia bilei deschise cu centrul într-un punct şi rază dată şi, cu ajutorul ei, introducem noţiunea de vecinătate a unui punct din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$.

Bile în $\mathbb{R}^n$. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi fie r un număr real, $r > 0$.
Se numeşte

- *bilă deschisă* cu centrul în x şi de rază r, mulţimea

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_n < r\}; \tag{9}$$

- *bilă închisă* cu centrul în x şi de rază r, mulţimea

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_n \leq r\}. \tag{10}$$

În cazul $n = 1$, bila cu centrul în x şi de rază r este chiar intervalul deschis, centrat în x şi de lungime $2r$, deoarece

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R} \mid \mid y - x \mid < r\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid x - r < y < x + r\} =]x - r, x + r[. \end{aligned}$$

În acelaşi mod se arată că, în cazul $n = 2$, $B(x, r)$ este chiar discul (interiorul cercului) cu centrul în x şi de rază r. În cazul $n = 3$, $B(x, r)$ este interiorul sferei cu centrul în x şi de rază r (de aici provine denumirea de bilă).

Următoarea observaţie va fi foarte des utilizată în raţionamentele pe care le vom face în cadrul cursului de analiză.

OBSERVAŢIA 4.1. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi fie numărul real $r > 0$. Următoarele propoziţii sunt echivalente:
i) $y \in B(x, r)$;
ii) $\|y - x\| < r$;
iii) $d(x, y) < r$.

Vecinătăţile unui punct în $\mathbb{R}^n$. Se numeşte *vecinătate* a unui punct $x \in \mathbb{R}^n$ orice mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ având proprietatea că există un număr real r, $r > 0$, astfel încât $B(x, r) \subseteq V$.

Convenim ca, în tot ceea ce urmează, mulţimea vecinătăţilor punctului x s-o notăm prin V_x.

EXEMPLU. Fie $x = (2, -1) \in \mathbb{R}$. Mulţimea $V = [1, 3] \times]-2, 2]$ este o vecinătate a punctului x, deoarece $B((2, -1), 1/2) \subseteq V$, căci

$$B((2,-1),1/2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x_1-2)^2 + (x_2+1)^2} < \frac{1}{2} \subseteq]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\times] - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\subseteq V.$$

Mulţimea $U = [1, \times 2] \times]-2, 2]$ nu este vecinătate a lui $x = (2, -1)$ întrucât nu există $r > 0$ astfel ca $B((2, -1), r) \subseteq U$. De exemplu, oricare ar fi $r > 0$ avem $(2 - \frac{r}{r}, -1) \in B((2, -1), r)$, dar $(2 - \frac{r}{r}, -1) \notin U$.

OBSERVAŢIA 4.2. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi fie V_x mulţimea vecinătăţilor sale. Uşor se arată că următoarele propoziţii sunt adevărate:
(i) $x \in V$, oricare ar fi $V \in V_x$;
(ii) dacă V şi U sunt vecinătăţi ale lui x, atunci $V \bigcap U \in V_x$;
(iii) dacă $V \in V_x$ şi dacă $V \subseteq U$, atunci $U \in V_x$.
(iv) dacă x, $y \in \mathbb{R}^n$ şi $y \neq x$, atunci există $V \in V_x$ şi există $U \in V_y$ astfel încât $U \bigcap V = \emptyset$.

5 Puncte interioare. Puncte frontieră. Interiorul şi frontiera unei mulţimi. Mulţimi deschise

Introducem noţiunile de punct interior şi punct frontieră. Cu ajutorul lor definim interior şi frontiera unei mulţimi şi apoi introducem noţiunea de mulţime deschisă.

Puncte interioare. Puncte frontieră. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte:
i) *punct interior* al mulţimii A, dacă există un număr real $r > 0$, astfel încât $B(x, r) \subseteq A$;
ii) *punct frontieră* al mulţimii A, dacă oricare ar fi numărul real $r > 0$, avem

$$B(x, r) \bigcap A \neq \emptyset \text{ şi } B(x, r) \bigcap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset.$$

EXEMPLUL 5.1. Fie $A = [0, 1[\times]0, 1]$. Punctul $x = (1/2, 1/2)$ este un punct interior al mulţimii A, deoarece luând $r = 1/4$, avem $B(x, r) \subseteq A$.

Punctul $(0,0)$ este un punct frontieră al lui A, căci, oricare ar fi $r > 0$, avem

$$x = (\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}) \in (B(x,r) \bigcap A) \text{ şi } y = (1 + \frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2}) \in (B(x,r) \bigcap (\mathbb{R}^n \setminus A)),$$

unde

$$\alpha = \begin{cases} r, \text{ dacă } r < 2, \\ 1, \text{ dacă } r \geq 2. \end{cases}$$

Interiorul şi frontiera unei mulţimi. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi va fi notată prin $\operatorname{int} A$.

Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A se numeşte *frontiera* lui A şi va fi notată prin $\operatorname{bd} A$.

Observaţia 5.1. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\operatorname{int} A \subseteq A$. Într-adevăr, dacă $a \in \operatorname{int} A$, atunci va exista un $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subseteq A$. Ţinând cont că $a \in B(a,r)$, rezultă $a \in A$. Deci

$$\operatorname{int} A \subseteq A. \tag{11}$$

Revenind la exemplul 5.1, avem $\operatorname{int} A =]0, 1[\times]0, 1[$ şi

$$\operatorname{bd} A = \{(x_1, 0), (x_1, 1) \,|x_1 \in [0, 1]\} \bigcup \{(0, x_2), (1, x_2) \,|\, x_2 \in [0, 1]\}.$$

Mulţimi deschise .

O submulţime G a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte *deschisă* dacă toate punctele lui G sunt puncte interioare, adică dacă, oricare ar fi $x \in G$, există un număr real r, $r > 0$, astfel încât $B(x,r) \subseteq G$.

Exemplu. Fie $s > 0$ şi fie $x \in \mathbb{R}^n$. Bila deschisă $B(x,s)$ este o mulţime deschisă, deoarece pentru orice $y \in B(x,s)$, luând

$$r = \frac{1}{2} \min \{\|x-y\|_n, s - \|x-y\|_n\},$$

avem

$$\begin{aligned} \|z - x\|_n &= \|z - y + y - x\|_n \leq \|z-y\|_n + \|y-x\|_n \\ &\leq r + \|y-x\|_n \leq \tfrac{1}{2}(s - \|x-y\|_n) + \|x-y\|_n \\ &= \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}\|x-y\|_n < \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}s = s, \end{aligned}$$

oricare ar fi $z \in B(y,r)$. Deci $B(y,r) \subseteq B(x,s)$. Cum y a fost ales oarecare, rezultă că toate punctele lui $B(x,s)$ sunt puncte interioare. Deci $B(x,s)$ este o mulţime deschisă.

Remarcăm faptul că:

i) mulţimea vidă şi $\mathbb{R}^n$ sunt mulţimi deschise;

ii) reuniunea oricărei familii de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;

iii) intersecţia oricărei familii finite de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Datorită acestor ptoprietăţi, spunem că mulţimile deschise definesc o topologie pe $\mathbb{R}^n$, numită topologia euclidiană.

6 Puncte de acumulare. Puncte izolate. Derivata unei mulţimi. Mulţimi închise

Introducem noţiunile de punct de acumulare, punct izolat şi punct aderent. Cu ajutorul punctelor de acumulare definim derivata unei mulţimi şi apoi introducem noţiunea de mulţime închisă.

Puncte de acumulare, puncte izolate. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte:

a) *punct de acumulare* al mulţimii A, dacă oricare ar fi un număr real r, $r > 0$, avem $(B(x,r) \setminus \{x\}) \bigcap A \neq \emptyset$;

b) *punct izolat* al mulţimii A, dacă există un număr real r, $r > 0$, astfel încât să avem $B(x,r) \bigcap A = \{x\}$.

Din definiţie rezultă imediat că o condiţie necesară ca o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ să aibă cel puţin un punct de acumulare în $\mathbb{R}^n$ este ca ea să fie infinită. Condiţia nu este şi suficientă. Mulţimea numerelor naturale şi mulţimea numerelor întregi constituie exemple de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ care sunt infinite dar nu au puncte de acumulare în $\mathbb{R}$.

EXEMPLUL 6.1. Fie $A = [0,1] \times \{0\} \bigcup \{(1,2)\}$. Punctul $(0,0)$ este un punct de acumulare al mulţimii A, deoarece oricare ar fi un număr real $r > 0$, există un număr natural $n \geq 1$, astfel încât să avem $r/n < 1$, şi deci, luând $y = (r/n, 0)$, avem

$$y \in (B((0,0),r) \setminus \{(0,0)\}) \bigcap A.$$

Punctul $(1,2)$ este un punct izolat al mulţimii A deoarece

$$B((1,2),1/2) \bigcap A = \{(1,2)\}.$$

Derivata unei mulţimi. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A o vom numi *derivata* mulţimii A şi o vom nota prin A', adică

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ punct de acumulare al mulţimii } A\}.$$

În exemplul 6.1, avem $A' = [0,1] \times \{0\}$.

Închiderea unei mulţimi. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Reuniunea $A \bigcup A'$ se numeşte închiderea mulţimii A şi se notează prin $\bar{A}$. Avem deci $\bar{A} = A' \bigcup A$.

În exemplul 6.1, avem $clA = [0,1] \times \{0\} \bigcup \{(1,2)\}$.

Mulţimi închise .

O submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$ o vom numi *închisă* dacă îşi conţine punctele de acumulare, adică $A' \subseteq A$.

Remarcăm faptul că o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este închisă dacă şi numai dacă complementara ei faţă de mulţimea $\mathbb{R}^n$, adică mulţimea $\mathbb{R}^n \setminus A$ este deschisă. Ţinând cont de

relaţiile lui Morgan şi de proprietăţile mulţimilor deschise, deducem că:
i) $\mathbb{R}^n$ şi $\emptyset$ sunt atât mulţimi închise cât şi mulţimi deschise;
ii) intersecţia oricărei familii de mulţimi închise este tot o mulţime închisă;
iii) reuniunea oricărei familii finite de mulţimi închise este tot o mulţime închisă.

EXEMPLU. Bilele închise constituie exemple de mulţimi închise. Fie $x^0 \in \mathbb{R}^n$ şi fie $s > 0$. Vom arăta că orice punct x din $\bar{B}(x^0, s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x^0|| \leq r\}$ este punct de acumulare al acestei mulţimi.

Fie deci $x \in \bar{B}(x^0, s)$ şi fie $r > 0$. Trebuie să arătăm că $(B(x,r) \setminus \{x\}) \bigcap \bar{B}(x^0, s) \neq \emptyset$. Distingem două cazuri: $x \neq x^0$ şi $x = x^0$.
Dacă $x \neq x^0$, considerăm numărul real

$$t = \min\left\{\frac{r}{2 \cdot \|x - x^0\|}, \frac{1}{2}\right\}$$

şi elementul $z = x + t(x^0 - x)$. Evident $0 < t \leq \frac{1}{2}$; deci $z \neq x$. Vom arăta că $z \in B(x,r)$ şi $z \in B(x^0, s)$. Avem

$$\|z - x\| = \|x + t(x^0 - x) - x\| = |t| \cdot \|x^0 - x\| \leq \frac{r}{2 \cdot \|x - x^0\|}\|x - x^0\| = \frac{r}{2} < r,$$

ceea ce conduce la concluzia că $z \in B(x,r)$. Pe de altă parte avem

$$\|z - x^0\| = \|x + tx^0 - tx - x^0\| = |1 - t| \cdot \|x - x^0\| < \|x - x^0\| \leq s.$$

Ca urmare $z \in B(x^0, s)$. Deci $z \in (B(x,r) \setminus \{x\}) \bigcap \bar{B}(x^0, s)$, ceea ce i mplică faptul că $(B(x,r) \setminus \{x\}) \bigcap \bar{B}(x^0, s) \neq \emptyset$.

Dacă $x = x^0$, atunci luând $t = \min\{r,\ s\}$ şi $z = x + \frac{t}{2\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$ avem $z \neq x$ şi

$$\|z - x^0\| = \|z - x\| = \|\frac{t}{2\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)\| = \frac{t}{2\sqrt{n}}\sqrt{n} = \frac{t}{2} < \min\{r,\ s\}.$$

Deci, din nou, $z \in (B(x,r) \setminus \{x\}) \bigcap B(x^0, s)$.

EXEMPLU. Orice mulţime care are un număr finit de elemente este închisă. Într-adevăr, în acest caz nu avem puncte de acumulare. Derivata mulţimii este deci egală cu mulţimea vidă, care, evident, este conţinută în mulţime.

A nu se crede că orice submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este sau închisă sau deschisă. Există numeroase mulţimi care nu sunt nici închise, nici deschise. Mulţimea vidă şi $\mathbb{R}^n$ sunt atât închise cât şi deschise.

EXEMPLU. Mulţimea $A =]0,1] \times [0,1]$ nu este nici închisă nici deschisă. Nu este închisă pentru că $(0,0) \in (A' \setminus A)$, şi nu este deschisă pentru că $(1,1) \in A \setminus \mathrm{int}\, A$.

7 Mulţimi compacte

Vom defini noţiunile de mulţime mărgitină şi apoi pe cea de mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$.

Mulţimi mărginite. O submulţime M a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte *mărginită* dacă există $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$a_j \leq x_j \leq b_j,\ \forall\, j \in \{1, \ldots, n\},\ \text{pentru fiecare } x = (x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

Este uşor de văzut că mulţimea M este mărginită dacă şi numai dacă există un număr real c astfel încât $||x|| \leq c$, oricare ar fi $x \in M$.

Mulţimi compacte. Convenim ca o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$ s-o numim *compactă* dacă este mărginită şi închisă.

Exemplu. Date fiind numerele $a_1, ..., a_n,\ b_1, ...,b_n,$ intervalul închis $K = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ este o mulţime compactă. Intervalul deschis $H =]a_1, b_1[\times ... \times]a_n, b_n[$ este un exemplu de mulţime care nu este compactă; este o mulţime mărginită, dar nu este închisă.

Exemplu. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi fie numărul real $r > 0$. Bila închisă $\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_n \leq r\}$ este o mulţime compactă. Bila deschisă $B = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$ este o mulţime mărginită, dar nu este şi închisă, deci nu este compactă.

Exemplu. Mulţimea $[2, +\infty[\times [0, +\infty[$ nu este o mulţime compactă; ea este o mulţime închisă, dar nu este mărginită.

Exemplu. Orice submulţime finită a lui $\mathbb{R}^n$ este o mulţime compactă.

PROBLEME

1) Fie $x = (-1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3,\ y = (3, 0, -5) \in \mathbb{R}^3$. Calculaţi $\|x\|$, $\|y\|$ şi $\|x - \|$.

2) Fie $x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}^n$. Demonstraţi că

$$< x + u, y + v > = < x, y > + < x, v > + < u, y > + < u, v > .$$

3) Cercetaţi dacă punctul x aparţine $B(x^0, r)$ în cazurile:
a) $x = (0, 1),\ x^0 = (2, 1),\ r = 3;$
b) $x = (-1, 1, -2),\ x^0 = (0, 1, -2),\ r = 1;$
c) $x = (1, 1, 1),\ x^0 = (1, 1/2, 1),\ r = 1.$

4) Determinaţi $\operatorname{int} M$ şi M', dacă
a) $M = (\mathbb{R} \times \{1\}) \bigcup (]1, 2] \times [2, 3]) \subseteq \mathbb{R}^2;$
b) $M = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \subseteq \mathbb{R}^2;$
c) $M = ([-1, 2[\times \{2\}) \bigcup ([3, 4] \times] - 1, 2]) \bigcup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2;$
d) $M = ([0, 2] \times [1, 2]) \bigcup (\{3\} \times [0, 1[) \subseteq \mathbb{R}^2;$
e) $M = \mathrm{Q} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2.$

5) Demonstraţi că un punct $x \in \mathbb{R}^n$ este punct de acumulare al unei mulţimi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă orice bilă deschisă cu centrul în x conţine o infinitate de elemente ale lui A.

6) Arătaţi că oricare ar fi A şi B două submulţimi ale spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$ avem:
a) $(A \bigcup B)' = A' \bigcup B';$
b) $(A \bigcap B)' \subseteq A' \bigcap B'$; daţi un exemplu în care incluziunea e strictă;

c) $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$.

7) Arătaţi că dacă A şi B sunt două mulţimi compacte din $\mathbb{R}^n$, atunci mulţimile $A \bigcap B$ şi $A \bigcup B$ sunt şi ele compacte. Ce puteţi spune despre $A \setminus B$?