SUPORT PENTRU CURSURILE 12 ŞI 13
Integrale Riemann multiple

10 şi 17 ianuarie 2013

După cum s-a arătat în liceu, integrala Rieman a fost introdusă pornind de la problema calculării ariei unui trapez curbiliniu. Calculul volumului unei bare cilindrice, ale cărei baze nu sunt ambele suprafeţe plane, ne va conduce la introducerea noţiunii de integrală dublă.

Să considerăm un corp cilindric V, mărginit inferior de o figură plană oarecare S, situată în planul xOy, şi superior de suprafaţa de ecuaţie $z = f(x, y)$, cu $(x, y) \in S$. Generatoarele cilindrului sunt paralele cu axa Oz. Ne propunem să calculăm volumul corpului. În acest scop vom diviza figura plană S într-un număr finit m de dreptunghiuri, D_i, $i \in \{1, \dots m\}$, cele de pe frontieră putând avea unele laturi curbe. Apoi, pe fiecare dreptunghi D_i ca bază, vom construi cilidrul corespunzător, cu generatoarele paralele cu axa Oz, mărginit superior de suprafaţa de ecuaţie $z = f(x_i, y_i)$, unde $(x_i, y_i) \in D_i$ şi vom aproxima volumul corpului V cu suma volumelor cilidrilor astfel formaţi, adică vom lua

$$\text{vol}(V) \sim \text{aria}(D_i) \cdot f(x_i, y_i). \tag{1}$$

Cu cât dimensiunile dreptunghiurior vor fi mai mici, cu atât aproximarea este mai bună, dacă figura plană S are arie şi funcţia f este suficient de netedă.

Observăm faptul că membrul drept din (1) poate fi interpretat ca o sumă Riemann în care lungimea intervalului unei diviziuni este înlocuită cu aria figurii plane în care s-a divizat figura plană iniţială. Această observaţie ne va permite să definim riguros noţiunea de funcţie integrabilă şi de integrală Riemann pentru funcţii reale de mai multe variabile reale. De asemenea vom enunţa două teoreme care permit calculul integralei Riemann pe mulţimi mărginite, măsurabile Jordan: teorema lui Fubini şi teorema schimbării de variabilă. Vom exemplifica cele două teoreme în cazul integralei duble.

1 Integrala Riemann pe o mulţime mărginită măsurabilă Jordan

Pentru a introduce noţiunea de integrală Riemann pentru o funcţie de mai multe variabile, avem nevoie, în prealabil, de noţiunile de: mulţime elementară, măsura a unei mulţimi elementare, mulţime măsurabilă Jordan, măsura Jordan a unei mulţimi, partiţie a unei mulţimi, normă a unei partiţii şi sumă Riemann.

1.1 Mulţimi măsurabile Jordan. Măsura Jordan a unei mulţimi

Ininte de a introduce noţiunea de mulţime măsurabilă Jordan, vom defini noţiunea de mulţime elementară, amintind în prealabil pe cea de interval în $\mathbb{R}^n$ şi apoi de măsură a unui interval.

Măsura unui interval din $\mathbb{R}$. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Prin $I_{a,b}$ vom nota oricare dintre intervalele cu capetele în a şi b. Vom numi lungime a intervalului $I_{a,b}$ şi vom nota prin $m(I_{a,b})$, numărul real propriu sau impropriu dat prin

$$m(I_{a,b}) = \begin{cases} |b-a|, \text{ dacă } a, b \in \mathbb{R}, \\ +\infty, \text{ dacă } a \in \{-\infty, +\infty\} \text{ sau } b \in \{-\infty, +\infty\}. \end{cases} \tag{2}$$

Remarcăm că:
$m(I_{a,a}) = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ şi
$m(I_{a,+\infty}) = m(I_{-\infty,b}) = m(I_{-\infty,+\infty}) = +\infty, \ \forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Măsura unui interval din $\mathbb{R}^n$. Reamintim că o submulţime I a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte *interval mărginit* în $\mathbb{R}^n$, dacă există două elemente $a = (a_1, ..., a_n)$ şi $b = (b_1, ..., b_n)$ în $\mathbb{R}^n$, $a \leq b$, astfel încât

$$I = I_{a_1,b_1} \times \cdots \times I_{a_n,b_n}. \tag{3}$$

Vom numi *măsură* a intervalului I şi vom nota prin $m(I)$, numărul

$$m(I) = \prod_{i=1}^{n} m(I_{a_i,b_i}). \tag{4}$$

Remarcăm faptul că:
i) dacă $n = 1$, intervalul este chiar un segment şi măsura intervalului este egală cu lungimea segmentului;
ii) dacă $n = 2$, intervalul este un dreptunghi şi măsura intervalului este egală cu aria dreptunghiului;
iii) dacă $n = 3$, intervalul este un paralelipiped şi măsura intervalului este egală cu volumul paralelipipedului.

Observaţia 1.1. Dacă $I_{a,b}$ este un interval din $\mathbb{R}^n$, avem $m(I_{a,b}) = 0$ dacă şi numai dacă există un $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $a_i = b_i$. Ca urmare $m(\emptyset) = 0$.

Mulţimi elementare. Definiţie. *O submulţime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte elementară, dacă este egală cu reuniunea unui număr finit de intervale avănd, oricare două câte două intersecţia interioarelor vidă, adică există un număr finit m de intervale $I^1, \ldots, I^m$, astfel încât*

$$E = I^1 \bigcup \cdots \bigcup I^m \text{ şi } \mathrm{int} I^i \bigcap \mathrm{int} I^j = \emptyset, \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, m\}, \, i \neq j. \tag{5}$$

Măsura unei mulţimi elementare. *Dacă E este mulţimea elementară dată prin (5), se numeşte măsură a ei numărul*

$$m(E) = \sum_{k=1}^{m} m(I^k). \tag{6}$$

Remarcăm faptul că o mulţime elementară poate fi scrisă în mai multe moduri ca reuniune de intervale cu interioarele disjuncte. Totuşi, dacă pentru o mulţime elementară E există numerele naturale nenule m, respectiv p şi există intervalele $I^1, \ldots, I^m$, respectiv intervalele $J^1, \ldots, J^p$ astfel încât

$$E = I^1 \bigcup \cdots \bigcup I^m \text{ şi } I^i \bigcap I^j = \emptyset, \text{ oricare ar fi } i, j \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq j$$

şi

$$E = J^1 \bigcup \cdots \bigcup J^p \text{ şi } J^i \bigcap J^j = \emptyset, \text{ oricare ar fi } i, j \in \{1, \ldots, p\},\ i \neq j$$

se poate demonstra că

$$\sum_{k=1}^{m} m(I^k) = \sum_{k=1}^{p} m(J^k),$$

ceea ce arată că masura unei mulţimi elementare este bine definită.

1.2 Mulţimi măsurabile Jordan

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Notăm

$$\mathcal{E}_A^n = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, E \text{ mulţime elementară},\ A \subseteq E\}$$

şi

$$\mathcal{F}_A^n = \{F \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, F \text{ mulţime elementară},\ F \subseteq A\}.$$

Cele două mulţimi sunt nevide deoarece $A \in \mathcal{E}_A^n$ şi $\emptyset \in \mathcal{E}_A^n$. Ca urmare există numerele reale

$$m_e(A) = \inf\{v(E) \,|\, E \in \mathcal{E}_A^n\} \tag{7}$$

numit măsura exterioară a mulţimii A, respectiv

$$m_i(A) = \sup\{v(F) \,|\, F \in \mathcal{F}_A^n\} \tag{8}$$

numit măsura interioară a mulţimii A.

Definiţie. *O submulţime mărginită A a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte măsurabilă Jordan dacă $m_i(A) = m_e(A)$. Valoarea comună se numeşte măsura Jordan a lui A şi se notează cu $m(A)$. Avem deci $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$.*

2 Funcţii integrabile Riemann şi integrala Riemann a unei funcţii

Pentru a defini noţiunea de sumă Riemann pentru o funcţie de mai multe variabile avem nevoie de noţiunile de: partiţie a unei mulţimi, normă a unei partiţii, sistem de puncte intermediare corespunzătoare unei partiţii şi de sumă Riemann corespunzătoare unei partiţii şi a unui sistem de puncte intermediare corespunzătoare unei partiţii.

Diametrul unei mulţimi. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime mărginită, atunci numărul real, definit prin

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\},$$

se numeşte **diametrul mulţimii** A.

În cele ce urmează vom presupune că A este o submulţime mărginită măsurabilă Jordan a lui $\mathbb{R}^n$.

Partiţie a unei mulţimi. O familie finită $\{A_1, \dots, A_p\}$, de mulţimi nevide, măsurabile Jordan, cu $\operatorname{int}(A_i) \cap \operatorname{int}(A_j)$, oricare ar fi $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$, se numeşte *partiţie Jordan a mulţimii* A dacă

$$A = \bigcup_{j=1}^{p} A_j.$$

Notăm cu $\operatorname{Part}(A)$ familia tuturor partiţiilor Jordan ale lui A.

Norma partiţiei unei mulţimi. Dacă $\pi := \{A_1, \dots, A_p\} \in \operatorname{Part}(A)$, atunci numărul real, definit prin

$$\|\pi\| := \max\{\operatorname{diam}(A_1), \dots, \operatorname{diam}(A_p)\},$$

se numeşte *norma partiţiei* π.

Sistem de puncte intermediare asociat unei partiţii. Fie $\pi := \{A_1, \dots, A_p\} \in \operatorname{Part}(A)$. O mulţime finită $\xi := \{a^1, \dots, a^p\}$ de puncte din $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea $a^1 \in A_1, \dots, a^p \in A_p$, se numeşte *sistem de puncte intermediare asociat partiţiei* π. Notăm cu $P(\pi)$ mulţimea tuturor sistemelor de puncte intermediare asociate partiţiei π.

Suma Riemann asociată unei partiţii şi unui sistem de puncte intermediare asociat acelei partiţii. Fie A o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie, $\pi = \{A_1, \dots, A_p\} \in \operatorname{Part}(A)$ şi $\xi = \{a^1, \dots, a^p\} \in P(\pi)$. Numărul real, definit prin

$$\sigma(f, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^{p} f(a^j) m(A_j),$$

se numeşte *suma Riemann asociată funcţiei* f*, partiţiei* π *şi sistemului de puncte intermediare* ξ.

Funcţie integrabilă Riemann. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă Riemann* pe mulţimea A dacă există un număr real I care se bucură de următoarea proprietate:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall\ \pi \in \mathrm{Part}(A) \text{ cu } \|\pi\| < \delta \text{ şi } \forall\ \xi \in P(\pi) \text{ avem}$$

$$|\sigma(f, \pi, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{9}$$

Integrala Riemann a unei funcţii. Dacă funcţia $f : A \to real$ este integrabilă Riemann pe A, atunci numărul real I din definiţia de mai sus este unic. El se numeşte *integrala Riemann a lui f pe mulţimea* A şi se notează cu unul dintre următoarele simboluri

$$\int_A f, \text{ sau } \int_A f(x)dx.$$

În cazul particular $n = 2$, pentru a pune în evidenţă cele două componente ale unei variabile, vom folosi adesea notaţia specifică $\int_A\int f(x, y)dxdy$.

Facem precizarea că, în cele ce urmează vom utiliza notaţia $\int_A f(x)dx$ în considerentele teoretice pe care le vom face, iar cu $R(A)$ vom nota mulţimea tuturor funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}$, integrabile Riemann pe A.

Exemple de funcţii integrabile

EXEMPLUL 2.1. Funcţia constantă egală cu 1 este integrabilă pe orice submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, mărginită şi măsurabilă Jordan şi

$$\int_A dx = m(A). \tag{10}$$

Într-adevăr, dacă considerăm funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = 1$, oricare ar fi $x \in A$, atunci, pentru orice $\pi \in \mathrm{Part}(A)$ şi orice $\xi \in P(\pi)$ avem $\sigma(f, \pi, \xi) = m(A)$. Drept urmare, funcţia f este integrabilă Riemann pe A şi $\int_A f(x)dx = m(A)$. Deci are loc (10).

EXEMPLUL 2.2. Dacă A este o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^n$, de măsură Jordan nulă, atunci orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe A şi $\int_A f(x)dx = 0$, deoarece pentru orice $\pi \in \mathrm{Part}(A)$ şi orice $\xi \in P(\pi)$ avem $\sigma(f, \pi, \xi) = 0$.

Caracterizarea cu şiruri a integrabilităţii (opţional) După cum se ştie din liceu, o caracterizare a integrabilităţii unei funcţii reale de o variabilă reală poate fi dată utilizând şirurile. În cele ce urmează vom da un analog al acelei caracterizări pentru cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

Teorema 2.1 *Fie A o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^n$, măsurabilă Jordan, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $I \in \mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) f este integrabilă Riemann pe A şi $\int_A f(x)dx = I$.

2) Oricare ar fi şirul $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu termeni din $\mathrm{Part}(A)$, cu $\|\pi_k\| \to 0$ şi oricare ar fi şirul $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu $\xi_k \in P(\pi_k)$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f, \pi_k, \xi_k) = I.$$

2.1 Proprietăţi ale funcţiilor integrabile Riemann

Mărginirea funcţiilor integrabile. După cum se ştie orice funcţie reală, integrabilă pe un interval compact $[a,b]$ este mărginită, reciproca ne fiind evident adevărată. Proprietatea se menţine şi în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale, sub următoarea formă.

Propoziţia 2.2 *Dacă A este o submulţime măsurabilă Jordan a lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann, atunci f este mărginită pe A cu excepţia cel mult a unei submulţimi A_0 a lui A de măsură Jordan nulă, adică există o mulţime A_0 de măsură Jordan nulă aşa încât f este mărginită pe $A \setminus A_0$. În plus funcţia f este integrabilă Riemann pe $A \setminus A_0$ şi $\displaystyle\int_{A\setminus A_0} f(x)dx = \int_A f(x)dx$.*

Proprietatea de liniaritate.

Teorema 2.3 *Dacă A este o submulţime mărginită a lui $\mathbb{R}^n$, măsurabilă Jordan, şi funcţiile $f : A \to \mathbb{R}$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe A, atunci oricare ar fi numerele reale α şi β, funcţia $\alpha f + \beta g$ este Riemann integrabilă pe A şi are loc egalitatea*

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_A f(x)dx + \beta \int_A g(x)dx.$$

Proprietatea de ereditate.

Teorema 2.4 *Dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan şi $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi integrabilă Riemann, atunci f este integrabilă Riemann pe orice submulţime măsurabilă Jordan a lui A.*

Proprietatea de aditivitate faţă de mulţime.

Teorema 2.5 *Fie A_1 şi A_2 submulţimi ale lui $\mathbb{R}^n$, mărginite şi măsurabile Jordan, cu $(\mathrm{int}A_1)\bigcap(\mathrm{int}A_2) = \emptyset$ şi fie $A = A_1 \bigcup A_2$.O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe A dacă şi numai dacă restricţiile lui f la mulţimile A_1 şi A_2 sunt integrabile Riemann. Dacă F este integrabilă pe A, atunci are loc egalitatea*

$$\int_A f(x)dx = \int_{A_1} f|_{A_1}(x)dx + \int_{A_2} f|_{A_2}(x)dx.$$

3 Calculul integralelor multiple

3.1 Teorema lui Fubini

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mulţimi mărginite, măsurabile Jordan.

Fie funcţia $f : A \times B \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) pentru fiecare $x \in A$, funcţia $\varphi_x : B \to \mathbb{R}$, $\varphi_x(y) = f(x,y)$, oricare ar fi $y \in B$, este

integrabilă pe A,
ii) pentru fiecare $y \in B$, funcţia $\psi_y : A \to \mathbb{R}$, $\psi_y(x) = f(x,y)$, oricare ar fi $x \in A$, este integrabilă pe B.
Cu ajutorul ei construim funcţiile:

$$F_1 : A \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \int_B \varphi_x = \int_B f(x,y)dy, \ \forall\, x \in A,$$

$$F_2 : B \to \mathbb{R}, \quad F_2(y) = \int_A \psi_y = \int_A f(x,y)dx, \ \forall\, y \in B.$$

Teorema 3.1 *(Teorema lui Fubini). Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sunt mulţimi mărginite, măsurabile Jordan şi $f : A \times B \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă care satisface condiţiile i) şi ii), atunci F_1 este integrabilă pe A, F_2 este integrabilă pe B şi are loc egalitatea*

$$\int_{A\times B} f = \int_A F_1 = \int_B F_2,$$

egalitate care poate fi rescrisă sub forma

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right) dy. \qquad (11)$$

Formula (11) se numeşte formula lui Fubini.

Menţionăm că o funcţie care satisface condiţiile i) şi ii) se numeşte integrabilă parţial. În caz de existenţă, integrala $\int\limits_A F_1 = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right) dx$ se numeşte *integrala iterată în ordinea* y, x a funcţiei f pe $A \times B$, iar dacă F_2 este integrabilă pe B, atunci integrala sa $\int\limits_B F_2 = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right) dy$ se numeşte *integrala iterată în ordinea* x, y a funcţiei f pe $A \times B$.

Deci, conform teoremei lui Fubini o funcţie integrabilă şi integrabilă parţial are integrale iterate egale cu integrala sa. Tot din teorema lui Fubini rezultă că dacă funcţia $f : A \times B \to \mathbb{R}$ este integrabilă parţial pe $A \times B$ şi are integrale iterate diferite, atunci f nu este integrabilă pe $A \times B$.

Aplicarea teoremei lui Fubini la calculul integralelor duble.

Vom indica modul în care se poate aplica teorema lui Fubini pentru calculul integralei duble. Avem nevoie de noţiunea de mulţime neglijabilă Lebesgue.

Mulţimi neglijabile Lebesgue. O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *neglijabilă Lebesgue* dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o familie numărabilă $(I^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de intervale deschise şi mărginite din $\mathbb{R}^n$ astfel încât

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k \text{ şi } \sum_{k=1}^{\infty} m(I^k) < \varepsilon. \qquad (12)$$

EXEMPLUL 3.1. Ca exemple de mulţimi neglijabile Lebesgue putem da mulţimile cel mult numărabile. Ca o consecinţa, orice mulţime finită este neglijabilă Lebesgue.

Remarcăm, de asemenea, faptul că orice submulţime compactă M a lui $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $m(M) = 0$ este neglijabilă Lebesgue.

Reamintim următorul rezultat important legat de integrabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală.

Propoziţia 3.2 *Dacă α şi β sunt numere reale cu $\alpha \leq \beta$ şi $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ este o funcţie aproape peste tot continuă pe $[\alpha, \beta]$ (adică mulţimea punctelor din $[\alpha, \beta]$ în care f nu este continuă este neglijabilă Lebesgue), atunci g este integrabilă pe $[\alpha, \beta]$.*

Din teorema lui Fubini şi din propoziţia 3.2 deducem rezultatele legate de calculul integralelor duble pe un dreptunghi şi pe domenii simple în raport cu axele de coordonate.

Cazul integrării pe un dreptunghi. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, cu $a \leq b$, $c \leq d$.

Propoziţia 3.3 *Dacă $M = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ şi $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi aproape peste tot continuă pe M, atunci f este integrabilă şi integrabilă parţial pe M şi*

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Trebuie subliniat faptul că în calculul integralei $\int\limits_c^d f(x, y)dy$, variabila x este considerată constantă, respectiv in calculul integralei $\int\limits_a^b f(x, y)dx$, variabila y este considerată constantă.

EXEMPLUL 3.2. Fie $M = [0, 1] \times [-1, 1]$ şi $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x+y$, oricare ar fi $(x, y) \in M$. Deoarece f este continuă pe dreptunghiul M, ea este integrabilă şi parţial integrabilă pe M. În baza propoziţiei 3.3 avem

$$\int\limits_{[0,1]\times[-1,1]} (x + y)dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-1}^1 (x + y)dy \right) dx.$$

Deoarece

$$\int\limits_{-1}^1 (x + y)dy = (xy + \frac{y^2}{2})|_{-1}^1 = x - (-x) + \frac{1}{2}(1^2 - (-1)^2) = 2x,$$

avem

$$\int\limits_{[0,1]\times[-1,1]} (x + y)dxdy = \int\limits_0^1 2xdx = 2\frac{x^2}{2}|_0^1 = 1.$$

Tot în baza propoziţiei 3.3 puteam calcula integrala şi astfel:

$$\int\limits_{[0,1]\times[-1,1]} (x+y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{0}^{1} (x+y)dx \right) dy.$$

Deoarece

$$\int\limits_{0}^{1} (x+y)dx = (\frac{x^2}{2} + xy)|_0^1 = \frac{1}{2} + y,$$

avem

$$\int\limits_{[0,1]\times[-1,1]} (x+y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} (\frac{1}{2} + y)dy = \frac{1}{2}y|_{-1}^{1} + \frac{y^2}{2}|_{-1}^{1} = 1.$$

Cazul mulţimii simple în raport cu axa Oy. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte **simplă în raport cu axa** Oy dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ şi există funcţiile continue $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(x) \leq \psi(x)$, oricare ar fi $x \in [a,b]$, în aşa fel încât

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Propoziţia 3.4 *Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime simplă în raport cu axa Oy, iar $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi aproape peste tot continuă pe M. Atunci f este integrabilă şi integrabilă parţial pe M şi avem*

$$\int_M f(x,y)dxdy = \int_a^b F_1(x)dx,$$

adică

$$\iint_M f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Exemplul 3.3. Fie M mulţimea din planul xOy mărginită de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 4$ şi fie funcţia $f : M \to \mathrm{I\!R}$, $f(x,y) = xy$, oricare ar fi $(x,y) \in M$.

Să se arate că M este simplă faţă de Oy şi să se calculeze $\int\limits_M xydxdy$.

Fără greutate se observă că dacă proiectăm pe M pe axa Ox obţinem segmentul $[-2, 2]$. Ducând acum paralele la Oy, prin fiecare punct $x \in [-2, 2]$, şi parcurgând paralele de jos în sus, "intrăm", în mulţimea M, prin curba $y = x^2$ şi "ieşim", din M, prin curba $y = 4$. Ca urmare avem

$$M = \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 \,|\, x \in [-2, 2],\ x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Atunci

$$\int\limits_M xydxdy = \int\limits_{-2}^{2} \left(\int\limits_{x^2}^{4} xydy \right) dx.$$

Cum
$$\int\limits_{x^2}^{4} xydy = x\frac{y^2}{2}|_{x^2}^{4} = \frac{x}{2}(16-x^4) = 8x - \frac{x^5}{2},$$
avem
$$\int\limits_{M} xydxdy = \int\limits_{-2}^{2}(8x - \frac{x^5}{2})dx = 8\frac{x^2}{2}|_{-2}^{2} - \frac{x^6}{12}|_{-2}^{2} = 0.$$

Cazul mulţimii simple în raport cu axa Ox. O mulţime $M \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte **simplă în raport cu axa** Ox dacă există $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$ şi există funcţiile $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$,$\psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cu $\varphi(y) \leq \psi(y)$, oricare ar fi $y \in$: $[c, d]$ în aşa fel încât
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Se poate demonstra că, dacă $M \subseteq \mathbb{R}^2$ este simplă în raport cu axa Oy (respectiv Ox), atunci M este o mulţime măsurabilă Jordan.

Propoziţia 3.5 *Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime simplă în raport cu axa Ox, iar $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi aproape peste tot continuă pe M, atunci f este integrabilă pe M şi*
$$\iint_M f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx\right) dy.$$

EXEMPLUL 3.4. Fie M mulţimea din planul xOy mărginită de parabola $y = x^2$ şi dreptele $y = 1$ şi $y = 4$ şi fie funcţia $f : M \to \mathrm{I\!R}$, $f(x, y) = y$, oricare ar fi $(x, y) \in M$.

Să se arate că M este simplă faţă de Ox şi să se calculeze $\int\limits_M ydxdy$.

Fără greutate se observă că dacă proiectăm mulţimea M pe axa Oy, obţinem segmentul $[1, 4]$. Ducând acum paralele la Ox, prin fiecare punct $y \in [1, 4]$, şi parcurgând paralele de la stânga la dreapta "intrăm", în mulţimea M, prin curba $x = -\sqrt{y}$ şi "ieşim", din M, prin curba $x = \sqrt{y}$. Ca urmare avem
$$M = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 \,|\, y \in [1, 4],\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$
Atunci
$$\int\limits_M ydxdy = \int\limits_1^4 \left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} ydx\right) dy.$$
Cum
$$\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} ydx = y(x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}) = 2y^{\frac{3}{2}}.$$
avem
$$\int\limits_M ydxdy = \int\limits_1^4 2y^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}|_1^4 = \frac{4}{5}(2^5 - 1^5) = \frac{124}{5}.$$

3.2 Schimbarea de variabilă în integrala Riemann multiplă

Teorema 3.6 *Fie A şi B submulţimi mărginite, nevide, măsurabile Jordan ale lui $\mathbb{R}^n$ şi fie $h : B \to A$ o transformare. Presupunem că SA este o submulţime neglijabilă Lesbegue a lui A şi SB este o submulţime neglijabilă Lesbegue a lui B astfel încât:*
i) mulţimile $A \setminus SA$ şi $B \setminus SB$ sunt deschise şi
ii) restricţia $h|_{B\setminus SB} : B \setminus SB \to A \setminus SA$ este o funcţie bijectivă, de clasă C^1 şi cu inversa de clasă C^1, cu Jacobianul $detJ|_h$ mărginit.
Următoarele propoziţii sunt adevărate:
1° *dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe A, atunci funcţia $(f \circ h) \cdot |detJ_h|$ este integrabilă Riemann pe $B \setminus SB$ şi*

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_{B\setminus SB} ((f \circ h)|detJ_h|)(t)dt. \tag{13}$$

2° *dacă, în plus, $detJ_h$ este definit şi mărginit pe B, atunci*

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_B ((f \circ h)|detJ_h|)(t)dt. \tag{14}$$

Trecerea la coordonate polare. După cum este bine ştiut între mulţimea punctelor unui plan şi mulţimea $\mathbb{R}^2$ se poate stabili o bijecţie. De aceea, dacă se consideră într-un plan un sistem cartezian de coordonate xOy, toate punctele M din plan sunt identificate prin coordonatele lor carteziene (x_M, y_M).

În plan mai pot fi utilizate şi alte sisteme de coordonate cum sunt, spre exemplu, coordonatele polare. Un sistem de coordonate polare în plan se defineşte printr-un punct O, numit *pol*, şi printr-o semidreaptă Ox, numită *axă polară*. Poziţia unui punct M din plan este determinată dacă se cunosc: distanţa $r_M = OM$ de la pol la punctul considerat şi unghiul θ_M pe care îl face direcţia pozitivă a axei polare cu semidreapta OM, unghi socotit în sens pozitiv (sens invers de mişcare a axelor de ceasornic). Numerele r_M şi $theta_M$ se numesc coordonatele polare ale punctelor M; vom folosi notaţia $M = (r_M, \theta_M)$. Deoarece unui punct M din plan îi corespunde pentru unghiul polar o infinitate de valori $\theta + 2\pi$, unde k este un număr întreg oarecare, se pune condiţia $0 \le \theta < 2\pi$ sau $\pi \le \theta < \pi$.

Dacă originea sistemului rectangular va coincide cu polul sistemului de coordonate polare şi axa polară se va suprapune peste semiaxa pozitivă Ox, atunci între coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct şi coordonatele sale polare (r, θ) există următoarea relaţie:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{15}$$

Transformarea în dreptunghi a unui cerc.

Fie R un număr strict pozitiv. Se consideră mulţimile:
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$,
$B = \{(r, \theta) \,|\, 0 \le r \le R,\ \theta \in [0,\ 2\pi]\}$,

$SA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = R^2\} \bigcup \{(x,0)\,|\, x \in [0,\ R]\}$ şi
$SB = \{(R,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \theta \in [0,\ 2\pi]\} \bigcup \{(r,0)\,|\, r \in [0,\ R]\}$.

Transformarea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată prin

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \tag{16}$$

este funcţie bijectivă de clasă C^1 de la $B \setminus SB$ la $A \setminus SA$ şi, oricare ar fi $(r,\theta) \in B \setminus SB$, avem

$$\det J_h = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r > 0.$$

Atunci, oricare ar fi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe A, funcţia $(f \circ h) \cdot |\det J_h|$ este integrabilă pe $B \setminus SB$ şi

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_B f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r dr d\theta, \tag{17}$$

sau, aplicând teorema lui Fubini, obţinem

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta,$$

sau

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^R r \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta \right) dr.$$

Exemplul 3.5. Să se calculeze $\int_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, unde A este porţiunea din inelul mărginit de cercurile de ecuaţii $x^2+y^2=1$ şi $x^2+y^2=4$, situat deasupra axei Ox.

Pentru calcul trecem la coordonate polare. Luăm $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$ şi $B = \{(r,\theta) \,|\, 1 \le r \le 2,\ \theta \in [0,\ \pi]\}$. Transformarea dată prin

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

este funcţie bijectivă de clasă C^1 de la B la A, cu Jacobianul diferit de 0. În baza teoremei 3.6 avem

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_B r^2 dr d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_1^2 r^2 dr = \int_0^\pi d\theta \cdot \int_1^2 r^2 dr = \pi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{7}{3}\pi.$$

4 Probleme de seminar

1. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq x\}$.
a) Arătaţi că mulţimea D este simplă în raport cu axa Oy.
b) Ştiind că $\displaystyle\iint_D dxdy = \text{aria}(D)$, calculaţi aria lui D.

2. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \leq 16,\ 0 \leq y \leq x \leq 8\}$.
a) Desenaţi mulţimea D.
b) Descompuneţi pe D în două submulţimi simple în raport cu axa Oy, cu interioarele disjuncte şi reuniunea lor egală cu D.
c) Calculaţi aria lui D.

3. Fie mulţimea D mărginită de dreptele $x = 1$, $x = e$ şi $y = 0$ şi curba $y = \ln x$. Calculaţi $\displaystyle\iint_D xdxdy$.

4. Fie mulţimea D mărginită de dreptele $y = 0$ şi $y = 1$ şi de curbele $x = -\sqrt{1 - y^2}$ şi $x = 1 - y$. Calculaţi $\displaystyle\iint_D xe^y dxdy$.

5. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2| -1 \leq x \leq 2,\ 2x^2 - 2 \leq y \leq x(x + 1)\}$. Calculaţi $\displaystyle\iint_D xdxdy$.

6. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x \geq 1,\ y \leq x,\ x \leq 2\}$. Calculaţi $\displaystyle\iint_D ydxdy$.

7. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D (|x| + |y|)dxdy$, dacă $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| + |y| \leq 1\}$.

8. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x^2 + (y - 1)^2 \leq 1,\ y \leq x^2,\ x \geq 0\}$. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D (1 - y)dxdy$.

9. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Trecând la coordonate polare, calculaţi $\displaystyle\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dxdy$.

10. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x \geq q0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$. Trecând la coordonate polare, calculaţi $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.