SUPORT PENTRU CURSUL 2
Serii de numere reale

11 octombrie 2012

IMPORTANT Conţinutul paragrafelor care au inclus la sfarsitul titlului simbolul * nu au fost predate la curs sau la seminar. Am inclus acest material deoarece am considerat ca poate aduce anumite precizări. De asemenea nu am demonstrat toate rezultatele. Pentru demonstraţiile care nu au fost făcute la curs, dar sunt incluse în acest material, am utilizat tot simbolul *; consultarea lor este obţională. Sunt incluse şi exemple importante. Unele dintre acestea au fost prezentate la curs sau seminar. Altele, din lipsă de timp, nu.

Noţiunea de serie de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Pentru fiecare număr natural m putem forma, cu termenii şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suma

$$s_m = x_0 + \ldots + x_m.$$

Se obţine astfel şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţie. *Se numeşte serie asociată şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi se notează cu simbolul* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, *sau cu* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, *perechea* $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Termenii şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numesc termenii seriei, iar termenii şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numesc sumele parţiale ale seriei. x_n este termenul de rang n al seriei, iar s_n este suma parţială de rang n. Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şirul sumelor parţiale.

Serii convergente. Serii divergente

Definiţie. *Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parţiale* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent.*

Limita

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n$$

se numeşte suma seriei.

Acceptăm să utilizăm notaţia $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = S$, pentru a scrie că S este suma seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

O serie care nu este convergentă, se numeşte divergentă.

Dacă o serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale nu are limită, convenim să mai spunem că seria este oscilantă.

În cazul în care $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, respectiv $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, vom spune că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ are suma $+\infty$, respectiv $-\infty$, şi vom nota acest lucru scriind $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$, respectiv $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$.

Serie rest

Fie k un număr natural.

Se numeşte serie rest de ordinul k corespunzătoare seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ seria $((x_n)_{n\geq k}, (s_n)_{n\geq k})$, serie pe care o vom nota prin $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$. Suma seriei rest de ordin k se numeşte rest de ordin k al seriei iniţiale şi se notează cu r_k, iar şirul $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, şirul resturilor.

În cele ce urmează, prin natura unei serii vom înţelege proprietatea ei de a fi convergentă sau divergentă.

Exemplul 0.1. Vom studia natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$;

Pentru orice număr natural n avem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2},$$

rezultă că seria este convergentă şi suma sa este egală cu $1/2$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$;

Pentru orice număr natural n avem

$$s_n = 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = \frac{2^{n+1}-2}{2-1} = 2^{n+1} - 2.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} (2^{n+1} - 2) = +\infty,$$

rezultă că seria este divergentă şi suma sa este $+\infty$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$;

Pentru orice număr natural n avem

$$s_n = 1 + (-1) + \ldots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

rezultă că nu există $\lim_{n\to\infty} s_n$ şi deci seria este divergentă (oscilantă).

În legătură cu seriile se ridică câteva probleme importante:

- stabilirea naturii unei serii;
- determinarea, în caz de convergenţă, a sumei seriei;

- calcularea cu o eroare dată a sumei seriei, în cazul în care seria este convergentă dar nu putem determina exact suma ei, sau precizarea erorii cu care s-a făcut aproximarea, în cazul în care aproximăm suma;

- construirea unor structuri algebrice pe mulţimea seriilor şi precizarea poziţiei seriilor convergente faţă de structurile respective.

În cele ce urmează vom încerca să dăm răspunsuri parţiale la întrebările puse.

Criterii generale de convergenţă

Teorema 0.1 *(criteriul general de convergenţă al lui A. L. Cauchy). O condiţie necesară şi suficientă ca seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ să fie convergentă este ca oricare ar fi un număr real $\varepsilon > 0$, să existe un rang s_ε astfel încât pentru orice numere naturale m, n, cu $n > s_\varepsilon$, să avem*

$$|x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}| < r. \tag{1}$$

Demonstraţie. Necesitatea. Fie seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ convergentă. Rezultă că şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. Aplicând criteriul lui Cauchy, şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va fi fundamental. Prin urmare, oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, există un număr natural s_ε astfel încât să avem

$$|s_{n+m} - s_n| < r, \text{ oricare ar fi } m, n \in \mathbb{N}, \ n \geq s. \tag{2}$$

Explicitând pe s_{n+m} şi s_n, obţinem că pentru orice numere naturale m, n, cu $n \geq s_\varepsilon$, avem (1).

Suficienţa. Să presupunem că oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, există rangul s_ε astfel încât oricare ar fi numerele naturale m, n, cu $n \geq s_\varepsilon$, să avem (1). Atunci, ţinând cont de definiţia şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rezultă că şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental şi, aplicând criteriul lui Cauchy, deducem că el este şi convergent. Prin urmare seria este convergentă. $\square$

Exemplul 0.2. Utilizând criteriul lui Cauchy pentru serii vom stabili natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{2^n}$. Notând $x_n = \dfrac{\sin n}{2^n}$ pentru orice numere naturale n şi m avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right| \\
&\leq \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+m}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \\
&\leq \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, luând

$$n_\varepsilon = \max\left\{\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, 1\right\},$$

pentru orice numere naturale n şi m cu $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Deci, în baza teoremei 0.1, seria este convergentă.

Consecinţa 0.2 *O condiţie necesară pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Demonstraţia este imediată dacă în (2) se ia $m = 1$. □

EXEMPLUL 0.3. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\ln n}$. Deoarece $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \infty$, rezultă că avem $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n} = \infty$. Aplicând consecinţa 0.2 concludem că seria este divergentă.

Dorim să atragem atenţia că, în general, reciproca consecinţei 0.2 nu este adevărată.

Din definiţia seriei convergente şi din proprietătile şirurilor deducem cele ce urmează.

OBSERVAŢIA 0.1. Următoarele propoziţii sunt adevărate:

i) Natura şi suma unei serii nu se modifică dacă se schimbă între ei un număr finit de termeni ai săi.

ii) Natura unei serii nu se modifică dacă se modifică valoarea unui număr finit de termeni ai săi (în particular dacă se lasă la o parte un număr finit de termeni ai seriei sau se adaugă un număr finit de termeni).

iii) O serie este convergentă dacă şi numai dacă orice serie rest a sa este tot convergentă.

iv) Dacă o serie este convergentă, atunci şirul resturilor sale are limita 0.

Teorema 0.3 *(criteriul de convergenţă al lui Niels-Henrik Abel şi Peter Gustav Lejeune Dirichlet). Dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este un şir mărginit şi dacă $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere pozitive, descrescător şi convergent la 0, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} t_n x_n$ este convergentă.*

*Demonstraţie.** Deoarece şirul sumelor parţiale este mărginit, va exista un număr real $M > 0$, astfel încât $|s_n| < M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice numere naturale n şi p avem

$$|t_{n+1}x_{n+1} + t_{n+2}x_{n+2} + \ldots + t_{n+p}x_{n+p}|$$
$$= |t_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \ldots + t_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})|$$
$$= | - t_{n+1}s_n + (t_{n+1} - t_{n+2})s_{n+1} + \ldots + (t_{n+p-1} - t_{n+p})s_{n+p-1} + t_{n+p}s_{n+p}|$$
$$\leq t_{n+1}|s_n| + (t_{n+1} - t_{n+2})|s_{n+1}| + \ldots + t_{n+p}|s_{n+p}|$$
$$\leq t_{n+1}M + (t_{n+1} - t_{n+2})M + \ldots + (t_{n+p+1} - t_{n+p})M + t_{n+p}M$$
$$= M(2t_{n+1} - t_{n+2} + t_{n+2} - \ldots - t_{n+p} + t_{n+p})$$
$$2 = Mt_{n+1} \leq 2Mt_n.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, va exista un număr natural n' astfel încât $t_n < \varepsilon/(2M)$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n'$.

Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un n' astfel încât

$$|t_{n+1}x_{n+1} + \ldots + t_{n+p}x_{n+p}| < \varepsilon,$$

pentru orice n şi p numere naturale cu $n \geq n'$. Aplicând acum criteriul lui Cauchy pentru serii (teorema 0.1), rezultă că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} t_n x_n$ este convergentă. □

Exemplul 0.4. Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{1+3^n}.$$

Observăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ are şirul sumelor parţiale mărginit (vezi exemplul 0.1, punctul c), că şirul $\left(\frac{2^n}{1+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{1+3^n} = 0.$$

În baza criteriului lui Abel-Dirichlet, concludem că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{1+3^n}$ este convergentă.

Serii alternate

Definiţie. *Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte alternată dacă*

$$x_n \cdot x_{n+1} \leq 0,$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Convenim ca o serie alternată să o notăm prin $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$, unde $a_n = |x_n|$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 0.4 *(criteriul lui Gottfried Wilhelm Leibniz). Dacă şirul de numere pozitive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi are limita 0, atunci seria alternată* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Luând seria $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n$, şirul (t_n) cu $t_n = a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi aplicând criteriul lui Abel-Dirichlet (vezi teorema 0.3), rezultă că seria alternată $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ este convergentă. □

Exemplul 0.5. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n^2+n+1}$. Avem $a_n = \frac{n-1}{n^2+n+1}$, pentru fiecare număr natural $n \geq 1$. Întrucât şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător de la rangul 3 începând, căci

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{n^2-n-3}{(n^2+3n+3)(n^2+n+1)} \leq 0,$$

pentru orice număr natural $n \geq 3$, şi deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+n+1} = 0$, aplicând criteriul lui G. W. Leibniz deducem că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n^2+n+1}$ este convergentă.

Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

DEFINIŢIE. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte absolut convergentă dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă.*

O serie de numere reale care este convergentă, dar nu este şi absolut convergentă se numeşte semiconvergentă.

EXEMPLUL 0.6. a) Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 1$, suma parţială de rang n a seriei valorilor absolute este

$$s_n = \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Cum $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ este convergentă, ceea ce implică faptul că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ este absolut convergentă.

b) Seria armonică alternantă (a se vedea paragraful Serii importante de numere reale) este un exemplu de serie semiconvergentă.

c) Seria din 0.1, punctul (c), nu este nici absolut convergentă, nici semiconvergentă.

OBSERVAŢIE. Orice serie de numere reale absolut convergentă este şi convergentă.

Serii importante de numere reale

1. Seria geometrică

Se numeşte serie geometrică seria $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, unde a şi q sunt numere reale. Avem

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \begin{cases} a\dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ nq, & q = 1 \end{cases}$$

Întrucât

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} (\text{sgn}a)\cdot(+\infty), & q \geq 1 \\ \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1 \\ \text{nu există}, & q \leq -1 \end{cases}$$

rezultă că seria geometrică este convergentă numai pentru $|q| < 1$ şi, în acest caz, $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$. Evident că pentru $|q| < 1$, seria este chiar absolut convergentă.

2. Seria armonică

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Uşor se constată că

$$s_{2n} - s_n \geq 1/2, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

În baza criteriului general de convergenţă al lui Cauchy rezultă că seria armonică este divergentă. Seria armonică reprezintă un exemplu de serie divergentă pentru care şirul termenilor seriei converge la 0; deci convergenţa şirului termenilor seriei către 0 este o condiţie necesară, dar nu şi suficientă.

3. Seria armonică alternată

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general $x_n = 1/n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, este descrescător şi are limita 0, în baza criteriului lui Leibniz pentru serii alternate rezultă că seria armonică alternată este convergentă. Ea nu este însă şi absolut convergentă. Deci seria armonică alternată este un exemplu de serie semiconvergentă. Ţinând cont de faptul că seria armonică alternată se obţine din seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$ pentru $x = -1$ şi din faptul că pentru orice $x \in [-1, 1[$ seria este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n} = \ln(1+x)$, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

4. Seria armonică generalizată

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$, unde r este un parametru real. Evident că, pentru $r = 1$ seria este divergentă, ea coincizând cu seria armonică. Vom discuta natura seriei pentru $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vom da două modalităţi de determinare a naturii acestei serii. Prima bazată pe criteriul lui Cauchy, iar cealaltă pe criteriul de condensare al lui Cauchy.

Utilizarea criteriului general de convergenţă al lui Cauchy (demonstraţia este preluată din [4], capitolul 3, propoziţia 1.4).

Fie $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Considerăm funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^{1-r}}{1-r},\ \forall\, x \in (0, +\infty).$$

Funcţia f este derivabilă şi avem $f'(x) = \dfrac{1}{x^r}$. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, funcţia f satisface ipotezele teoremei lui Lagrange. Ca urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, va exista $c_k \in]k,\ k+1[$ astfel încât

$$\frac{(k+1)^{1-r}}{1-r} - \frac{k^{1-r}}{1-r} = \frac{1}{c_k^r}(k+1-k). \tag{3}$$

Deoarece $c_k \in]k,\ k+1[$, vom avea

$$\frac{1}{k^r} > \frac{1}{c_k^r} > \frac{1}{(k+1)^r}. \tag{4}$$

De aici, prin însumare de la 1 la n, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k^r} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^r}. \tag{5}$$

Din (3) şi (5) obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} > \frac{(n+1)^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^r}. \tag{6}$$

Dacă $r > 1$, din ultima inegalitate obţinem

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^r} < 1 + \frac{(n+1)^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r} < 1 + \frac{1}{r-1}.$$

Şirul sumelor parţiale ale seriei fiind mărginit, deducem că seria armonică generalizată este convergentă pentru $r > 1$.

Dacă $r < 1$, tot din ultima inegalitate obţinem

$$1 + \frac{1}{2^r} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^r} > \frac{(n+1)^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r} > \frac{(n+1)^{1-r}}{1-r}.$$

Deoarece şirul sumelor parţiale ale seriei nu este mărginit, deducem că seria armonică generalizată este divergentă pentru $r < 1$.

Utilizarea criteriului de condensare al lui Cauchy (criteriul se găseşte în paragraful *Alte criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi*).

Avem

$$x_n = \frac{1}{n^r}, \quad x_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^r} = \frac{1}{(2^r)^n}.$$

Aplicând criteriul de condensare al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ are aceeaşi natură ca şi seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{r-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{r-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^n.$$

Dar ultima serie este o serie geometrică. Deci:

i) dacă $r > 1$, atunci $\frac{1}{2^{r-1}} < 1$, ceea ce implică convergenţa seriei geometrice şi, prin urmare, şi a celei iniţiale;

ii) dacă $r \leq 1$, atunci $\frac{1}{2^{r-1}} \geq 1$, ceea ce implică divergenţa seriei geometrice şi, prin urmare, şi a celei iniţiale.

Aşadar, seria armonică generalizată este convergentă pentru $r > 1$ şi divergentă pentru $r \leq 1$.

Calculul aproximativ al sumelor seriilor numerice

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ având suma s. Modul cel mai simplu de a aproxima suma unei serii este de a calcula suma primilor k termeni ai seriei. Problema la care trebuie răspuns în acest caz este cea legată de eroarea cu care se aproximează în acest caz suma seriei. Vom răspunde la problema ridicată în următoarele două cazuri.

I. *Seria este o serie alternată* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergentă, şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind descrescător. În acest caz, notând $r_n = |s_n - s|$ vom demontra că $|r_n| \leq a_{n+1}$.

Pentru aceasta să observăm că oricare ar fi numerele naturale n şi k avem

$$a_{n+1} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + (-1)^k a_{n+k+1} \leq a_{n+1}.$$

Făcând $k \to \infty$, rezultă $a_{n+1} - a_{n+2} \leq (-1)^n r_n \leq a_{n+1}$ şi deci $|r_n| \leq a_{n+1}$.

II. *Seria este o serie cu termeni oarecare* dar există un număr subunitar $q > 0$ şi un număr natural m astfel încât $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, pentru orice număr natural n, $n \geq m$. În acest caz pentru orice număr natural n, $n \geq m$, şi orice număr natural $p > 0$, avem $|a_{n+p}| \leq q^p|a_n|$. Deci

$$r_n = |s - s_n| \leq |a_n|(1 + q + q^2 + \ldots) = |a_n|\frac{q}{1-q}.$$

Exemplul 0.7. Fie seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$. În baza celor de mai sus concludem că dacă vrem să determinăm suma seriei cu o aproximare $\varepsilon = 10^{-2}$, este suficient să însumăm primii 100 termeni ai seriei pentru că $r_{100} \leq \dfrac{1}{100} = 10^{-2}$.

Exemplul 0.8. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{(n+2)!}$. Observăm că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+4)(n+2)!}{(3n+1)(n+3)!} = \frac{3n+4}{(3n+1)(n+3)} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Prin urmare, dacă aproximăm suma seriei prin suma primilor săi 5 termeni, avem $r_5 \leq a_5\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{16}{7!} = \dfrac{1}{315}$.

Dependenţa sumei unei serii de ordinea de însumare

Dependenţa sumei unei serii de ordinea de însumare este o problemă complexă. Cei care doresc să cunoască mult mai multe lucruri despre acest subiec, indicăm lucrarea [8]. În cele ce urmează vom menţiona în ce condiţii suma unei serii convergente nu depinde de ordinea de însumare, justificând necesitatea introducerii noţiunii de serie absolut convergentă.

Teorema 0.5 *(proprietatea de comutativitate a seriilor)*

Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obţine o serie convergentă, având aceeaşi sumă cu seria iniţială.

Cei care sunt interesaţi de demonstraţia teoremei pot consulta [1], teorema 3.3.11.

Teorema 0.6 *(Bernhard Riemann) Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este o serie semiconvergentă, atunci se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria obţinută să aibă ca sumă un număr dat, finit sau infinit, sau să fie oscilantă.*

Cei care sunt interesaţi de demonstraţia teoremei pot consulta [4], teorema 3.3.

Teorema 0.7 **(proprietatea de asociativitate a seriilor) ([1], teorema 3.3.9). Fie şirul strict crescător de numere naturale $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $k_0 = 0$ şi fie seriile de numere reale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{7}$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad \text{unde} \quad y_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} x_j. \tag{8}$$

i) Dacă seria (7) este convergentă, atunci seria (8) este convergentă şi cele două serii au aceeaşi sumă.

ii) Dacă seria (8) este convergentă şi, pentru fiecare număr natural n, $n \geq 1$, numerele reale

$$x_j, \quad \text{cu} \quad j \in \{k_{n-1}+1, \ldots, k_n\},$$

au acelaşi semn, atunci seria (7) este convergentă şi seriile (7) şi (8) au aceeaşi sumă.

Cei care sunt interesaţi de demonstraţia teoremei pot consulta [1], teorema 3.3.9.

Prin urmare, atunci când dorim să calculăm suma unei serii convergente, trebuie să fim atenţi la ordinea de însumare.

Operaţii cu serii de numere reale*

Mulţimea seriilor cu termeni numere reale se poate organiza ca un spaţiu vectorial. Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ două serii.

Prin definiţie suma celor două serii este seria

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n).$$

Dacă t este un număr real, prin definiţie produsul numărului t cu seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este seria

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} t x_n.$$

Înzestrată cu cele două operaţii mulţimea seriilor formează un spaţiu liniar în care elementul nul este seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} 0$, iar opusul seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} -x_n$.

De asemenea putem definit produsul a două serii şi, în anumite cazuri, câtul a două serii.

Se numeşte produs (de convoluţie) al seriilor $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ unde

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}, \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N}.$$

Fie seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$.

Dacă există o serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ astfel încât $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ să fie produsul de convoluţie al seriilor $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, convenim ca seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ s-o numim câtul seriilor $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$.

Teorema 0.8 * *Următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) ([4], capitolul 3, propoziţia 1.5, 1). Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} x'_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} x''_n$ sunt două serii convergente, atunci suma lor este tot o serie convergentă şi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x'_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} x''_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x'_n + x''_n);$$

b) ([4], capitolul 3, propoziţia 1.5, 2). Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ este o serie convergentă, atunci oricare ar fi numărul real t seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} tx_n$ este convergentă şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} tx_n = t \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

c) (teorema lui N. H. Abel) ([4], capitolul 3, teorema 3.9). Dacă produsul a două serii convergente este o serie convergentă, atunci suma seriei produs este egală cu produsul sumelor celor două serii.

(d) (teorema lui A. L. Cauchy) ([4], capitolul 3, teorema 3.8, enunţ modificat). Produsul a două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă şi suma seriei produs este egală cu produsul sumelor celor două serii.

(e) (teorema lui H. Mertens) ([4], capitolul 3, teorema 3.10). Produsul a două serii convergente, dintre care una este absolut convergentă, este o serie convergentă şi suma seriei produs este egală cu produsul sumelor celor două serii.

Din teorema anterioară rezultă că mulţimea seriilor convergente de numere reale formează un spaţiu vectorial, iar mulţimea seriilor absolut convergente, o algebră.

Serii cu termeni pozitivi

DEFINIŢIE. *Se numeşte serie cu termeni pozitivi orice serie ai cărei termeni sunt numere pozitive.*

Teorema 0.9 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca şirul sumelor parţiale să fie mărginit.*

Demonstraţie. Mai întâi să observăm că şirul sumelor parţiale ale unei serii cu termeni pozitivi este un şir nedescrescător. Acest şir este convergent dacă şi numai dacă este mărginit. Ţinând cont de definiţia seriei convergente, rezultă că seria va fi convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit. □

Teorema 0.10 *(criteriul I al comparaţiei). Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sunt două serii cu termeni pozitivi având proprietatea că există un număr real $c > 0$ şi un număr natural k astfel încât $a_n \leq c \cdot b_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este divergentă.

Demonstraţie. a) Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergentă, şi seria $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ va fi convergentă. În baza teoremei anterioare şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\geq k}$, cu $s_n = b_k + \ldots + b_n$ pentru orice număr natural n, $n \geq k$, va fi mărginit. Şirul $(\widetilde{s}_n)_{n\geq k}$, cu $\widetilde{s}_n = cb_k + \ldots + cb_n$, pentru orice număr natural n, $n \geq k$, va fi şi el mărginit. Cum $0 \leq a_n \leq c \cdot b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, rezultă că şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n\geq k}^{\infty} a_n$, $(r_n)_{n\geq k}$ cu $r_n = a_k + \ldots + a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, va fi de asemenea mărginit. Aplicând din nou teorema 0.9 deducem că seria $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ este convergentă. Dar atunci, în baza teoremei 0.1 rezultă că şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci aceeaşi natură o va avea şi seria $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. În baza teoremei 0.9, şirul $(r_n)_{n\geq k}$ definit în demonstrarea punctului (a) este nemărginit. Inegalitatea $0 \leq a_n \leq c \cdot b_n$, pentru orice număr natural n, $n \geq k$, va implica divergenţa şirului $(s_n)_{n\geq k}$ definit în demonstrarea punctului (a). Aplicând din nou teorema 0.9 deducem că seria $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ este divergentă. Prin urmare şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este divergentă. $\square$

Exemplul 0.9. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + n + 1}$. Întrucât $\dfrac{1}{2^n + n + 1} < \dfrac{1}{2^n}$, pentru orice număr natural n şi cum din exemplul 0.1 ştim că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ este convergentă, în baza teoremei 0.10 seria $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + n + 1}$ va fi şi ea convergentă.

Teorema 0.11 * *(criteriul II al comparaţiei). Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sunt două serii cu termeni pozitivi având proprietatea că există numerele reale c şi d, cu $0 < c < d$, şi există un număr natural k astfel încât $b_n > 0$, şi $c \leq \dfrac{a_n}{b_n} \leq d$ oricare ar fi numărul natural $n \geq k$, atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Notând $u_n = cb_n$ şi $v_n = db_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, din ipoteză rezultă că avem

$$u_n \leq a_n \leq v_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k. \tag{9}$$

Considerând seriile $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=k}^{\infty} v_n$, ele vor avea aceeaşi natură cu a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Deci:

i) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, din (9), aplicând teorema 0.10, deducem că seria $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ este convergentă şi, prin urmare, şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergentă.

ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci în baza teoremei 0.10 şi a inegalităţii (9) va rezulta că şi seria $\sum_{n=k}^{\infty} v_n$ este divergentă, ceea ce implică divergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. $\square$

Consecinţa 0.12 *Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sunt două serii ce termeni pozitivi având proprietatea că $b_n > 0$ de la un anumit rang, şi dacă există $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = v$, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) Dacă $0 < v < +\infty$, atunci cele două serii au aceeaşi natură.

b) Dacă $v = 0$ şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

c) Dacă $v = +\infty$ şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

*Demonstraţie.** a) Aplicând definiţia limitei rezultă că există un rang k astfel încât

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - v\right| \leq \frac{v}{2}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k.$$

De aici, luând $c = v/2$ şi $d = 3v/2$ şi aplicând teorema 0.11, rezultă că cele două serii au aceeaşi natură.

b) Aplicând definiţia limitei şi ţinând cont că seriile sunt cu termeni pozitivi rezultă că există un rang k astfel încât să avem

$$\frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k,$$

ceea ce implică $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Întrucât seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ este convergentă, în baza primului criteriu al comparaţiei rezultă că şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

c) Aplicând definiţia limitei rezultă că există un rang k astfel încât pentru orice număr natural $n \geq k$, să avem $\dfrac{a_n}{b_n} \geq 1$, ceea ce implică $a_n \geq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Aplicând primul criteriu al comparaţiei deducem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă. □

Exemplul 0.10. Fie seria $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n!}{\ln^2 n}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n!}{\ln^2 n}}{\dfrac{n}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} (n-2)!\frac{n-1}{\ln n} = +\infty,$$

având în vedere exemplul 0.1 şi aplicând consecinţa 0.12 concludem că seria dată este şi ea divergentă.

Tot ca şi consecinţe ale primului criteriu al comparaţiei şi a consecinţei 0.2, obţinem criteriul rădăcinii (al lui A. L. Cauchy) şi criteriul raportului (al lui Jean le Rond d'Alembert). Propunem cititorului să demonstreze teoremele 0.13, 0.16 şi 0.20 ca exerciţiu, seria cu care se face comparaţia fiind seria geometrică. De asemenea, ţinând cont de definiţia limitei, din teorema 0.13, respectiv din 0.16, se obţine consecinţa 0.14, respectiv 0.17.

Teorema 0.13 * *(criteriul rădăcinii sau al lui Cauchy)*

Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este o serie cu termeni pozitivi, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

a) dacă există un număr $\lambda \in [0,1[$ şi există un număr natural k astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$, oricare ar fi numărul natural n, $n \geq k$, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă;

b) dacă mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2,\ \sqrt[n]{a_n} \geq 1\}$ este infinită, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

Cei care doresc, pot găsi demonstraţia acestei teoreme în [4], capitolul 3, teorema 2.4.

Consecinţa 0.14 *

Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este o serie cu termeni pozitivi atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

a) dacă $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă;

b) dacă $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

Cei care doresc, pot găsi demonstraţia acestei teoreme în [4], capitolul 3, teorema 2.5.

Ca un caz particular, pe care îl vom utiliza în exerciţii, obţinem rezultatul care urmează.

Consecinţa 0.15 *(criteriul rădăcinii - forma practică)*

Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie cu termeni pozitivi atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a') dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

b') dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

Exemplul 0.11. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Cum $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, în baza consecinţei 0.14 deducem că seria dată este convergentă.

Teorema 0.16 * *(criteriul raportului sau al lui d'Alembert). Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie cu termeni strict pozitivi, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) Dacă există un număr real $\lambda \in]0,1[$ *şi există un număr natural k astfel încât oricare ar fi numărul natural n,* $n \geq k$*, să avem* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$*, atunci seria este convergentă.*

b) Dacă există un număr natural k astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$*, oricare ar fi numărul natural n,* $n \geq k$*, atunci seria este divergentă.*

Cei care doresc, pot găsi demonstraţia acestei teoreme în [4], capitolul 3, teorema 2.6.

Consecinţa 0.17 * *Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie cu termeni strict pozitivi, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) Dacă $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă.*

b) Dacă $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

Cei care doresc, pot găsi demonstraţia acestei teoreme în [4], capitolul 3, consecinţa 2.7.

Ca un caz particular, pe care îl vom utiliza în exerciţii, obţinem rezultatul care urmează.

Consecinţa 0.18 *(forma practică a criteriului raportului) Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie cu termeni strict pozitivi, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a') dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

b') dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

Exemplul 0.12. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

în baza consecinţei 0.17 concludem că seria dată este convergentă.

În exerciţii de obicei se utilizează următoarea consecinţă, cunoscută sub denumirea de forma practică a criteriului lui Raabe-Duhamel, consecinţă care rezultă imediat din criteriu dacă se ţine cont de definiţia limitei.

Consecinţa 0.19 *Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este o serie cu termeni strict pozitivi şi dacă există*

$$t = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$

atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:

a) Dacă $t > 1$*, atunci seria este convergentă.*

b) Dacă $t < 1$*, atunci seria este divergentă.*

Exemplul 0.13. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$, unde r este un parametru real. Vom determina mai întâi valorile lui r pentru care seria este absolut convergentă. Se observă uşor că dacă am aplica criteriul raportului sau criteriul rădăcinii nu an putea preciza natura seriei formate cu valorile absolute ale termenilor. Vom aplica forma practică a criteriului lui Raabe-Duhamel. Notând

$$a_n = \left|\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}\right|,$$

pentru fiecare număr natural n, avem

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\left|\frac{n+1}{r-n}\right| - 1\right).$$

Deoarece trebuie să calculăm limita când $n \to +\infty$, putem presupune $n > r$. Prin urmare

$$n\left(\left|\frac{n+1}{r-n}\right| - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{n-r} - 1\right) = \frac{n(r+1)}{n-r}.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(1+r)n}{n-r} = 1 + r$. Rezultă că, dacă $r > 0$, atunci seria este absolut convergentă, deci şi convergentă.

Dacă $r = 0$, atunci obţinem seria $\sum_{n=0}^{\infty} 0$ care evident este o serie convergentă.

Dacă $r < 0$, făcând substituţia $s = -r$, avem $s > 0$, şi seria se retranscrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)(-s-1)\dots(-s-n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}$$

care este o serie alternată. Notând

$$x_n = (-1)^n \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

se observă că, dacă $r \le -1$, atunci

$$|x_n| = \left|(-1)^n \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\right| \ge \frac{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}{n!} = 1.$$

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, ceea ce, în baza consecinţei 0.2, conduce la concluzia că în acest caz seria este divergentă.

A rămas de studiat cazul $-1 < r < 0$. În vederea aplicării criteriului lui Leibniz, cercetăm monotonia şirului $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Avem

$$|x_{n+1}| = |x_n| \frac{n-r}{n+1} < |x_n|,$$

deci şirul este descrescător. Pentru a calcula limita acestui şir, vom face apel la un şir ajutător $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construit după regula: $y_1 = |x_1|$ şi $y_n = n|x_n| - (n-1)|x_{n-1}|$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se observă uşor că

$$\frac{y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1}{n} = |x_n|, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

În baza unui rezultat binecunoscut de la şiruri de numere reale (şirul mediilor aritmetice formate cu termenii unui şir convergent de numere reale este convergent şi are aceeaşi limită cu a şirului iniţial) şirurile $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, au aceeaşi limită. Fie aceasta α.

Pe de altă parte, explicitând pe $|x_n|$ şi înlocuind în expresia lui y_n, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obţinem

$$y_n = n\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!} - (n-1)\frac{s(s+1)\ldots(s+n-2)}{(n+1)!} = s|x_{n-1}|.$$

Trecând la limită în relaţia de mai sus obţinem $\alpha = r \cdot \alpha$, egalitate care, ţinând cont că $r \neq 0$, conduce la concluzia că $\alpha = 0$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Aplicând acum criteriul lui Leibniz suntem conduşi la concluzia că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}$ este convergentă.

Alte criterii pentru serii cu termeni pozitivi

Teorema 0.20 * *(criteriul III al comparaţiei) ([1], teorema 3.2.7). Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *sunt două serii cu termeni pozitivi având proprietatea că există un număr natural* k *astfel încât pentru orice număr natural* n, $n > k$, *să avem* $a_n > 0$, $b_n > 0$, *şi* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, *atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

1) Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă.*

2) Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

Teorema 0.21 * *(criteriul de condensare al lui A. L. Cauchy). Dacă şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere strict pozitive, descrescător, atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Fie $k \in \mathbb{N}$ şi fie $T_k = \sum_{j=1}^{k} 2^j x_{2^j}$. Pentru orice număr natural n, cu $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$, calculând suma parţială de rang n şi ţinând cont că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător avem

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + \ldots + x_n \leq x_1 + \ldots + x_{2^{k+1}-1} \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2^k} + \ldots + x_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + \ldots + 2^k x_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

Pe de altă parte putem scrie

$$
\begin{aligned}
s_n &= x_1 + \ldots + x_n \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k} \\
&= x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + \ldots + x_8) + \ldots + (2_{2^{k-1}+1} + \ldots + x_{2^k}) \\
&\geq x_1 + x_2 + 2x_{2^2} + 4x_{2^3} + \ldots + 2^{k-1}x_{2^k} \\
&= x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(2^2 x_{2^2}) + \ldots + \frac{1}{2}(2^k x_{2^k}) \\
&\geq \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots + 2^k x_{2^k}) = \frac{1}{2}T_k.
\end{aligned}
$$

Din inegalităţile scrise mai sus deducem că

$$\frac{1}{2}T_k \leq s_n \leq T_k, \tag{10}$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, cu $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Inegalitatea (10) implică faptul că şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de asemenea mărginit. Dar $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul sumelor parţiale corespunzător seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$. În baza teoremei 0.9 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit. Inegalitatea (10) implică faptul că şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de asemenea nemărginit. Deoarece $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul sumelor parţiale corespunzător seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$, în baza teoremei 0.9 rezultă că această serie este divergentă. □

În ultimul subparagraf se dă un exemplu elocvent de aplicare a principiului condensării a lui Cauchy la determinarea naturii seriei armonice generalizate.

Teorema 0.22 * *(criteriul lui Ernst Eduar Kummer). Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este o serie cu termeni strict pozitivi şi dacă $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale strict pozitive atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) Dacă există un număr natural $\lambda > 0$, şi dacă există un număr natural k astfel încât

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \geq \lambda, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k, \tag{11}$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} t_n$ este divergentă şi există un număr natural k astfel încât oricare ar fi numărul natural $n \geq k$, să avem

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 0, \tag{12}$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

Demonstraţie. Deoarece natura unei serii nu se modifică dacă se modifică un număr finit de termeni ai săi, presupunem că am modificat termenii seriei astfel încât inegalitatea

(11), respectiv inegalitatea (12) în cazul b), să fie adevărată pentru orice număr natural n. Atunci, pentru orice număr natural n, din (11) deducem că

$$\begin{aligned}
&\lambda a_0 = \lambda a_0 \\
&t_0 a_0 - t_1 a_1 \geq \lambda a_1 \\
&t_1 a_1 - t_2 a_2 \geq \lambda a_2 \\
&\dots \\
&t_n a_n - t_{n+1} a_{n+1} \geq \lambda a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi, obţinem

$$(\lambda + t_0) a_0 \geq (\lambda + t_0) a_0 - t_{n+1} a_{n+1} \geq \lambda s_{n+1},$$

ceea ce demonstrează că şirul sumelor parţiale este mărginit. Cum seria este cu termeni pozitivi, rezultă că seria este convergentă.

b) Din inegalitatea

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

rezultă, ţinând cont de pozitivitatea termenilor şirului şi seriei, că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{t_{n+1}}}{\frac{1}{t_n}} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Aplicând acum criteriul III de comparaţie rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă. $\square$

Ca o consecinţă a criteriului lui E. E. Kummer obţinem un criteriu foarte eficient, des aplicat în practică.

Teorema 0.23 *(criteriul lui J. L. Raabe şi J. Duhamel*). Dacă $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este o serie cu termeni strict pozitivi, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:*

a) Dacă există un număr real t, $t > 1$, şi dacă există un număr natural k astfel încât

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq t, \textit{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k,$$

atunci seria este convergentă.

b) Dacă există un număr natural k astfel încât

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq t, \textit{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k,$$

atunci seria este divergentă.

Demonstraţie. Alegem şirul $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $t_n = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1. \tag{13}$$

a) Ţinând cont de relaţia de mai sus şi de ipoteza punctului a) obţinem

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \geq t - 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k,$$

ceea ce ne conduce, aplicând criteriul lui Kummer cu $\lambda = t - 1 > 0$, la concluzia că seria este convergentă.

Din (13), ţinând cont de ipoteza punctului b) obţinem

$$t_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 1 - 1 = 0 < 1 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq k.$$

Deoarece seria armonică este divergentă, putem aplica criteriul lui Kummer. Suntem conduşi la concluzia că seria este divergentă. □ Forma practică a criteriului lui J. L. Raabe şi J. Duhamel am prezentat-o mai inainte.

Ca şi consecinţe ale criteriului lui Kummer se pot obţine şi alte criterii de convergenţă dintre care amintim criteriul logaritmic al lui J. Bertrand şi criteriul lui Carl Friedrich Gauss.

Bibliografie

[1] ANDRICA D., DUCA I.D., PURDEA I., POP I.: *Matematica de bază.* Editura Studium, Cluj-Napoca, 2000.

[2] BREKCNER W.W.: *Analiză matematică. Topologia spaţiului* $\mathbb{R}^n$. Universitatea din Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică, Cluj-Napoca, 1985.

[3] BUCUR Gh., CÂMPU E., GĂINĂ S.: *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral.* Vol. I, II, III. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966, 1967.

[4] COBZAŞ ŞT.: *Analiză matematică (Calculul diferenţial).* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.

[5] DEMIDOVICH B.: *Problems in mathematical analysis.* Mir, Moscou, 1968.

[6] DRÂGUŞIN L., DRÂGUŞIN C, CISLARU C.: *Analiză matematică. Calcul diferenţial.* Ed. Teora, Bucureşti, 1993

[7] DRÂGUŞIN L., DRÂGUŞIN C., RADU C.: *Calcul integral şi ecuaţii diferenţiale. Exerciţii şi probleme.* Du Style, 1996.

[8] FIHTENHOLT G.M.: *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.

[9] LUPŞA L., BLAGA L.:*Analiză matematică. Note de curs 1*. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2003.

[10] MEGAN M.: *Bazele analizei matematice.* Vol. I-III. Ed. BIT, Timişoara, 2000, 2001, 2002.

[11] MUREŞAN M.: *Mathematical Analysis and Applications*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2008.

[12] MUREŞAN M.: *A Concrete Approach to Classical Analysis*, Springer, New York, 2009.

[13] NIKOLSKY S.M.: *A Course of Mathematical Analysis*. Vol. I si II. Mir Publishers, Moscow, 1981.

[14] POPOVICIU T.: *Curs de analiză matematică*. Vol. I-III. Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj, Facultatea de Matematică - Mecanică, Cluj, 1970.

[15] PRECUPANU A.M.: *Analiză matematică*. Vol. I si II. Universitatea "Alexandru Ioan Cuza", Facultatea de Matematică-Fizică, Iaşi, 1987.

[16] TRIF T.: *Probleme de calcul diferenţial şi integral în* $\mathbb{R}^n$, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2003.

[17] *** : *Analiză matematică*. vol I (Ed. a V-a), vol II (Ed. a III-a). Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

Observaţie. Poate fi utilizat orice alt curs sau altă culegere de probleme de analiză matematică, care cuprinde calculul diferenţial şi integral al funcţiilor reale de mai multe variabile reale.