SUPORT PENTRU CURSUL 4
Polinomul lui Taylor. Aplicaţii. II

25 octombrie 2012

1 Polinomul lui B. Taylor

Reamintim modul în care se construieşte polinomul lui Taylor de gradul n.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi fie n un număr natural, $n \geq 1$. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este de n ori derivabilă în punctul $x^0 \in I \cap I'$, polinomul lui Taylor de gradul n ataşat funcţiei f în punctul x^0 este:

$$T_n(f; x^0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x^0)}{j!}(\mathrm{x} - x^0)^j. \tag{1}$$

Acestui polinom îi vom ataşa funcţia polinomială corespunzătoare, pe care o vom nota tot prin $T_n(f; x^0)$, sau, atunci când nu e pericol de confuzie (se subînţelege clar cine este funcţia şi punctul), prin T_n. Avem deci $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x^0)}{j!}(x - x^0)^j, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Fiind o funcţie polinomială, funcţia T_n este de ori câte ori derivabilă şi avem:

$$T_n^{(k)}(x^0) = \begin{cases} f^{(k)}(x^0), \text{ pentru fiecare } k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \\ 0, \text{ pentru fiecare } k > n. \end{cases}$$

Dorim să utilizăm funcţia polinomială T_n pentru aproximarea valorilor funcţiei f. Întrebarea care se pune este cea referitoare la eroarea pe care o comitem dacă, într-un calcul, folosim valoarea $T_n(x)$ în loc de $f(x)$. Pentru aceasta introducem funcţia rest de ordin n, pe care o vom numi simplu restul de ordin n, notată prin R_n,

$$R_n \ = \ f \ - \ T_n \tag{2}$$

Evident avem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ oricare ar fi } x \in I. \tag{3}$$

Teorema 1.1 *(formula lui G. Peano). Dacă I este un interval al lui $\mathbb{R}$ şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, este derivabilă de n ori în punctul $x^0 \in I$, atunci*

$$\lim_{x \to x^0} \frac{R_n(x)}{(x - x^0)^n} = \lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x^0)^n} = 0. \tag{4}$$

Demonstraţie. Fără greutate se vede că putem aplica succesiv, de $n-1$ ori, regula lui l'Hospital. Ţinând cont că

$$T_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x^0) + \frac{1}{1!}f^{(k+1)}(x^0)(x-x^0)\ldots + \frac{1}{(n-k)!}f^{(n)}(x^0)(x-x^0)^{n-k}$$

şi că

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x^0)}{x - x^0} = f^{(n)}(x^0)$$

obţinem

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x^0)^n} = \lim_{x\to x^0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x^0)^{n-1}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to x^0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n\cdot\ldots\cdot 2(x-x^0)} =$$

$$= \lim_{x\to x^0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x^0) - f^{(n)}(x^0)(x-x^0)}{n!(x-x^0)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x^0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x^0)}{x-x^0} - f^{(n)}(x^0)\right) = 0.\diamond$$

Consecinţa 1.2 *(teorema lui B. Taylor şi J. Young). Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval al lui $\mathbb{R}$, este derivabilă de n ori în punctul $x^0 \in I$, atunci există o funcţie $\alpha_n : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:*
1) $\alpha_n(x^0) = 0$;
2) funcţia α_n este continuă în x^0;
3) oricare ar fi $x \in I$ avem

$$f(x) = T_n(x) + (x-x^0)^n\alpha_n(x).$$

Demonstraţie. Fie funcţia $\alpha_n : I \to \mathbb{R}$,

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}, \text{ dacă } x \in I\setminus\{x^0\} \\ \\ 0, \text{ dacă } x = x^0. \end{cases}$$

Evident avem $\alpha_n(x^0) = 0$ şi, în baza teoremei anterioare, deducem că funcţia α_n este funcţie continuă în punctul x^0, căci $\lim\limits_{x\to x^0} \alpha(x) = 0 = \alpha(x^0)$. Din modul în care am definit funcţia R_n şi funcţia α_n rezultă egalitatea de la punctul 3).$\diamond$

Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Schlömilch-Roche, sub forma lui Cauchy şi sub forma lui Lagrange. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x^0 \in I$ şi fie $f : I \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.3 *(formula lui B. Taylor cu restul lui Schlömilch-Roche). Dacă funcţia f este de $n+1$ ori derivabilă pe I, atunci oricare ar fi numărul natural p, $p \geq 1$, şi oricare ar fi $x \in I$, există un element c în intervalul deschis cu capetele în x şi x^0 astfel încât*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{(x-x^0)^p(x-c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c). \tag{5}$$

Demonstraţie. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi fie $x \in (I \setminus \{x^0\})$. Fie numărul real K pentru care avem egalitatea

$$f(x) = T_n(x) + K(x-x^0)^p = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^0)(x-x^0)^k + K(x-x^0)^p. \tag{6}$$

Considerăm acuma funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) := T_n(f;t)(x) + K(x-t)^p = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x-t)^k + K(x-t)^p.$$

Avem $\varphi(x) = f(x)$ şi, din (6), deducem că $\varphi(x^0) = f(x)$. Deoarece $\varphi(x^0) = \varphi(x)$, funcţia φ este derivabilă pe segmentul deschis cu capetele în x şi x^0 şi continuă pe intervalul închis cu capetele în x şi x^0, putem aplica teorema lui Rolle. Deducem că există un c aparţinând intervalului deschis cu capetele în x şi x^0 astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Cum

$$\varphi'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} - Kp(x-t)^{p-1} =$$

$$\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - Kp(x-t)^{p-1},$$

deducem că avem

$$\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) - Kp(x-c)^{p-1} = 0.$$

De aici obţinem următoarea valoare a lui K :

$$K = \frac{(x-c)^{n-p+1}}{pn!} f^{(n+1)}(c).$$

Înlocuind pe K în (6) obţinem (5).$\diamond$

Dacă luăm $p = 1$, din (5) obţinem

$$f(x) = T_n(x) + \frac{(x-x^0)(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c), \tag{7}$$

rezultat cunoscut sub denumirea de *formula Taylor cu restul sub forma lui Cauchy.*

Dacă luăm $p = n + 1$, din (5) obţinem

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x^0)^{n+1}, \tag{8}$$

rezultat cunoscut sub denumirea de *formula Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.*

Numărul

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)(x - x^0)^{n+1}$$

se numeşte restul de ordinul n sub forma lui Lagrange.

Deoarece

$$I = \{x^0 + t(x - x^0) |\ t \in [0,1]\} = \begin{cases} [x, x^0], & x \leq x^0 \\ [x^0, x], & x > x^0 \end{cases} a$$

faptul că $c_x \in int\, I$ implică existenţa unui $\theta \in]0,1[$ astfel încât $c_x = x^0 + \theta(x - x^0)$.

Dacă în teorema anterioară precizăm capetele intervalului ca fiind a şi b, luăm $p = n$ şi explicităm pe c_x cu ajutorul lui θ obţinem următoarea reformulare a formulei lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

Teorema 1.4 *(formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange). Dacă a şi b sunt numere reale cu $a < b$, $x^0 \in [a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe $]a, b[$ şi de n ori derivabilă pe $[a, b]$ cu derivata de ordinul n continuă pe $[a, b]$, atunci oricare ar fi $x \in [a,b]$ există un număr real $\theta \in]0,1[$ astfel încât să avem*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0)^{n+1}. \tag{9}$$

Observaţie. În cazul în care $x^0 = 0$, formula (9) mai poartă denumirea de formula lui Colin Mac-Laurin.

Exemplul 1.1. Pentru funcţia $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$ pentru fiecare $x \in]-1,+\infty[$, aplicând formula lui B. Taylor cu restul de ordin n sub forma lui J. L. Lagrange în punctul $x^0 = 0$, deducem că, oricare ar fi $x \in]-1,+\infty[$, există un c_x aparţinând segmentului cu capetele în x şi 0 astfel încât să avem

$$\ln(x+1) = \ln 2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j \cdot 2^j}(x-1)^j + \frac{(-1)^n}{(n+1)(c_x+1)^{n+1}}(x-1)^{n+1}.$$

Exemplul 1.2. Să se construiască funcţia polinomială corespunzătoare polinomului lui Taylor de gradul 5 ataşat funcţiei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, în punctul 0 şi apoi să se precizeze cu ce eroare este aproximată valoarea funcţiei f în punctul $x = 1/5$ dacă facem aproximarea $f(1/5) \simeq T_5(1/5)$. Avem $(e^x)^{(k)} = e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, pentru orice număr natural k. Prin urmare

$$T_5(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vom avea

$$T_5\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{146,56832}{120} = \frac{3,664208}{3}.$$

În conformitate cu teorema 1.4, va exista un $c_x \in]0, 1/5[$ astfel încât

$$R_5\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6!} e^{c_x} \left(\frac{1}{5}\right)^6.$$

Eroarea comisă va fi mai mare decât

$$\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{1}{720 \cdot 15625} = \frac{1}{11250000} = \frac{0,0000008}{9}$$

şi mai mică decât $\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \sqrt[5]{e} < 0,0000001.$

2 Condiţii necesare şi suficiente pentru punctele de extrem

În cele ce urmează vom da o aplicaţie a polinomului lui Taylor la stabilirea naturii unui punct staţionar.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in \text{int}(I)$ şi $f : I \to \mathbb{R}$.

Teorema 2.1 *Dacă funcţia f este de n-ori derivabilă în punctul x^0,*
i) $f'(x^0) = \ldots = f^{(n-1)}(x^0) = 0$ şi
ii) $f^n(x^0) \neq 0$,
atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:
1) punctul x^0 este un punct de minim local, dacă şi numai dacă n este par şi $f^n(x^0) > 0$;
2) punctul x^0 este un punct de maxim local, dacă şi numai dacă n este par şi $f^n(x^0) < 0$;
3) punctul x^0 este punct de extrem local minim local, dacă şi numai dacă n este par.

Demonstraţie. Funcţia f satisface ipotezele din consecinţa 1.2. Deci va exista o funcţie $\alpha_n : I \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = f(x^0) + (x - x^0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!} + \alpha_n(x)\right], \ \forall\, x \in I. \tag{10}$$

Deoarece $f^{(n)}(x^0) \neq 0$ şi deoarece funcţia α_n este continuă în punctul x^0 şi $\alpha_n(x^0) = 0$, va exista o vecinătate U a punctului x^0 astfel încât

$$\text{sgn}\left[\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!} + \alpha_n(x)\right] = \text{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!}\right) \in \{-1, 1\}. \tag{11}$$

1) *Necesitatea.* Fie x^0 un punct de minim local. Va exista o vecinătate V a punctului x^0 astfel încât $f(x) \leq f(x^0)$, oricare ar fi $x \in I \cap V$. Din (10) deducem că

$$f(x) - f(x^0) = (x - x^0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!} + \alpha_n(x)\right] < 0, \ \forall\, x \in (I \cap V \cap U), \ x \neq x^0,$$

iar ţinând cont de (11), obţinem

$$f(x) - f(x^0) = (x - x^0)^n \frac{f^{(n)}(x^0)}{n!} < 0,\ \forall\, x \in (I \cap V \cap U),\ x \neq x^0. \tag{12}$$

Să remarcăm faptul că deoarece $x^0 \in \mathrm{int}(I)$ şi deoarece $V \cap U$ este o vecinătate a punctului x^0, deducem că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x^0 - \varepsilon,\ x^0 + \varepsilon) \subseteq (I \cap V \cap U)$. Dacă n ar fi număr natural impar, atunci luând $x' = x^0 - \frac{\varepsilon}{2}$ şi $x'' = x^0 + \frac{\varepsilon}{2}$ avem $(f(x') - f(x^0)) \cdot (f(x'') - f(x^0)) < 0$, ceea ce contrazice ipoteza că x^0 este un punct de minim local. Deci n trebuie să fie număr natural par. În această situaţie, ţinând cont de (12), deducem că $\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!} < 0$, adică $f^{(n)}(x^0) < 0$.

Suficienţa. Fie n par şi fie $f^{(n)}(x^0) < 0$. Din (10) şi (11) deducem că $\mathrm{sgn}(f(x) - f(x^0)) = \mathrm{sgn}((x - x^0)^n) \cdot \mathrm{sgn}(\frac{f^{(n)}(x^0)}{n!})$. Deoarece n este număr natural par şi $f^{(n)}(x^0) < 0$, rezultă că $\mathrm{sgn}(f(x) - f(x^0)) = -1$. Deci x^0 este un punct de minim local.

Analog se demonstrează şi punctul 2). De aici deducem imediat că şi 3) este adevărat.$\diamond$

3 Funcţii dezvoltabile în serie Taylor

Vom defini mai întâi noţiunea de funcţie indefinit derivabilă într-un punct, apoi vom defini ce înţelegem prin funcţie dezvoltabilă în serie Taylor într-un punct şi vom da o condiţie suficientă de dezvoltabilitate a unei funcţii în serie Taylor într-un punct.

Funcţie indefinit derivabilă. Dacă oricare ar fi numărul natural n, funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă de n ori în fiecare punct $x^0 \in E \subseteq A \cap A'$, vom spune că f este indefinit derivabilă pe E.

EXEMPLUL 3.1. i) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 5$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcţia este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi avem:
$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;
$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;
$f^{(3)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = 6$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;
şi
$f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 0$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$,
oricare ar fi numărul natural $n \geq 4$.

ii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru fiecare număr natural k avem:

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2}),\ \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţie dezvoltabilă în serie Taylor într-un punct. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe I şi fie $x^0 \in \mathrm{int}\, I$. Fiecărui punct $x \in I$ putem să-i ataşăm seria numerică

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^0)(x - x^0)^k. \tag{13}$$

Dacă, pentru fiecare $x \in I$, seria (13) este convergentă, atunci putem considera funcţia care fiecărui $x \in I$ îi ataşează numărul real egal cu suma seriei (13). Funcţia astfel obţinută se numeşte seria Taylor ataşată funcţiei f în x^0. Dacă, în plus, suma seriei (13) este egală cu $f(x)$ în fiecare punct $x \in I$, spunem că f este dezvoltabilă în serie Taylor pe I în x^0.

Remarcăm faptul că seria (13) este o serie de puteri. Mai multe despre serii de funcţii şi, mai ales, despre serii de puteri, găsiţi la sfârşitul acestui curs, după probleme.

Ţinând cont de modul în care am definit restul de ordinul n, adică de faptul că pentru orice $x \in I$ avem $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, deducem că:
o funcţie reală f, definită pe un interval I şi indefinit derivabilă într-un punct $x^0 \in \text{int}I$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe I dacă şi numai dacă şirul $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la 0 în fiecare punct $x \in I$.

În continuare vom da o condiţie suficientă ca acest lucru să se întâmple.

Teorema 3.1 *Fie $x^0 \in \mathbb{R}$ şi fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval simetric în raport cu x^0. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este indefinit derivabilă pe I şi dacă există un număr real M cu proprietatea că*

$$|f^k(x - x^0)| \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in I \text{ şi oricare ar fi } k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor pe I în x^0.

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, este dezvoltabilă în serie Taylor pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, avem

$$|f^{(k)}(x) = |\sin^{(k)} x| \; = \; |\sin(x + k\frac{\pi}{2}| \leq 1, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

În baza teoremei 3.1, funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor pe $\mathbb{R}$ în $x^0 = 0$. Ţinând cont că

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^p, \text{ dacă } k = 2p, \\ 0, \text{ dacă } k = 2p + 1, \end{cases}$$

seria Taylor ataşată lui f în $x^0 = 0$ este

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

Probleme propuse pentru seminar şi temă de casă

I. Construiţi polinomul lui Taylor de gradul n ataşat funcţiei f în punctul x^0 dacă:
a) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \ln(2x-1)$, $x^0 = 1$;
b) $n = 3$, $n = 5$, $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $x^0 = 0$;
c) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \cos x$, $x^0 = 0$;
d) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$, $x^0 = 2$;
e) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $x^0 = 2$;
f) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = e^x \sin x$, $x^0 = \pi/4$;
g) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, $x^0 = 0$;
h) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sin x$, $x^0 = 0$.

II. Scrieţi formula lui Taylor de ordin n cu restul sub forma lui Lagrange pentru funcţia:
i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, dacă $x^0 = 0$; care este eroarea comisă dacă se face aproximarea $\sin^2 0,03 \simeq T_5(0,03)$.
ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x + e^{-x})^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, dacă $x^0 = 0$; care este eroarea comisă dacă se face aproximarea $(e^{0,02} + e^{-0,02})^3 \simeq T_3(0,02)$.

III) Arătaţi că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe I în x^0 şi construiţi seria Taylor corespunzătoare lui f în punctul x^0, dacă:
i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $x^0 = 0$;
ii) $f : [-20, 20] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, oricare ar fi $x \in [-20, 20]$ şi $x^0 = 0$;
iii) $f :]-1, 1[$, $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$, oricare ar fi $x \in]-1, 1[$ şi $x^0 = 0$.

4 Şiruri şi serii de funcţii (Opţional)

Teoria şirurilor şi seriilor de funcţii are la bază teoria şirurilor şi seriilor de numere reale. Una dintre cele mai importante aplicaţii ale şirurilor sau seriilor de funcţii constă în aproximarea funcţiilor, care au o reprezentare analitică complicată, prin funcţii cu o reprezentare analitică simplă, în special prin polinoame.

Şiruri de funcţii. Fie funcţiile reale

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

definite pe aceeaşi mulţime $A \subset \mathbb{R}$.

Punctul $a \in A$ se numeşte *punct de convergenţă* pentru şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă şirul de numere $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Mulţimea de convergenţă a unui şir de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mulţimea formată din toate punctele de convergenţă ale şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mulţimea de convergenţă a unui şir de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o vom nota în general cu M_c. Evident $M_c \subseteq A$ şi avem:

$$M_c = \{x \in A \,|\, \text{şirul } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ este convergent}\}.$$

Limita unui şir de funcţii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe A, având mulţimea de convergenţă M_c, nevidă.

Definiţie. *Funcţia $f : M_c \to \mathbb{R}$ ale cărei valori sunt date de egalitatea*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall x \in M_c,$$

se numeşte limita şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Despre şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spunem că este convergent punctual (sau simplu) către funcţia f şi vom nota acest lucru prin

$$f_n \overset{n\to\infty}{\to} f \quad \text{sau, simplu, prin} \quad f_n \to f$$

În limbaj "$\varepsilon - r$" rezultă că $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ pe M_c dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in M_c,\ \exists\, r_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N},\ \text{încât } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq r_{\varepsilon,x}. \tag{15}$$

Exemplul 4.1. Fie funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite respectiv prin:

$$f_n(x) = x^2 + n, \quad g_n(x) = x^n + x + 1, \quad h_n(x) = \frac{x^2}{n+1},$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Mulţimea de convergenţă a şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mulţimea vidă, pentru că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, şirul de numere $(a^2 + n)$ are limita $+\infty$. Şirul nu are limită.

Mulţimea de convergenţă a şirului $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este intervalul semiînchis $]-1, 1]$, pentru că

$$\lim_{n\to\infty}(x^n + x + 1) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } |x| < 1 \\ 3, \text{ dacă } x = 1 \\ +\infty, \text{ dacă } x \in]1, +\infty[\\ \text{nu există, dacă } x \in]-\infty, -1] \end{cases}$$

Prin urmare, limita şirului este funcţia $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } |x| < 1 \\ 3, \text{ dacă } x = 1 \end{cases} .$$

Mulţimea de convergenţă a şirului $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este toată axa reală, pentru că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n+1} = 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Limita :sirului este funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Alături de convergenţa simplă sau punctuală a unui şir de funcţii, definită anterior, se defineşte şi noţiunea de convergenţă uniformă, noţiune bogată în aplicaţii.

Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii. Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcţia f pe mulţimea M_c dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $r_\varepsilon \in \mathbb{N}$, încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall\, x \in M_c, \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N},\ n \geq r_\varepsilon.$$

Faptul că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către f îl notăm prin $f_n \rightrightarrows f$.

Interpretarea geometrică a convergenţei uniforme a unui şir de funcţii este următoarea. Dacă (f_n) converge uniform către f pe mulţimea M_c, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o bandă de lăţime 2ε în jurul graficului funcţiei f, încât, începând de la un rang $r_\varepsilon \in \mathbb{N}$, toate funcţiile f_n au graficele în această bandă.

Deoarece limita unui şir de funcţii uniform convergente păstrează unele proprietăţi ale termenilor şirului, în cele ce urmează vom da o condiţie suficientă de convergenţă uniformă.

Teorema 4.1 *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe $M \subseteq \mathbb{R}$ şi fie $f : M \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere pozitive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent către zero, astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \ \textit{pentru orice } x \in M,$$

atunci şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către f pe mulţimea M.

Exemplul 4.2. Şirul definit prin termenul general

$$f_n(x) = \frac{n^4 + \sin x}{n^4}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

converge uniform către funcţia constantă $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

În adevăr, avem

$$\left| \frac{n^4 + \sin x}{n^4} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$$

unde şirul de numere $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ converge la zero, deci conform teoremei anterioare, rezultă că (f_n) converge uniform către $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLUL 4.3. Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit pe $]0, 1[$ prin

$$f_n(x) = x^n, \ \forall x \in]0, 1[,$$

este convergent punctual către $f(x) = 0$, $\forall x \in]0, 1[$, dar şirul nu este convergent uniform.

În adevăr, fie $0 < \varepsilon < 1$ şi să presupunem că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât

$$f_n(x) - f(x) \ = \ x^n \ < \ \varepsilon, \ \forall x \in]0, 1[, \text{ pentru fiecare număr natural } n \geq n_\varepsilon.$$

De aici deducem că $x^{n_\varepsilon} < \varepsilon$, $\forall x \in]0, 1[$, adică $n_\varepsilon \ln x < \ln \varepsilon$. Cum $x \in]0, 1[$, avem $\ln x < 0$. Deci, obţinem

$$n_\varepsilon \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}, \ \forall\, x \in]0, 1[.$$

Acest lucru implică

$$n_\varepsilon \geq \lim_{x\to 0} \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = +\infty,$$

ceea ce este absurd.

Proprietăţi ale şirurilor de funcţii convergente uniform

Propoziţia 4.2 *(continuitatea limitei) Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii continue pe M, convergent uniform către f pe mulţimea M, atunci şi f este continuă pe M.*

Propoziţia 4.3 *(derivabilitatea limitei) Dacă (f_n) este un şir de funcţii derivabile pe M, convergent către f pe mulţimea M, iar şirul derivatelor (f_n') este convergent uniform pe M, atunci f este derivabilă şi*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Teorema anterioară este numită teorema de derivare termen cu termen a unui şir de funcţii.

Propoziţia 4.4 *(integrabilitatea limitei) Dacă (f_n) este un şir de funcţii integrabile pe $[a, b]$, convergent uniform către f pe $[a, b]$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema anterioară este numită teorema de integrare termen cu termen a unui şir de funcţii.

4.1 Serii de funcţii (opţional)

Fie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un şir de funcţii definite pe o aceeaşi mulţime M. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, să notăm $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Vom numi serie de funcţii ataşată şirului $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ seria $((f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$, serie notată simbolic prin $\sum_{n=1}^\infty f_n$.

Vom spune că seria $\sum_{n=1}^\infty f_n$ este *convergentă punctual* (*simplu*) pe mulţimea M, dacă şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge punctual pe M. Funcţia S, dată prin

$$S(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} s_n(x), \text{ pentru fiecare } x \in M, \tag{16}$$

se numeşte *suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Vom spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este *uniform convergentă* pe M către funcţia S dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniform pe M către f.

Ca urmare a acestei definiţii, proprietăţile sumei unei serii de funcţii se vor obţine imediat din proprietăţile limitei unui şir de funcţii.

Există tipuri particulare de serii de funcţii pentru care se pot pune în evidenţă proprietăţi în plus. Este cazul seriilor de puteri şi a seriilor trigonometrice. În cele ce urmează vom discuta numai despre serii de puteri.

4.2 Serii de puteri

Se numeşte *serie de puteri* sau *serie întreagă* o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{17}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sunt numere reale. Termenii unei serii de puteri sunt funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date prin

$$f_n = a_n x^n, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Ele sunt funcţii continue şi derivabile pe toată axa reală.

Vom demonstra mai întâi o proprietate importantă a seriilor de puteri.

Lema 4.5 *Dacă seria de puteri (17) este convergentă pentru un număr real* $x_0 \neq 0$*, atunci seria este convergentă absolut pentru orice număr real* x*, cu* $|x| < |x_0|$.

Demonstraţie. Deoarece seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, şirul termenilor ei converge către 0. Prin urmare există o constantă $c > 0$ încât

$$|a_n x_0^n| < c, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Fie $x \in \mathbb{R}$, cu $|x| < |x_0|$. Din (18) rezultă că

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| < c \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ este o serie geometrică convergentă, pentru că $\displaystyle\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Atunci, aplicând criterul comparaţiei pentru serii cu termeni pozitivi deducem că seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă, adică $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e convergentă absolut în orice punct x, încât $|x| < |x_0|$.$\diamond$

Teorema 4.6 *Pentru orice serie de puteri există un număr $R \in [0, \infty]$ astfel încât:*
i) seria e convergentă absolut pe intervalul deschis $]-R, +R[$;
ii) seria e divergentă în exteriorul intervalului închis $[-R, +R]$;
3) seria e convergentă uniform în orice interval închis $[-r, +r]$ conţinut în $]-R, +R[$.

Demonstraţie. Fără greutate se vede că orice serie de puteri este convergentă pentru $x = 0$. Deci mulţimea punctelor în care seria de puteri (19) este convergentă este nevidă. Ca urmare există numărul real, propriu sau impropriu, R

$$R = \sup \left\{ |x| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ e convergentă} \right\} \tag{19}$$

pe care îl vom numi *raza de convergenţă* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Două situaţii sunt posibile:
1) $R = 0$; în acest caz, concluziile teoremei sunt adevărate.
2) $R > 0$. Să arătăm că R îndeplineşte i) - iii).

i) Fie $x \in]-R, +R[$. Va exista un număr real $x_0 \in]x, R[$. Atunci din (19) deducem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă (în caz contrar nu am putea avea $x^0 < R$. Cum $x_0 \in]x, R[$ avem şi $|x| < |x_0|$. Conform lemei 4.5, rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă absolut.

ii) Fie $x^0 \notin [-R, +R]$. Să presupunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^0)^n$ este convergentă. Deoarece $x^0 \notin [-R, +R]$ vom avea sau $x^0 < -R$ sau $R < x^0$. În primul caz să luăm $x = (x^0 - R)/2$, iar în al doilea caz $x = (R + x^0)/2$. Aplicând lema 4.5 deducem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă, ceea ce contrazice (19).Deci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e divergentă în exteriorul intervalului $[-R, +R]$.

3) Fie $[-r, +r] \subset]-R, +R[$. Din definiţia lui R şi inegalitatea $r < R$ rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ este o serie numerică convergentă absolut.

Dacă $x \in [-r, +r]$, atunci $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$, pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$ iar din teorema de majorare a unei serii de funcţii cu o serie numerică convergentă rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e convergentă uniform. $\diamond$

Observaţie. Dacă raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este R, atunci mulţimea de convergenţă M, a seriei este unul dintre intervalele: $]-R, +R[$, $[-R, +R[$, $]-R, +R]$ sau $[-R, +R]$; apartenenţa sau neapartenenţa capătului intervalului la mulţimea de convergenţă se determină studiind convergenţa seriilor de numere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n R^n$.

Pentru calculul razei de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ putem apela la una dintre următoarele două teoreme.

Teorema 4.7 *Dacă există limita L (finită sau infinită)*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{20}$$

atunci raza de convergenţă a serie de puteri este

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{R}, \text{ dacă } 0 < L < +\infty, \\ 0, \text{ dacă } L = +\infty, \\ +\infty, \text{ dacă } L = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Demonstraţie. Fie $y \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul raportului seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$, obtinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}y^{n+1}|}{|a_n y^n|} = |y|L.$$

Seria numerică va fi convergentă dacă $|y|L < 1$ şi divergentă, dacă $|y|L > 1$. De aici rezultă concluzia teoremei.$\diamond$

Teorema 4.8 *Dacă există limita L (finită sau infinită)*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{22}$$

atunci raza de convergenţă a serie de puteri este

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{R}, \text{ dacă } 0 < L < +\infty, \\ \\ 0, \text{ dacă } L = +\infty, \\ +\infty, \text{ dacă } L = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Demonstraţie. Fie $y \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul rădăcinii seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n|$, obtinem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n y^n|} = |y|L.$$

Seria numerică va fi convergentă dacă $|y|L < 1$ şi divergentă, dacă $|y|L > 1$. De aici rezultă concluzia teoremei.$\diamond$

Observaţia 4.1. Orice seria de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x^0)^n$, unde $x^0 \in \mathbb{R}$, este tot o serie de puteri şi se studiază făcând substituţia $y = x - x^0$. Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ are intervalul de convergenţă $-R$, $R[$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x^0)^n$, are intervalul de convergenţă $x^0 - R$, $x^0 + R[$.

Proprietăţi ale seriilor de puteri (opţional)

Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dacă R este raza de convergenţă a acestei serii şi D mulţimea de convergenţă a seriei, atunci următoarele propoziţii sunt adevărate:
1) Suma seriei, adică funcţia $S : D \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, oricare ar fi $x \in D$, este continuă pe D;
2) Suma seriei este derivabilă pe $]-R, R[$ şi avem

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ \forall\, x \in]-R, R[.$$

3) Oricare ar fi punctele $\alpha, \beta \in D$, suma seriei este integrabilă pe intervalul $[\alpha, \beta]$ şi avem

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})}{n+1}.$$