



## 第二章 惯性导航



# 提 纲

---

- 2.1 概述
- 2.2 坐标系与地球模型
- 2.3 比力与比力方程
- 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合
- 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算
- 2.6 惯导系统的误差分析
- 2.7 惯导系统的对准技术
- 2.8 惯性导航的特点和主要发展方向



## 2.1 概述

---

- 惯性概念
- 惯性导航的基本原理
- 惯性导航系统的组成和分类
- 平台惯导与捷联惯导的比较

# 2.1 概述



## 1 惯性

- 惯性：无外力/力矩作用下，物体保持原运动状态的特征
- 惯性坐标系：无旋转、无加速运动
- *Inertia* is the propensity of bodies to maintain constant translational and rotational velocity , unless disturbed by forced or torques, respectively( Newton's first law of motion)
- An *inertial reference frame* is a coordinate frame in which Newton's laws of motion are valid. Inertial reference frames are neither *rotating* nor *accelerating*.

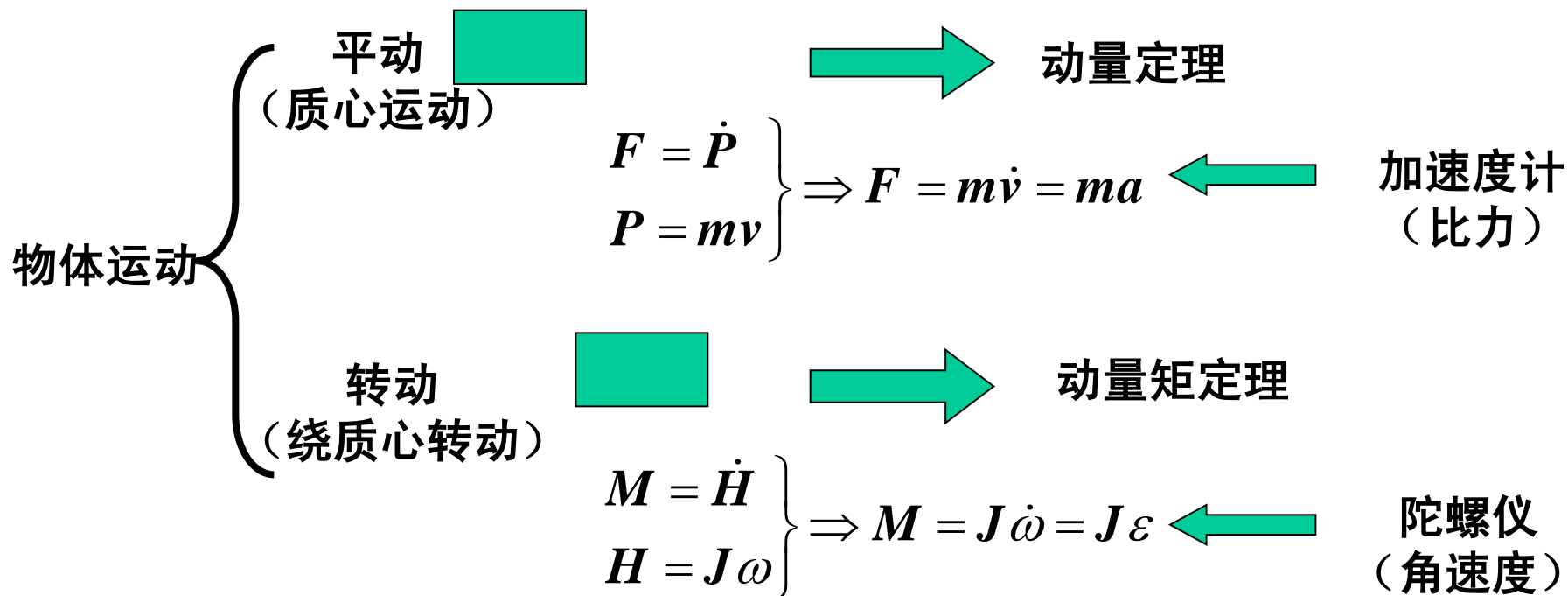
# 2.1 概述



## 2 惯性导航的基本原理

### ● 基本原理

- 积分稳定平台（物理的或数学的）上的加速度计输出确定载体位置和速度



## 2.1 概述



### 3 惯性导航系统的组成和分类

- 基本原理

- 积分稳定平台（物理的或数学的）上的加速度计输出确定载体位置和速度

- 基本组成

- **加速度计**：用来测量载体运动的加速度
- **陀螺与惯导平台**（物理的或数学的）：陀螺与平台模拟某导航坐标系，给加速度计提供测量坐标基准，给出载体姿态/方位信息
- **导航计算机**与导航算法和误差补偿算法：导航参数/指令值计算
- **控制显示器**：给定初始参数及系统其他参数，显示各种导航信息

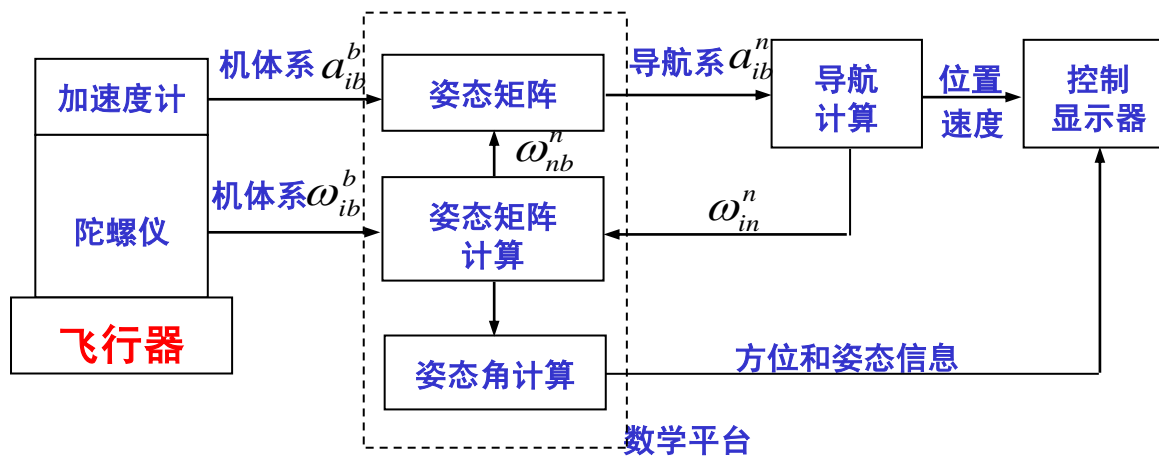
## 2.1 概述



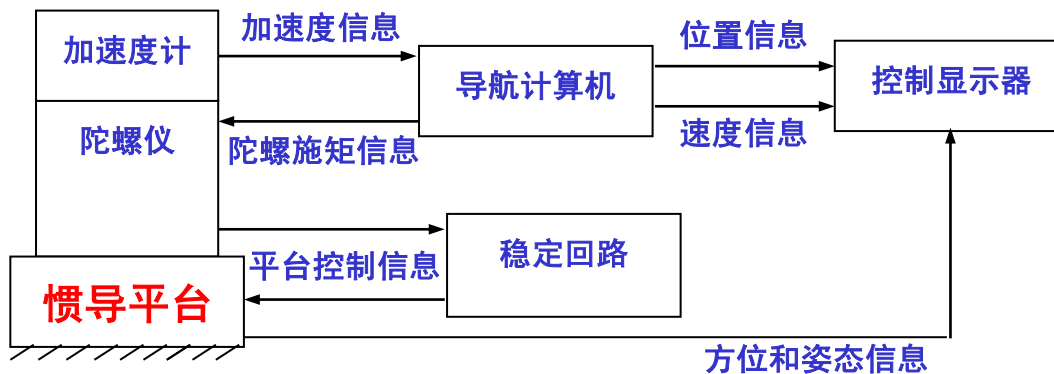
### 3 惯性导航系统的组成和分类

- 分类：平台式和捷联式

捷联式



平台式



## 2.1 概述

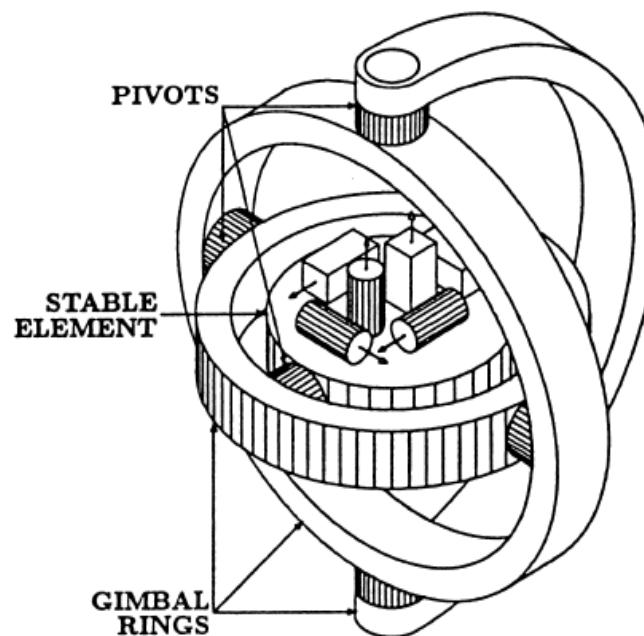


### 3 惯性导航系统的组成和分类

- 平台式和捷联式IMU的安装



捷联式



平台式

IMU (Inertial Measurement Unit)



## 2.1 概述



### 4 平台惯导与捷联惯导的比较

	捷联惯导	平台惯导
体积/成本/重量	小/低/轻	大/高/重
维护操作	便于安装，维护/更换方便	安装复杂，维护/更换不便
故障率/可靠性	低/高（器件少）	高/低（器件多）
工作环境	恶劣：仪表固联在载体上 承受载体振动和冲击	较好：仪表安放在平台上 隔离载体振动和冲击
器件要求	动态性能高：动态环境恶劣 器件精度低；用于常规导航精度要求	动态性能略低：动态环境好 器件精度高；用于高导航精度要求
标定	困难	容易
直接输出信息	载体轴向 线加速度和角速度	传感器轴向线加速度、角速度； 平台姿态信息
精度	低	高



## 2.2 坐标系与地球模型

---

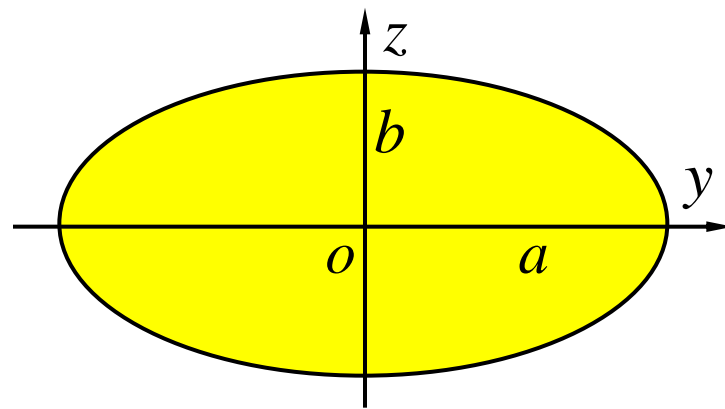
- 地球模型
- 坐标系
- 位置/姿态与坐标系关系

## 2.2 坐标系与地球模型



### 1 地球模型

- 常用参考椭球体
  - 克拉克(Cl Clarke)
  - 克拉索夫斯基(Krasovski)
  - 全球大地系 WGS
- 扁率(f:oblateness)
  - $(a - b) / a$
- 扁率曲率半径(curvature radius)
  - 同纬度有关系



$a$  -- major axis

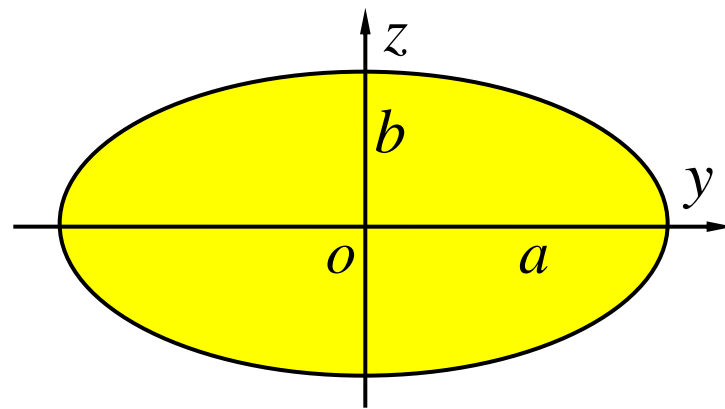
$b$  -- minor axis

## 2.2 坐标系与地球模型



### 1 地球模型

- 常用参考椭球体
  - 克拉克(Cl Clarke)
  - 克拉索夫斯基(Krassovski)
  - 全球大地系 WGS



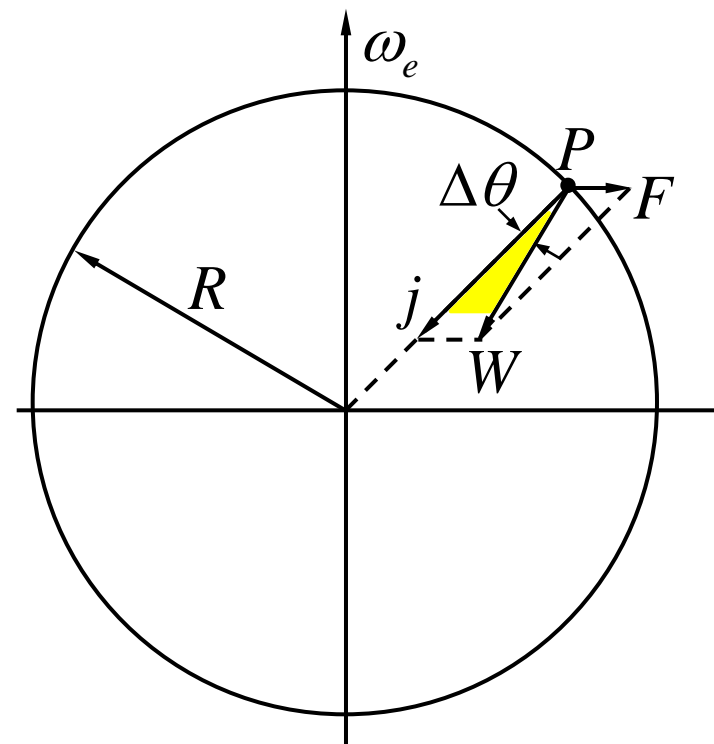
椭球名称	长半轴	短半轴	扁率
克拉克1866(Clarke)	6378206.4	6356583.800	1/294.9786982
克拉克1880(Clarke)	6378249.145	6356514.870	1/293.465
克拉索夫斯基(Krassovski)	6378245	6356863.019	1/298.3
全球大地系 WGS72	6378135	6356750.52	1/298.26
全球大地系 WGS84	6378137	6356752.3142	1/298.257223563

## 2.2 坐标系与地球模型



### 1 地球模型

- 地球重力 (gravity)  $W$ 
  - 力  $j$  与  $F$  之和
    - $j$ : 万有引力
    - $F$ : 地球自转离心 (centrifugal) 力
    - $F \ll W$ ,  $\Delta\theta$  为几个角分



$$W = j + F$$

## 2.2 坐标系与地球模型



### 1 地球模型

- 地球垂线和纬度

- 地心垂线

$\phi'$

- 从地心到当地表面点的连线

- 测地 (geodetic) 垂线

$\phi$

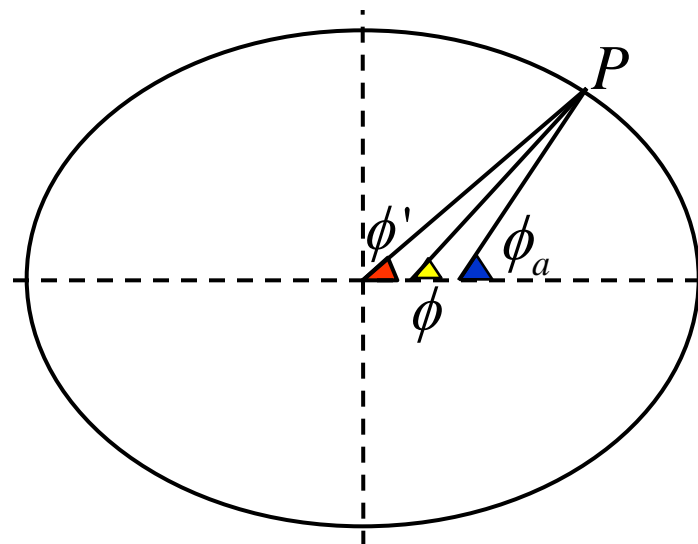
- 当地椭球表面的法线

- 重力垂线

$\phi_a$

- 沿着当地重力方向 (天文垂线)

- 和垂线的三种定义相对应, 纬度也有三种定义



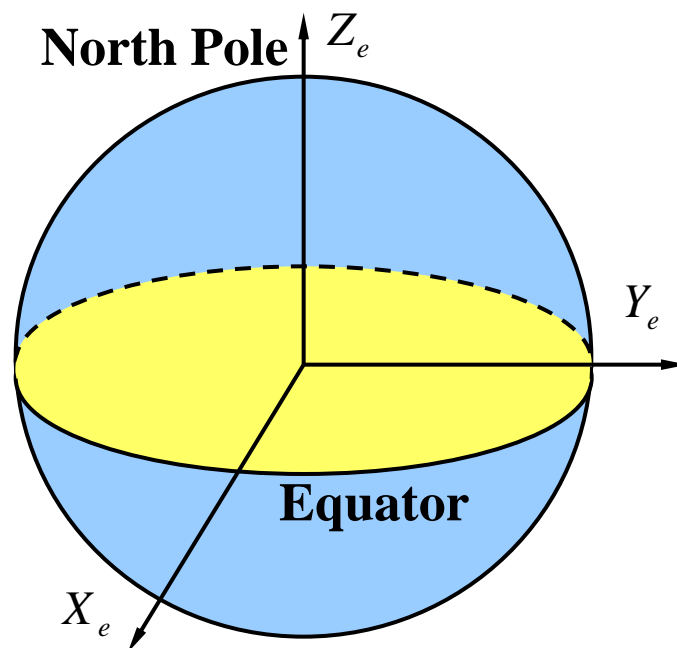
## 2.2 坐标系与地球模型



### 2 坐标系

- 地心惯性坐标系 (i)
- 地球坐标系 (e)
- 地理坐标系 (t)
- 导航坐标系 (n)
- 游移方位坐标系 (w)
- 载体坐标系 (b)

ECI 地心惯性系  
(Earth-Centered Inertial frame)



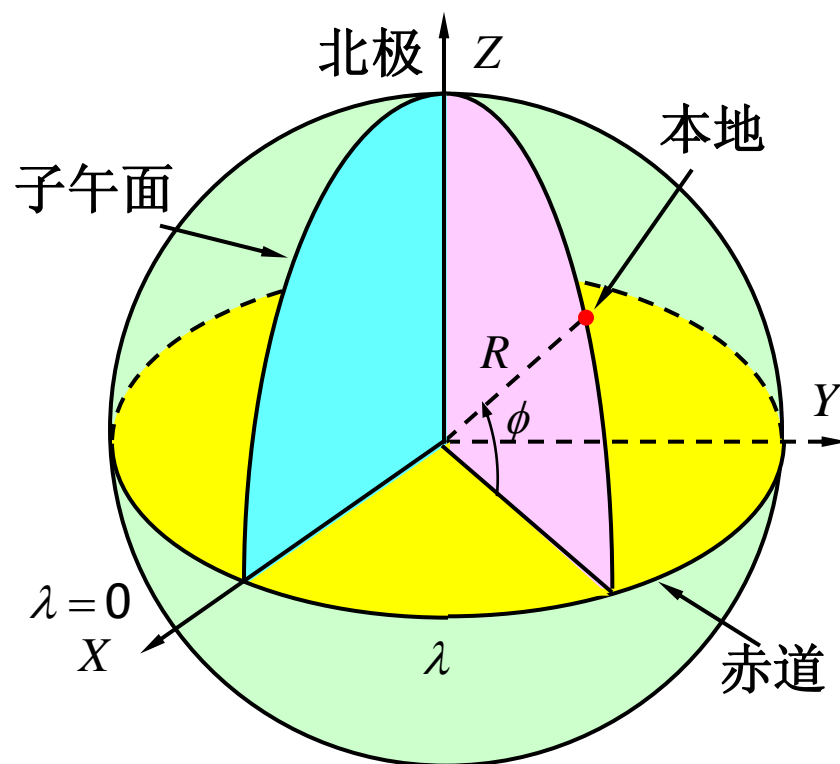
## 2.2 坐标系与地球模型



### 2 坐标系

- 地心惯性坐标系 (i)
- 地球坐标系 (e)
- 地理坐标系 (t)
- 导航坐标系 (n)
- 游移方位坐标系 (w)
- 载体坐标系 (b)

### 地球坐标系 (Earth Frame)





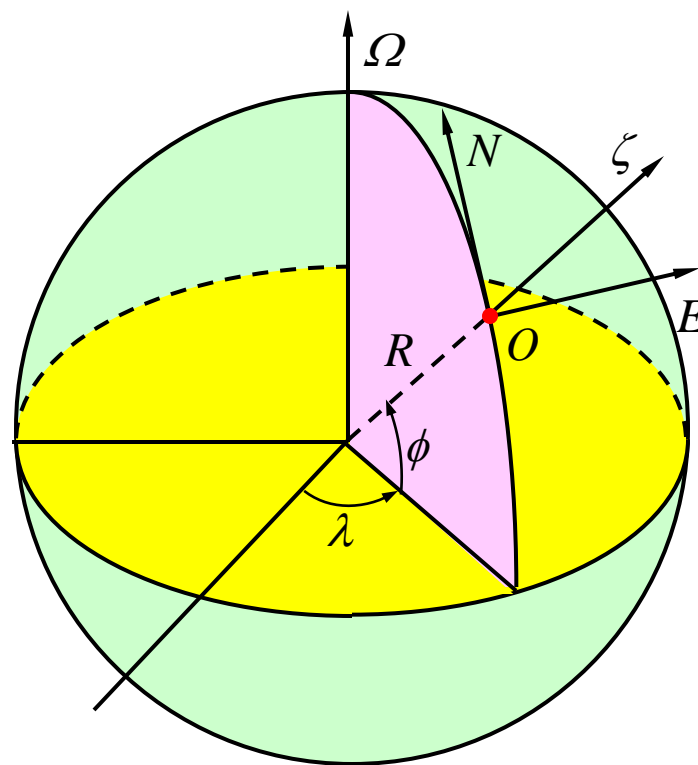
## 2.2 坐标系与地球模型



### 2 坐标系

- 地心惯性坐标系 (i)
- 地球坐标系 (e)
- 地理坐标系 (t)
- 导航坐标系 (n)
- 游移方位坐标系 (w)
- 载体坐标系 (b)

### 地理坐标系 (Geographical, East-North-Up)

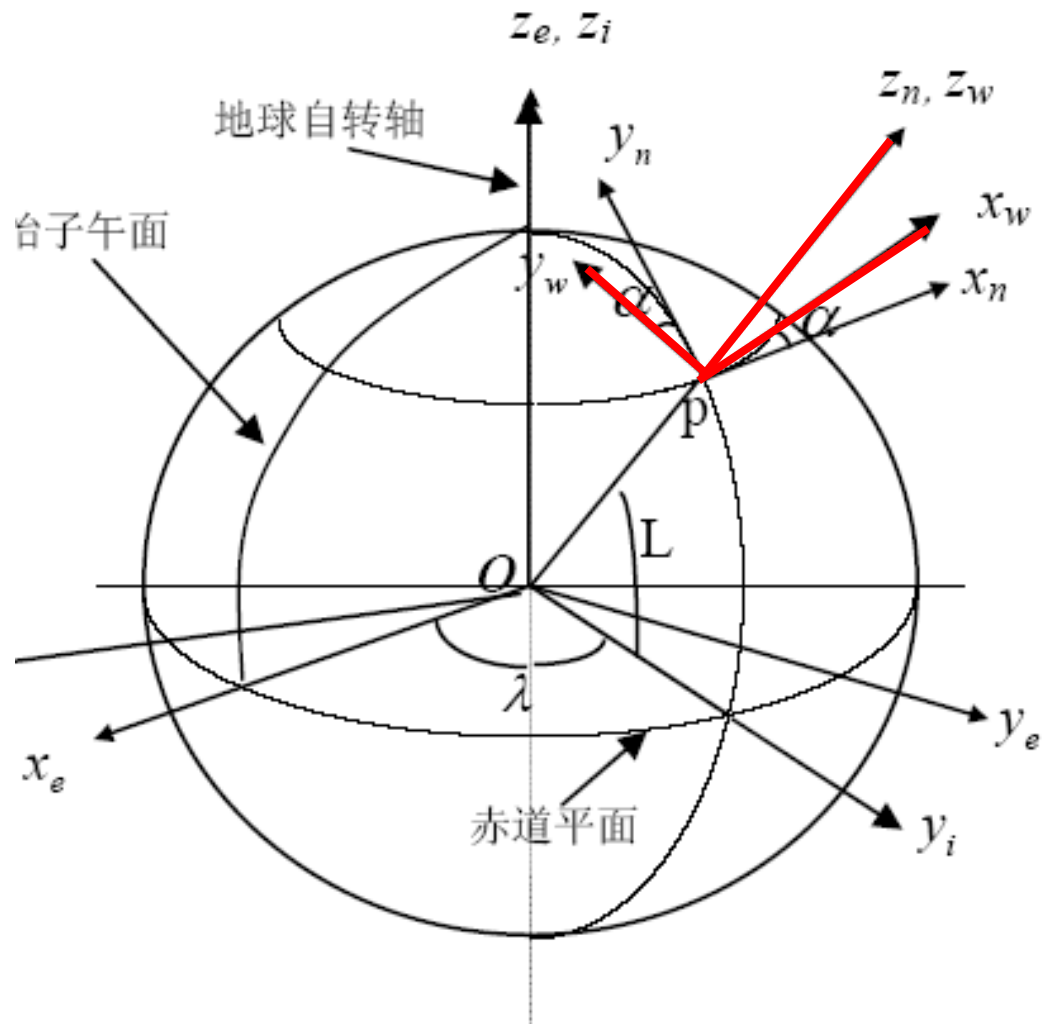


## 2.2 坐标系与地球模型



### 2 坐标系

- 地心惯性坐标系 (i)
- 地球坐标系 (e)
- 地理坐标系 (t)
- 导航坐标系 (n)
- 游移方位坐标系 (w)
- 载体坐标系 (b)

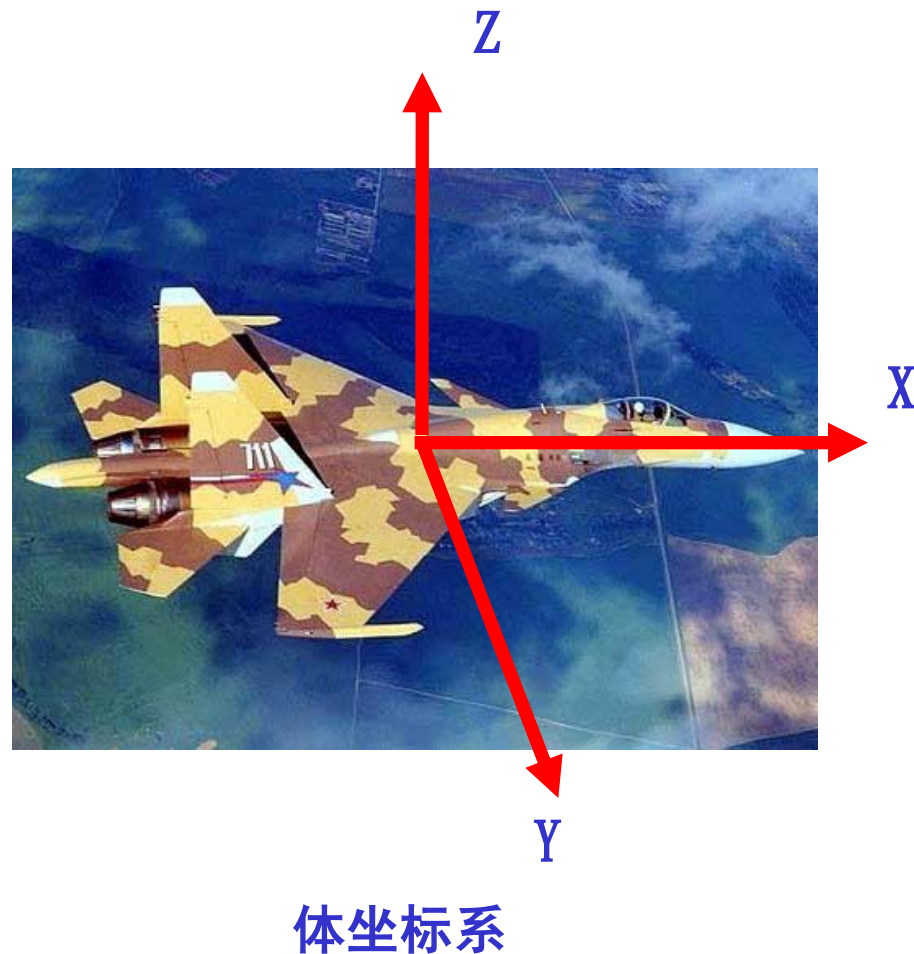


## 2.2 坐标系与地球模型



### 2 坐标系

- 地心惯性坐标系 (i)
- 地球坐标系 (e)
- 地理坐标系 (t)
- 导航坐标系 (n)
- 游移方位坐标系 (w)
- **载体坐标系 (b)**



## 2.2 坐标系与地球模型



### 3 位置/姿态与坐标系关系

- 载体位置与坐标系关系

- 载体位置：地理坐标系 ( $t$ ) 或导航坐标系 ( $n$ ) 与地球坐标系 ( $e$ ) 之间的方位关系
- 表示方式：经度、纬度和高度

- 载体姿态与坐标系关系

- 载体姿态：体坐标系 ( $b$ ) 与导航坐标系 ( $n$ ) 之间的方位关系
- 表示方式：姿态角、方向余弦或四元数

## 2.2 坐标系与地球模型

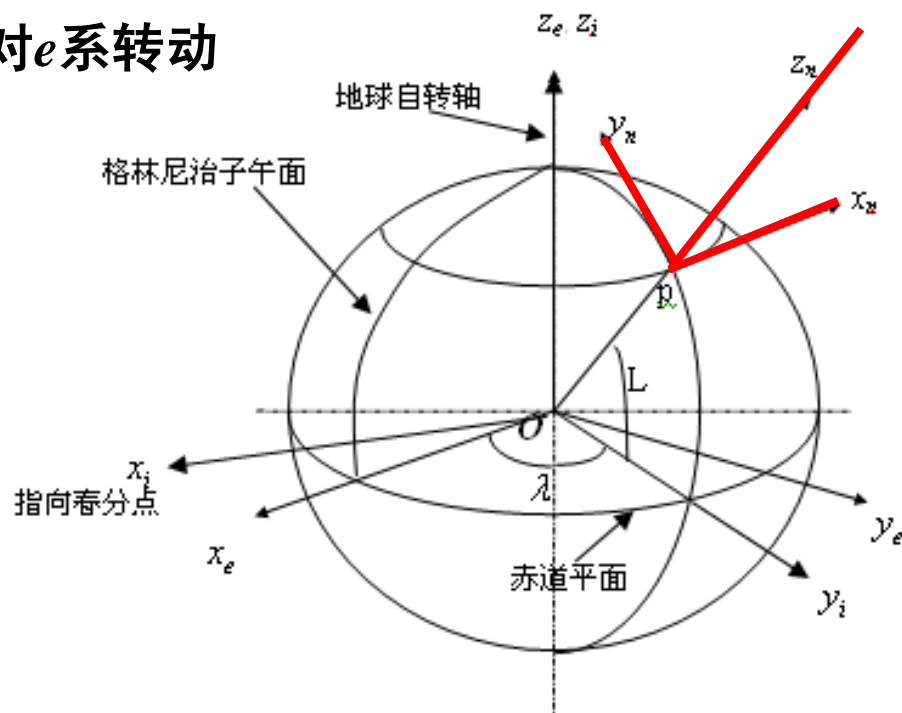


### 3 位置/姿态与坐标系关系

- 载体位置与坐标系关系

- 载体相对地球运动引起 $n$ 系相对 $e$ 系的转动
- 北向速度引起 $n$ 系相对 $e$ 系转动
- 东向速度引起 $n$ 系绕极轴相对 $e$ 系转动

$$\dot{L} = \frac{v_y}{R_M + h}$$
$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L}$$



## 2.2 坐标系与地球模型



### 3 位置/姿态与坐标系关系

- 载体姿态与坐标系关系

- 载体姿态：体坐标系 ( $b$ ) 与导航坐标系 ( $n$ ) 之间的方位关系
- 绝对姿态：体坐标系 ( $b$ ) 与惯性坐标系 ( $i$ ) 之间的方位关系
- $b$ 系相对 $i$ 系的转动包括 $b$ 系相对 $n$ 系的转动和 $n$ 系相对 $i$ 系的转动
- $n$ 系相对 $i$ 系的转动包括 $n$ 系相对 $e$ 系的转动和 $e$ 系相对 $i$ 系的转动

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \quad \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N^n}{R_M + h} \\ \frac{v_E^n}{R_N + h} \\ \frac{v_E^n}{R_N + h} \operatorname{tg} L \end{bmatrix}$$



## 2.3 比力与比力方程

---

- 比力的概念
- 比力方程的推导
- 比力方程的物理意义
- 比力方程与速度的求解

## 2.3 比力与比力方程



### 1 比力的概念

- 牛顿第二定律

$$F = F_{\text{非引}} + F_{\text{引}}$$

$F_{\text{非引}}$  非引力外力，发动机推力、空气阻力  
升力、地面反作用力等

$$F_{\text{引}} = mG \quad \text{引力外力}$$

- 比力  $f = \frac{F_{\text{非引}}}{m}$

- 单位质量上的惯性力与引力合力(非引力外力)
- 与加速度计输出成正比
- 载体非引力惯性加速度矢量

$$F = m \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = m \ddot{\mathbf{r}}$$



$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \frac{F_{\text{非引}}}{m} + G$$



$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = f + G$$

视加速  
度矢量      中心力加  
速度矢量



## 2.3 比力与比力方程



### 2 比力方程推导

惯性坐标系和地球坐标系原点重合，载体相对地球速度矢量

$$\mathbf{v}_e = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e$$

哥氏定理  $\mathbf{v}_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$

$\boldsymbol{\omega}_{ie}$  地球自转角速度  $e$ 系相对 $i$ 系

$\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$  地球自转产生的牵连速度

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$$

两边相对 $i$ 系取导数

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \right|_i$$


## 2.3 比力与比力方程




### 2 比力方程推导

$\omega_{ie}$  常数  $\frac{d\omega_{ie}}{dt}=0$

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \right|_i$$



$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i$$

$\mathbf{v}_e$  通常导航坐标系 $n$ 分解


$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n + \omega_{in} \times \mathbf{v}_e$$

角速度合成定理

$$\omega_{in} = \omega_{ie} + \omega_{en}$$


$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i &= \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times \mathbf{v}_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \\ &= \dot{\mathbf{v}}_e + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times \mathbf{v}_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

## 2.3 比力与比力方程



### 2 比力方程推导

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \Big|_i = \mathbf{f} + \mathbf{G}$$

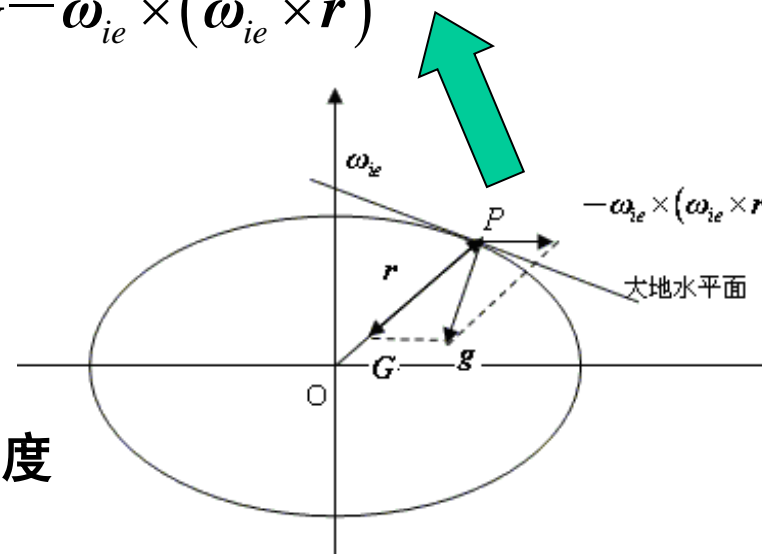
$$\mathbf{f} + \mathbf{G} = \dot{\mathbf{v}}_e + (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{v}}_e + (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_e - \mathbf{g}$$

- 绝对加速度

- 相对加速度+哥氏加速度+牵连加速度



地球引力、重力与离心力的关系

## 2.3 比力与比力方程



### 3 比力方程的物理意义

- 比力方程

- 加速度计敏感的比力和运载体相对地球加速度之间的关系

$$f = \dot{v}_e + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_e - g$$



载体对地速度在地理  
坐标系中的变化率  
测量坐标系中表示的  
运载体相对地球加速  
度



地球自转角速度和  
地理坐标系相对于  
地球转动产生的哥  
氏加速度和牵连加  
速度



重力加速度



有害加速度



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合

- 陀螺仪
  - 陀螺仪的作用和分类
  - 陀螺仪的主要性能指标
  - 刚体陀螺仪的特性和测量原理
  - 光学陀螺的测量原理
  - 振动陀螺的测量原理
- 加速度计
- 惯性测量组合

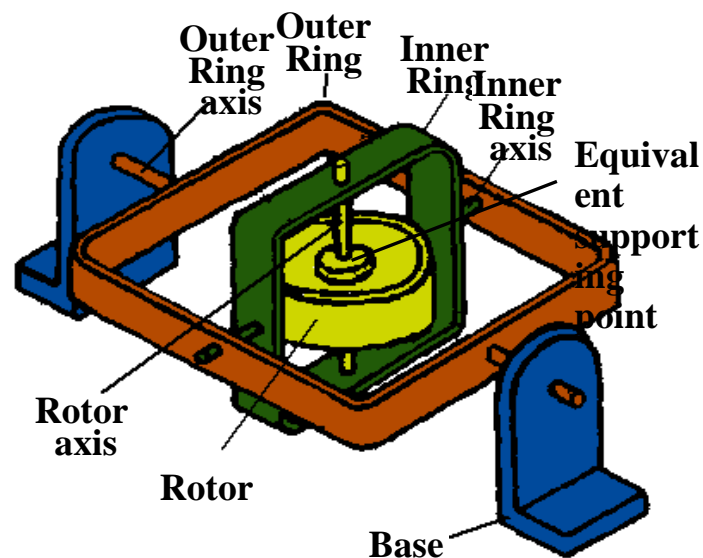
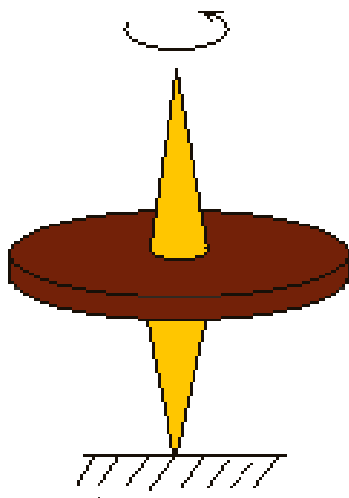
## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的作用和分类

- 陀螺：高速自旋的刚体（传统定义）
- 陀螺仪：陀螺+支撑装置，实现对旋转的测量，敏感角运动的一种测量装置，常用来测量运载体的转动信息（角位移或角速度）



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的**作用**和分类

- 运载体航行驾驶的重要仪表

- 惯性技术一个重要组成部分

- 载体控制系统的核心元件

- 惯性导航系统的核心元件

- 惯性制导系统的核心元件

- 应用平台式惯性系统时

- 陀螺仪安装在平台上，敏感平台角偏移

- 应用捷联式惯性系统时

- 陀螺仪直接与运载体固连，敏感运载体角速度或角位移

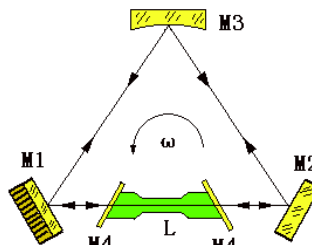
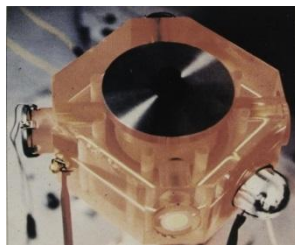
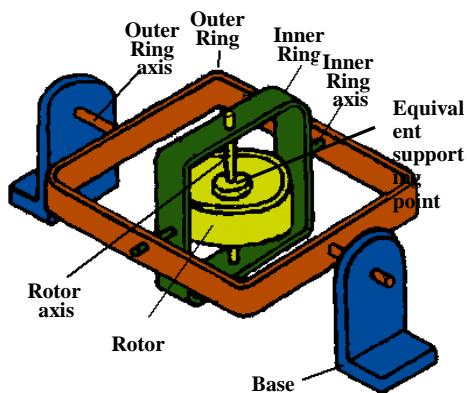
## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



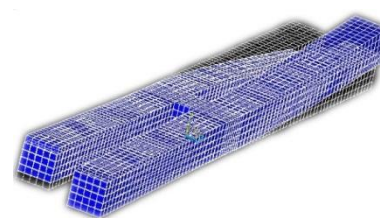
### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的作用和分类

- 最初：高速旋转刚体转子+支承框架
- 后来：多种采用特殊支承方法的无框架的刚体转子陀螺仪，依靠旋转质量的惯性测量
- 相继发现数十种可用于感测载体相对惯性空间角运动的物理现象，这类无刚体转子而功能与经典陀螺仪等同的敏感器亦称陀螺仪



激光



压电



音叉



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的作用和分类

- 机械式陀螺仪

- 挠性陀螺仪 液浮陀螺仪 气浮陀螺仪

- 振动式陀螺仪

- 音叉陀螺 振动弦陀螺 谐振陀螺 硅陀螺 酒杯式陀螺

- 光学陀螺

- 仪激光陀螺 光纤陀螺

- 静电陀螺仪

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标
  - 灵敏度
  - 量程
  - 刻度因子/刻度因子稳定性和非线性
  - 漂移
  - 偏差（零偏/零偏稳定性/零偏重复性）
  - 带宽

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标：**灵敏度**
  - 用阈值与分辨率表征陀螺对输入角速度的灵敏程度
  - 阈值
    - 在零输入下陀螺能够敏感的最小输入角速率
  - 分辨率
    - 在规定输入角速率下能敏感的最小输入角速率增量

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标：量程
  - 单位：° /h
  - 陀螺在正、反方向能检测到的输入角速率的最大值

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标：**刻度因子/刻度因子稳定性和非线性**
  - **刻度因子**：输出变化与输入角速率变化比值
    - 该值根据整个正（或负）输入角速率范围内测得的输入/输出数据，通过最小二乘法拟合求出的直线斜率。
    - 以模拟量输出的陀螺仪的刻度因子单位： $\text{mV}/(^{\circ})/\text{s}$
    - 一般用刻度因子稳定性或非线性来衡量刻度因子的误差特性
    - 捷联惯导系统工作在大角度动态范围，刻度因子误差对捷联系统的影响比平台系统更加严重。
  - 刻度因子稳定性和非线性

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标：**刻度因子/刻度因子稳定性和非线性**
  - 刻度因子：输出变化与输入角速率变化比值
    - 用刻度因子稳定性/非线性来衡量其误差
  - **刻度因子稳定性和非线性**
    - 稳定性：陀螺在不同输入角速率情况下能够通过标称刻度因子获得精确输出的能力。
    - 非线性：由实际输入输出关系确定的实际刻度因子与标称刻度因子相比存在的非线性特征；也用线性度描述输入输出曲线与标称直线的偏离程度，常以满量程输出的百分比表示

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标：漂移

- 系统性漂移率

- 与规定的工作条件有关的漂移率分量，由与加速度有关的漂移率和与加速度无关的漂移率组成
- 用单位时间内的角位移表示
- 具有一定的规律性，在应用中可以设法加以补偿

- 随机漂移：是衡量陀螺仪精度的主要指标（单位： $^{\circ}/h^{0.5}$ ）

- 是运行过程中陀螺输出的随机波动
- 可用一定时间内陀螺速率输出的标准偏差来定义
- 不能用一般方法补偿，通常用角随机游走系数来表示

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 陀螺仪的主要性能指标：**零偏/零偏稳定性/零偏重复性**
  - 零偏：单位  $^{\circ}/h$ 
    - 输入角速率为零时陀螺仪的输出量，通常用规定时间内测得的输出量平均值相应的等效输入角速率表示。
  - 零偏稳定性：单位  $^{\circ}/h$ 
    - 输入角速率为零时，陀螺仪输出量围绕其均值的离散程度
    - 以规定时间内输出量的标准偏差相应的等效输入角速率表示
  - 零偏重复性：单位  $^{\circ}/h$ 
    - 在同样条件下及规定的时间间隔，重复测量陀螺仪零偏之间的离散程度，以各次测试所得零偏的标准偏差率表示



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的**特性**和测量原理

- **定轴性**：无外力矩时自转轴对相对惯性空间保持方向不变的特性

- 存在条件

- ❖ 陀螺仪转子绕自转轴高速旋转，即有动量矩

- ❖ 不受外力矩作用

- 体现形式：自转轴将有相对惯性空间保持方向不变的特性

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的**特性**和测量原理

- 定轴性：无外力矩时自转轴对相对惯性空间保持方向不变的特性
- **进动性**：外力矩引起陀螺仪动量矩相对惯性空间转动的特性
  - 存在条件
    - ❖ 陀螺仪转子绕自转轴高速旋转即具有动量矩
    - ❖ 存在外力矩
  - 表现形式：外力矩绕内框轴作用在陀螺仪上，则动量矩绕外框轴相对惯性空间转动；外力矩绕外框轴作用在陀螺仪上，则动量矩绕内框轴相对惯性空间转动
  - 在陀螺仪上施加外力矩，会引起陀螺仪动量矩相对惯性空间转动的特性，称为陀螺仪的进动性

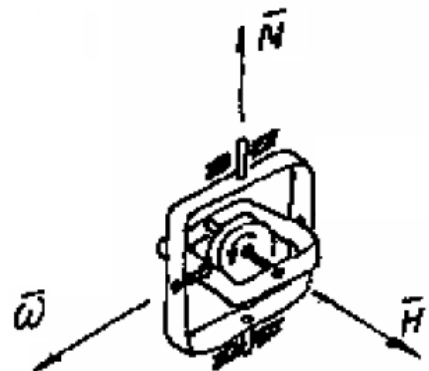
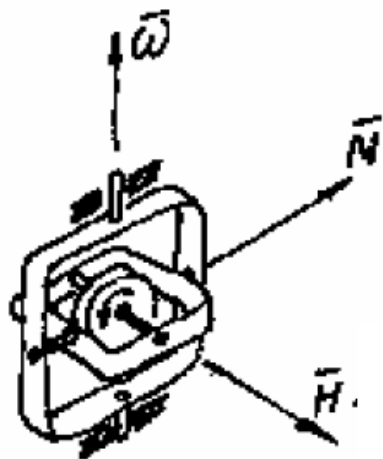
## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的**特性**和测量原理

- 定轴性：无外力矩时自转轴对相对惯性空间保持方向不变的特性
- 进动性：外力矩引起陀螺仪动量矩相对惯性空间转动的特性



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合

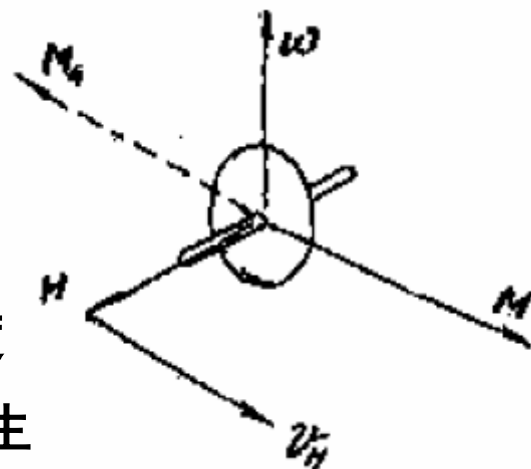


### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的特性和**测量原理**

- 利用进动性原理：精确测量角位移和角速度

- 外力矩作用于高速旋转转子导致进动产生
- 转子由框架支持在仪表壳体内保持自转轴相对惯性空间不变
- 角位移敏感：以自转轴为参考基准，框架角度的变化反映了壳体相对于自转轴方向的变化。
- 角速度敏感：作用在转子上的控制力矩尽量使自转轴与仪表壳体轴保持一致，通过检测该力矩可获得仪表壳体角速度，由此获得与仪表刚性连接在一起的物体的角速度



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的特性和**测量原理**

- 单自由度陀螺：**基于进动测量**

- 基本原理：

- ❖ 基于进动性，若转子被迫以某个角速度绕输入轴（x轴）转动，则绕输出轴（框架旋转轴，y轴）就会出现力矩
- ❖ 输出轴装有平衡弹簧，使该力矩在输出轴转动一个角度

- 基本分类：速率陀螺和速率积分陀螺

- ❖ 速率陀螺：测量载体角速度，常作为自旋速率控制或姿态稳定系统的一个速率反馈敏感器
- ❖ 速率积分陀螺：把速率陀螺输出量再进行一次积分，用来直接测量载体的角位置

## ● 刚体陀螺仪的特性和测量原理

- 

### 结构示意图

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的特性和**测量原理**

- 双自由度陀螺：利用定轴性测量

- 转轴由内/外框架支承

- 利用定轴性测量姿态角，也称为位置陀螺

- 基本原理：

- ❖ 传感器：由定子/转子组成，内/外环均安装，输出信号和极性与定子/转子间角度成比例，内环转子/内环固连，定子/外环固连，外环转子/外环固连，定子/壳体固连
    - ❖ 姿态变化时，定轴性使内外环发生相应转动以保持陀螺仪转轴相对于惯性空间不变。内外环上的传感器就输出内外环转动的角度，该角度表征了载体姿态的变化

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合

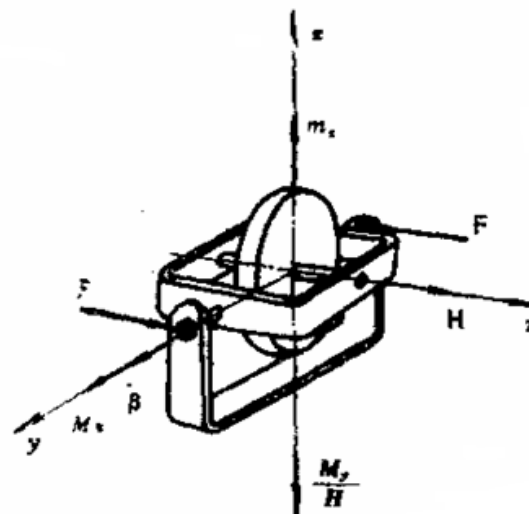
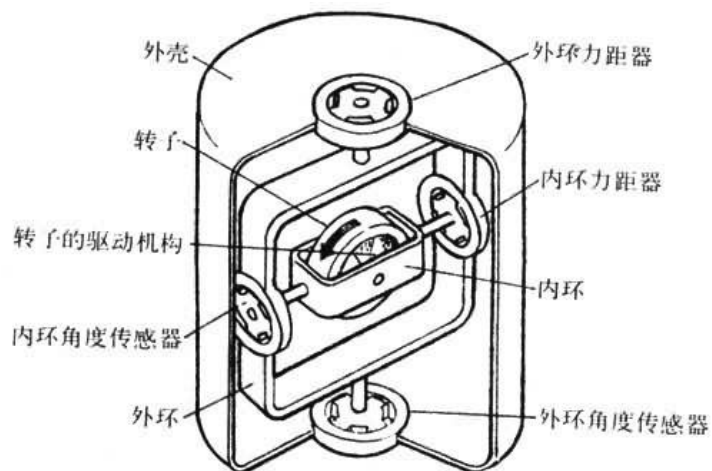


### 1 陀螺仪

- 刚体陀螺仪的特性和**测量原理**

- 双自由度陀螺：**利用定轴性测量**

- 转轴由内/外框架支承
- 利用定轴性测量姿态角也称为位置陀螺



结构示意图



## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

#### ● 小结

##### ■ 敏感器类型：多种类型

- 常规旋转质量块的机械陀螺仪
- 光学非常规陀螺仪
- 最终目标芯片大小

##### ■ 精度范围：跨多数量级

- 从 $0.0001^\circ /h$  -  $1^\circ /h$  甚至更差。

##### ■ 当前研究重点

- 大多敏感器运行时对环境很敏感
- 通过减少陀螺仪对环境敏感性来提高仪器稳定性

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 1 陀螺仪

#### ● 小结

#### ■ 适用于捷联惯性系统一系列陀螺仪的典型特性

性能	速率积分陀螺仪	动力调谐陀螺仪	挠性陀螺	双轴速率传感器/陀螺	振动陀螺仪	环形激光陀螺仪	光纤陀螺仪
与 $g$ 无关的偏值 ( $^{\circ}/h$ )	0.05-10	0.05-10	1-50	360-1800	360-1800	0.001-10	0.5-50
与 $g$ 有关的偏值 ( $^{\circ}/h/g$ )	1-10	1-10	1-10	180	36-180	0	<1
不等弹性偏值 ( $^{\circ}/h/g^2$ )	1-2	0.1-0.5	0.05-0.25	18-4	18	0	<0.1
标度因数非线性 (%)	0.01-0.1	0.01-0.1	0.01-0.1	0.5-1	0.2-0.3	5-100	0.05-0.5
带宽 (Hz)	60	100	100	100/80		>500	>200
最大输入角速率 ( $^{\circ}/s$ )	>400	1000	>500	800/400	>1000	>1000	>1000
抗冲击	中等	中等	中等	中等	>25000g	好	好

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 2 加速度计

- 用途

- 惯性导航和惯性制导的基本测量元件之一
- 性能和精度直接影响导航制导系统精度
- 安装于载体内部，测量运载体的平移运动（测量运动加速度，经积分后得到位置和速度）

- 测量原理

- 通常包含一个经由弹簧约束的在仪表壳体内部的检测质量块
- 依据牛顿力学定律，通过检测质量块的位移变化，即检测质量块所受惯性力来间接测量加速度
- 实际测量比力：运载体单位质量上非引力合力对应的加速度

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 2 加速度计

- 分类:

- 原则: 检测加速度的器件的构造形式

- 机械式加速度计

- 典型代表: 石英挠性摆式加速度计、两轴力反馈加速度计

- 特点: 成熟、精度和分辨率较高、检测范也很宽(从 $\mu\text{g}$ 到 $50\text{g}$ )

- 固态加速度计

- 典型代表: 硅加速度计、光纤加速度计

- 特点: 硅技术方面进步大

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 2 加速度计

- 典型传感器精度

特性	加速度计类型				
	力反馈摆式	振动光纤	振动石英	表面声波	硅
输入范围/g	±100	±20	±200	±100	±100
刻度因数稳定性/%	0.1	0.001	0.01	0.1-0.5	0.5-2
刻度因数非线性/(%FS)	0.05	0.05	0.05	<0.1	0.1-0.4
固定零偏/mg	0.1-10	1	0.1-1	<0.5	<25
阈值/ug	10	1	<10	1-10	1-10
带宽/Hz	400	100	400	400	400

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 3 惯性测量组合

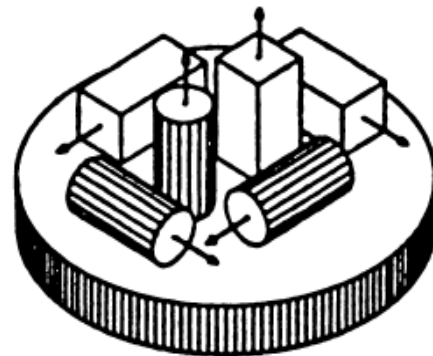
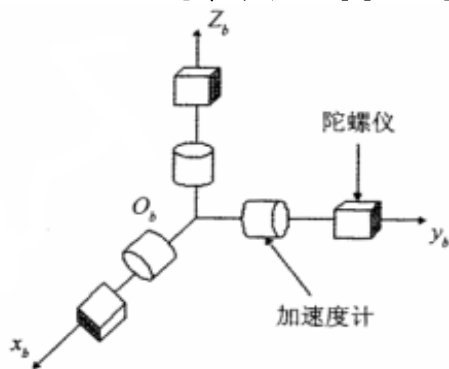
- **IMU: Inertial Measurement Unit 惯性测量单元**
  - 导航/制导系统测量装置的惯性敏感器通常不是单一陀螺仪或加速度计，而是由它们组成的惯性测量组合或惯性测量
  - 用途：
    - 测量载体绕载体坐标系三个轴的角增量
    - 测量载体质心绕载体坐标系三个轴的视速度增量
    - 角增量/视速度增量用于载体导航计算，并确定载体初始姿态
    - 给出载体质心的横法向过载，为过载稳定回路提供反馈信息

## 2.4 惯性敏感器与惯性测量组合



### 3 惯性测量组合

- IMU：通过抗振装置与载体的安装面相连
  - 典型组成：惯性敏感器组件、敏感器电路、转换组件以及电源
    - 惯性敏感器组件：
      - ❖ 惯性器件：3单轴陀螺/2两轴陀螺+3加速度计
      - ❖ 机械本体：保证敏感器敏感轴沿三个正交方向
    - 电路和转换组件：陀螺采样与控制、陀螺及加速度计I/F转换



惯性测量组合中惯性敏感器安装示意图

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



- 平台/捷联系统计算的不同
- 导航计算
  - 速度和经纬度的计算
  - 高度通道的问题及高度计算
- 姿态的提取与计算
  - 平台指令角速度的计算
  - 平台惯导姿态角的测量
  - SINS姿态的解算
- SINS的计算流程



## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 1 平台/捷联系统计算的不同

- 平台惯性系统：惯性器件安装于平台，与载体运动隔离
  - 物理平台：平台坐标系，模拟当地地理坐标系
- 捷联惯性系统：惯性器件安装于载体，感受载体运动
  - 数学平台：模拟物理平台
    - 靠数学变换/计算机模拟当地地理坐标系
    - 完成物理平台（陀螺稳定平台）功能，等效于实体平台功能
  - 数学平台实质：三项计算
    - 计算载体坐标系b到地理坐标系n的方向余弦变换矩阵
    - 从姿态阵的元素中提取载体的姿态和航向角信息
    - 用姿态阵把加速度计输出从载体坐标系变换到导航坐标系

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b$$

# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 2 导航计算

### ● 速度和经纬度的计算

#### ■ 根据惯性导航系统的比力方程

$$\mathbf{f}^n = \dot{\mathbf{v}}_e^n + \left( 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right) \times \mathbf{v}_e^n - \mathbf{g}^n$$

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} f_x^n \\ f_y^n \\ f_z^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_e^n = \begin{bmatrix} v_x^n \\ v_y^n \\ v_z^n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_y^n}{R_M + h} \\ \frac{v_x^n}{R_N + h} \\ \frac{v_x^n}{R_N + h} \tan L \end{bmatrix}$$

# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 2 导航计算

### ● 速度和经纬度的计算

#### ■ 描述速度的运动学方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= f_x + \left( 2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \operatorname{tg} L \right) v_y - \left( 2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) v_z \\ \dot{v}_y &= f_y - \left( 2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \operatorname{tg} L \right) v_x - \frac{v_y}{R_M + h} v_z \\ \dot{v}_z &= f_z + \left( 2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) v_x + \frac{v_y}{R_M + h} v_y - g \end{aligned} \right\}$$

#### ■ 导航计算机结合给定准确初值可实时求解速度参数

#### ■ 水平地速

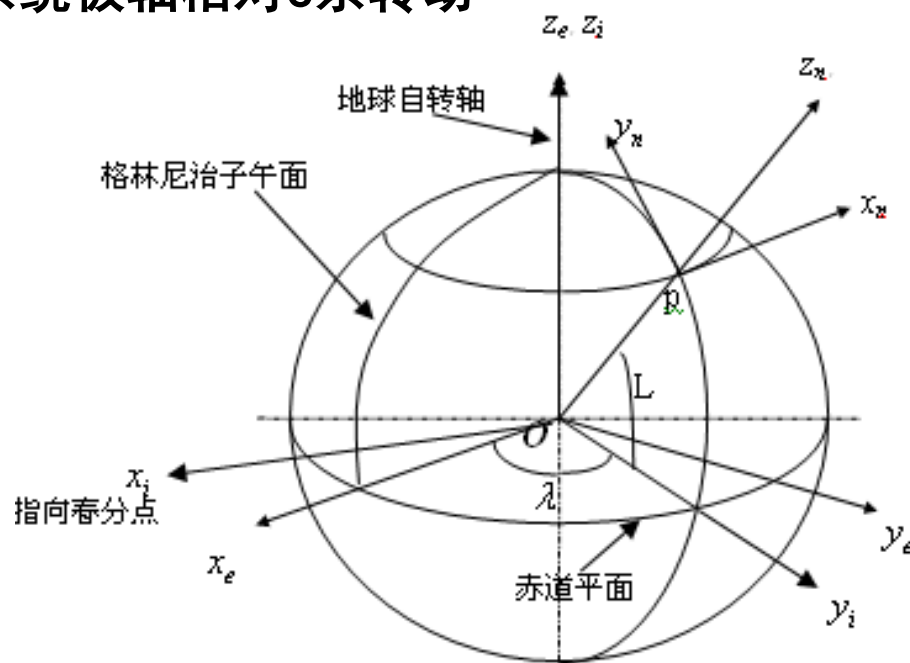
$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \quad \leftarrow \quad \begin{aligned} v_x(t) &= \int_0^t \dot{v}_x dt + v_x(0) \\ v_y(t) &= \int_0^t \dot{v}_y dt + v_y(0) \end{aligned}$$

## ● 速度和经纬度的计算

### ➤ 北向速度引起n系相对e系转动

### ➤ 东向速度引起n系统极轴相对e系转动

$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L}$$



# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 2 导航计算

- 速度和**经纬度**的计算

- 直角坐标积分计算

- 经度和纬度位置的变化率

$$\dot{L} = \frac{v_y}{R_M + h}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L}$$

- 积分运算

$$L = \int_0^t \frac{v_y}{R_M + h} dt + L_0$$

$$\lambda = \int_0^t \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L} dt + \lambda_0$$

# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 2 导航计算

### ● 速度和经纬度的计算

#### ■ 方向余弦法

➤ 瞬时地理位置(经纬度)是导航系n系和地球系e系间方位关系

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin L & 0 & -\cos L \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos L & 0 & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ \cos L \cos \lambda & \cos L \sin \lambda & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \mathbf{C}_e^n \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_e^n = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ \cos L \cos \lambda & \cos L \sin \lambda & \sin L \end{bmatrix}$$

➤ 从矩阵元素计算位置

$$\begin{aligned} L_{\text{主}} &= \text{tg}^{-1} \left( \frac{C_{33}}{C_{23}} \right) \\ \lambda_{\text{主}} &= \text{tg}^{-1} \left( \frac{C_{32}}{C_{31}} \right) \end{aligned}$$

$C_{ij}$  矩阵元素

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 2 导航计算

- 速度和**经纬度**的计算

- 方向余弦法

- 基于微分模型计算位置矩阵

$$\dot{C}_n^e = C_n^e [\omega_{en}^n \times]$$

- 常用毕-卡 (Peano-Baker) 逼近法求解

$$C_n^e(t + \Delta t) = C_n^e(t) \left[ I + \frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} \Delta \theta_{en}^{nK} + \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} (\Delta \theta_{en}^{nK})^2 \right]$$

$$\frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} = S, \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} = C$$
$$\Delta \theta_{en}^{nK} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \theta_{enz}^n & \Delta \theta_{eny}^n \\ \Delta \theta_{enz}^n & 0 & -\Delta \theta_{enx}^n \\ -\Delta \theta_{eny}^n & \Delta \theta_{enx}^n & 0 \end{bmatrix} = \int_t^{t+\Delta t} \omega_{en}^{nK} dt$$
$$\Delta \theta_0 = \sqrt{(\Delta \theta_{enx}^n)^2 + (\Delta \theta_{eny}^n)^2 + (\Delta \theta_{enz}^n)^2}$$

- 展开级数取2级

$$S_n = 1, C_n = 1/2$$

$$C_n^e(t + \Delta t) = C_n^e(t) \left[ I + \Delta \theta_{en}^{nK} + 1/2 \cdot (\Delta \theta_{en}^{nK})^2 \right]$$

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 1 导航计算

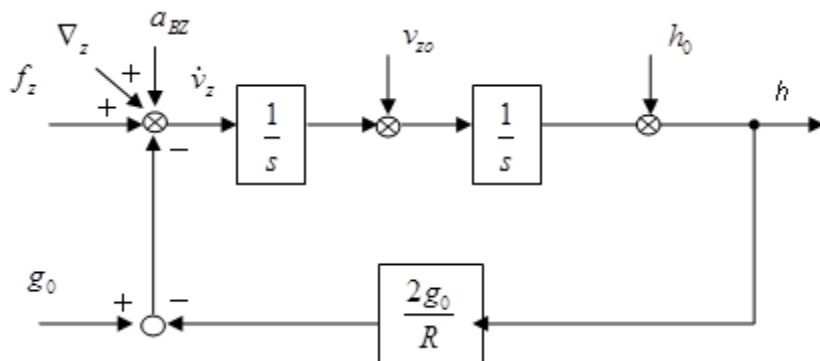
#### ● 高度通道的问题及高度计算

##### ■ 由速度方程的高度通道

$$\dot{v}_z = f_z + \left( 2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) v_x + \frac{v_y^2}{R_M + h} - g = f_z + a_{Bz} - g$$

##### ■ 不考虑地球自转，高度h处的重力加速度为

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2} \quad h \ll R \quad \longrightarrow \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{2h}{R} \right)$$



纯惯性高度通道



## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 1 导航计算

- 高度通道的问题及高度计算

- 高度通道特征方程

$$(s^2 - \frac{2g_0}{R}) = (s + \sqrt{\frac{2g_0}{R}})(s - \sqrt{\frac{2g_0}{R}}) = 0$$

- 特征根:

- 有一个正根  $e^{\sqrt{\frac{2g_0}{R}}t}$

- 系统是正反馈系统，不稳定，高度误差随时间增长

- 修正措施:

- 引入外部高度信息：气压高度，无线电高度，大气高度

- 构建动态品质好、误差不随时间发散的组合高度系统

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 1 导航计算

#### ● 高度通道的问题及高度计算

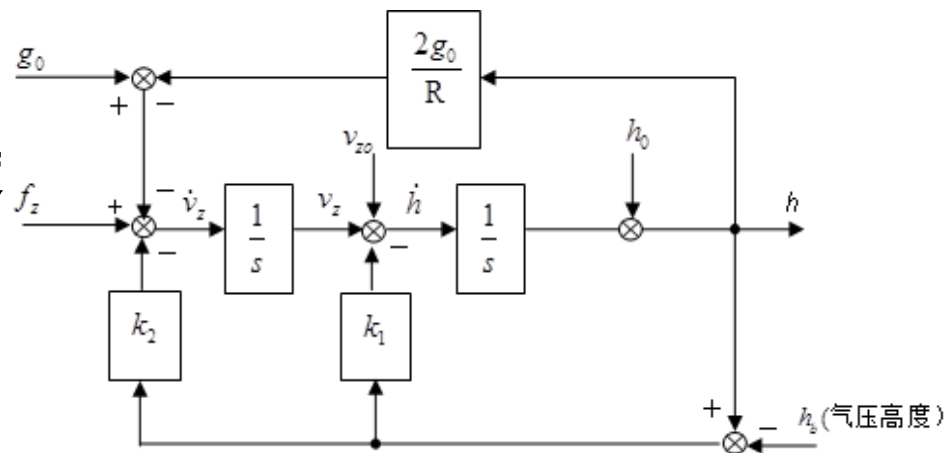
##### ■ 修正方法:

- 加速度引入修正高度
- 速度环节引入修正高度
- 形成二阶阻尼

##### ■ 系统特征方程为:

$$s v_z = -k_2 h + 2 \frac{g_0}{R} h + f_z - g_0 + k_2 h_b$$

$$s h = v_z - k_1 h + k_1 h_b$$



# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 1 导航计算

### ● 高度通道的问题及高度计算

■ 系统特征方程:  $sv_z = -k_2h + 2\frac{g_0}{R}h + f_z - g_0 + k_2h_b$

$$sh = v_z - k_1h + k_1h_b$$

■ 高度计算模型 
$$h = \frac{f_z - g_0}{s^2 + k_1s + k_2 - 2\frac{g_0}{R}} + \frac{sk_1 + k_2}{s^2 + k_1s + k_2 - 2\frac{g_0}{R}}h_b$$

■ 典型参数  $k_1 = 0.06666 \text{ sec}^{-1}, k_2 = 0.00111 \text{ sec}^{-2}$

■ 修正效果

- 基本滤除高频误差分量，衰减低频误差分量
- 高度信息：稳定、精度较高
- 可考虑三阶阻尼：增加速率反馈和积分环节

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 2 姿态的提取与计算

- 平台指令角速度的计算

- 平台跟踪基准：参考坐标系 当地水平系

- 实现方式：陀螺稳定平台准确模拟。

- 陀螺稳定平台相对惯性空间保持定向

- 给平台上的积分陀螺仪力矩传感器施加跟踪指令角速度信号

- 伺服机构使平台相对惯性空间转动，实现对导航坐标系跟踪

- 平台控制指令：导航坐标系相对惯性空间的旋转角速度

$$\omega_{iPx}^P = \omega_{inx}^n = -\frac{v_y}{R_M + h}$$

$$\omega_{iPy}^P = \omega_{iny}^n = \omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h}$$

$$\omega_{iPz}^P = \omega_{inz}^n = \omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \tan L$$

# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 2 姿态的提取与计算

- 平台惯导姿态角的测量

- 姿态定义：体坐标系 $b$ 相对于地理坐标系 $n$ 的方位

- $b$ 系依次绕三个不同轴转动获取
- 姿态角名称：航向角、俯仰角、横滚（倾斜）角

- 姿态角获取方式：直接提取

- 平台坐标系模拟地理坐标系
- 载体本体和平台的方位关系就是载体本体和地理系方位关系
- 从平台框架轴上的角度传感器提取姿态角

# 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



## 2 姿态的提取与计算

### ● SINS姿态的解算

#### ■ 实现方式：从姿态矩阵中提取

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \theta \sin \gamma & -\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \sin \theta \cos \gamma & -\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} \theta &= \sin^{-1}(C_{23}) && \text{俯仰角} \\ \gamma_{\text{主}} &= \text{tg}^{-1}\left(-\frac{C_{13}}{C_{33}}\right) && \text{横滚角} \\ \psi_{\text{主}} &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{C_{21}}{C_{22}}\right) && \text{航向角} \end{aligned}$$

#### ■ 姿态矩阵：实时计算姿态方向余弦阵微分方程

$$\dot{C}_b^n = C_b^n [\omega_{nb}^b \times]$$

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n = \omega_{ib}^b - C_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \quad \leftarrow \text{角速度合成定理}$$

合成值      导航计算值      陀螺仪的测量值

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 2 姿态的提取与计算

- SINS姿态的解算

- 姿态矩阵：实时计算姿态方向余弦阵微分方程

$$\dot{C}_b^n = C_b^n [\omega_{nb}^b \times]$$

- 四阶算法求解

$$C_b^n(t + \Delta t) = C_b^n(t) \left[ I + \frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} \Delta \theta_{nb}^{bK} + \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} \cdot (\Delta \theta_{nb}^{bK})^2 \right]$$

$$\frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} = S, \quad \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} = C$$
$$S_n = 1 - \frac{(\Delta \theta_0)^2}{6}, \quad C_n = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta \theta_0)^2}{24}$$

$$(\Delta \theta_0)^2 = (\Delta \theta_{nbx}^b)^2 + (\Delta \theta_{nby}^b)^2 + (\Delta \theta_{nbz}^b)^2$$
  
$$\Delta t = 0.02 \text{ s}$$

$$C_b^n(t + \Delta t) = C_b^n(t) \left[ I + \left(1 - \frac{(\Delta \theta_0)^2}{6}\right) \cdot \Delta \theta_{nb}^{bK} + \left(\frac{1}{2} - \frac{(\Delta \theta_0)^2}{24}\right) \cdot (\Delta \theta_{nb}^{bK})^2 \right]$$

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 3 SINS的计算流程

- **系统初始化**

- 给定载体的初始位置、初始速度和导航平台的初始对准
- 捷联式惯导的初始对准是确定姿态矩阵初值，在物理概念上即是把“数学平台”的平台坐标系和n系或g系的轴向对准
- 平台式惯导的初始对准是完成平台对基准坐标系的跟踪

- **姿态矩阵计算**

- **导航计算**



## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 3 SINS的计算流程

- 系统初始化
- 姿态矩阵计算
  - 综合陀螺仪测量值和计算值到 $n$ 系相对于 $i$ 系角速度
  - 计算体系相对于导航系角速度
  - 计算姿态变换矩阵
  - 姿态矩阵得到姿态姿态角
- 导航计算

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



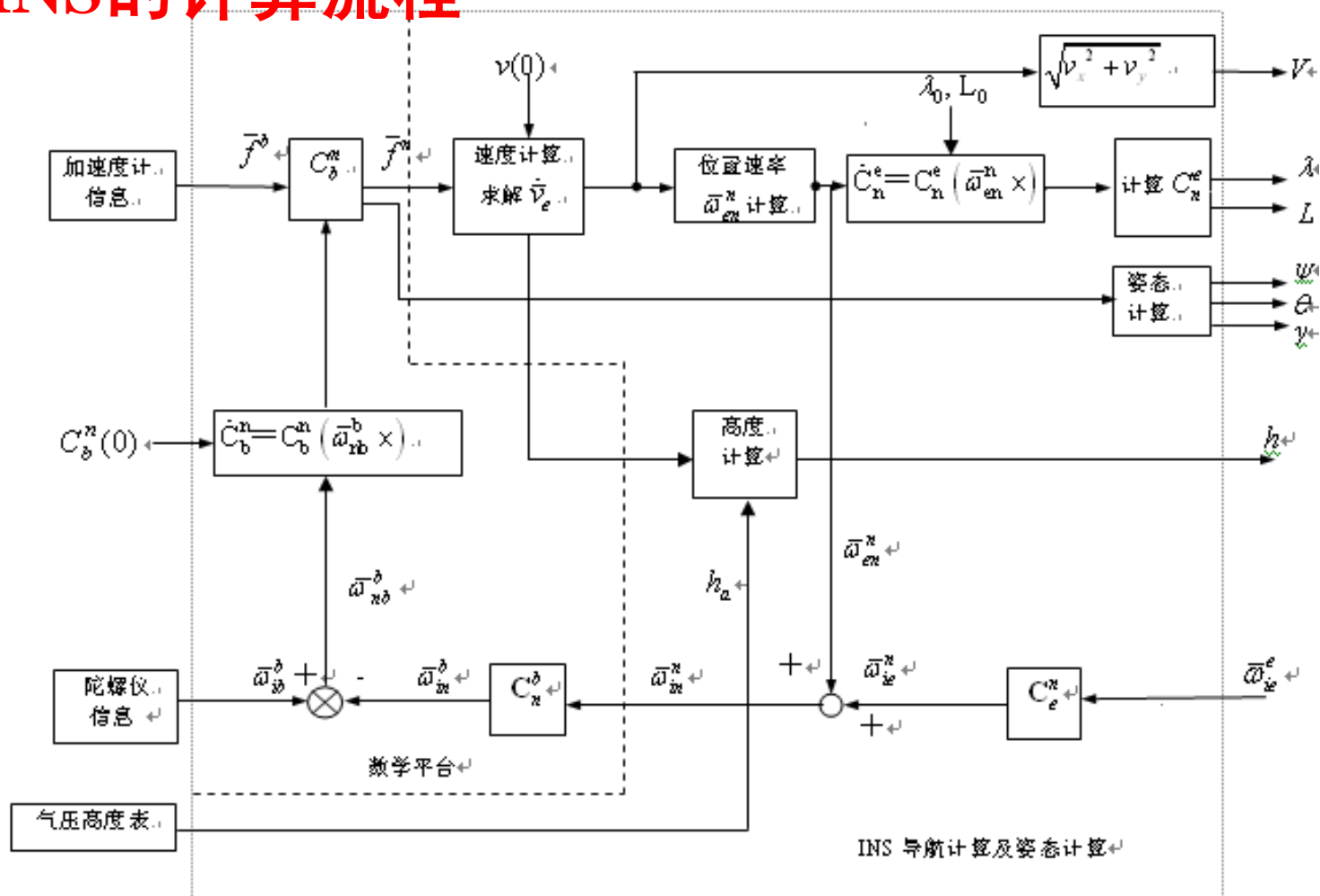
### 3 SINS的计算流程

- 系统初始化
- 姿态矩阵计算
- 导航计算
  - 利用得到的姿态变换矩阵把加速度计输出变换到 $n$ 系
  - 消除有害加速度
    - 载体相对于地球运动造成的向心加速度
    - 地球自转产生的哥氏加速度和重力加速度
  - 积分计算载体的速度、位置等导航信息，或计算位置矩阵

## 2.5 惯导系统的导航计算和姿态计算



### 3 SINS的计算流程



捷联式惯导算法的程序编排框图



## 2.6 惯性系统的误差分析

- 惯性导航误差、误差分析的目的和方法
- 误差量的定义和误差的传播
- 误差方程
  - 平台姿态角误差方程
  - 速度误差方程
  - 位置误差方程
- 惯导系统的基本误差特性

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 1 惯性导航误差、误差分析的目的和方法

- 惯导系统的误差源

- 惯性仪表误差

- 陀螺漂移和刻度因子误差
- 加速度计的零偏和刻度因子误差
- 模数转换误差等

- 惯性仪表安装误差

- 系统的初始条件误差

- 平台对准误差
- 位置、速度初始值的装订误差

- 系统计算误差以及各种干扰引起的误差

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 1 惯性导航误差、误差分析的目的和方法

- 误差分析目的

- 定性分析误差的变化规律和特性
- 定量估算惯导系统计算结果的准确程度

- 误差分析方法

- 建立反映各个误差量之间有机联系的误差方程
  - 获取方法：微分处理系统各力学量之间联系方程
  - 小扰动假设：误差源可看成是对理想特性的小扰动，因而各个误差量都是对系统的一阶小偏差输入量
  - 线性化：通过系统方程的微分处理并取一阶近似而忽略二阶以上的小量，得到系统的线性化误差方程

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 2 误差量定义和误差的传播

- 误差分量  $\delta L, \delta \lambda, \delta v_x(\delta v_E), \delta v_y(\delta v_N), \delta v_z(\delta v_U), \phi_x, \phi_y, \phi_z$ 
  - 惯性导航地理位置误差
  - 速度误差
  - 平台系相对地理系（ENU坐标系）误差角
- 初始给定误差  $\delta L_0, \delta \lambda_0, \delta v_{x0}(\delta v_{E0}), \delta v_{y0}(\delta v_{N0}), \delta v_{z0}(\delta v_{U0}), \phi_{x0}, \phi_{y0}, \phi_{z0}$
- 各误差量的一阶导数  $\delta \dot{L}, \delta \dot{\lambda}, \delta \dot{v}_x(\delta \dot{v}_E), \delta \dot{v}_y(\delta \dot{v}_N), \delta \dot{v}_z(\delta \dot{v}_U), \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$
- 三个加速度计零位偏差  $\nabla_x(\nabla_E), \nabla_y(\nabla_N), \nabla_z(\nabla_U)$
- 三向陀螺漂移  $\varepsilon_x(\varepsilon_E), \varepsilon_y(\varepsilon_N), \varepsilon_z(\varepsilon_U)$

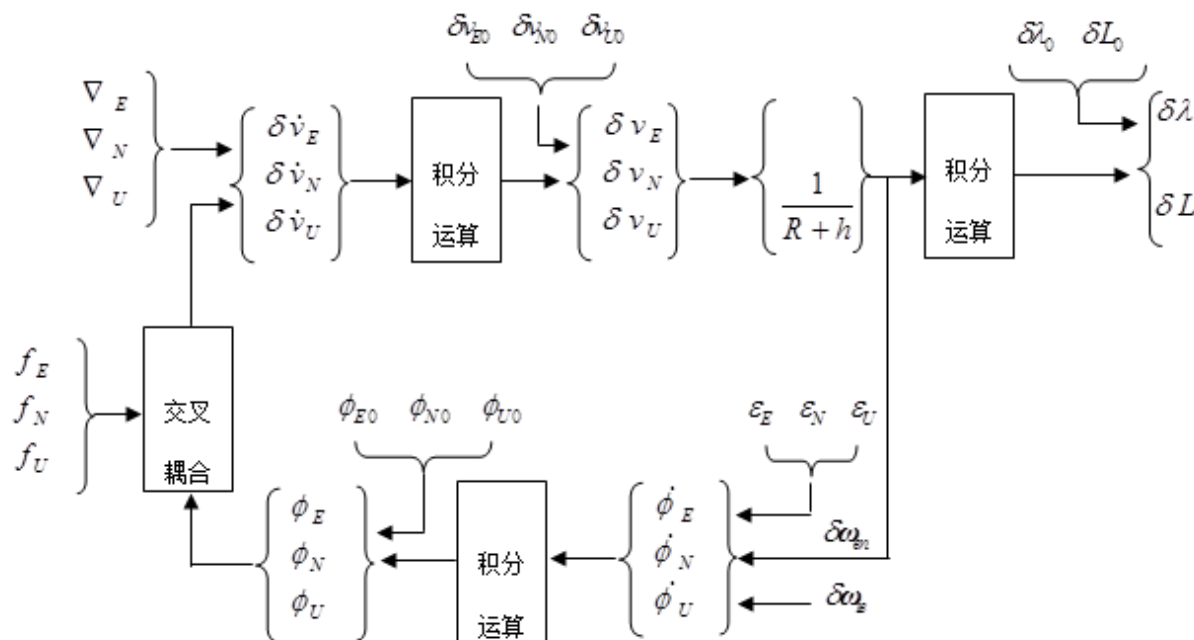
## 2.6 惯性系统的误差分析



### 2 误差量定义和误差的传播

#### ● 误差传播

- 根据惯性导航系统原理和导航参数与姿态角的计算过程，可得惯性导航误差传递的关系与方向示意图



惯性导航系统误差传递示意图



## 2.6 惯性系统的误差分析



### 2 误差量定义和误差的传播

- 误差传播：三个阶段

- 第一段：加速度误差

- 误差角速率一次积分并加上初始偏差形成平台误差角
- 平台误差角引起加速度测量误差的交叉耦合误差
- 交叉耦合误差连同加速度计零偏误差形成加速度误差

- 第二段：速度/位置误差

- 加速度误差一次积分并加上速度初始偏差形成速度误差
- 速度误差除以地球曲率半径，一次积分后连同位置初始误差形成导航位置误差

- 第三段：姿态角误差

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 2 误差量定义和误差的传播

- 误差传播：三个阶段

- 第一段：加速度误差

- 第二段：速度/位置误差

- 第三段：姿态角误差

- 速度误差引起地理系相对地球坐标系转动角速率误差

- 形成陀螺仪指令角速率误差，连同陀螺漂移形成平台系相对地理系的误差角速率

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

- 误差方程建立步骤
  - 找到或建立有关参数的原始方程
  - 对原始方程一阶微分处理，得到以误差量为基本参数的误差方程
  - 惯导系统误差传播中三段误差传播方程的总和就是误差方程
- 惯导系统误差方程
  - 根据惯导系统速度方程、位置变化率方程和平台误差角的定义，可以建立速度误差方程、位置误差方程和平台姿态角误差方程，三个误差方程的总和就是系统的误差方程

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

- 平台姿态角误差方程

- 平台姿态角误差定义：陀螺稳定平台或数学平台模拟的地理坐标系P与真实地理坐标系n之间的误差角，通常是一个小角度

$$C_n^P = \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} - [\bar{\phi} \times] \quad \bar{\phi} = [\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^T$$

- 误差产生原因

- 理想情况下P系与n系重合，P系相对惯性空间的转动角速度与n系相对惯性空间的转动角速度之差为

$$\dot{\bar{\phi}} = \omega_{iP}^P - \omega_{in}^P = \omega_{iP}^P - C_n^P \omega_{in}^n = \omega_{iP}^P - [\mathbf{I} - \bar{\phi} \times] \omega_{in}^n \quad \dot{\bar{\phi}} = \omega_{iP}^P - \omega_{in}^n + \bar{\phi} \times \omega_{in}^n$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

#### ● 平台姿态角误差方程

##### ■ 误差产生原因

➤ 角速度计算不准确

$$\omega_{ie}^n \quad \omega_{en}^n$$

➤ 陀螺存在漂移

$$\varepsilon^P \approx \varepsilon^n$$

$$\dot{\bar{\phi}} = \delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \bar{\phi} + \varepsilon^n$$

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_y}{R_M + h} \\ \frac{v_x}{R_N + h} \\ \frac{v_x}{R_N + h} \tan L \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{yellow arrow}} \delta\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{\delta v_y}{R_M + h} \\ \frac{\delta v_x}{R_N + h} \\ \frac{\delta v_x}{R_N + h} \tan L + \frac{v_x}{R_N + h} \sec^2 L \delta L \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{yellow arrow}} \delta\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie} \sin L \delta L \\ \omega_{ie} \cos L \delta L \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^n = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

- 平台姿态角误差方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_x &= -\frac{\delta v_y}{R_M + h} + \left( \omega_{ie} \sin L + \frac{v_x \operatorname{tg} L}{R_N + h} \right) \phi_y - \left( \omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) \phi_z + \varepsilon_x \\ \dot{\phi}_y &= \frac{\delta v_x}{R_N + h} - \left( \omega_{ie} \sin L + \frac{v_x \operatorname{tg} L}{R_N + h} \right) \phi_x - \frac{v_y}{R_M + h} \phi_z - \omega_{ie} \sin L \delta L + \varepsilon_y \\ \dot{\phi}_z &= \frac{\delta v_x}{R_N + h} \operatorname{tg} L + \left( \omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) \phi_x + \frac{v_y}{R_M + h} \phi_y + \left( \omega_{ie} \cos L + \frac{v_x \sec^2 L}{R_N + h} \right) \delta L + \varepsilon_z \end{aligned} \right\}$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

- 速度误差方程

- INS速度方程

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n$$

- 一阶微分方程

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \delta \mathbf{f}^n - (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{g}^n$$

$$\delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^P - \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^n \times \bar{\boldsymbol{\varphi}}^n + \bar{\nabla}^P$$

$$\mathbf{f}^P = \mathbf{C}_n^P \mathbf{f}^n + \bar{\nabla}^P = [\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}^n \times] \mathbf{f}^n + \bar{\nabla}^P$$

$$\delta \mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad -\delta g_z]^T$$

$$\delta g_z = -2\omega_s^2 \delta h$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

#### ● 速度误差方程

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= \left( \frac{v_y \tan L}{R_N + h} - \frac{v_z}{R_N + h} \right) \delta v_x + \left( 2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x \tan L}{R_N + h} \right) \delta v_y - \left( 2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) \delta v_z \\ &\quad - f_z \phi_y + f_y \phi_z + \left( 2\omega_{ie} v_z \sin L + 2\omega_{ie} v_y \cos L + \frac{v_x v_y \sec^2 L}{R_N + h} \right) \delta L + \nabla_x \\ \delta \dot{v}_y &= - \left( \frac{2v_x \tan L}{R_N + h} + 2\omega_{ie} \sin L \right) \delta v_x - \frac{v_z}{R_M + h} \delta v_y - \frac{v_y}{R_M + h} \delta v_z + f_z \phi_x - f_x \phi_z \\ &\quad - \left( 2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x \sec^2 L}{R_N + h} \right) v_x \delta L + \nabla_y \\ \delta \dot{v}_z &= \left( 2\omega_{ie} \cos L + \frac{2v_x}{R_N + h} \right) \delta v_x + \frac{2v_y}{R_M + h} \delta v_y - f_y \phi_x + f_x \phi_y - 2\omega_{ie} v_x \sin L \delta L \\ &\quad + \frac{2g_0}{R_M} \delta h + \nabla_z \end{aligned} \right\}$$



## 2.6 惯性系统的误差分析



### 3 误差方程

- 位置误差方程

- 位置微分方程

$$\dot{L} = \frac{v_y}{R_M + h}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{R_N + h} \sec L$$

- 误差方程

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{L} &= \frac{\delta v_y}{R_M + h} \\ \delta \dot{\lambda} &= \frac{\sec L}{R_N + h} \delta v_x + \frac{v_x}{R_N + h} \sec L \cdot \operatorname{tg} L \delta L \\ \delta \dot{h} &= \delta v_z \end{aligned} \right\}$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 4 惯导系统的基本误差特性

- 静基座误差方程：速度为零简化误差方程可得

- 平台姿态角误差

- 陀螺漂移

- 交叉耦合误差(平台误差角)

- 导航参数引起的误差

$$\dot{\phi}_x = -\frac{\delta v_y}{R_M} + \phi_y \omega_{ie} \sin L - \phi_z \omega_{ie} \cos L + \varepsilon_x$$

$$\dot{\phi}_y = \frac{\delta v_x}{R_N} - \delta L \omega_{ie} \sin L - \phi_x \omega_{ie} \sin L + \varepsilon_y$$

$$\dot{\phi}_z = \frac{\delta v_x}{R_N} \tan L + \delta L \omega_{ie} \cos L + \phi_x \omega_{ie} \cos L + \varepsilon_z$$

- 速度误差

- 加速度零偏

- 交叉耦合误差(平台误差角)

- 补偿有害加速度时引入的误差

$$\delta \dot{v}_x = 2\delta v_y \omega_{ie} \sin L - \phi_y g + \nabla_x$$

$$\delta \dot{v}_y = -2\delta v_x \omega_{ie} \sin L + \phi_x g + \nabla_y$$

$$\delta \dot{L} = \frac{\delta v_y}{R_M}$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 4 惯导系统的基本误差特性

- 静基座误差振荡特性

- 原系统方程

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + W(t)$$

- 取拉氏变换

$$sX(s) - X(0) = F X(s) + W(s)$$

$$X(s) = (sI - F)^{-1} [X(0) + W(s)]$$

- 系统特征方程式

$$\Delta(s) = |sI - F|$$

$$= (s^2 + \omega_{ie}^2) [(s^2 + \omega_s^2)^2 + 4s^2 \omega_{ie}^2 \sin^2 L] = 0$$

- 系统特征根

$$s_{1,2} = \pm j\omega_{ie} \quad s_{3,4} = \pm j(\omega_s + \omega_{ie} \sin L)$$

$$s_{5,6} = \pm j(\omega_s - \omega_{ie} \sin L)$$

$$\omega_s = \sqrt{g_0/R} \approx 1.24 \times 10^{-3} \text{ rad/sec}$$

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 4 惯导系统的基本误差特性

#### ● 静基座误差振荡特性

- 系统特征根：虚根，即系统的极点都在虚轴上，

- 系统误差解是正余弦函数的线性组合
- 系统误差周期振荡，固有振荡频率有三个

#### ■ 振荡频率

#### 振荡周期

- 付科角速率  $\omega_{ie} \sin L = \omega_f$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 84.4$$

分钟

- 舒勒角速率  $\omega_s$

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_{ie} \sin L} = 34$$

小时 ( $L=45^\circ$ )

- 地球角速率  $\omega_{ie}$

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_{ie}} = 24$$

小时

- INS本质特征：物理上能实现的舒勒摆

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 4 惯导系统的基本误差特性

- 静基座误差振荡特性

- INS本质特征：物理上能实现的舒勒摆

- 系统误差具有舒勒振荡周期
- 具有舒勒摆特性惯性稳定平台
- 是一个物理上能实现的舒勒摆
- 载体机动不会引起导航误差，机动对系统无干扰

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 4 惯导系统的基本误差特性

- 误差传播特性：基于误差源/导航误差传递关系确定
  - 陀螺漂移引起的误差
    - 引起的系统误差大多数都是振荡的
    - 对某些导航参数和平台误差角将产生常值误差
    - 最为严重的是北向陀螺漂移及方位陀螺漂移对于经度误差将引起随时间积累的位置偏差，东向陀螺漂移直接影响方位对准精度误差
  - 加速度计零偏引起的误差
    - 产生振荡误差及常值误差
    - 水平加速度计将引起经、纬度及平台姿态角常值误差

## 2.6 惯性系统的误差分析



### 4 惯导系统的基本误差特性

- 误差传播特性：基于误差源/导航误差传递关系确定
  - 陀螺仪和加速度计的精度是影响惯导系统精度的决定性因素，其中陀螺仪的精度尤为突出。
  - 特殊时间内误差可视为随时间增长
    - 有些误差虽然从性质讲是振荡型的，但因振荡周期很长（如周期为24小时、84.4分或34小时），可能远远大于系统的一次工作时间。此时误差在系统工作期间视为随时间增长。

$$\phi_z = \frac{\varepsilon_z}{\omega_{ie}} \sin \omega_{ie} t$$

振荡周期是24小时，在系统工作几小时内，平台姿态误差随时间增长



## 2.7 惯性系统的对准技术

---

- 初始对准的概念和分类
- 传递对准的概念和方法
- 主要研究内容



## 2.7 惯性系统的对准技术



### 1 对准的概念和分类

- 基本概念

- 惯性导航是一种航位推算导航，工作前需初始化信息
- 惯导的初始化
  - 给定初始速度和初始位置
  - 惯导平台的初始对准
  - 陀螺仪的测漂和定标
- 快速、高精度初始对准是惯导应用必须解决的关键问题
- 初始对准
  - 平台式：使平台坐标系向导航坐标系对准，是一个物理过程
  - 捷联式：确定初始时刻姿态阵（数学平台），初始姿态阵的计算和估计过程

# 2.7 惯性系统的对准技术



## 1 对准的概念和分类

### ● 对准分类

- 按对准阶段：粗对准和精对准
- 按对准轴向：水平对准和方位对准
- 按对准信息来源：自对准和外部对准
- 按基座的运动状态：静基座对准和动基座对准
- 按对准所使用的方法分：回路调节法和最优估计法
- 按对准所使用的参数分：计算参数法和测量参数法惯导的初始化

## 2.7 惯性系统的对准技术



### 1 对准的概念和分类

- 对准过程：水平对准和方位对准（平台式惯性系统）
  - 实现惯性测量组件与当地地理坐标系的对准
  - 水平对准：调节平台的倾斜角使惯性测量组件中的北向和东向加速度计的输出为零（作用在北向和东向的重力水平分量理论上为零），实现平台调平和水平对准
  - 方位对准：绕垂直轴旋转平台直至东向陀螺的输出为零（理论上地球自转角速率东向分量也为零），完成方位对准，这种对准过程称为陀螺罗经法
  - 自主式水平对准精度主要取决于两个水平加速度计的精度
  - 方位对准精度主要取决于东向陀螺漂移

## 2.7 惯性系统的对准技术



### 1 对准的概念和分类

- 对准过程：粗对准和精对准（捷联式惯性系统）

- 粗对准：

- 一般直接利用加速度计和陀螺仪的输出信息在较短的时间内粗略地计算出初始姿态矩阵
- 特点：速度快，精度低，为精对准提供一个满足要求的初始变换矩阵

- 精对准：

- 处理惯性仪表的输出信息及外部观测信息，精确地确定计算参考坐标系（数学平台）与地理坐标系之间的失准角，建立起准确的初始姿态变换阵

## 2.7 惯性系统的对准技术



### 1 对准的概念和分类

- 对准结果和时间要求

- 制导武器：要求惯导系统初始对准准确、快速

- 空中发射武器：几分钟或几秒钟内

- 舰船飞机：惯导系统对准时间可稍长一些

- 民用飞机

- ❖ 对准时间：15-20分钟

- ❖ 对准精度：水平对准精度 $<10''$ ,方位对准精度 $2''-5''$

- 一般武器系统：

- ❖ 静基座对准：10分钟以内

- ❖ 动基座对准：20分钟以内

## 2.7 惯性系统的对准技术



### 2 传递对准的概念和分类

#### ● 传递对准问题的提出

- 传递对准技术：满足动基座弹载惯导系统初始参数对准问题，实现动基座弹载惯导系统导航坐标系建立和系统初值确定的方法和技术
- 战术导弹使用的惯性器件精度虽然不高，但由于飞行时间短，惯性器件误差的积累所造成的导航定位误差并不显著；而传递对准引起的定位误差在系统综合误差中起主要作用
- 传递对准的精度与时间决定了导弹发射后的精度与发射导弹前的准备时间。因此，传递对准对动基座条件使用的载有惯性系统的导弹武器，特别是机载武器至关重要

## 2.7 惯性系统的对准技术



### 2 传递对准的概念和分类

#### ● 传递对准的概念

- **主惯导：**动基座使用的弹载惯导系统的初始对准需要借助另外的参考系统向弹载惯导系统传递信息。为保持误差特性的一致，目前参考系统多选择载体惯性系统，称为主惯导。其导航坐标系在起飞前（或在舰船起航前）已借助另外的方法准确建立
- **子惯导：**需要进行初始对准的动基座弹载惯导系统，通常是在载机飞行过程中或武器发射前进行标定
- **传递对准：**主惯导向子惯导实时传输子惯导对准所需要的导航参数，子惯导通过动态匹配它与主惯导的数据，估计它所建立的坐标系与主惯导所建立坐标系之间的差别并进行修正，以建立与主惯导相一致的导航坐标系，从而实现子惯导对准的过程

# 2.7 惯性系统的对准技术



## 2 传递对准的概念和分类

### ● 传递对准的概念

- 传递对准主要任务：以主惯导为基准，利用一定的信息或参数匹配手段，使子惯导建立的导航坐标系良好地重合于主惯导所对应的导航坐标系
- 实施过程：为保证在主、子惯导存在相对运动的动态条件下，子惯导在对准结束后建立起与主惯导保持一致的导航坐标系，在实施对准的整个过程中，主惯导要定时向子惯导实时传输匹配方法需要的导航参数



# 2.7 惯性系统的对准技术



## 2 传递对准的概念和分类

### ● 传递对准的方法

- 计算参数匹配方法：基于惯导计算导航参数的匹配
  - 速度匹配 位置匹配 姿态匹配
- 测量参数匹配方法：基于惯性元件所测量参数的匹配
  - 加速度匹配 角速度匹配
- 综合方法：计算参数/测量参数混合
  - 速度/位置/姿态/加速度/角速度的混合匹配
- 状态估计方法：状态估计方法，卡尔曼滤波
  - 导弹/基座存在随机相对运动，对准误差往往不可直接观测

# 2.7 惯性系统的对准技术



## 2 传递对准的概念和分类

### ● 传递对准的关键技术

- 传递对准要求：对准精度高，对准时间短
- 影响传递对准精度的因素
  - 匹配方法、对准时间、对准算法、惯性器件精度以及对导弹所在处相对主惯导所在处载体的挠曲变形、振动了解程度等
  - 载机的机动方式也是影响传递对准精度和时间的主要因素。由于一些误差参数（对准误差）以与载机加速度或角速度相乘的形式进入误差模型，需要载机在足够长的时间里以足够的加速度进行机动，以使这些项可以被分离。而且高加速度与角速度将导致好的估计精度与更短的估计时间

## 2.7 惯性系统的对准技术

---



### 3 主要研究内容

- 对准模型的建立和简化
- 对准算法研究
- 快速对准方法研究
- 对准的仿真和实验技术
- 对准精度及导航精度评估方法研究

## 2.8 惯性导航的特点和主要发展方向



### 1 惯性导航的特点

- 优点：自主、抗干扰、短期精度高、数据输出率高、导航信息完备、适应范围广
- 误差特性：误差具有周期振荡特性，某些误差随时间积累。主要由惯性器件精度决定，以陀螺仪精度尤为突出
- 高度阻尼：纯惯导系统高度通道工作不稳定，必须引入外部高度信息进行阻尼
- 初始化：惯性导航是一种航位推算导航，正常工作前需要初始化信息，准备时间长。需完成给定初始速度和位置、惯导平台对准、惯性器件测漂和标定

## 2.8 惯性导航的特点和主要发展方向



### 2 惯性导航主要研究方向

- 研制和采用新型、高精度惯性器件
- 惯性器件误差建模与器件误差补偿技术
- 高精度惯性导航和姿态计算算法研究
- 快速、高精度对准技术
- 与其他传感器或导航系统进行组合
- 估计理论在惯性导航中的应用
- 惯性导航技术应用



## 比力与比力方程

- 比力概念
- 比力方程推导

## 惯导系统的算法模型和误差模型

- 两种类型惯性系统的工作原理
- 导航算法
- 导航误差模型
- 误差振荡特性