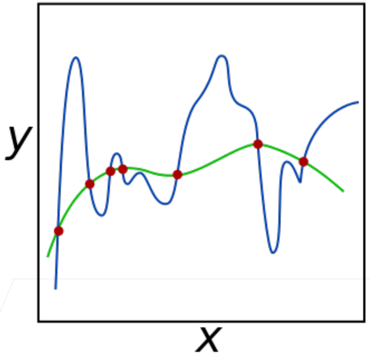
使用均方范数作为硬性限制

- 通过限制参数值的选择范围来控制模型容量

$$\min \ \ell(\mathbf{w}, b) \quad \text{subject to} \ \ \|\mathbf{w}\|^2 \leq \theta$$

  - 通常不限制偏移 b （限不限制都差不多）
  - 小的 θ 意味着更强的正则项



使用均方范数作为柔性限制

- 对每个 θ，都可以找到 λ 使得之前的目标函数等价于下面

$$\min \quad \ell(\mathbf{w}, b) + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{w}\|^2$$

  - 可以通过拉格朗日乘子来证明
- 超参数 λ 控制了正则项的重要程度
  - $\lambda = 0$：无作用
  - $\lambda \to \infty, \mathbf{w}^* \to \mathbf{0}$

参数更新法则

- 计算梯度

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\left(\ell(\mathbf{w}, b) + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{w}\|^2\right) = \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, b)}{\partial \mathbf{w}} + \lambda \mathbf{w}$$

- 时间 t 更新参数

$$\mathbf{w}_{t+1} = (1 - \eta\lambda)\mathbf{w}_t - \eta \frac{\partial \ell(\mathbf{w}_t, b_t)}{\partial \mathbf{w}_t}$$

  - 通常 $\eta\lambda < 1$，在深度学习中通常叫做权重衰退