标量

- 简单操作

$$c = a + b$$

$$c = a \cdot b$$

$$c = \sin a$$

- 长度

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if} a > 0 \\ -a & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

向量

- 简单操作

$$c = a + b \quad \text{where } c_i = a_i + b_i$$

$$c = \alpha \cdot b \quad \text{where } c_i = \alpha b_i$$

$$c = \sin a \quad \text{where } c_i = \sin a_i$$

- 长度

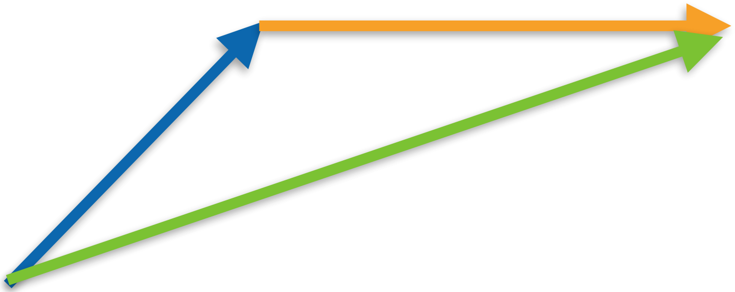
$$\|a\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|a\| \geq 0 \text{ for all } a$$

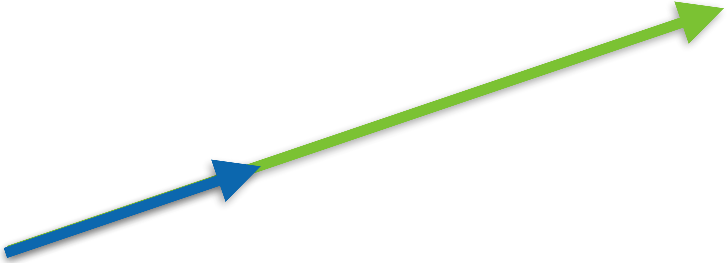
$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\|a \cdot b\| = |a| \cdot \|b\|$$

向量



$$c = a + b$$



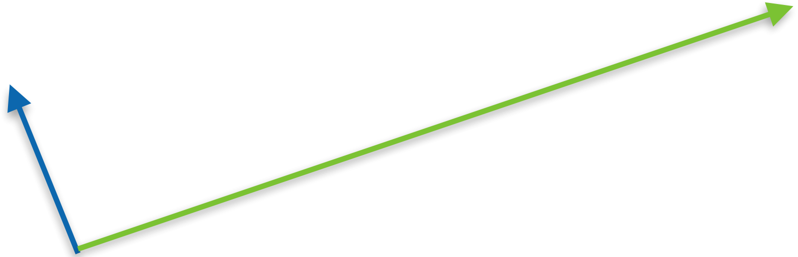
$$c = \alpha \cdot b$$

数学家的‘**`parallel for all do`**’

向量

- 点乘 $$a^\top b = \sum_i a_i b_i$$

- 正交 $$a^\top b = \sum_i a_i b_i = 0$$



矩阵

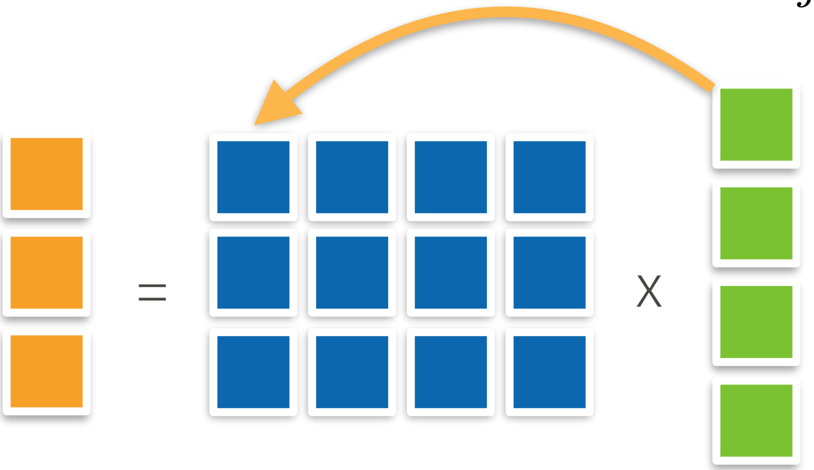
- 简单操作

$$C = A + B \qquad \text{where } C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$
$$C = \alpha \cdot B \qquad \text{where } C_{ij} = \alpha B_{ij}$$
$$C = \sin A \qquad \text{where } C_{ij} = \sin A_{ij}$$

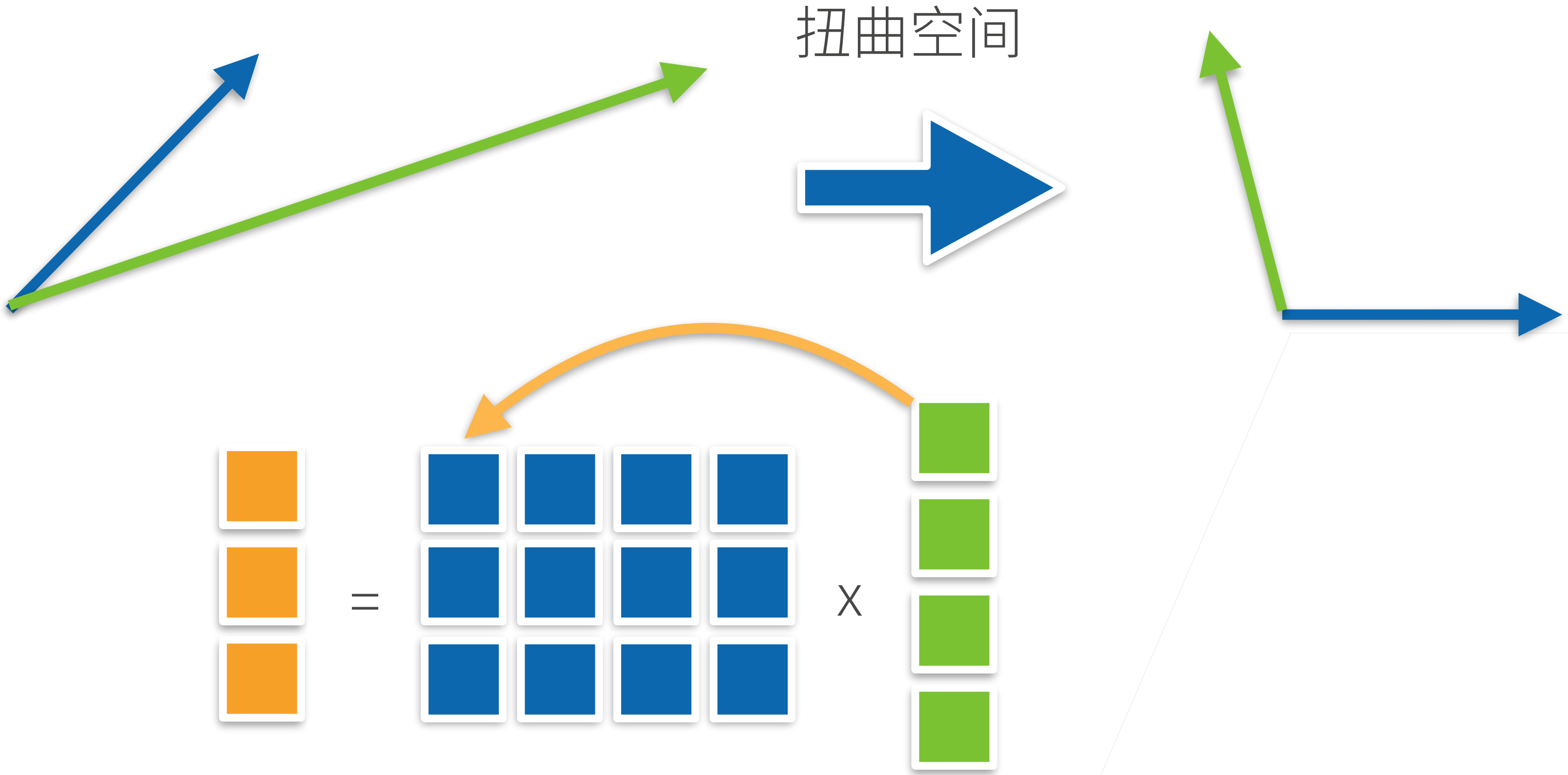
矩阵

- 乘法 （矩阵乘以向量）

$$c = Ab \text{ where } c_i = \sum_j A_{ij} b_j$$



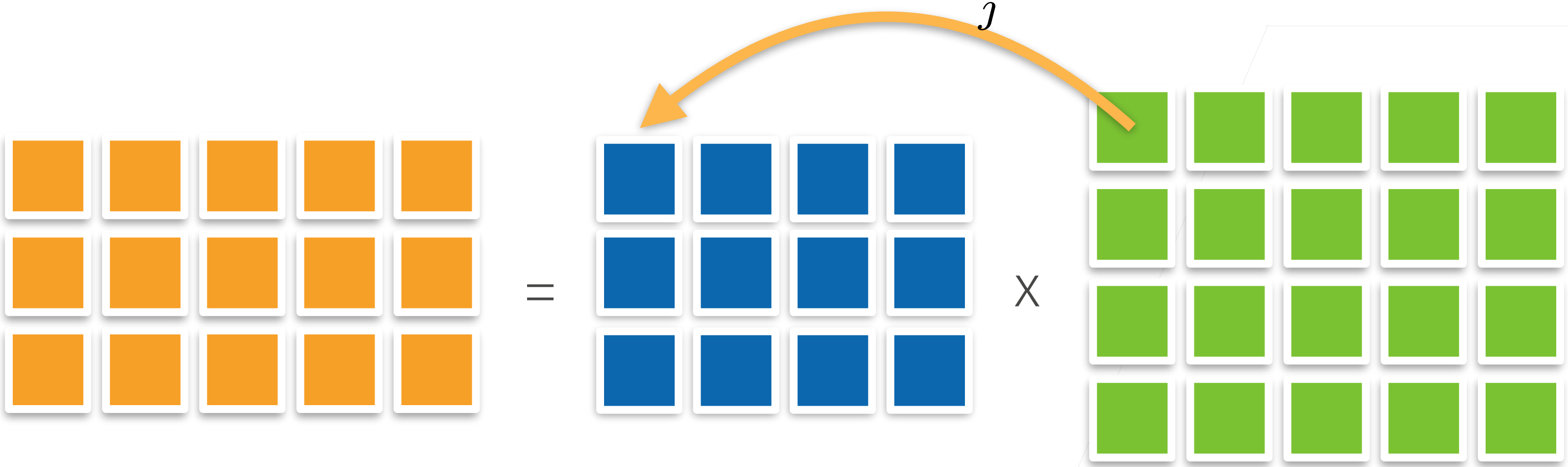
矩阵



矩阵

- 乘法（矩阵乘以矩阵）

$$C = AB \text{ where } C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$$



矩阵

- 范数

$$c = A \cdot b \text{ hence } \|c\| \leq \|A\| \cdot \|b\|$$

  - 取决于如何衡量 b 和 c 的长度
- 常见范数
  - 矩阵范数：最小的满足的上面公式的值
  - Frobenius 范数

$$\|A\|_{\text{Frob}} = \left[\sum_{ij} A_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

特殊矩阵

- 对称和反对称

$$A_{ij} = A_{ji} \text{ and } A_{ij} = -A_{ji}$$

- 正定

$$\|x\|^2 = x^\top x \geq 0 \text{ generalizes to } x^\top A x \geq 0$$

特殊矩阵

- 正交矩阵
  - 所以行都相互正交
  - 所有行都有单位长度 $U \text{ with } \sum_j U_{ij} U_{kj} = \delta_{ik}$
  - 可以写成 $UU^\top = \mathbf{1}$
- 置换矩阵

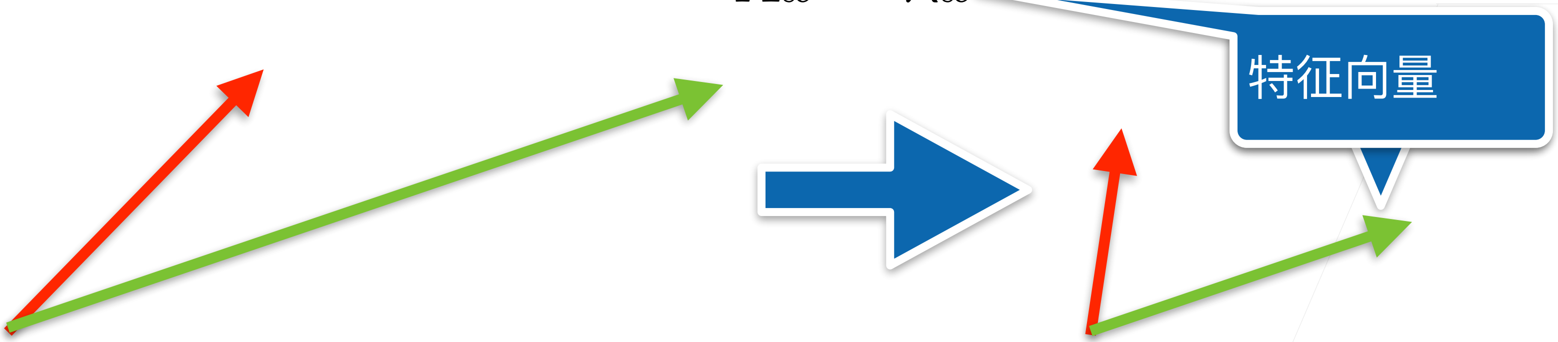
$$P \text{ where } P_{ij} = 1 \text{ if and only if } j = \pi(i)$$

  - 置换矩阵是正交矩阵

矩阵

- 特征向量和特征值
  - 不被矩阵改变方向的向量

$$Ax = \lambda x$$



  - 对称矩阵总是可以找到特征向量