Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторным работам №1 и №2

Дисциплина: Телекоммуникационные технологии

Тема: Сигналы телекоммуникационных систем. Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция.

Работу выполнил студент
гр. 33501/4 Леженин Ю.И.
Преподаватель
Богач Н.В.

Санкт-Петербург
13 апреля 2018 г.

1 Цель работы.

Познакомиться со средствами генерации и визуализации простых сигналов.

2 Постановка задачи.

В командном окне MATLAB и в среде Simulink промоделировать синусоидальный и прямоугольный сигналы с раз- личными параметрами. Получить их спектры. Вывести на график.

3 Ход работы.

3.1 Ряд и интеграл Фурье.

Любая ограниченная, кусочно-непрервыная периодическая функция, имеющая конечное число экстремумов на протяжении периода, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t},$$

где $f_1 = 1/T_1$; T_1 – период функции $\varphi_p(t)$; C_k - постоянные коэффициенты.

Коэффициенты могут быть найдены следующим образом:

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt.$$

При этом значение выражения не зависит от t_0. Обычно берется $t_0 = 0$ или $t_0 = -T_1/2$.

Приведенные формулы можно записать в виде одного выражения:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \right] e^{j2\pi k f_1 t}.$$

Ряд Фурье справедлив для периодических сигналов, однако на его основе можно вывести соотношения и для непериодических сигналов. В этом случае период $T_1 \to \infty$, в связи с этим частота $f_1 \to 0$ и обозначается как df, kf_1 является текущим значением частоты f, а сумма меняется на интеграл. В результате получается выражение

$$\varphi_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] e^{j2\pi ft} df.$$

Это выражение называется интегралом Фурье и объединяет прямое преобразование Фурье

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

и обратное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi ft} dt.$$

Приведенные преобразования существуют только для функций с ограниченной энергией:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \neq \infty$$

И ряд, и интеграл могут быть названы преобразованием Фурье (ПФ), но обычно этим термином обозначается именно интеграл Фурье. Преобразование Фурье сигнала так же называется спектром сигнала.

3.2 Свойства преобразования Фурье.

Преобразование Фурье имеет ряд свойств:

1. Суммирование функций.
   Преобразование Фурье – линейное преобразование. Отсюда следует

   $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i(f).$$

   где α_i – постоянный коэффициент.

2. Смещение функций.
   При смещении функции на t_0 ее ПФ умножается на $e^{j2\pi ft_0}$:

   $$\varphi(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0} \Phi(f).$$

3. Изменение масштаба аргумента функции. При домножении аргумента функции t на постоянный коэффициент α, ПФ функции имеет вид $\frac{1}{|\alpha|}\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$:

   $$\varphi(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} \Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

4. Перемножение функций. ПФ произведения двух функции равно свертки ПФ этих функций:

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_1(f) * \Phi_2(f).$$

5. Свертывание функций.
   ПФ свертки двух функций равно произведению ПФ этих функций:

$$\varphi_1(t) * \varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_1(f)\Phi_2(f).$$

6. Дифференцирование функции.
   При дифференцировании функции ее ПФ домножается на $j2\pi f$:

$$\frac{d[\varphi(t)]}{dt} \leftrightarrow j2\pi f\Phi(f).$$

7. Интегрирование функции.
   При интегрировании функции ее ПФ делится на $j2\pi f$:

$$\int_{-\infty}^{t} \varphi(t')dt' \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}\Phi(f).$$

8. Обратимость преобразования.
   Преобразование обратимо с точность до знака аргумента.

$$\varphi(t) \leftarrow \Phi(f)$$
$$\Phi(t) \leftrightarrow \varphi(-f),\ \Phi(-t) \leftrightarrow \varphi(f)$$

3.3 Основные классы сигналов и их спектры.

Обычно классификация сигнала выполняется по ряду основных признаков: конечность, периодичность и дискретность.

3.3.1 Конечный сигнал.

Сигнал конечной длительности имеет значение только внутри определенного интервала и вне его принимает значение 0. Такой сигнал можно представить как произведение сигнала бесконечной длительности и прямоугольной функции:

$$x_f(t) = x(t) \cdot \Pi(t, T) = \begin{cases} x(t), t \in [-T/2, T/2] \\ 0, t \notin [-T/2, T/2] \end{cases}.$$

При применении ПФ к данному виду сигналов происходит сверка образа сигнала и образа прямоугольной функции:

$$\Phi_f(f) = \Phi(f) * \frac{sin(\pi f T)}{\pi f} = \Phi(f) * \mathrm{sinc}(\pi f).$$

3.3.2 Периодический сигнал.

Периодический сигнал обладает свойством $x_p(t) = x_p(t - k\,T)$, где $k \in \mathbb{Z}$, а T – период. Такой сигнал можно представить как свертку одиночного сигнала длительностью T и последовательности дельта импульсов:

$$x_p(t) = x_{pT}(t) * Ш(t, T).$$

При применении ПФ выполняется умножение образа функции на последовательность дельта импульсов. Спектр периодического сигнала дискретно и соотносится с ПФ одиночного сигнала следующим образом:

$$\Phi_p(f) = \Phi_{pT}(f) \cdot Ш(f, \frac{1}{T}).$$

3.3.3 Дискретный сигнал.

Дискретный по времени сигнал обычно состоит из набора равноотстоящих по времени отсчетов отсчетов. Его можно представить как произведение непрерывного сигнала и последовательности дельта импульсов:

$$x_d(t) = x(t) \cdot Ш(t, T_s).$$

При выполнении ПФ произойдет свертка образа функции и последовательности импульсов. Спектр дискретного сигнала периодическая функция с периодом $\frac{1}{T_s}$:

$$\Phi_d(f) = \Phi(f) * Ш(f, \frac{1}{T_s}).$$

3.4 Спектры некоторых простых сигналов.

В ходе работы была выполнена генерация нескольких наборов данных, состоящих из 512 отсчетов. Каждый набор представляет сигнал определенного вида. Для каждого сигнала с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье был найден спектр. Сигналы конечны и дискретны, поэтому полученные спектры периодичны и имеют искажения обусловленные сверткой с функцией $\mathrm{sinc}(\pi f)$. На рисунках ниже преобразование приведено на интервале $[-T_s/2, T_s/2]$, что соответствует одному периоду.

3.4.1 Гармонический сигнал.

Спектр гармонического сигнала представляет собой набор дискретных отсчетов на частоте, которая совпадает с частой гармоник в сигнале. Значение спектра в отсчетах зависит от амплитуды соответствующих гармоник.

На рисунке 3.1 приведен гармонический сигнал, описываемый выражением $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) + 0.2\cos(2\pi f_1 t)$, $f_0 = 10$Гц, $f_1 = 2$Гц. На рисунке 3.2 приведен амплитудный спектр $|\Phi(f)|$ данного сигнала.

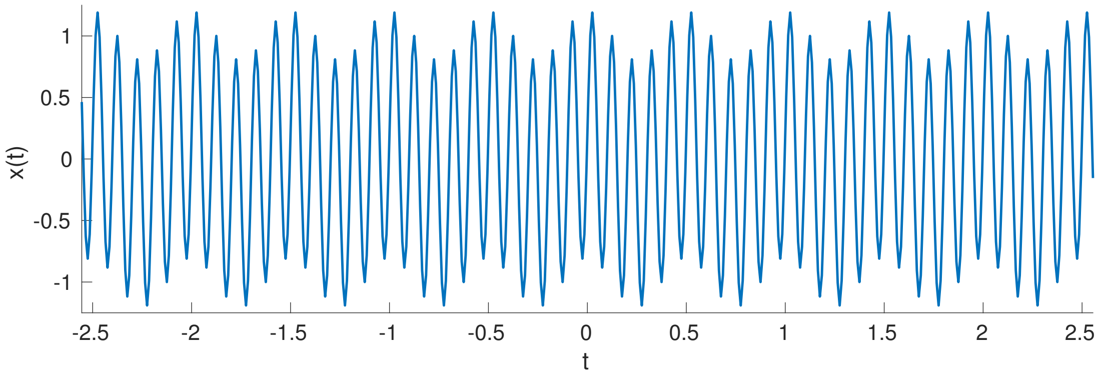

Рис. 3.1: Гармонический сигнал вида
$x(t) = \sin(2\pi \cdot 10t) + 0.2\cos(2\pi \cdot 2t)$.

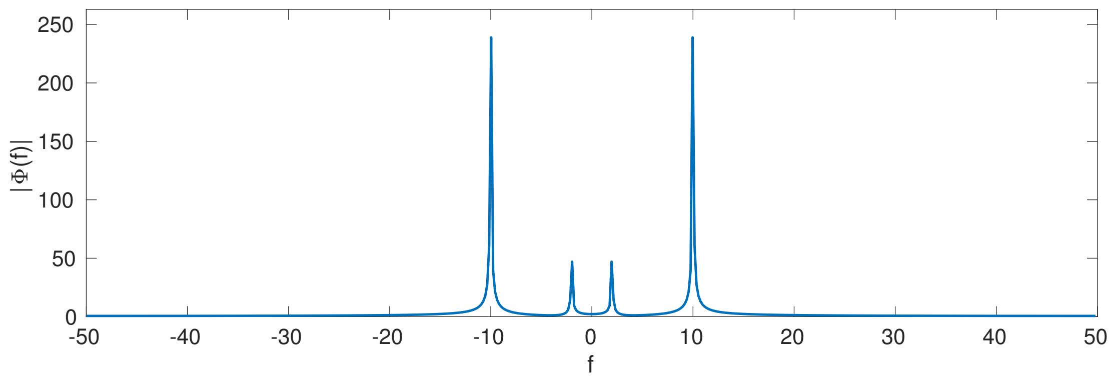

Рис. 3.2: Амплитудный спектр гармонического сигнала вида
$x(t) = \sin(2\pi \cdot 10t) + 0.2\cos(2\pi \cdot 2t)$.

3.4.2 Прямоугольный сигнал.

Спектром прямоугольного импульса длительностью T_i является $\mathrm{sinc}(\pi f) = \frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f}$. При повторении импульсов с периодом T_0 происходит дискретизация спектра, отсчеты находятся на расстоянии $f_0 = 1/T_0$.

Прямоугольный периодический сигнал с длительностью импульса $T_i = 0.1$ с и периодом $T = 0.2$ с приведен на рисунке 3.3, а его спектр – на рисунке 3.4.

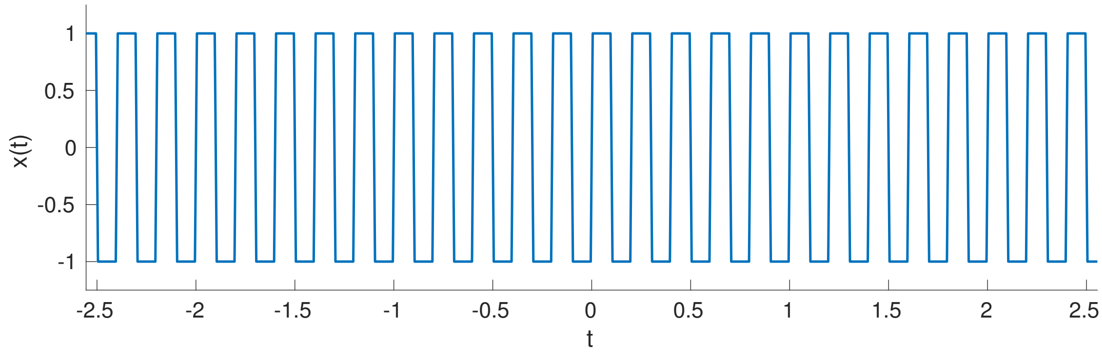

Рис. 3.3: Прямоугольный периодический сигнал. $T_i = 0.1$ с, $T = 0.2$ с.

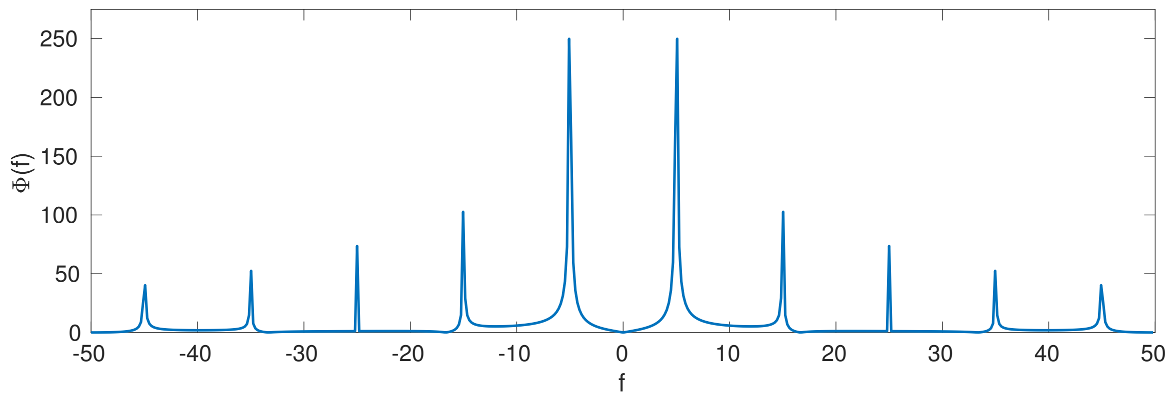

Рис. 3.4: Спектр прямоугольного периодического сигнала. $T_i = 0.1$ с, $T = 0.2$ с.

Отсчеты в спектре находятся на расстоянии 10 Гц друг от друга, что соответствует $2f_0$. Это объясняется тем, что функция $\frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f}$ имеет корни в точках $f = k/T_i$, где k – целое число, а в данном случае $2\,T_i = T_0$. Таким образом, в точках $f = k{\cdot}2/T_0 = 2\,k f_0$ спектр равен 0, т.е. половина отсчетов равны нулю.

3.4.3 Треугольный сигнал.

Треугольный импульс может быть представлен как свертка двух прямоугольных импульсов, таким образом, спектр одиночного треугольного сигнала это функция $\mathrm{sinc}(\pi f)^2$.

Треугольный периодический сигнал с период $T = 0.2$ с приведен на рисунке 3.5, его спектр приведен на рисунке 3.6. Для данного случая справедливы те же рассуждения, что и для периодического прямоугольного сигнала.

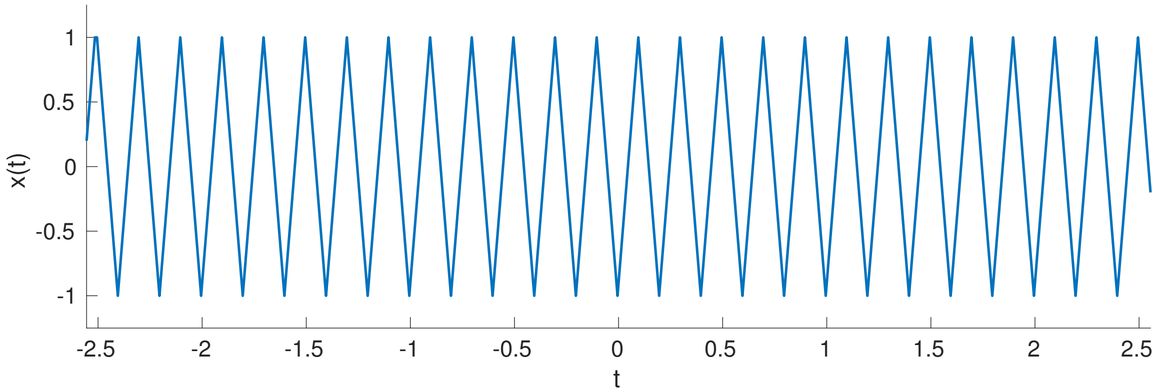

Рис. 3.5: Треугольный периодический сигнал. $T = 0.2$ с

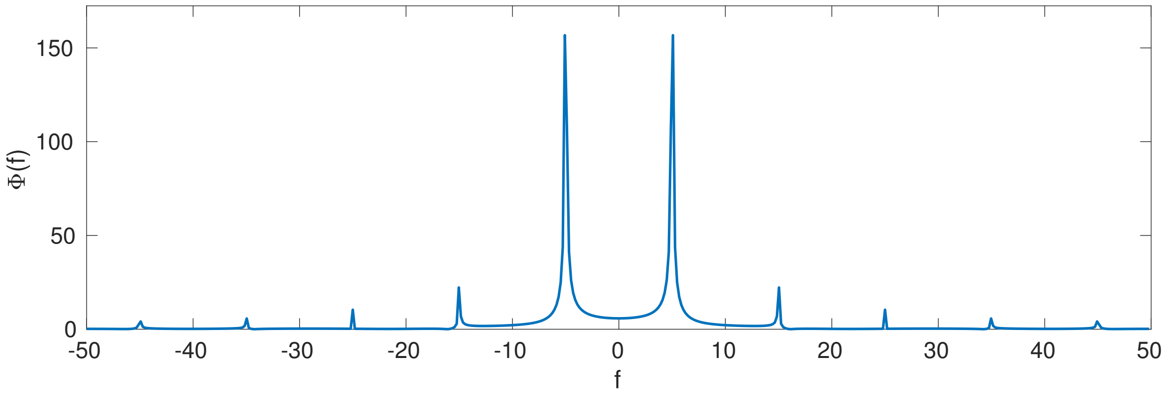

Рис. 3.6: Спектр треугольного периодического сигнала. $T = 0.2$ с

3.5 Корреляция.

Корреляция – это математический аппарат, который позволяет определить меру схожести двух сигналов. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – два сигнала с конечной энергией, тогда для них корреляция определяется как

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, d\tau.$$

Параметр τ определяет смещение одного сигнала относительного другого. Введение смещения позволяет определить корреляцию сигналов независимо от возможных временных задержек.

Для дискретных и конечных сигналов корреляция имеет вид

$$r(\tau) = \sum_{i=n}^{N-1} x(n)\, y(n+\tau)\, d\tau,$$

где N – число отсчетов, а τ целое.

Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции, которая обычно формулируется следующим образом:

$$r = F_D^{-1}[F_D(x(n))F_D(y(n))].$$

Здесь F_D обозначает дискретное преобразование Фурье, а F_D^{-1} – преобразование Фурье. Вектор r содержит результаты круговой корреляции, номер компоненты соответствует смещению.

Для сравнения представленных способов вычисления был выполнен расчет круговой корреляции с помощью преобразования Фурье и прямым методом. Результаты приведены на рисунке 3.7.

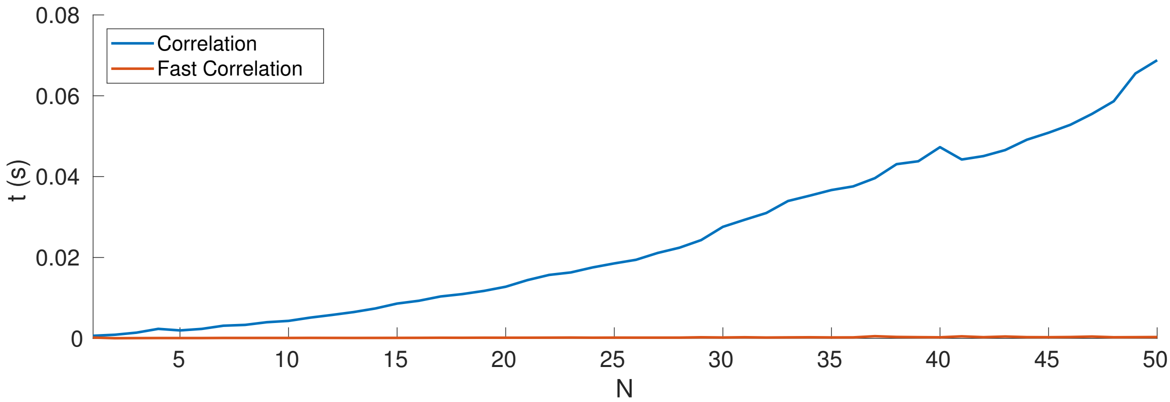

Рис. 3.7: Зависимость времени вычисления корреляции от длины входных последовательностей.

Если число элементов обрабатываемых последовательностей достаточно велико, данный метод позволяет получить результат за меньшее время, чем непосредственный расчет корреляции.

3.6 Поиск синхропосылки в сигнале с помощью корреляции. Получение пакета данных.

Корреляция часто применяется для поиска заданной последовательности в потоке данных. Ниже рассмотрен пример поиска синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010] и получение следующего за ней пакета информации объемом 8 бит.

Для заданного сигнала была вычислена корреляция с искомой последовательностью при смещении от 0 до 16. Полученный результат приведен на рисунке 3.8.

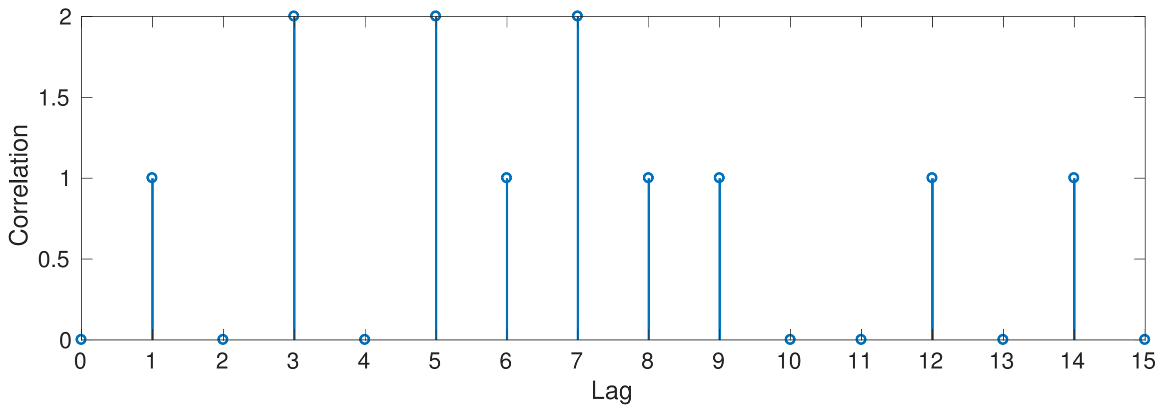

Рис. 3.8: Корреляция между сигналом и синхропосылкой.

Корреляция максимальна при трех различных смещениях. В качестве синхропосылки принимается последовательность с минимальным смещением, таким образом полученный пакет имеет вид [01110000]. На рисунке 3.9 приведен сигнал, на котором цветом выделены синхропосылка и пакет данных.

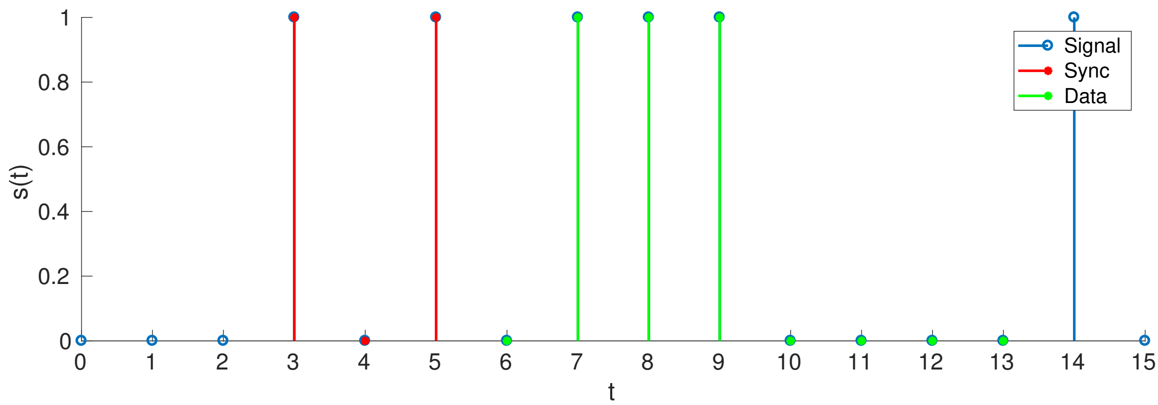

Рис. 3.9: Принимаемый сигнал.

Корреляция синхропосылки [101] последовательностями [101] и [111], одинакова. Это может привести к ложному срабатыванию, данную проблему можно решить если использовать в качестве синхропосылки последовательность единиц.

4 Выводы.

Преобразование Фурье позволяет представить сигнал в базисе гармонических колебаний разной частоты. Это значительно облегчает обработку и синтез сигналов.

Важнейшими свойствами ПФ являются теорема о свертывании сигналов и теорема о перемножении сигналов: произведение функций - это свертка их образов, свертка функций - это произведение их образов.

Спектр периодического сигнала дискретный, а дискретного - периодический. Если сигнал конечный, то при выполнении преобразования его образ сворачивается с функцией $\mathrm{sinc}(\pi f)$.

Корреляция дает возможность определить степень схожести двух сигналов, расчет с учетом смещения позволяет определить и компенсировать временные задержки. Данный инструмент часто применяется для поиска известной последовательности во входном сигнале.

5 Приложение.

Листинг 1: Программа для генерации приведенных сигналов и спектров.

```
close all
clear all

figure_properties = {'units', 'centimeters', 'position', [12, 10, 30, 10], ...
    'DefaultAxesPosition', [0.08, 0.17, 0.88, 0.8]};
lw = 1.8;
fs = 16;

signal_type = 2;

N = 512;
Fs = 100;
Ts = 1/Fs;
F0 = 5;
T0 = 1/F0;

t = -Ts*(N-1)/2:Ts:Ts*(N-1)/2;

switch signal_type
    case 0
        x = sin(2*pi*F0*t) + 0.2*cos(2*pi*(F0/5)*t);
    case 1
        x = square(2*pi*F0*t, 30);
    case 2
        width = (Fs/F0)/2;
        t = [-Ts*((N-1)/2+width):Ts:-Ts*(N-1)/2, t];
        x = square(2*pi*F0*t);
```

```
        coeffs = ones(1, width)/width;
        x = filter(coeffs, 1, x);
        x = x(width+2:end);
        t = t(width+2:end);
    case 3
        x = double(mod(round(t/Ts), round((Fs/F0))) ==
          0);
    otherwise
        x = ones(0, length(t));
end

s = fft(x, N);
s = fftshift(s);
f = (Fs/N)*(-N/2:(N/2-1));

figure(figure_properties{:})
hold on
plot(t, x, 'LineWidth', lw)
xlim([min(t), max(t)])
ylim([-1.25, 1.25])
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
set(gca, 'FontSize', fs)

figure(figure_properties{:})
plot(f, abs(s), 'LineWidth', lw)
ylim([0, max(abs(s)) * 1.1])
ylabel('|\Phi(f)|')
xlabel('f')
set(gca, 'FontSize', fs)
```

Листинг 2: Программа для поиска синхропосылки в сигнале.

```
close all
clear all

figure_properties = {'units', 'centimeters', 'position'
    , [12, 10, 30, 10], ...
    'DefaultAxesPosition', [0.08, 0.17, 0.88, 0.8]};
lw = 1.8;
fs = 16;

```

```
signal = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
sync = [1 0 1];

signal_len = length(signal);
sync_len = 3;
data_len = 8;

pos = 0:(signal_len-1);

[corr, lag] = xcorr(signal, sync);
corr = corr(signal_len:end);
lag = lag(signal_len:end);

max_corr_ind = (corr == max(corr));

figure(figure_properties{:})
stem(lag, corr, 'LineWidth', lw)
xticks(lag)
xlabel('Lag')
ylabel('Correlation')
set(gca, 'FontSize', fs)

figure(figure_properties{:})
hold on
stem(pos, signal, 'LineWidth', lw)
xticks(pos)
xlabel('t')
ylabel('s(t)')
set(gca, 'FontSize', fs)


for i = 1:length(max_corr_ind)
    if (max_corr_ind(i))
        sync_range = (lag(i):(lag(i)+sync_len-1)) + 1;
        data_range = sync_range(end)+1:sync_range(end)+8;
        if (data_range(end) > signal_len)
            data_range = data_range(1):signal_len;
        end
        figure(figure_properties{:})
        hold on
```

```
        stem(pos, signal, 'LineWidth', lw)
        stem(pos(sync_range), sync, 'r*', 'LineWidth', lw)
        stem(pos(data_range), signal(data_range), 'g*', 'LineWidth', lw)
        legend('Signal', 'Sync', 'Data')
        xticks(pos)
        xlabel('t')
        ylabel('s(t)')
        set(gca, 'FontSize', fs)
    end
end

data_start = min(lag(max_corr_ind));
data_range = (data_start+1:data_start+data_len) + sync_len;
data = signal(data_range)
```

Листинг 3: Программа для измерения времени работы алгоритмов вычисления корреляции.

```
close all
clear all

figure_properties = {'units', 'centimeters', 'position', [12, 10, 30, 10], ...
    'DefaultAxesPosition', [0.08, 0.17, 0.88, 0.8]};
lw = 1.8;
fs = 16;

n = 10;

l = 50;
m = 10;

time = zeros(l, m);
time_fast = zeros(l, m);

for i = 1:l

i

```

```
x = (rand(1, i * 100) * 100) - 50;
y = (rand(1, i * 100) * 100) - 50;

for j = 1:m

tic
corr(x, y);
time(i, j) = toc;

tic
fast_corr(x, y);
time_fast(i, j) = toc;

end
end

mt = mean(time, 2);
mtf = mean(time_fast, 2);

figure(figure_properties{:})
hold on
semilogy(mt, 'LineWidth', lw)
semilogy(mtf, 'LineWidth', lw)
legend('Correlation', 'Fast Correlation', 'Location', 'northwest')
xlabel('N')
ylabel('t (s)')
xlim([1, length(mt)])
set(gca, 'FontSize', fs)


function r = corr(x, y)
    n = length(x);
    r = zeros(1, n);
    s_x = x;
    for i = 1:n
        r(i) = sum(s_x .* y) / n;
        s_x = circshift(s_x, 1);
    end
end

```

```
function r = fast_corr(x, y)
    r = ifft(conj(fft(x)) .* fft(y)) ./ length(x);

end
```