Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1

Дисциплина: Телекоммуникационные технологии

Тема: Сигналы телекоммуникационных систем

Работу выполнил студент
гр. 33501/4 Леженин Ю.И.
Преподаватель
Богач Н.В.

Санкт-Петербург
5 апреля 2018 г.

1 Цель работы.

Познакомиться со средствами генерации и визуализации простых сигналов.

2 Постановка задачи.

В командном окне MATLAB и в среде Simulink промоделировать синусоидальный и прямоугольный сигналы с раз- личными параметрами. Получить их спектры. Вывести на график.

3 Ход работы.

3.1 Ряд и интеграл Фурье.

Любая ограниченная, кусочно-непрервыная периодическая функция, имеющая конечное число экстремумов на протяжении периода, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t},$$

где $f_1 = 1/T_1$; T_1 – период функции $\varphi_p(t)$; C_k - постоянные коэффициенты.

Коэффициенты могут быть найдены следующим образом:

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt.$$

При этом значение выражения не зависит от t_0. Обычно берется $t_0 = 0$ или $t_0 = -T_1/2$.

Приведенные формулы можно записать в виде одного выражения:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \right] e^{j2\pi k f_1 t}.$$

Ряд Фурье справедлив для периодических сигналов, однако на его основе можно вывести соотношения и для непериодических сигналов. В этом случае период $T_1 \to \infty$, в связи с этим частота $f_1 \to 0$ и обозначается как df, kf_1 является текущим значением частоты f, а сумма меняется на интеграл. В результате получается выражение

$$\varphi_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] e^{j2\pi f t} df.$$

Это выражение называется интегралом Фурье и объединяет прямое преобразование Фурье

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

и обратное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f t} dt.$$

Приведенные преобразования существуют только для функций с ограниченной энергией:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \neq \infty$$

И ряд, и интеграл могут быть названы преобразованием Фурье (ПФ), но обычно этим термином обозначается именно интеграл Фурье. Преобразование Фурье сигнала так же называется спектром сигнала.

3.2 Свойства преобразования Фурье.

Преобразование Фурье имеет ряд свойств:

1. Суммирование функций.
   Преобразование Фурье – линейное преобразование. Отсюда следует

   $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i(f).$$

   где α_i – постоянный коэффициент.

2. Смещение функций.
   При смещении функции на t_0 ее ПФ умножается на $e^{j2\pi f t_0}$:

   $$\varphi(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \Phi(f).$$

3. Изменение масштаба аргумента функции. При домножении аргумента функции t на постоянный коэффициент α, ПФ функции имеет вид $\frac{1}{|\alpha|}\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$:

   $$\varphi(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} \Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

4. Перемножение функций. ПФ произведения двух функции равно свертки ПФ этих функций:

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_1(f) * \Phi_2(f).$$

5. Свертывание функций.
   ПФ свертки двух функций равно произведению ПФ этих функций:

$$\varphi_1(t) * \varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_1(f)\Phi_2(f).$$

6. Дифференцирование функции.
   При дифференцировании функции ее ПФ домножается на $j2\pi f$:

$$\frac{d[\varphi(t)]}{dt} \leftrightarrow j2\pi f\Phi(f).$$

7. Интегрирование функции.
   При интегрировании функции ее ПФ делится на $j2\pi f$:

$$\int_{-\infty}^{t} \varphi(t')dt' \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}\Phi(f).$$

8. Обратимость преобразования.
   Преобразование обратимо с точность до знака аргумента.

$$\varphi(t) \leftarrow \Phi(f)$$
$$\Phi(t) \leftrightarrow \varphi(-f),\ \Phi(-t) \leftrightarrow \varphi(f)$$

3.3 Основные классы сигналов и их спектры.

Обычно классификация сигнала выполняется по ряду основных признаков: конечность, периодичность и дискретность.

Сигнал конечной длительности имеет значение только внутри определенного интервала и вне его принимает значение 0. Такой сигнал можно представить как произведение сигнала бесконечной длительности и прямоугольной функции:

$$x_f(t) = x(t) \cdot \Pi(t, T) = \begin{cases} x(t), t \in [-T/2, T/2] \\ 0, t \notin [-T/2, T/2] \end{cases}.$$

При применении ПФ к данному виду сигналов происходит сверка образа сигнала и образа прямоугольной функции:

$$\Phi_f(f) = \Phi(f) * \frac{sin(\pi f T)}{\pi f} = \Phi(f) * \mathrm{sinc}(\pi f).$$

Периодический сигнал обладает свойством $x_p(t) = x_p(t - kT)$, где $k \in \mathbb{Z}$, а T – период. Такой сигнал можно представить как свертку одиночного сигнала длительностью T и последовательности дельта импульсов:

$$x_p(t) = x_{pT}(t) * Ш(t, T).$$

При применении ПФ выполняется умножение образа функции на последовательность дельта импульсов. Спектр периодического сигнала дискретно и соотносится с ПФ одиночного сигнала следующим образом:

$$\Phi_p(f) = \Phi_{pT}(f) \cdot Ш(f, \frac{1}{T}).$$

Дискретный по времени сигнал обычно состоит из набора равноотстоящих по времени отсчетов отсчетов. Его можно представить как произведение непрерывного сигнала и последовательности дельта импульсов:

$$x_d(t) = x(t) \cdot Ш(t, T_s).$$

При выполнении ПФ произойдет свертка образа функции и последовательности импульсов. Спектр дискретного сигнала периодическая функция с периодом $\frac{1}{T_s}$:

$$\Phi_d(f) = \Phi(f) * Ш(f, \frac{1}{T_s}).$$

3.4 Спектры некоторых простых сигналов.

В ходе работы была выполнена генерация нескольких сигналов разного вида. Каждый из обрабатываемых сигналов содержит 512 отсчетов, столько же отсчетов используется для построения его спектра. Так как, сигналы конечные и дискретные, полученные спектры периодичны и имеют искажения обусловленные сверткой с функцией $\mathrm{sinc}(\pi f)$. На рисунках ниже преобразование приведено на интервале $[-T_s/2, T_s/2]$, что соответствует одному периоду.

Спектр гармонического сигнала представляет собой набор дискретных отсчетов на частоте, которая совпадает с частой гармоник в сигнале. Значение спектра в отсчетах зависит от амплитуды соответствующих гармоник.

На рисунке 3.1 приведен гармонический сигнал, описываемый выражением $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) + 0.2\cos(2\pi f_1 t),\ f_0 = 10$Гц, $f_1 = 2$Гц. На рисунке 3.2 приведен амплитудный спектр $|\Phi(f)|$ данного сигнала. Спектр симметричен относительно 0, положение пиков соответствует частотам гармоник, входящих в состав сигнала.

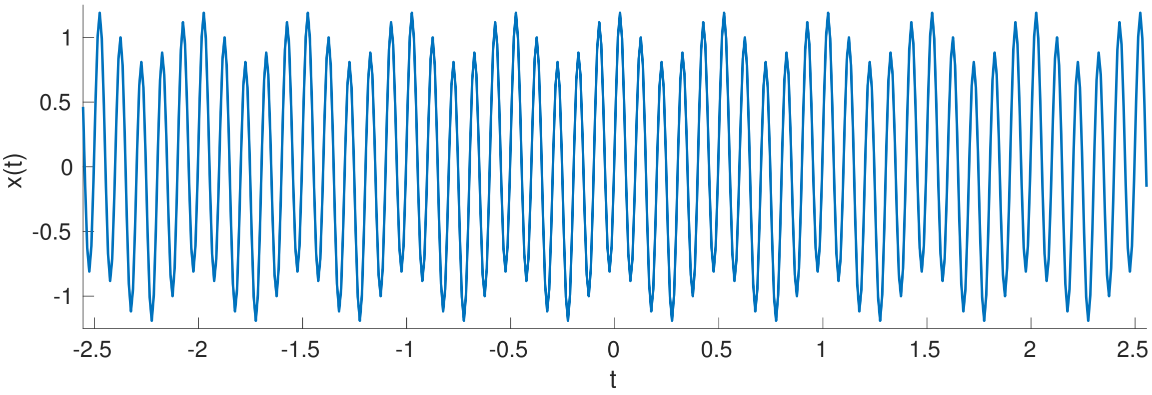

Рис. 3.1: Гармонический сигнал.

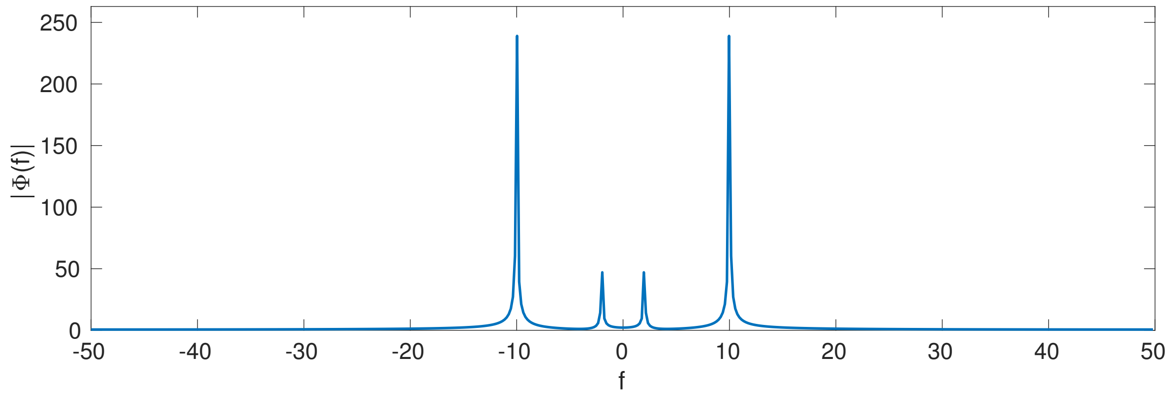

Рис. 3.2: Амплитудный спектр гармонического сигнала.

Спектром прямоугольного импульса длительностью T_i является функция $\mathrm{sinc}(\pi f) = \frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f}$. При бесконечном повторении импульсов с периодом T_0 происходит дискретизация спектра, отсчеты находятся друг от друга на расстоянии $f_0 = 1/T_0$.

Прямоугольный периодический сигнал с длительностью импульса $T_i = 0.1$ с и периодом $T = 0.2$ с приведен на рисунке 3.3, а его спектр – на рисунке 3.4. Отсчеты в спектре находятся на расстоянии 10 Гц друг от друга, что соответствует $2f_0$. Это объясняется тем, что функция $\frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f}$ имеет корни в точках $f = k/T_i$, где k – целое число, а в данном случае $2\,T_i = T_0$. Получается, что в точках $f = k \cdot 2/T_0 = 2\,k f_0$ спектр равен 0, а отсчеты находятся в точках $f = k f_0$. Таким образом, половина отсчетов равны нулю.

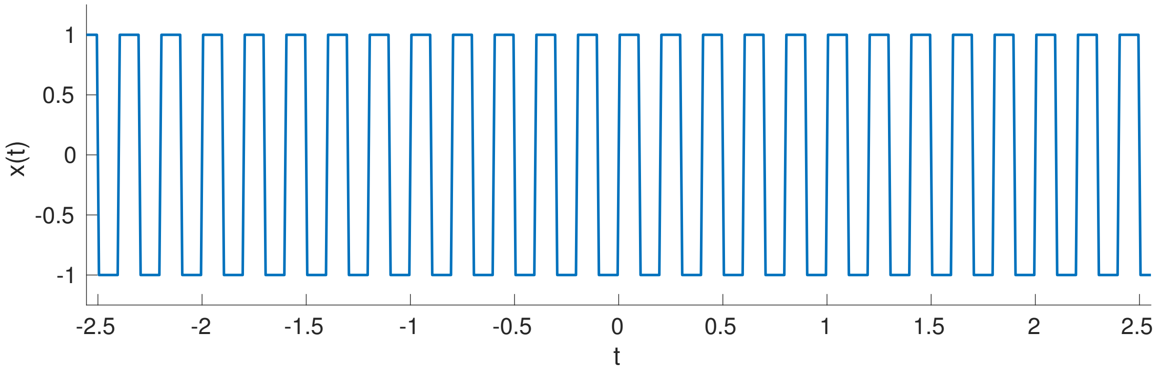

Рис. 3.3: Прямоугольный периодический сигнал.

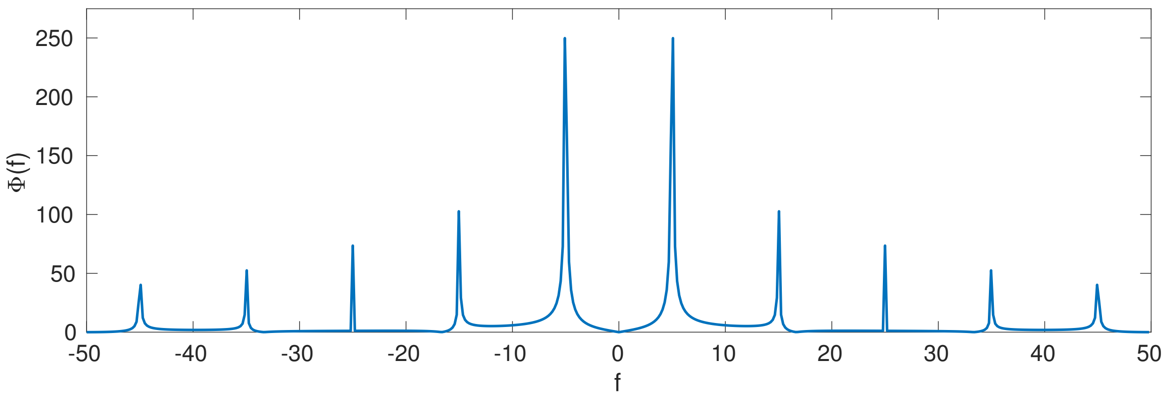

Рис. 3.4: Спектр прямоугольного периодического сигнала.

Треугольный импульс может быть представлен как свертка двух прямоугольных импульсов, таким образом спектр одиночного треугольного сигнала это функция $\mathrm{sinc}(\pi f)^2$.

Треугольный периодический сигнал с частотой $f_0 = 5$ Гц приведен на рисунке 3.5, его спектр приведен на рисунке 3.6. Для данного случая справедливы те же рассуждения, что и для периодического прямоугольного сигнала.

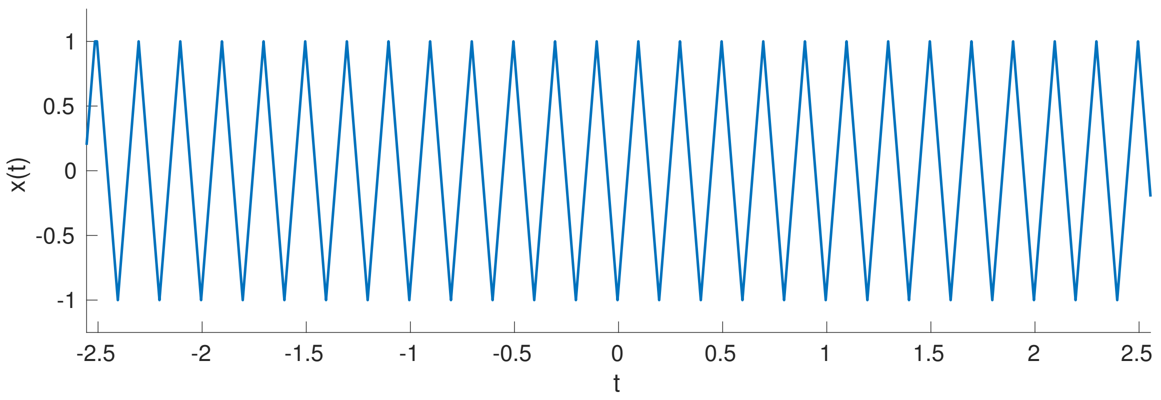

Рис. 3.5: Треугольный периодический сигнал.

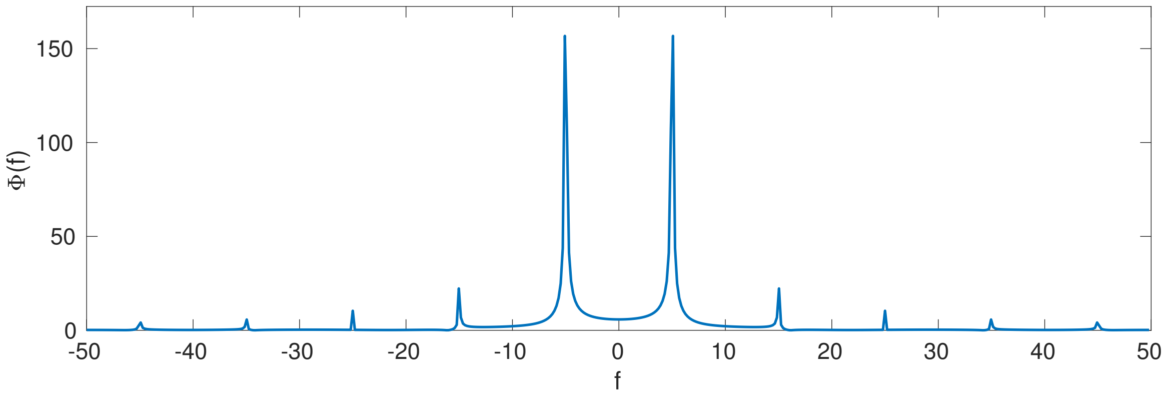

Рис. 3.6: Спектр треугольного периодического сигнала.

4 Выводы.

Преобразование Фурье позволяет представить сигнал в базисе гармонических колебаний разной частоты. Это значительно облегчает обработку и синтез сигналов.

Важнейшими свойствами ПФ являются теорема о свертывании сигналов и теорема о перемножении сигналов: произведение функций - это свертка их образов, свертка функций - это произведение их образов.

Спектр периодического сигнала дискретный, а дискретного - периодический. Если сигнал конечный, то при выполнении преобразования его образ сворачивается с функцией $\mathrm{sinc}(\pi f)$.

5 Приложение.

Листинг 1: Программа для генерации приведенных сигналов и спектров.

```
close all
clear all

figure_properties = {'units', 'centimeters', 'position', [12, 10, 30, 10], ...
    'DefaultAxesPosition', [0.08, 0.17, 0.88, 0.8]};
lw = 1.8;
fs = 16;

signal_type = 2;

N = 512;
Fs = 100;
```

```
Ts = 1/Fs;
F0 = 5;
T0 = 1/F0;

t = -Ts*(N-1)/2:Ts:Ts*(N-1)/2;

switch signal_type
    case 0
        x = sin(2*pi*F0*t) + 0.2*cos(2*pi*(F0/5)*t);
    case 1
        x = square(2*pi*F0*t, 30);
    case 2
        width = (Fs/F0)/2;
        t = [-Ts*((N-1)/2+width):Ts:-Ts*(N-1)/2, t];
        x = square(2*pi*F0*t, 30);
        coeffs = ones(1, width)/width;
        x = filter(coeffs, 1, x);
        x = x(width+2:end);
        t = t(width+2:end);
    case 3
        x = double(mod(round(t/Ts), round((Fs/F0))) == 0);
    otherwise
        x = ones(0, length(t));
end

s = fft(x, N);
s = fftshift(s);
f = (Fs/N)*(-N/2:(N/2-1));

figure(figure_properties{:})
hold on
plot(t, x, 'LineWidth', lw)
xlim([min(t), max(t)])
ylim([-1.25, 1.25])
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
set(gca, 'FontSize', fs)

figure(figure_properties{:})
plot(f, abs(s), 'LineWidth', lw)
```

```
ylim([0, max(abs(s)) * 1.1])
ylabel('|\Phi(f)|')
xlabel('f')
set(gca, 'FontSize', fs)
```