Audition pour le concours MCF25 11
Université Côte d'Azur

Lorenzo Fantini

Goethe-Universität Frankfurt

4 juin 2020

Cursus

2005–2008	Licence en Mathématiques, Université de Padoue (Italie)
2008–2010	Master en Mathématiques Erasmus Mundus ALGANT M1 : Université de Padoue M2 : Université de Paris-Sud, Orsay
2010–2014	Thèse dirigée par J. Nicaise, KU Leuven (Belgique) Titre : Normalized Berkovich spaces and surface singularities Membres extérieurs : A. Ducros, S. Payne, M. Temkin
2014–2016	Post-doctorat à l'École polytechnique
2016–2018	Post-doctorat à l'Université Pierre et Marie Curie
2017–2018	Post-doctorat à l'Université Aix-Marseille
depuis 2019	Bourse Humboldt à la Goethe-Universität Frankfurt

Enseignement

Cours assurés à la KU Leuven (niveau Master) :

2010–2011	Travaux dirigés "Algebraic Number Theory"
	Co-organisation "Advanced Course in Algebraic Geometry"
2011–2012 2012–2013	Travaux dirigés "Algebraic Geometry"
2013–2014	Travaux dirigés "Algebraic Number Theory"

(environ 40h pour chaque cours)

Cours assurés au Bachelor de l'École polytechnique (niveau L2) :

2018–2019 Travaux dirigés "Analysis" (60h)

Animations scientifiques : co-organisation de séminaires, groupes de travail, rencontres, participation à des activités de vulgarisation.

Recherche

Géométrie algébrique

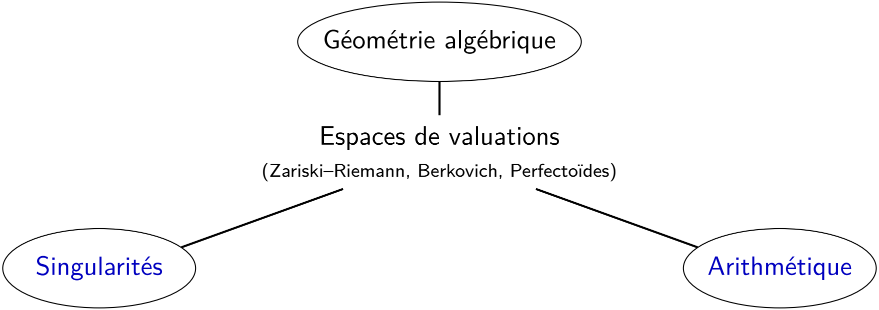
Recherche

Géométrie algébrique

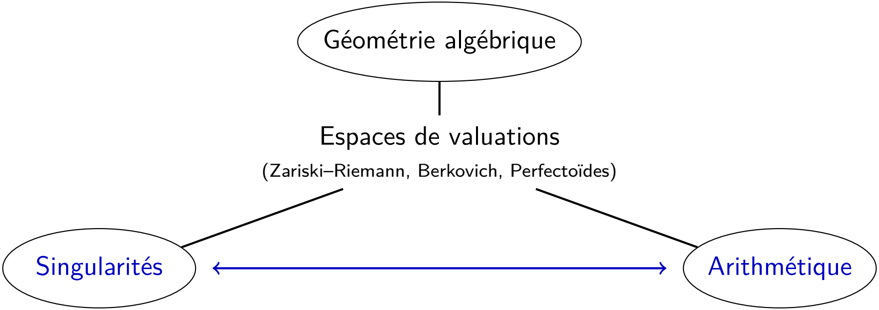
Espaces de valuations

(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)

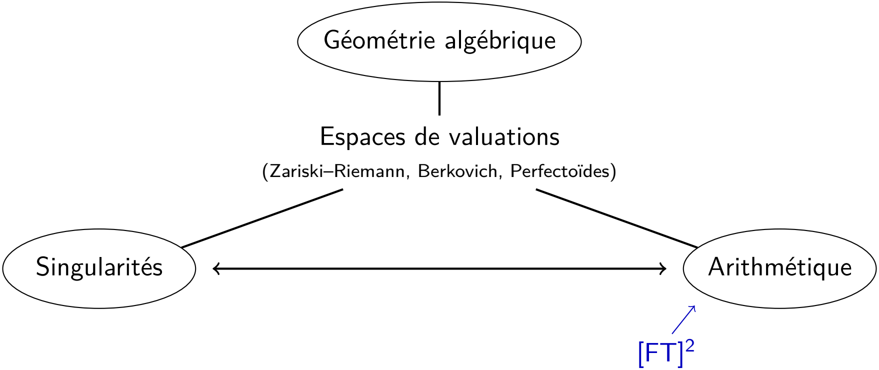
Recherche


Géométrie algébrique
Espaces de valuations
(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)
Singularités
Arithmétique

Recherche

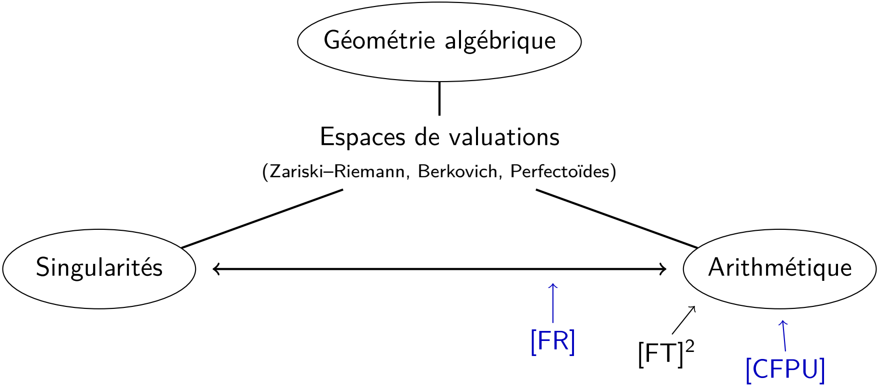

Géométrie algébrique
Espaces de valuations
(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)
Singularités
Arithmétique

Recherche



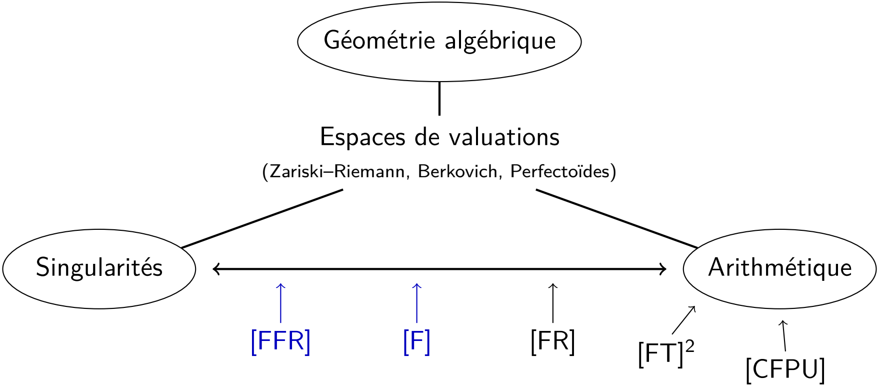
- *"Galois descent of pseudo-affinoid non-archimedean analytic spaces"*
  avec D. Turchetti – *Math. Zeitschrift*, 2018
- *"Triangulations of non-archimedean curves and ramification"*
  avec D. Turchetti – *prépublication*, 2019

Recherche



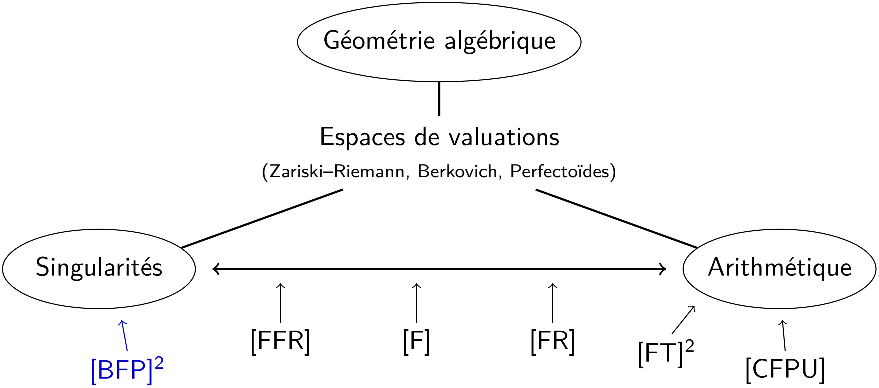
- *"Faithful realizability of tropical curves"*
  avec M. Cheung, J. Park et M. Ulirsch – *Int. Math. Res. Not.*, 2016.
- *"Motivic and analytic nearby fibers at infinity and bifurcation sets"*
  avec M. Raibaut – *Arc Schemes and Singularities, World Scientific*, 2020.

Recherche



- *"Normalized Berkovich spaces and surface singularities"*
  – *Transactions of the AMS*, 2018.
- *"Self-similar valuation spaces of surface singularities"*
  avec C. Favre et M. Ruggiero – *Manuscripta Math.*, 2020.

Recherche



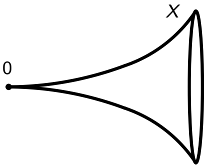
- *“Inner geometry of complex surfaces : a valuative approach”*
  avec A. Belotto et A. Pichon – *prépublication*, 2019.
- *“Lipschitz normal embeddings and polar exploration of complex surfaces”*
  avec A. Belotto et A. Pichon – *prépublications*, 2020.

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0, \varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0, \varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X, 0)$

$$d_{\text{externe}}(x, y) = ||x - y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x, y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \big\{\text{longueur}(\gamma)\big\}$$

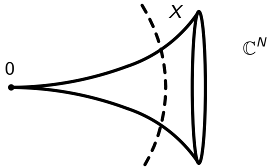
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \operatorname{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X, 0)$

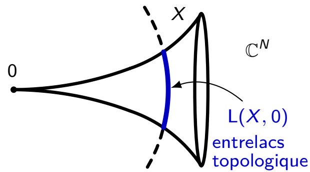
$$d_{\text{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe, $\quad (X,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$
$0 \in X$ singularité isolée



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X,0)$

$$d_{\text{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

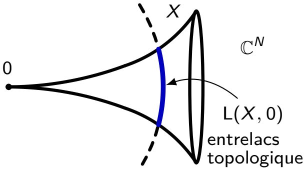
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $\quad d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X, 0)$

$$d_{\text{externe}}(x, y) = ||x - y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x, y) = \inf_{\substack{\gamma :\, [0,1] \to X, \\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

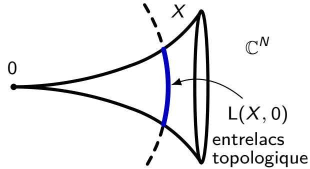
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $\quad d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$$(X,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N,0)$$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0<\varepsilon\ll 1 \implies X\cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X\cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X,0)$

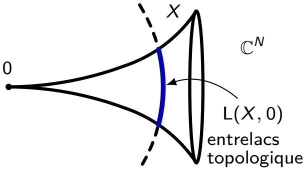
$$d_{\mathrm{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\mathrm{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y}} \{\mathrm{longueur}(\gamma)\}$$

- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\mathrm{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\mathrm{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe, $\qquad (X,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$
$0 \in X$ singularité isolée



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

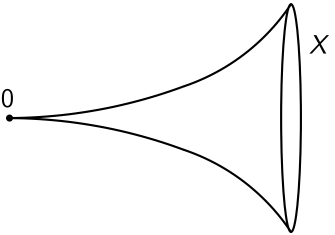
Métriques sur $(X,0)$

$$d_{\mathrm{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\mathrm{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y}} \{\mathrm{longueur}(\gamma)\}$$

- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $\quad d_{\mathrm{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\mathrm{interne}}$

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X, 0)$ par rapport à la métrique interne :

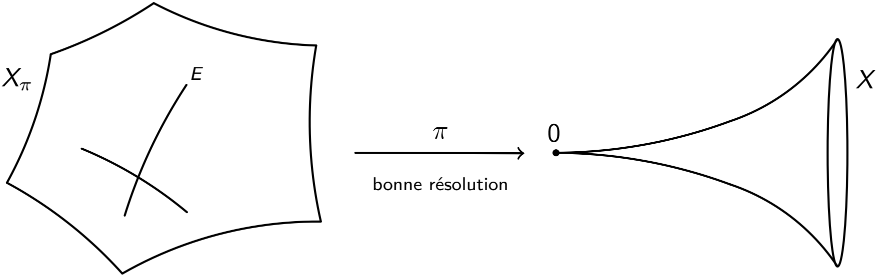
$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X, 0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X, 0)$ par rapport à la métrique interne :

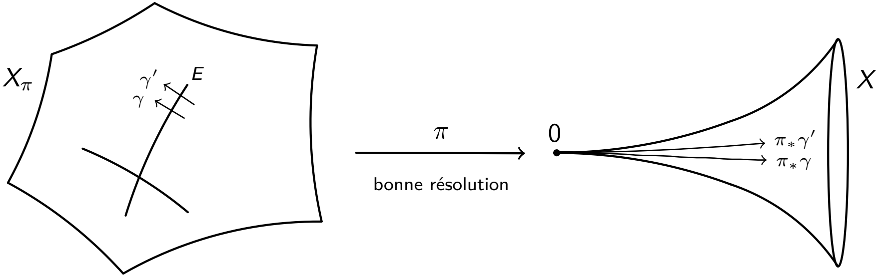
$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X, 0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

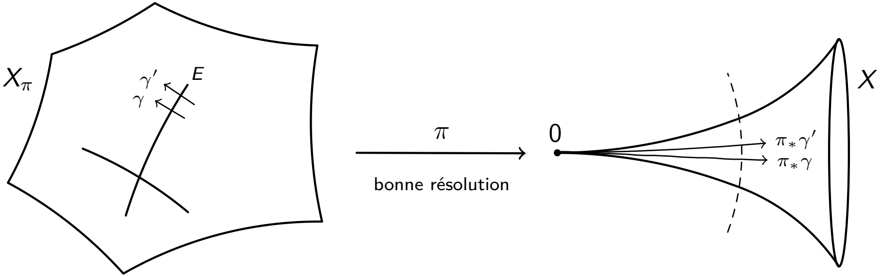
$$d_{\text{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

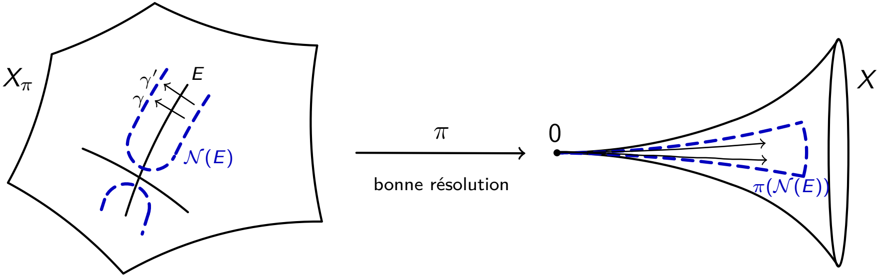
$$d_{\text{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X, 0)$ par rapport à la métrique interne :

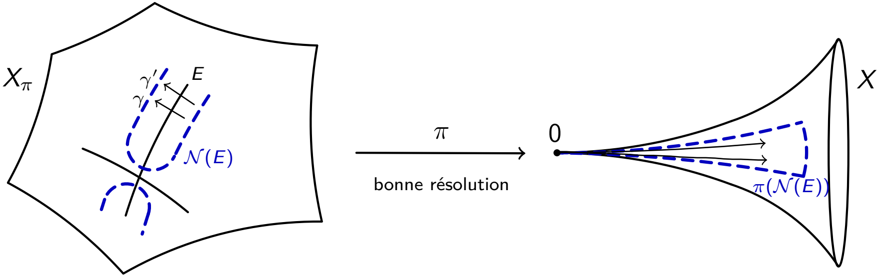
$$d_{\text{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X, 0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$

Exemple :

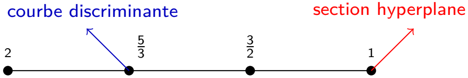
$$\begin{array}{rl} E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3 & \\ \downarrow & (y,z) \\ \text{discriminante} \quad \{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2 & \end{array}$$

Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow (y,z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$

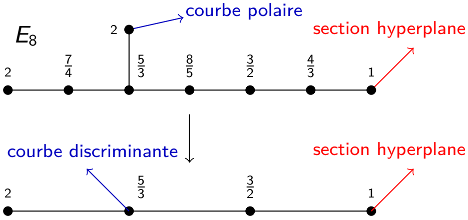


Exemple :

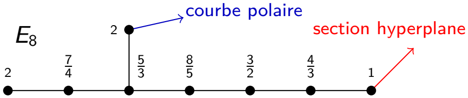
$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$



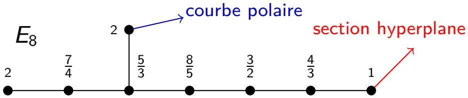
Exemple :
$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$



Questions classiques :

- Comment la géométrie de $(X, 0)$ influence-t-elle les taux internes ?
- Comment les calculer en général ?

Exemple :
$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$



Questions classiques :

- Comment la géométrie de $(X, 0)$ influence-t-elle les taux internes ?
- Comment les calculer en général ?

qui factorise par $\mathrm{Bl}_0(X)$ et par la transformée de Nash

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

Soit $\pi\colon X_\pi \to X$ une bonne résolution de $(X, 0)$. Alors les taux internes sont complètement déterminés par :

- la topologie de $(X, 0)$, i.e. le graphe dual Γ_π pondéré ;
- les flèches des sections hyperplanes génériques ;
- les flèches des courbes polaires des projections génériques $(X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$.

Conséquence d'une formule explicite que l'on verra plus tard. Résultat possible grâce à l'introduction de nouvelles techniques : les entrelacs non archimédiens.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v \colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}} \{v(f)\} = 1 \right\}$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E

C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).

Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.

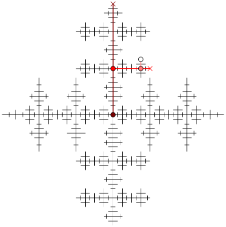
De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0), \mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0), \mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v \colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \,\middle|\, \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}} \{v(f)\} = 1 \right\}$$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E



C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2,0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).

Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.

De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0),\mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0),\mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

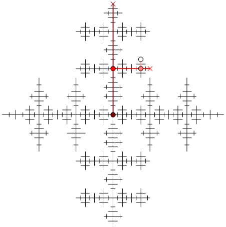
Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v\colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f\in\mathfrak{m}_{X,0}}\{v(f)\} = 1 \right\}$$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E

C'est un bon espace topologique, compact.

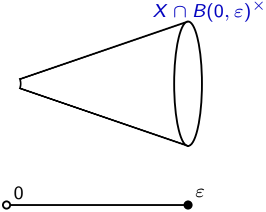
Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2,0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).



Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.



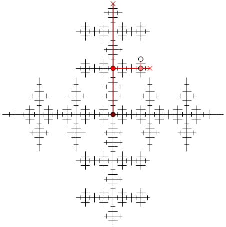
De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0),\mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0),\mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v\colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}} \{v(f)\} = 1 \right\}$$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E



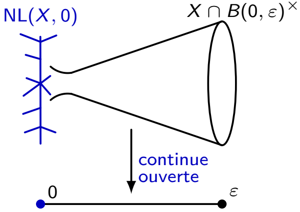
C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).

Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.



De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0), \mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0), \mathbb{Q}\big)$.

Intermezzo : applications de NL

Dans ma thèse, j'ai muni $\mathrm{NL}(X,0)$ d'une structure analytique non archimédienne, provenant de la théorie des espaces de Berkovich.

Plus généralement : $\mathrm{NL}(\mathscr{X})$, pour un $\mathscr{X}$ schéma formel spécial sur un corps k.

Application 1 (F PhD)

Caractérisation non archimédienne des valuations de Nash d'une k-surface.

L'entrelacs $\mathrm{NL}(X,0)$ a l'aspect d'un fractal :

Application 2 (F–Favre–Ruggiero 2018)

Soit $(X,0)$ une singularité normale de k-surface.

$\mathrm{NL}(X,0)$ est auto-similaire	$\Longleftrightarrow$	$(X,0)$ est une singularité sandwich

Techniques : géométrie non archimédienne, géométrie formelle, combinatoire...

Intermezzo : applications de NL

Dans ma thèse, j'ai muni $\mathrm{NL}(X,0)$ d'une structure analytique non archimédienne, provenant de la théorie des espaces de Berkovich.

Plus généralement : $\mathrm{NL}(\mathscr{X})$, pour un $\mathscr{X}$ schéma formel spécial sur un corps k.

Application 1 (F PhD)

Caractérisation non archimédienne des valuations de Nash d'une k-surface.

valuations divisorielles de la résolution minimale

L'entrelacs $\mathrm{NL}(X,0)$ a l'aspect d'un fractal :

Application 2 (F–Favre–Ruggiero 2018)

Soit $(X,0)$ une singularité normale de k-surface.

$\mathrm{NL}(X,0)$ est auto-similaire $\iff$ $(X,0)$ est une singularité sandwich

Techniques : géométrie non archimédienne, géométrie formelle, combinatoire...

Intermezzo : applications de NL

Dans ma thèse, j'ai muni $\mathrm{NL}(X,0)$ d'une structure analytique non archimédienne, provenant de la théorie des espaces de Berkovich.
Plus généralement : $\mathrm{NL}(\mathscr{X})$, pour un $\mathscr{X}$ schéma formel spécial sur un corps k.

Application 1 (F PhD)

Caractérisation non archimédienne des valuations de Nash d'une k-surface.

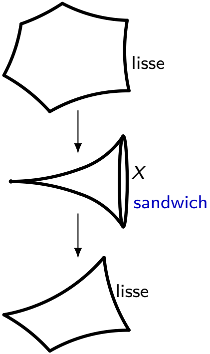
valuations divisorielles de la résolution minimale

L'entrelacs $\mathrm{NL}(X,0)$ a l'aspect d'un fractal :

Application 2 (F–Favre–Ruggiero 2018)

Soit $(X,0)$ une singularité normale de k-surface.

$\mathrm{NL}(X,0)$ est auto-similaire $\iff$ $(X,0)$ est une singularité sandwich



Techniques : géométrie non archimédienne, géométrie formelle, combinatoire...

La formule du Laplacien

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

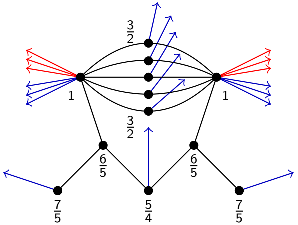
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

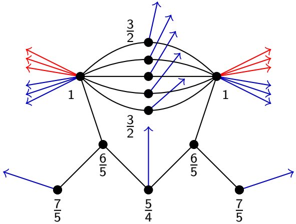
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

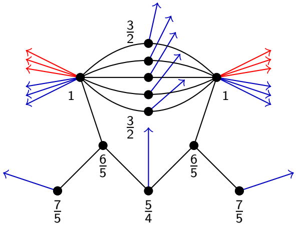
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

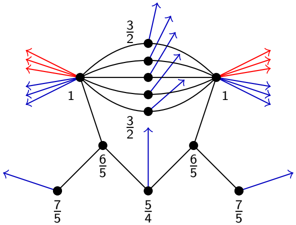
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de NL$(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

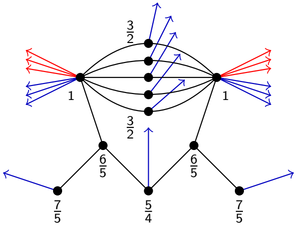
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

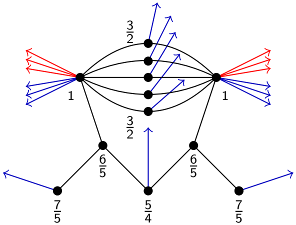
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

Explorations polaires

Explorations polaires

Question

Étant donné un graphe de résolution Γ, quelles configurations de flèches (hyperplanes et polaires) sont réalisables par une singularité $(X, 0)$?

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng (∼2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng (∼2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng (∼2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng ($\sim$2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng (∼2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng (∼2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990, Belotto–F–Pichon 2020)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité ~~minimale~~ LNE.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng ($\sim$2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990, Belotto–F–Pichon 2020)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité ~~minimale~~ LNE.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

- Variétés LNE
- Approche birationnelle
  (discrépance de Mather)
- Dégénérescence :
  d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X,0)$
- Géométrie externe

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

- Variétés LNE $\longleftarrow$ caractérisation complète en dimension 2, critère avec espaces d'arcs, résolutions
- Approche birationnelle (discrépance de Mather)
- Dégénérescence : d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X, 0)$
- Géométrie externe

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

- Variétés LNE $\longleftarrow$ caractérisation complète en dimension 2, critère avec espaces d'arcs, résolutions
- Approche birationnelle (discrépance de Mather) $\longleftarrow$ intégration motivique, géométrie Lipschitz des singularités du MMP (en dimension trois !)
- Dégénérescence : d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X,0)$
- Géométrie externe

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

- Variétés LNE $\longleftarrow$ caractérisation complète en dimension 2, critère avec espaces d'arcs, résolutions
- Approche birationnelle (discrépance de Mather) $\longleftarrow$ intégration motivique, géométrie Lipschitz des singularités du MMP (en dimension trois !)
- Dégénérescence : d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X, 0)$ $\longleftarrow$ invariant bi-Lipschitz interne complet et intrinsèque
- Géométrie externe

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

- Variétés LNE $\longleftarrow$ caractérisation complète en dimension 2, critère avec espaces d'arcs, résolutions
- Approche birationnelle (discrépance de Mather) $\longleftarrow$ intégration motivique, géométrie Lipschitz des singularités du MMP (en dimension trois !)
- Dégénérescence : d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X, 0)$ $\longleftarrow$ invariant bi-Lipschitz interne complet et intrinsèque
- Géométrie externe $\longleftarrow$ nouveaux fonctionnels sur $\mathrm{NL}(X, 0)$, classification bi-Lipschitz complète

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

• Variétés LNE	$\longleftarrow$	caractérisation complète en dimension 2, critère avec espaces d'arcs, résolutions
• Approche birationnelle (discrépance de Mather)	$\longleftarrow$	intégration motivique, géométrie Lipschitz des singularités du MMP (en dimension trois !)
• Dégénérescence : d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X,0)$	$\longleftarrow$	invariant bi-Lipschitz interne complet et intrinsèque
• Géométrie externe	$\longleftarrow$	nouveaux fonctionnels sur $\mathrm{NL}(X,0)$, classification bi-Lipschitz complète

Sans oublier mes autres projets : ramification sauvage des courbes, uniformisation non archimédienne et tropicale, ζ d'Igusa...

Directions futures

Ce point de vue, qui mêle théorie des valuations et combinatoire avec topologie et géométrie, peut être utile pour répondre à d'autres questions sur l'étude des germes métriques de singularités.

Ce projet se développera dans plusieurs directions :

- Variétés LNE $\longleftarrow$ caractérisation complète en dimension 2, critère avec espaces d'arcs, résolutions
- Approche birationnelle (discrépance de Mather) $\longleftarrow$ intégration motivique, géométrie Lipschitz des singularités du MMP (en dimension trois !)
- Dégénérescence : d_{interne} sur $\mathrm{NL}(X,0)$ $\longleftarrow$ invariant bi-Lipschitz interne complet et intrinsèque
- Géométrie externe $\longleftarrow$ nouveaux fonctionnels sur $\mathrm{NL}(X,0)$, classification bi-Lipschitz complète

Sans oublier mes autres projets : ramification sauvage des courbes, uniformisation non archimédienne et tropicale, ζ d'Igusa...

Intégration au Laboratoire J.A. Dieudonné

Je me vois naturellement dans l'équipe Algèbre, Topologie et Géométrie, parmi les géomètres algébriques et analytiques.

Voici certains des points de contact entre mes intérêts mathématiques et ceux des membres de l'équipe :

- Singularités : aspects topologiques et métriques, intégration motivique (Adam Parusiński)
- Espaces des arcs, fonctions zêta, combinatoire des singularités (Ann Lemahieu)
- Dynamique polynomiale, dynamique sur les espaces de valuations (Julie Deserti)
- Géométrie birationnelle, MMP (Andreas Höring)
- Géométrie non-archimédienne et tropicale de la fibration de Hitchin et des variétés de caractères (Carlos Simpson)