Audition pour un poste de Professeur Monge

Lorenzo Fantini

Goethe-Universität Frankfurt

Unterstützt von / Supported by Alexander von Humboldt Stiftung / Foundation

15 avril 2021

https://lorenzofantini.eu/fantini-monge.pdf

Cursus

2005–2008	Licence en Mathématiques, Université de Padoue (Italie)
2008–2010	Master en Mathématiques Erasmus Mundus ALGANT M1 : Université de Padoue M2 : Université de Paris-Sud, Orsay
2010–2014	Thèse dirigée par J. Nicaise, KU Leuven (Belgique) Titre : Normalized Berkovich spaces and surface singularities Membres extérieurs : A. Ducros, S. Payne, M. Temkin
2014–2016	Post-doctorat à l'École polytechnique
2016–2018	Post-doctorat à l'Université Pierre et Marie Curie
2017–2018	Post-doctorat à l'Université Aix-Marseille
depuis 2019	Bourse Humboldt à la Goethe-Universität Frankfurt

Enseignement

Cours assurés à la KU Leuven (niveau Master) :

2010–2011	Travaux dirigés "Algebraic Number Theory"
	Co-organisation "Advanced Course in Algebraic Geometry"
2011–2012 2012–2013	Travaux dirigés "Algebraic Geometry"
2013–2014	Travaux dirigés "Algebraic Number Theory"

(environ 40h pour chaque cours)

Cours assurés au Bachelor de l'École polytechnique (niveau L2) :

2018–2019 Travaux dirigés "Analysis" (60h)

Animations scientifiques : co-organisation de séminaires, groupes de travail, conférences, participation à des activités de vulgarisation.

Enseignement à l'X et développement professionnel

Mon projet d'enseignement en tant que Professeur Monge :

- Encadrement d'étudiants (PSC, projets de troisième année, Bachelor theses)
- Cours pour le Bachelor de l'École polytechnique
- Je suis ouvert à d'autres activités (cours de Master Paris–Saclay, MODAL, Séminaire des élèves) et disponible à prendre des responsabilités administratives

Mais aussi, dans les années à venir :

- HDR (en 2023 ou 2024) et habilitation italienne
- Participation à des collaborations de recherche, demandes de financement

Recherche

Géométrie algébrique

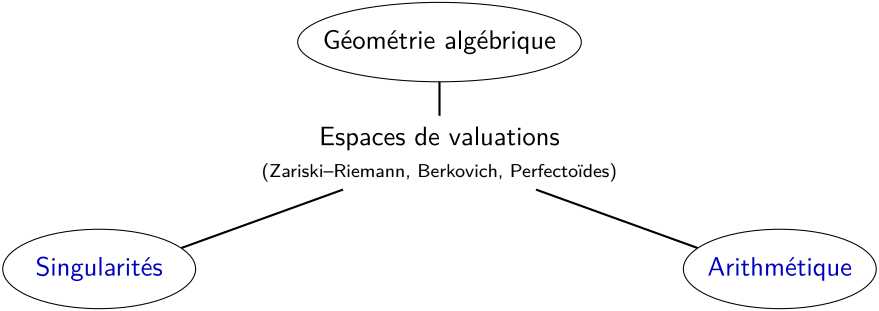
Recherche

Géométrie algébrique

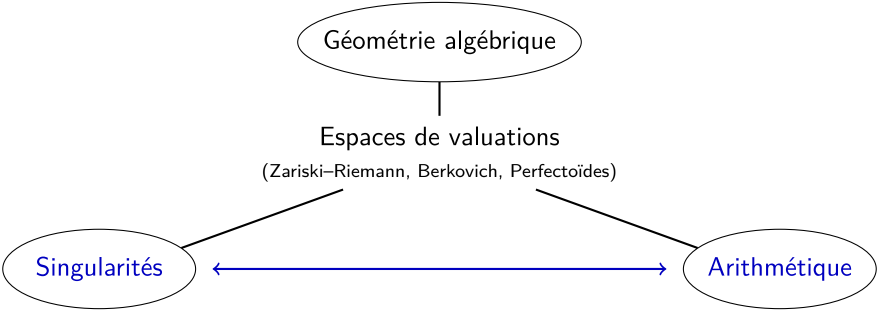
Espaces de valuations

(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)

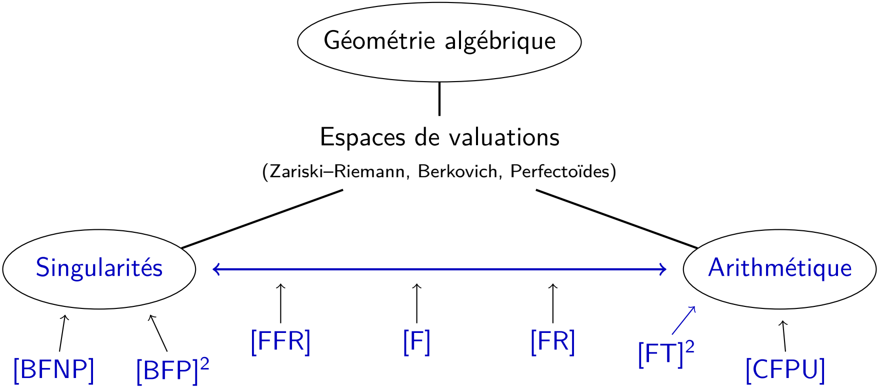
Recherche


Géométrie algébrique
Espaces de valuations
(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)
Singularités
Arithmétique

Recherche

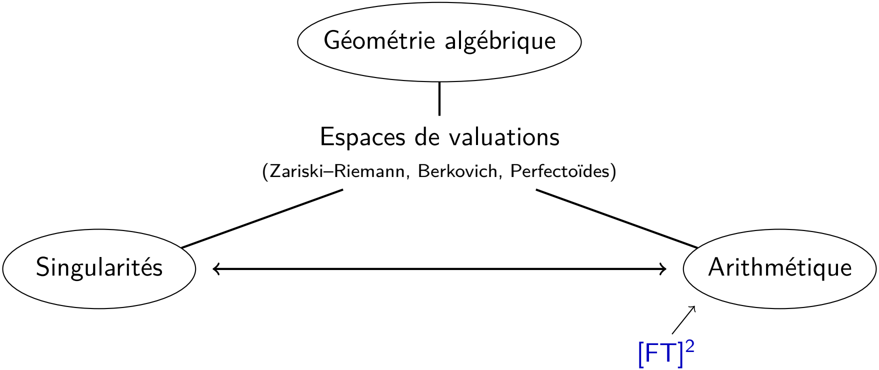

Géométrie algébrique
Espaces de valuations
(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)
Singularités
Arithmétique

Recherche



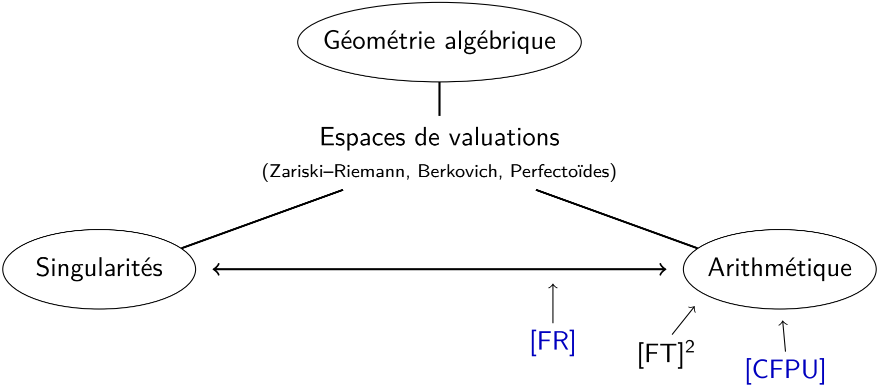
Géométrie algébrique
Espaces de valuations
(Zariski–Riemann, Berkovich, Perfectoïdes)
Singularités
Arithmétique
[BFNP]
[BFP]²
[FFR]
[F]
[FR]
[FT]²
[CFPU]

Recherche



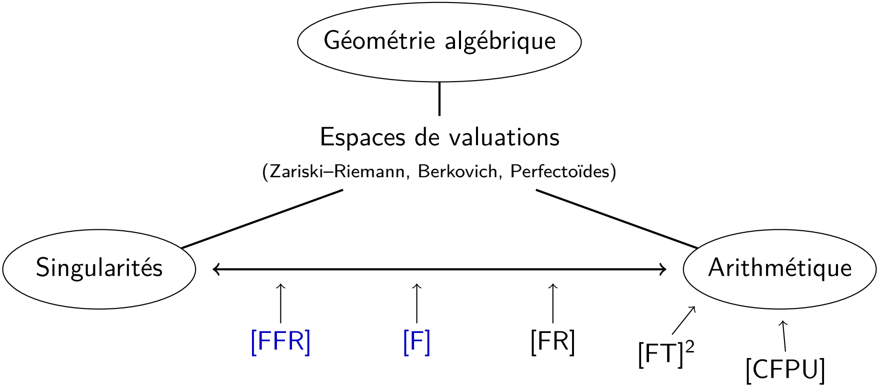
- *"Galois descent of pseudo-affinoid non-archimedean analytic spaces"*
  avec D. Turchetti – *Math. Zeitschrift*, 2018
- *"Triangulations of non-archimedean curves and ramification"*
  avec D. Turchetti – À paraître dans *Annales de l'Institut Fourier*, 2021

Recherche



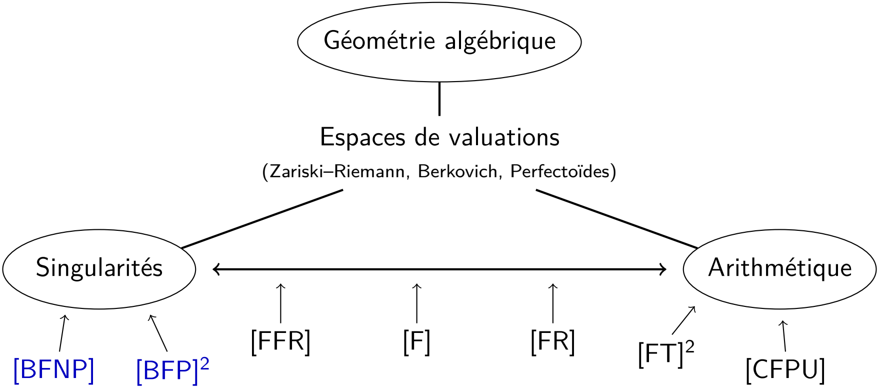
- *"Faithful realizability of tropical curves"*
  avec M. Cheung, J. Park et M. Ulirsch – *Int. Math. Res. Not.*, 2016.
- *"Motivic and analytic nearby fibers at infinity and bifurcation sets"*
  avec M. Raibaut – *Arc Schemes and Singularities, World Scientific*, 2020.

Recherche



- *"Normalized Berkovich spaces and surface singularities"*
  – *Transactions of the AMS*, 2018.
- *"Self-similar valuation spaces of surface singularities"*
  avec C. Favre et M. Ruggiero – *Manuscripta Math.*, 2020.

Recherche



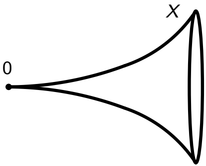
- *"Inner geometry of complex surfaces : a valuative approach"*
  avec A. Belotto et A. Pichon – À paraître dans *Geometry & Topology*, 2021.
- *"On Lipschitz Normally Embedded complex surface germs"*
  avec A. Belotto et A. Pichon – *prépublication*, 2020.
- *"Polar exploration of complex surface germs"*
  avec A. Belotto, A. Némethi et A. Pichon – *prépublication*, 2021.

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$



Topologie : le théorème de structure conique

$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$

Métriques sur $(X, 0)$

$d_{\text{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N}$ $\qquad d_{\text{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$

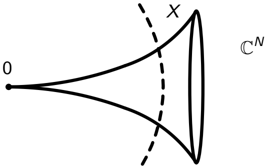
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0, \varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0, \varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X, 0)$

$$d_{\text{externe}}(x, y) = ||x - y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x, y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1] \to X, \\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

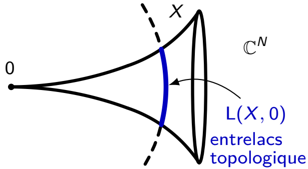
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$



Topologie : le théorème de structure conique

$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0, \varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0, \varepsilon)\big)$

Métriques sur $(X, 0)$

$d_{\text{externe}}(x, y) = ||x - y||_{\mathbb{C}^N}$ $\qquad$ $d_{\text{interne}}(x, y) = \inf_{\substack{\gamma : [0,1] \to X, \\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$

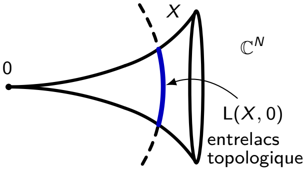
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$(X,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X,0)$

$$d_{\text{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

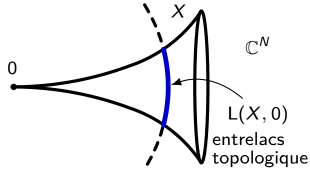
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$$(X,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X, 0)$

$$d_{\text{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

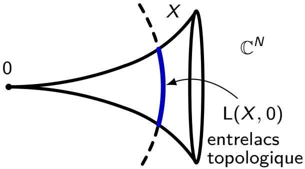
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !
  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)
- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Structure locale d'une singularité

Une longue histoire : Wirtinger 1895, Milnor 1968...

X variété complexe,
$0 \in X$ singularité isolée

$$(X,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$$



Topologie : le théorème de structure conique

$$0 < \varepsilon \ll 1 \implies X \cap B(0,\varepsilon) \overset{\text{homéo}}{\sim} \mathrm{Cone}\big(X \cap S(0,\varepsilon)\big)$$

Métriques sur $(X, 0)$

$$d_{\text{externe}}(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{C}^N} \qquad d_{\text{interne}}(x,y) = \inf_{\substack{\gamma\colon [0,1]\to X,\\ \gamma(0)=x,\gamma(1)=y}} \{\text{longueur}(\gamma)\}$$

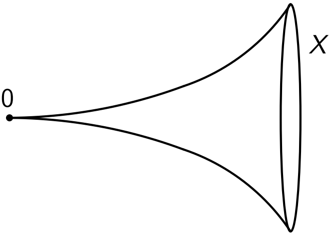
- Dans [BFP2019] on étudie un germe métrique et pas sa classe bi-Lipschitz !

  (Mostovski 1985/$\mathbb{C}$, Parusiński 1987/$\mathbb{R}$, Birbrair–Neumann–Pichon 2014)

- Dans [BFP2020] on étudie des surfaces LNE : $d_{\text{externe}} \overset{\text{bi-Lipschitz}}{\approx} d_{\text{interne}}$

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

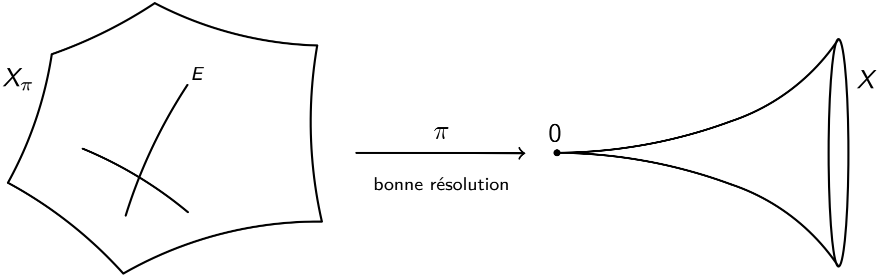
$$d_{\text{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

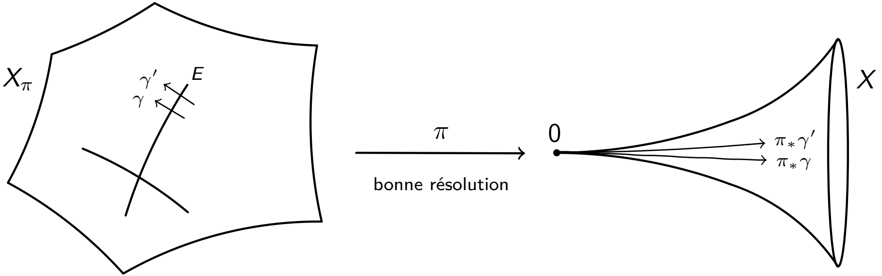
$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

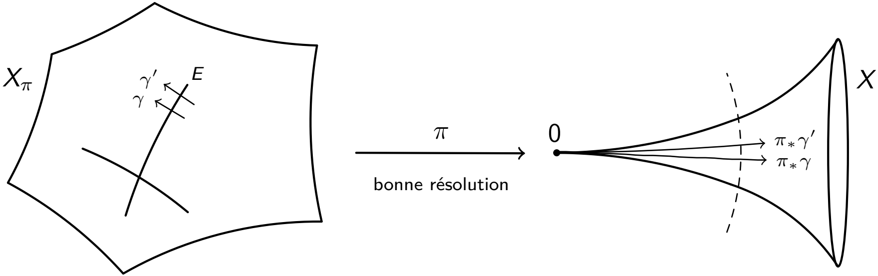
$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$	$\longleftarrow$	Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

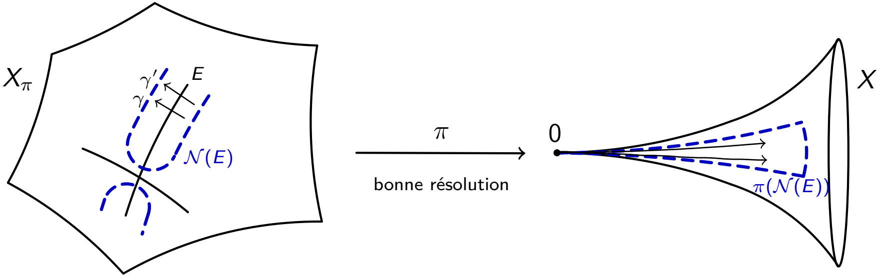
$$d_{\text{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

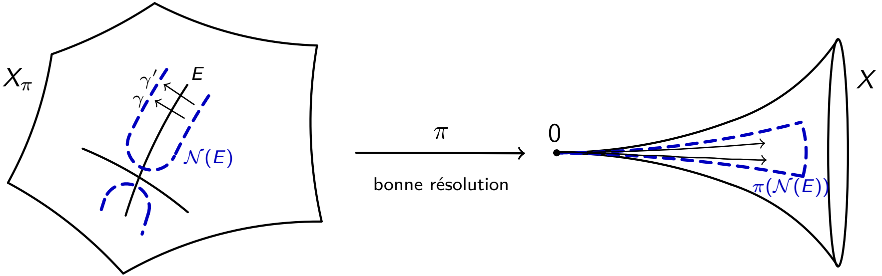
$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Les taux de croissance internes

Je vais me concentrer sur le cas des surfaces.



Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ de E est l'ordre de contact entre deux courbes $\pi_*\gamma$ et $\pi_*\gamma'$ dans $(X,0)$ par rapport à la métrique interne :

$$d_{\mathrm{interne}}\big(\pi_*\gamma \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon), \pi_*\gamma' \cap S_{\mathbb{C}^n}(0,\varepsilon)\big) \approx \varepsilon^{\mathcal{I}(E)}$$

Interprétation :

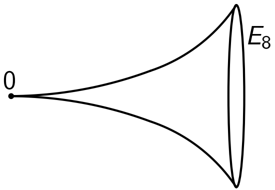
Le taux interne $\mathcal{I}(E)$ mesure la taille d'une petite zone $\mathcal{N}(E)$ de $(X,0)$ $\longleftarrow$ Compréhension très fine de la structure métrique interne du germe

Exemple :

$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

$$\downarrow (y,z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$

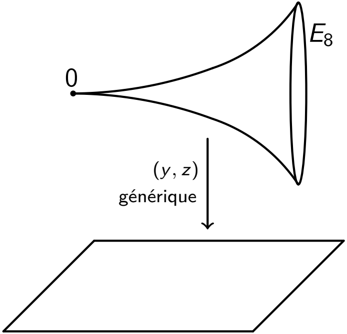


Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$

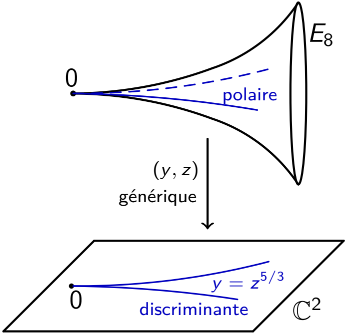


Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$

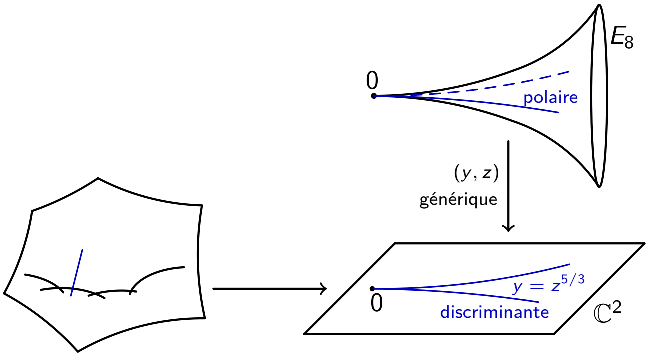


Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$

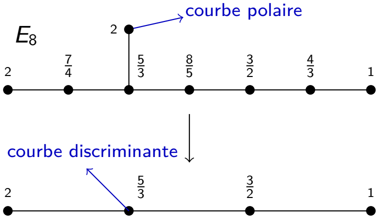


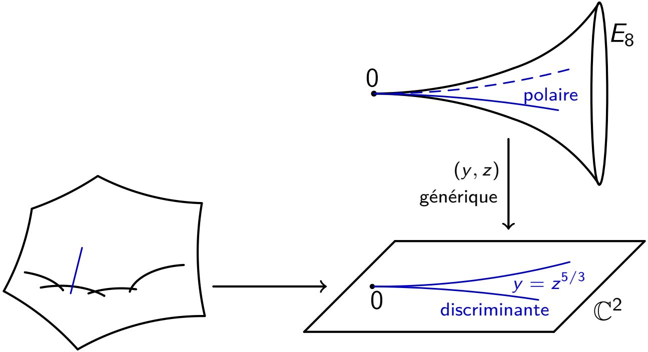
Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$



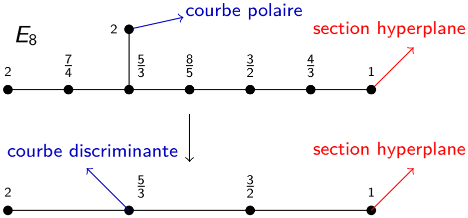


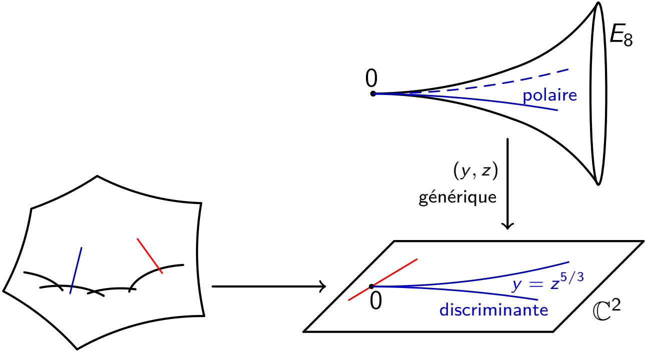
Exemple :

$$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

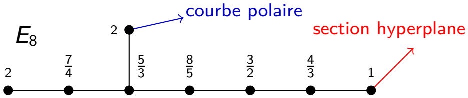
$$\downarrow (y, z)$$

discriminante $\{y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$





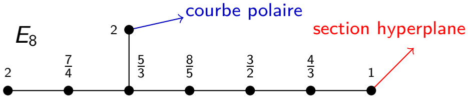
Exemple :
$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$



Questions classiques :

- Comment la géométrie de $(X, 0)$ influence-t-elle les taux internes ?
- Comment les calculer en général ?

Exemple :
$E_8 = \{x^2 + y^3 + z^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$



Questions classiques :

- Comment la géométrie de $(X, 0)$ influence-t-elle les taux internes ?
- Comment les calculer en général ?

qui factorise par $\mathrm{Bl}_0(X)$ et par la transformée de Nash

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

Soit $\pi\colon X_\pi \to X$ une bonne résolution de $(X, 0)$. Alors les taux internes sont complètement déterminés par :

- la topologie de $(X, 0)$, i.e. le graphe dual Γ_π pondéré ;
- les flèches des sections hyperplanes génériques ;
- les flèches des courbes polaires des projections génériques $(X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$.

Conséquence d'une formule explicite que l'on verra plus tard. Résultat possible grâce à l'introduction de nouvelles techniques : les entrelacs non archimédiens.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v\colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f\in\mathfrak{m}_{X,0}}\{v(f)\} = 1 \right\}$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E

C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2,0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).

Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.

De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0),\mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0),\mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

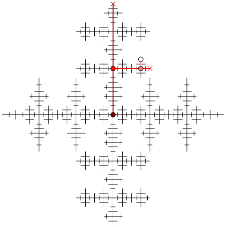
Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v \colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}} \{v(f)\} = 1 \right\}$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E

C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).



Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.

De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0),\mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0),\mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

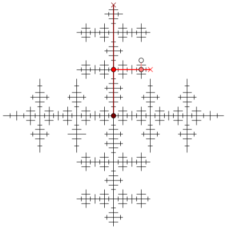
Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v\colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}}\{v(f)\} = 1 \right\}$$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E

C'est un bon espace topologique, compact.

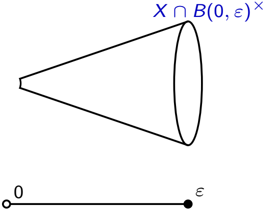
Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2,0) \cong$ arbre valuatif
(Favre–Jonsson).



Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.



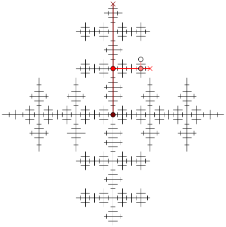
De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0),\mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0),\mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v \colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}} \{v(f)\} = 1 \right\}$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E



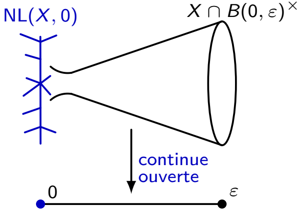
C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0) \cong$ arbre valuatif (Favre–Jonsson).

Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.



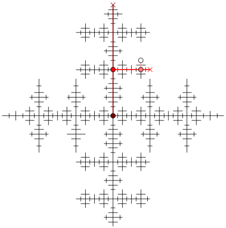
De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0),\mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0),\mathbb{Q}\big)$.

L'entrelacs non archimédien d'une singularité

Définition (Boucksom–Favre–Jonsson, F)

$\mathrm{NL}(X,0) = \left\{ v \colon \widehat{\mathcal{O}_{X,0}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ semi-valuation} \;\middle|\; \min_{f \in \mathfrak{m}_{X,0}} \{v(f)\} = 1 \right\}$

mesure d'un ordre d'annulation
e.g. valuation divisorielle ord_E



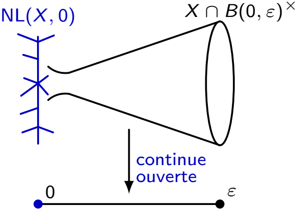
C'est un bon espace topologique, compact.

Exemple : $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0) \cong$ arbre valuatif
(Favre–Jonsson).

Parent proche de l'entrelacs topologique :

Théorème (F–Favre)

$\mathrm{L}(X,0)$ dégénère vers $\mathrm{NL}(X,0)$.



De plus, on a :
$H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{NL}(X,0), \mathbb{Q}\big) \cong W^0 H^i_{\mathrm{sing}}\big(\mathrm{L}(X,0), \mathbb{Q}\big).$

Intermezzo : applications de NL

Dans ma thèse, j'ai muni $\mathrm{NL}(X,0)$ d'une structure analytique non archimédienne, provenant de la théorie des espaces de Berkovich.

Plus généralement : $\mathrm{NL}(\mathscr{X})$, pour un $\mathscr{X}$ schéma formel spécial sur un corps k.

Application 1 (F PhD)

Caractérisation non archimédienne des valuations de Nash d'une k-surface.

valuations divisorielles de la résolution minimale

L'entrelacs $\mathrm{NL}(X,0)$ a l'aspect d'un fractal :

Application 2 (F–Favre–Ruggiero 2018)

Soit $(X,0)$ une singularité normale de k-surface.

$\mathrm{NL}(X,0)$ est auto-similaire	$\Longleftrightarrow$	$(X,0)$ est une singularité sandwich

Techniques : géométrie non archimédienne, dynamique, géométrie formelle, combinatoire...

Intermezzo : applications de NL

Dans ma thèse, j'ai muni $\mathrm{NL}(X, 0)$ d'une structure analytique non archimédienne, provenant de la théorie des espaces de Berkovich.

Plus généralement : $\mathrm{NL}(\mathscr{X})$, pour un $\mathscr{X}$ schéma formel spécial sur un corps k.

Application 1 (F PhD)

Caractérisation non archimédienne des valuations de Nash d'une k-surface.

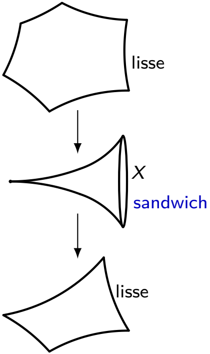
valuations divisorielles de la résolution minimale

L'entrelacs $\mathrm{NL}(X, 0)$ a l'aspect d'un fractal :

Application 2 (F–Favre–Ruggiero 2018)

Soit $(X, 0)$ une singularité normale de k-surface.

$\mathrm{NL}(X, 0)$ est auto-similaire $\iff$ $(X, 0)$ est une singularité sandwich



Techniques : géométrie non archimédienne, dynamique, géométrie formelle, combinatoire...

La formule du Laplacien pour les taux internes

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

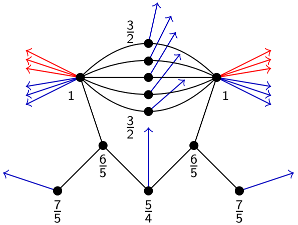
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $NL(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien pour les taux internes

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

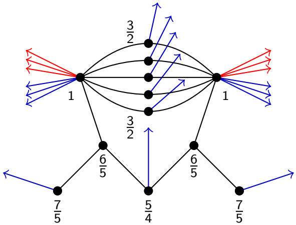
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2,0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2+y^3)(x^3+zy^2)+z^7=0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien pour les taux internes

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

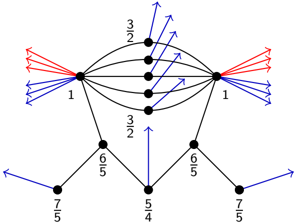
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien pour les taux internes

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

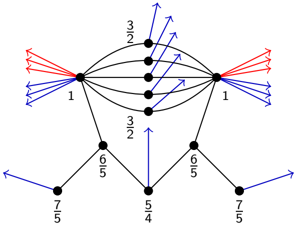
$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien pour les taux internes

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

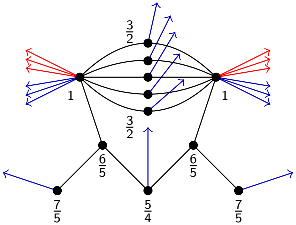
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

La formule du Laplacien pour les taux internes

Théorème (Belotto–F–Pichon, 2019)

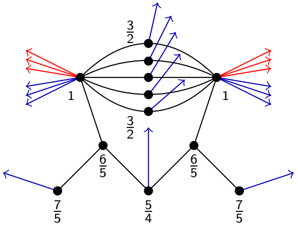
$$\Delta_{\Gamma_\pi}(\mathcal{I})(v) = m(v)\big(K_{\Gamma_\pi}(v) + 2\#\{\text{flèches hyp. en } v\} - \#\{\text{flèches polaires en } v\}\big)$$

Deux preuves possibles :

- Relèvement de la formule de $\mathrm{NL}(\mathbb{C}^2, 0)$ au cas singulier : topologie et monodromie de la fibre de Milnor d'une forme linéaire générique, twists de Dehn.
- Interprétation birationnelle des taux internes comme discrépances de Mather logarithmiques (normalisées) : idéaux de Fitting, contrôle des zéros et des pôles de formes différentielles sur les résolutions.

Applications :

- Calcul explicite simple des taux internes
- Formule de Lê–Greuel–Teissier
- On obtient des restrictions sur la localisation des flèches



$\{(zx^2 + y^3)(x^3 + zy^2) + z^7 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

Explorations polaires

Question

Étant donné un graphe de résolution Γ, quelles configurations de flèches (hyperplanes et polaires) sont réalisables par une singularité $(X, 0)$?

Explorations polaires

Motivation : il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng ($\sim$2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Motivation : il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng ($\sim$2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Motivation : il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng (∼2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

Théorème (Spivakovsky 1990)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité minimale.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique.
(Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Explorations polaires

Motivation : il y a deux manières de résoudre les singularités des surfaces :

- par éclatements de points (Zariski 1939) $\longrightarrow$ sections hyperplanes
- par transformées de Nash (Spivakovsky 1990) $\longrightarrow$ courbes polaires

Lê Dũng Tráng ($\sim$2000) : Ces deux procédés sont-ils duaux ?
Dualité entre sections hyperplanes et courbes polaires ?

Dans les deux procédés, un rôle important est joué par les singularités minimales.

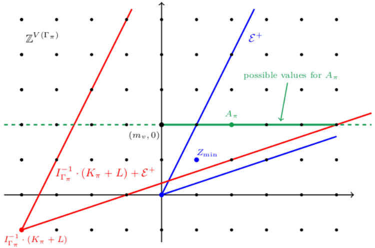
Théorème (Spivakovsky 1990, Belotto–F–Pichon 2020)

Soit $(X, 0)$ un germe de surface avec une singularité ~~minimale~~ LNE.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ détermine le graphe dual pondéré de la résolution minimale de $(X, 0)$ qui se factorise par l'éclatement en 0 et par la transformée de Nash, avec les flèches des sections hyperplanes et courbes polaires.

On a un résultat analogue pour la courbe discriminante d'une projection générique. (Bondil 2003 pour les minimales, Belotto–F–Pichon 2020 pour les LNE)

Deuxième expédition polaire

En général, il n'y a qu'un nombre fini de solutions possibles.



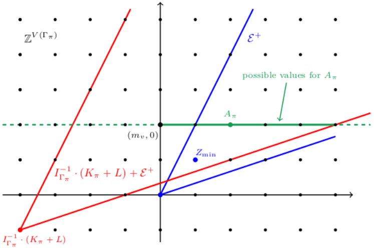
Théorème (Belotto–F–Némethi–Pichon 2021)

Soit $(X, 0)$ un germe normal de surface complexe.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ borne aussi :

- la multiplicité et la multiplicité polaire de $(X, 0)$;
- le nombre d'éclatements nécessaires pour passer d'une bonne résolution quelconque de $(X, 0)$ à une autre qui se factorise par l'éclatement de l'idéal maximal de $(X, 0)$ et par sa transformée de Nash.

Deuxième expédition polaire

En général, il n'y a qu'un nombre fini de solutions possibles.



Théorème (Belotto–F–Némethi–Pichon 2021)

Soit $(X, 0)$ un germe normal de surface complexe.
Alors le type topologique de $(X, 0)$ borne aussi :

- la multiplicité et la multiplicité polaire de $(X, 0)$;
- le nombre d'éclatements nécessaires pour passer d'une bonne résolution quelconque de $(X, 0)$ à une autre qui se factorise par l'éclatement de l'idéal maximal de $(X, 0)$ et par sa transformée de Nash.

Directions futures en Géométrie Lipschitz

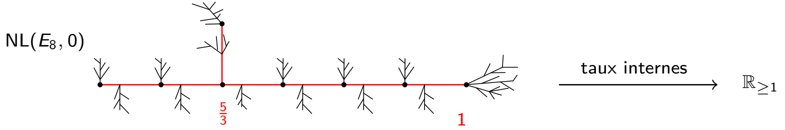
- Géométrie externe des surfaces complexes *(avec A. Pichon)*

Q : Trouver un invariant complet pour les surfaces pour la métrique externe.

Directions futures en Géométrie Lipschitz

- Géométrie externe des surfaces complexes *(avec A. Pichon)*

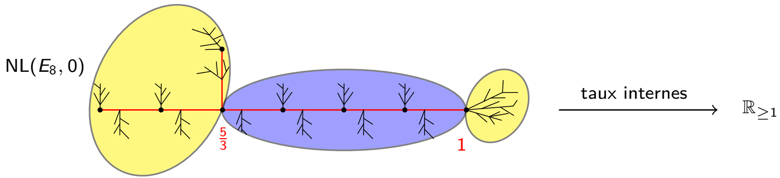
Q : Trouver un invariant complet pour les surfaces pour la métrique externe.



Birbrair–Neumann–Pichon 2014 : invariant complet pour la métrique interne

- Géométrie externe des surfaces complexes *(avec A. Pichon)*

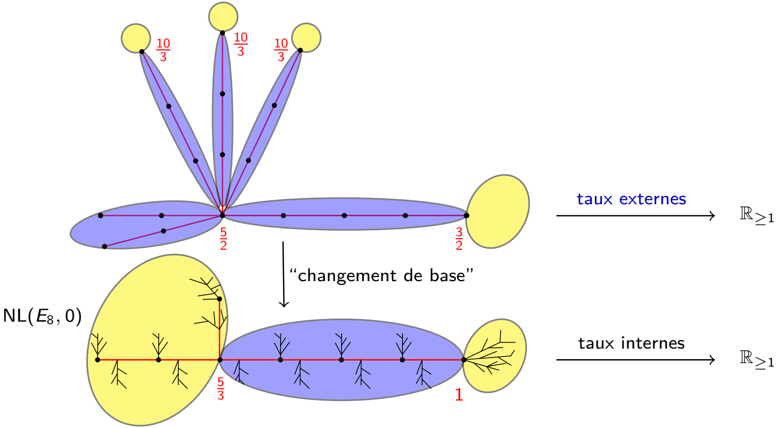
Q : Trouver un invariant complet pour les surfaces pour la métrique externe.



Birbrair–Neumann–Pichon 2014 : invariant complet pour la métrique interne (décomposition de NL)

- Géométrie externe des surfaces complexes *(avec A. Pichon)*

Q : Trouver un invariant complet pour les surfaces pour la métrique externe.

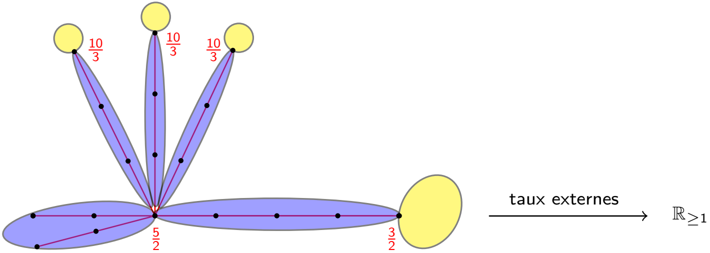


Birbrair–Neumann–Pichon 2014 : invariant complet pour la métrique interne (décomposition de NL)

Directions futures en Géométrie Lipschitz

- Géométrie externe des surfaces complexes *(avec A. Pichon)*

Q : Trouver un invariant complet pour les surfaces pour la métrique externe.



- Géométrie Lipschitz en dimension supérieure *(avec A. Belotto)*

  Plusieurs fonctionnelles de type *taux internes* (liés aux idéaux de log-Fitting).
  En dim 3 : coordonnés de Hsiang–Pati ([Belotto–Bierstone–Granjean–Milman])
  Relation avec le MMP (discrépance de Mather), les espaces d'arcs, l'intégration motivique.

Travaux et projets plus arithmétiques

- Réduction semistable des courbes et invariants arithmétiques

  (avec D. Turchetti)

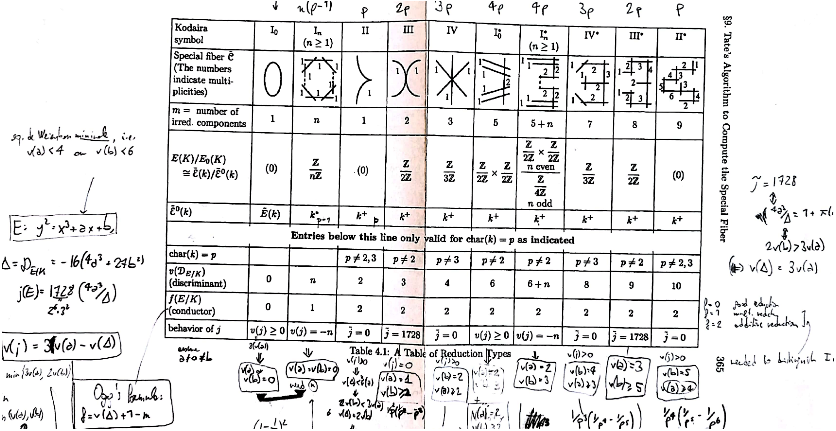
Travaux et projets plus arithmétiques

- Réduction semistable des courbes et invariants arithmétiques

(avec D. Turchetti)

On s'intéresse à la réduction modulo p des courbes arithmétiques

(bonne réduction, mauvaise réduction, réduction semistable...)



	↓	$n(p-1)$	p	$2p$	$3p$	$4p$	$4p$	$3p$	$2p$	p
Kodaira symbol	I_0	I_n $(n \geq 1)$	II	III	IV	I_0^*	I_n^* $(n \geq 1)$	IV^*	III^*	II^*
Special fiber $\tilde{\mathcal{C}}$ (The numbers indicate multiplicities)										
$m =$ number of irred. components	1	n	1	2	3	5	$5+n$	7	8	9
$E(K)/E_0(K) \cong \tilde{E}(k)/\tilde{E}^0(k)$	(0)	$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	(0)	$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$	$\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$	$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$	$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ n even; $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ n odd	$\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$	$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$	(0)
$\tilde{E}^0(k)$	$\tilde{E}(k)$	k^* $p-1$	k^+ p	k^+	k^+	k^+	k^+	k^+	k^+	k^+
Entries below this line only valid for $\mathrm{char}(k) = p$ as indicated										
$\mathrm{char}(k) = p$			$p \neq 2,3$	$p \neq 2$	$p \neq 3$	$p \neq 2$	$p \neq 2$	$p \neq 3$	$p \neq 2$	$p \neq 2,3$
$v(\mathcal{D}_{E/K})$ (discriminant)	0	n	2	3	4	6	$6+n$	8	9	10
$f(E/K)$ (conductor)	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
behavior of j	$v(j) \geq 0$	$v(j) = -n$	$\tilde{j} = 0$	$\tilde{j} = 1728$	$\tilde{j} = 0$	$v(j) \geq 0$	$v(j) = -n$	$\tilde{j} = 0$	$\tilde{j} = 1728$	$\tilde{j} = 0$

Table 4.1: A Table of Reduction Types

§9. Tate's Algorithm to Compute the Special Fiber

365

éq. de Weierstrass minimale, i.e. $v(a) < 4$ ou $v(b) < 6$

$E: y^2 = x^3 + ax + b$

$\Delta = \mathcal{D}_{E/K} = -16(4a^3 + 27b^2)$

$j(E) = \frac{1728}{2^6 \cdot 3^3}\left(\frac{4a^3}{\Delta}\right)$

$v(j) = 3v(a) - v(\Delta)$

Ogg's formula: $f = v(\Delta) + 1 - m$

$\tilde{j} = 1728 \Leftrightarrow \frac{4a^3}{\Delta} = 1 + \pi(\ldots) \Leftrightarrow 2v(b) > 3v(a) \Leftrightarrow v(\Delta) = 3v(a)$

$f=0$ good reduction, $f=1$ mult. reduction, $f=2$ additive reduction

needed to distinguish I_n

$v(a) = v(b) = 0$; $v(a) = 1$, $v(b) \geq 2$; $v(b) = 2$, $v(a) \geq 2$; $v(a) = 2$, $v(b) = 3$; $v(b) = 4$, $v(a) \geq 3$; $v(a) = 3$, $v(b) \geq 5$; $v(b) = 5$, $v(a) \geq 4$

Travaux et projets plus arithmétiques

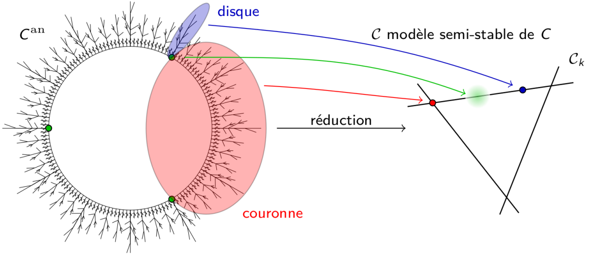
- Réduction semistable des courbes et invariants arithmétiques

(avec D. Turchetti)

On s'intéresse à la réduction modulo p des courbes arithmétiques

(bonne réduction, mauvaise réduction, réduction semistable...)

On étudie la triangulation minimale d'une courbe
($\longleftrightarrow$ squelette minimal)



triangulation V $\longleftrightarrow$ sommets d'un squelette $\approx \mathrm{Dual}(\mathcal{C}_k)$

Travaux et projets plus arithmétiques

- Réduction semistable des courbes et invariants arithmétiques

(avec D. Turchetti)

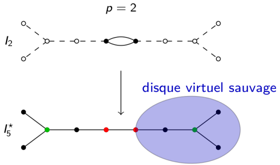
On s'intéresse à la réduction modulo p des courbes arithmétiques

(bonne réduction, mauvaise réduction, réduction semistable...)

On étudie la triangulation minimale d'une courbe
($\longleftrightarrow$ squelette minimal)

Applications à la ramification de la courbe
(extension minimale donnant réduction semistable).

Directions futures : ramification sauvage,
étude d'autres invariants arithmétiques.



$V_{\mathrm{min-tr}} \neq (V_{\mathrm{min-snc}})_{\mathrm{pr}}$

Courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$ définie par

$y^2 - pxy + p^4 y = x^3 + px^2 + p^5 x$

Travaux et projets plus arithmétiques

- Réduction semistable des courbes et invariants arithmétiques

(avec D. Turchetti)

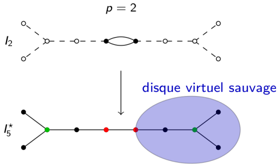
On s'intéresse à la réduction modulo p des courbes arithmétiques

(bonne réduction, mauvaise réduction, réduction semistable...)

On étudie la triangulation minimale d'une courbe
($\longleftrightarrow$ squelette minimal)

Applications à la ramification de la courbe
(extension minimale donnant réduction semistable).

Directions futures : ramification sauvage,
étude d'autres invariants arithmétiques.

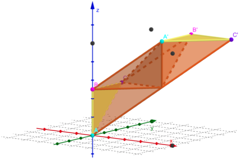


$V_{\mathrm{min-tr}} \neq (V_{\mathrm{min-snc}})_{\mathrm{pr}}$

- Tropicalisation fonctorielle des schémas logarithmiques *(avec M. Ulirsch)*

Clé : rétraction sur un squelette pour les schémas log lisses sur un DVR.

Applications : immeubles de Bruhat–Tits affines,
espaces de modules des fibrés vectoriels sur une courbe.



Intégration au Centre de mathématiques Laurent Schwartz

Je me vois très naturellement dans l'équipe *Géométrie et Dynamique* du CMLS :

Omid Amini Sébastien Boucksom Charles Favre

Interaction naturelle avec l'équipe *Algèbre et Arithmétique* :

Javier Fresán Claude Sabbah

Interaction multidisciplinaire envisageable avec l'équipe *TROPICAL* du CMAP.

Intégration au Centre de mathématiques Laurent Schwartz

Je me vois très naturellement dans l'équipe *Géométrie et Dynamique* du CMLS :

Omid Amini   Sébastien Boucksom   Charles Favre

Interaction naturelle avec l'équipe *Algèbre et Arithmétique* :

Javier Fresán   Claude Sabbah

Interaction multidisciplinaire envisageable avec l'équipe *TROPICAL* du CMAP.

Merci !