SME300 - 1º Trabalho Prático - ENTREGAR DIA DA PROVA P1

Considere a matriz pentadiagonal A, de dimensão n, definida por (I).

$$(I)\quad \begin{cases} a_{i,i} = 3,\ i = 1, 2, \cdots, n, \\ a_{i,i+1} = -0.75,\ i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ a_{i+1,i} = -0.75,\ i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ a_{i,i+3} = -0.75,\ i = 1, 2, \cdots, n-3, \\ a_{i+3,i} = -0.75,\ i = 1, 2, \cdots, n-3, \\ a_{i,j} = 0 \quad \text{no restante.} \end{cases}$$

Por exemplo, para $n = 6$ a matriz A toma a forma:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.75 & 0 & -0.75 & 0 & 0 \\ -0.75 & 3 & -0.75 & 0 & -0.75 & 0 \\ 0 & -0.75 & 3 & -0.75 & 0 & -0.75 \\ -0.75 & 0 & -0.75 & 3 & -0.75 & 0 \\ 0 & -0.75 & 0 & -0.75 & 3 & -0.75 \\ 0 & 0 & -0.75 & 0 & -0.75 & 3 \end{bmatrix}$$

Pode-se mostrar que essa matriz é simétrica e definida positiva. Considere o método iterativo dado por

$$\mathbf{x_i^{(k+1)}} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{x_j^{(k+1)}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii}\ , \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Escreva um subprograma (GAUSSSEIDEL) que, tendo como dados de entrada uma matriz real A, um vector real $\mathbf{b}$, um inteiro n, uma constante real ϵ e uma constante inteira $itmax$, utiliza o método de Gauss-Seidel e obtém aproximações $\mathbf{x}^{(k+1)}$ da solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, até que $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty \leq \epsilon$.

b) Para testar o subprograma, escreva um programa que utiliza o subprograma GAUSSSEIDEL faça $\epsilon = 10^{-10}$, $n = 100, 200$ e $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i = 1, \ldots, n$ e execute o programa. A **solução exata** é $x_i = 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty$ e $\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|_\infty$ onde $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}$, é chamado vetor residuo. O valor de k é o valor da última ieração.

c) Utilizando o subprograma GAUSSSEIDEL do ítem **a)**, resolva o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde A é a matriz definida pelas equações (I) e $\mathbf{b}$ é o vector definido por $b_i = 2.0/i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Considere $n = 1000$ e $\epsilon = 10^{-10}$. Partindo da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ obtenha a solução do sistema linear pelo método de Gauss-Seidel.

Deve-se também escrever uma função para calcular a norma infinita para calcular $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty$.

OBSERVAÇÕES:

1. O trabalho pode ser feito em grupo com até 3 alunos (GRUPOS COM MAIS DE 3 ALUNOS NÃO SÃO CONSIDERADOS).

2. A avaliação do trabalho será feita conforme os items:

   i) português, estrutura do trabalho, estrutura do código (1 PONTO)

   ii) introdução do trabalho (explicação do problema e do método numérico) (3 PONTOS)

   iii) resultados (correção e detalhamento) (3 PONTOS)

   iv) implementação (correção e adequação do código ao problema proposto) (3 PONTOS)