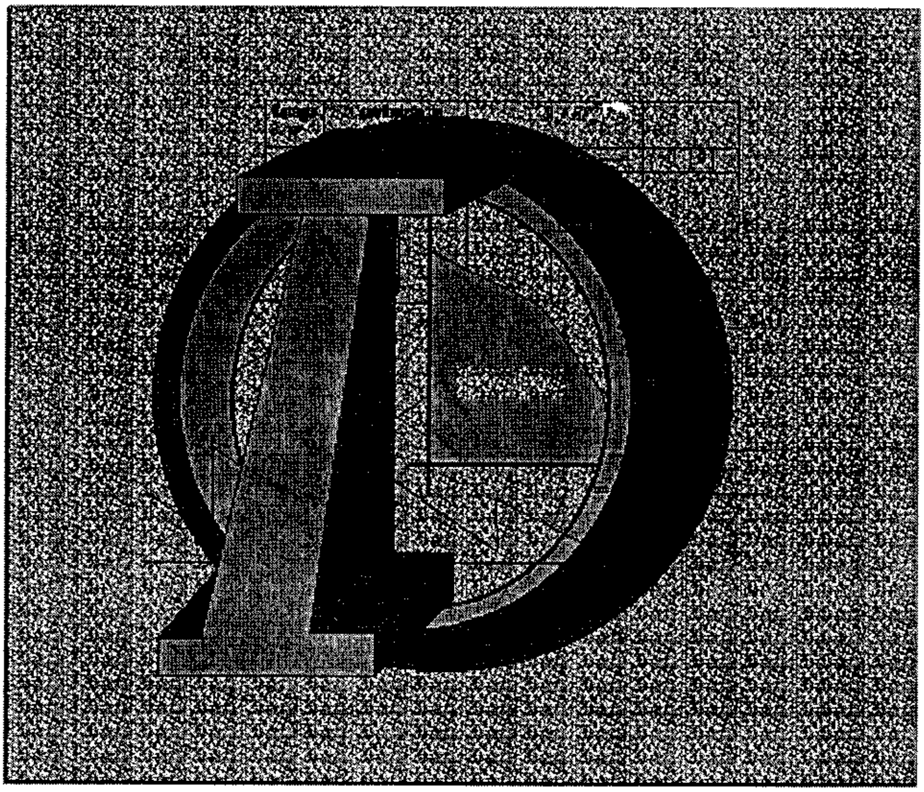
INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

A. J. M. Guimarães Rodrigues

Universidade do Minho



Volume – I

Modelos Determinísticos

Prefácio

O autor tem estado envolvido no ensino da Investigação Operacional, na Universidade do Minho, desde o Ano Lectivo de 1980/81. Nessa altura, os Cursos de Engenharia da Universidade do Minho designavam-se por Cursos de Engenharia de Produção, com vários ramos, nomeadamente Metalomecânica, Têxtil, Sistemas e Informática e Ramo de Matérias Plásticas. Nesse primeiro ano de leccionamento da Investigação Operacional, a disciplina era frequentada por quatro alunos. O ensino desenvolvia-se, nessa época de construção desta universidade, de uma forma socrática. Embora baseado numa relação docente/discente irrealista, esse ano lectivo foi extremamente compensador, e o nome desses quatro alunos mantém-se presente na minha memória.

Com o crescimento da Universidade do Minho, os cursos existentes foram sendo reformulados, novos cursos passaram a ser oferecidos, e a população discente e docente da Universidade aumentou. A disciplina de Investigação Operacional passou a ser incluída no plano curricular de novos cursos, nomeadamente Matemática e Ciências de Computação, Gestão de Empresas, Ensino da Matemática, Administração Pública Regional e Local, Informática de Gestão.

O corpo de docentes ligados ao ensino da Investigação Operacional passou de um em 1980/81 para onze em 1992/93. O número de alunos aumentou de quatro em 1980/81 para várias centenas em 1992/93.

O aumento impressionante do número de alunos implica, para o professor responsável pelas aulas teóricas algum distanciamento em relação aos estudantes que frequentam a disciplina. A interacção que existia em 1980/81 deixou de ser possível quando a Universidade seguiu o seu desenvolvimento natural. Para compensar este efeito negativo, torna-se necessária uma preocupação adicional de providenciar aos alunos as melhores condições de apoio possíveis.

Ao longo dos anos, tenho tido oportunidade de observar os meus alunos realizarem provas de avaliação carregados de vários volumes de fotocópias dos acetatos utilizados nas aulas teóricas, acrescidas de mais alguns volumes com exercícios resolvidos. O volume desses apontamentos manuscritos, e a dificuldade de os utilizar como elemento de estudo, por não conterem um texto de suporte redigido de forma coerente, levaram-me a estabelecer como prioridade, para a primeira oportunidade, a sua revisão e edição por forma a constituírem um livro de texto de apoio para as disciplinas de Investigação Operacional. Como todos os projectos, a primeira versão contém certamente incorrecções. Conto com a colaboração dos alunos que o utilizarem como elemento de estudo para que possa ser gradualmente corrigido e melhorado.

Tendo sido desenvolvido com a preocupação de constituir um elemento de base para apoio aos alunos envolvidos no estudo da Investigação Operacional, é com gosto que dedico este texto aos meus alunos.

Sempre que somos questionados sobre o domínio científico em que desenvolvemos actividade, sentimos a obrigação de, em poucas palavras, darmos uma definição sucinta e categórica. Quando a questão nos é posta por um leigo, o problema torna-se um pouco mais complicado. Quando o domínio de actividade não é tecnológico a explicação é ainda mais complicada. Por vezes, é difícil resistir à tentação de fazer algum humor e responder que "Um Investigador Operacional é um Investigador ... que veste um camuflado. A Investigação Operacional é a actividade desenvolvida por esse investigador". Depois, virão as explicações baseadas em exemplos de aplicação, como "Por exemplo, uma fábrica usa máquinas, mão-de-obra, etc, para produzir uma variedade de produtos. A forma como organiza a utilização desses recursos não é indiferente. Pode significar a diferença entre uma fábrica que tem lucro e uma fábrica que vai à falência". Com esta explicação ficamos satisfeitos por podermos dar um exemplo terra a terra, mas sentimos ter cometido uma injustiça para com a ciência a que chamamos Investigação Operacional. Provavelmente, sentimo-nos na obrigação de continuar a explicação com "Por exemplo, uma rede de transportes públicos dispõe de autocarros e serve uma população. A forma como os circuitos dos autocarros são organizados tem implicações nos tempos de espera, nos tempos de precurso para os utentes e nos custos de operação". O nosso interlocutor pode ainda surpreender-nos com interrogações como "Então e a Investigação Operacional nas Pescas?". Rapidamente sentimos a necessidade de listar as razões porque estes exemplos e outros mais díspares constituem aplicações de um corpo da ciência que se designa por Investigação Operacional. Então, diremos "Para tratar destes e doutros problemas, a Investigação Operacional utiliza técnicas matemáticas .... e não só .... para resolver modelos que representam os problemas. Problemas diferentes até podem ser representados pelo mesmo tipo de modelo...". Penso que, finalmente, sentimos que cumprimos a nossa *missão*, pois referimos *recursos*, *actividades*, *custos*, *qualidade de serviço*, *modelos*, *técnicas*, etc. Aliás, pensaremos também, que a questão "O que é a Investigação Operacional" continua a ser abordada, numa ou noutra faceta, com mais ou menos profundidade, em Congressos e Conferências da especialidade. É a natureza da Investigação Operacional, na sua interacção com a evolução da actividade humana, que leva à sua permanente reavaliação. Afinal, pensamos, a definição do *investigador de camuflado* até é adequada, e inclui os conceitos de investigador e de acção, de planeamento e de objectivo de aplicação.

Podemos recorrer à referência de algumas definições estabelecidas e mais ortodoxas de Investigação Operacional.

Assim,

Algumas Definições de Investigação Operacional

-A Investigação Operacional no sentido mais lato pode ser caracterizada como sendo a aplicação de métodos, técnicas e ferramentas científicas a problemas que envolvem a operação de sistemas, por forma a prover os responsáveis pelo controlo da operação com soluções óptimas para os problemas ***(Churchman, G.W., Ackoff,R.L. e Arnoff, E.L., 1957)***.

-A Investigação Operacional é a resolução, baseada na ciência moderna, de problemas complexos que ocorrem na direcção e gestão de grandes sistemas que envolvem mão de obra, maquinaria, materiais e financiamento na indústria, no comércio, no governo e na defesa. A Investigação Operacional distingue--se pelo desenvolvimento de um modelo científico do sistema em estudo, incorporando a medida de factores como probabilidades e risco, permitindo comparar o resultado de diferentes decisões, estratégias ou alternativas. O objectivo da Investigação Operacional é auxiliar a gestão a desenvolver as suas políticas e acções com um suporte científico *(Beer, Stafford, 1966)*

-A Investigação Operacional é uma ciência experimental, aplicada, dirigida para a observação, compreensão e previsão do comportamento de sistemas homem-máquina. Os que trabalham em Investigação Operacional aplicam os seus conhecimentos em problemas práticos no domínio dos negócios, governo e problemas sociais *(Operations Research Society of America, 1971)*.

-A Investigação Operacional pode ser descrita como uma abordagem científica da tomada de decisões que envolvem a operação de um sistema organizacional *(Hillier, F.S e Lieberman, G.J., 1974)*.

-A Investigação Operacional pode ser considerada como a aplicação do método científico por equipas interdisciplinares, a problemas que dizem respeito ao controlo de sistemas organizados, com a finalidade de obter as soluções que melhor satisfaçam os objectivos da organização como um todo *(Ackoff, Russel L. e Maurice W. Sasieni, 1975)*

-A Investigação Operacional é uma abordagem científica de resolução de problemas de gestão *(Wagner, H.M, 1975)*.

-A Investigação Operacional consiste na utilização de modelos para apoiar a gestão na tomada e execução de decisões *(Haley, K.B., 1990)*.

. Na selecção das matérias incluídas neste texto pesaram considerações de natureza pedagógica, prática e funcional.

Muitos outros temas poderiam ter sido seleccionados e incluídos, adicionalmente ou em substituição dos que aqui constam.

Por vezes, surgem questões sobre a não inclusão de uma ou outra técnica divulgada. Procurou-se, fundamentalmente, que os assuntos leccionados na disciplina de Investigação Operacional correspondessem ao maior *valor acrescentado* possível para a formação dos estudantes no prazo de tempo que os planos curriculares dos seus cursos permitem. Muitas das técnicas e metodologias da Investigação Operacional têm sido absorvidas por várias ciências, esquecendo a sua origem e desenvolvimento. Isto corresponde, aliás, ao cumprimento de um objectivo da Investigação Operacional. O conjunto de matérias incluídas, e o nível de profundidade com que são abordadas corresponde aos aspectos onde se pensa que um maior benefício pode ser colhido para uma aprendizagem baseada numa disciplina curricular. Técnicas que os alunos podem facilmente apreender por estudo e leitura individual, sem necessidade de apoio docente, não foram incluídas.

O texto é composto por dois volumes, que incluem *Modelos Determinísticos (Volume-I)* e *Modelos Estocásticos (Volume-II)*, respectivamente. O primeiro volume corresponde, essencialmente, ao plano curricular das disciplinas semestrais de Investigação Operacional, enquanto que os dois volumes correspondem ao plano curricular das disciplinas anuais de Investigação Operacional.

Penso que os alunos têm oportunidade, através das matérias seleccionadas, de apreender não só as técnicas mas, também, a *filosofia* inerente à modelagem e formulação de problemas.

É evitada a complexidade matemática desnecessária, sem deixar, contudo, de apresentar a justificação completa das técnicas apresentadas.

A disciplina, originalmente preparada para os Cursos de Engenharia, e posteriormente oferecida a outras licenciaturas, procura dar aos alunos as ideias básicas que lhes desenvolvem a capacidade para poderem abordar, no seu futuro profissional, os problemas de aplicação de Investigação Operacional que venham a ter que enfrentar.

Outubro de 1993
AGR

Índice

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

A.J.M. Guimarães Rodrigues

UNIVERSIDADE DO MINHO

Volume - I
Modelos Determinísticos

I - INTRODUÇÃO

1-Introdução

1.1 História

A 2ª Guerra Mundial marca a primeira actividade formal de Investigação Operacional.

Os problemas eram, então, de natureza estratégica e táctica. Para os resolver, o comando militar aliado reuniu equipas de físicos, matemáticos e estrategas militares, que desenvolveram abordagens interdisciplinares na análise e solução dos problemas.

O objectivo consistia em estudar a utilização mais efectiva dos limitados recursos militares (*e.g.* a utilização e localização do recentemente inventado radar, e a eficácia de um novo tipo de bombardeiros).

A primeira aplicação da Investigação Operacional no âmbito das Operações Militares determinou a designação de *Investigação de Operações*. Este termo é utilizado pelos americanos ("Operations Research"), enquanto que os ingleses preferem a designação de *Investigação Operacional* ("Operational Research").

O que caracteriza a Investigação Operacional é a utilização do conhecimento científico, através de um esforço de equipas interdisciplinares, com o objectivo de determinar a melhor utilização de recursos limitados.

Perante um conjunto de tarefas (*actividades*) a desenvolver, com base num conjunto de *recursos*, põe-se a questão de determinar qual o nível adequado desses recursos que deve ser atribuído a cada actividade. Caso os recursos disponíveis sejam ilimitados, é possível desenvolver todas as actividades da forma mais eficiente (não existe efectivamente um problema). A situação mais frequente, porém, corresponde à existência de recursos limitados. A limitação nos recursos pode ser de tal forma restritiva, que não exista nenhuma solução possível (*válida*) para o problema. Mais comum é a existência de várias soluções possíveis, pretendendo-se determinar a que melhor cumpre o objectivo pretendido (melhor *desempenho*).

Após os primeiros sucessos obtidos pelos Ingleses no domínio militar, o comando militar Americano inicia actividade análoga.

Do âmbito dos problemas então abordados constam:

- Problemas logísticos
- Concepção de novas trajectórias de voo
- Planeamento de campos de minas no mar
- Utilização efectiva de equipamento electrónico

No pós-gerra, os gestores da indústria americana, compreendendo que muitos dos problemas com que lidavam não diferiam essencialmente do tipo de problemas tratados pela Investigação Operacional durante a guerra, começaram a utilizá-la.

O *Método Simplex*, da Programação Linear, concebido por George B. Dantzig em 1947, foi a primeira técnica a ser amplamente reconhecida no campo industrial.

O advento do computador digital, possibilitando rapidez de cálculo e armazenamento e recuperação de informação, permitiu o impressionante desenvolvimento da Investigação Operacional.

1.2 Domínios de Aplicação da Investigação Operacional

Actualmente, são inúmeros os domínios de aplicação da Investigação Operacional. A título de exemplo, pode-se citar a actividade nos seguintes domínios:

- Negócio (Comércio/Indústria)
- Sistemas Hospitalares
- Instituições Financeiras
- Bibliotecas
- Planeamento Urbano
- Planeamento de Sistemas de Transporte
- etc.

1.3 Modelagem

Qualquer aplicação da Investigação Operacional começa por desenvolver uma representação ideal (simplificada) da realidade.

O sistema em estudo pode ser já existente, ou ser um sistema em projecto. Para um sistema já existente, pretende-se analisar o seu funcionamento, no sentido de melhorar o seu desempenho. Para um sistema em projecto, pretende-se identificar a melhor configuração (estrutura) para o futuro sistema.

Na modelagem da realidade, diferentes níveis de abstracção são possíveis.

1.3.1 Níveis de Abstracção de um Modelo

De uma simplificação do sistema real é, ainda, possível abstrair diferentes modelos (**Figura-1.1**).

Considere-se o ciclo de um produto, desde a sua concepção até à sua comercialização.

Após aprovação por parte do *Departamento de Concepção*, é emitida uma ordem de produção para o *Departamento de Produção* que, por seu lado, requisita o material (matéria prima) ao *Departamento de Material*.

O *Departamento de Material* satisfaz o pedido a partir das suas existências ("stocks"), ou contacta o *Departamento de Compras*, para que seja lançada uma *ordem de compra.*

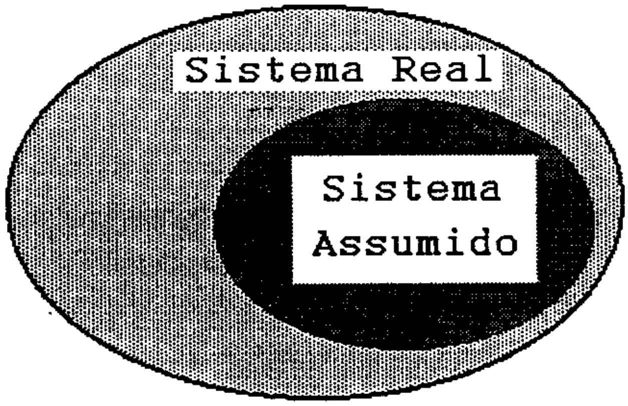


Figura - 1.1

Após o fabrico do artigo, o *Departamento de Vendas*, juntamente com o *Departamento de Comercialização* assume a responsabilidade de o distribuir ao consumidor.

Vejamos quais as variáveis que influenciam o nível de produção:

Departamento de Produção

- Número de horas - máquina disponíveis
- Número de horas - homem disponíveis
- Sequência específica de maquinagem
- Inventário de processo permitido
- Número de artigos defeituosos produzidos
- Taxa de inspecção (controlo)

Departamento de Material

- Disponibilidade de inventário de material
- Prazos de entrega do material a adquirir
- Limitações de espaço de armazém

Departamento de Comercialização

- Previsão de vendas
- Intensidade da campanha de publicidade
- Capacidade dos meios de distribuição
- Efeito no mercado de produtos competitivos

Cada um dos factores apontados afecta, directa ou indirectamente, o nível de produção. Contudo, é extremamente difícil estabelecer relações entre estes factores-variáveis e o nível de produção.

Como abstracção, podemos definir o sistema com base em duas *Variáveis Dominantes* (*parâmetros*):

- **Taxa de Produção do artigo**
- **Taxa de Consumo do artigo**

O que de facto se fez, foi agrupar várias variáveis do "sistema real" numa única variável do "sistema assumido". Para a determinação da **Taxa de Produção** são tidas em consideração variáveis como:

- Disponibilidade de horas - máquina
- Disponibilidade de horas - homem
- Sequênciação de operações
- Disponibilidade de material (matéria-prima)

A *Taxa de Consumo* é determinada com base nas variáveis associadas ao *Departamento de Comercialização*.

Com base na **Taxa de Produção** e **Taxa de Consumo** podem estabelecer--se medidas de *existência* e de *penúria* (quebra) de inventário.

Assim, é possível construir um modelo abstraído com o objectivo de minimizar os custos conjuntos de existência e quebra de inventário.

Outros modelos abstraídos poderiam ser considerados. Por exemplo, poderia haver interesse em determinar o nível de produção de modo a que a máxima existência de inventário se mantivesse abaixo de certo nível.

A modelagem de um sistema, com a definição das suas *variáveis dominantes*, é mais uma arte do que uma ciência. Não é, portanto, possível estabelecer regras exactas que ensinem a construir um modelo.

1.3.2 Tipos de Modelos de Investigação Operacional

1.3.2.1 Introdução

Os diferentes tipos de Modelos utilizados pela Investigação Operacional podem agrupar-se em:

(a) - <u>Simbólicos ou Matemáticos</u>

São abstracções do mundo real. Na construção de Modelos Matemáticos admite-se que todas as variáveis e relações relevantes entre elas são quantificáveis.

(b) - <u>Simulação</u>

Os modelos de simulação "imitam" o funcionamento do sistema. Não requerem funções matemáticas explícitas para relacionamento das variáveis, e tornam possível o estudo de sistemas complexos que não podem ser modelados ou resolvidos matematicamente.

A Simulação baseia-se na condução de experiências, e está, portanto, sujeita a erro experimental.

(c) - <u>Heurísticos</u>

Baseiam-se em regras intuitivas ou empíricas que permitem a determinação de uma solução melhorada a partir de uma dada solução inicial para o modelo.

São métodos de pesquisa que conduzem de um ponto solução para outro ponto solução, com o objectivo de melhorar o valor de critério do modelo (*medida de desempenho*).

1.3.2.2 Estrutura dos Modelos Matemáticos

Num Modelo Matemático podem distinguir-se três componentes básicas:

<u>Variáveis de Decisão e Parâmetros</u>

Variáveis de decisão:

São as ***Incógnitas*** do problema, e representam os ***Níveis das Actividades***.

Parâmetros:

São as ***Variáveis Controladas*** do sistema. Representam, por exemplo, ***Níveis de Recursos*** disponíveis.

<u>Condições, Constrangimentos ou Restrições</u>

Exprimem limitações (normalmente físicas) do sistema. Uma solução que obedeça ao conjunto de condições designa-se por ***Solução Válida***.

<u>Função Objectivo</u>

Define a ***Medida de Eficiência*** do sistema em função das variáveis de decisão. Permite determinar qual a "melhor" de um conjunto de soluções válidas.

Temos, assim, a *Forma Canónica*:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x_0 = f(x_1,\ldots,x_n) \\ (\max/\min) & \\ \text{Sujeito a} & g_i(x_1,\ldots,x_n) = b_i \quad ;(i = 1,\ \ldots,\ m) \\ & x_j \geq 0 \quad ;(j = 1,\ 2,\ldots,\ n) \end{array}$$

As condições $x_j \geq 0$ são designadas "Condições de não-negatividade", e correspondem à situação que se verifica na maior parte dos sistemas reais.

O ***Óptimo*** corresponde, normalmente, ao máximo ou mínimo de determinada ***Função Objectivo***. Mais discutível, porém, é a função objectivo em si.

Por exemplo, que factores poderão influenciar a escolha entre um objectivo de ***Maximização de Lucro*** e um objectivo de ***Minimização de Custos***? O ***Custo*** está sob controle imediato da organização em que o estudo é feito. O ***Lucro*** pode ser afectado por factores não controláveis como, por exemplo, a situação do mercado ditada pelos competidores.

Na prática torna-se difícil incluir todos os objectivos (possivelmente conflituosos) num único critério.

Por exemplo, na determinação do ***Nível Óptimo de Inventário*** de um artigo, a Função Objectivo deve incluir objectivos conflituosos do ***Departamento de Produção***, ***Departamento de Materiais*** e ***Departamento de Comercialização***.

O ***Departamento de Comercialização*** requer um nível de inventário que minimize as quebras (*penúria*) e que permita satisfazer a procura, independentemente de o ***Departamento de Produção*** poder cumprir esse requisito.

Se a função objectivo utilizada no modelo representar apenas alguns dos objectivos em conflito, obtém-se uma ***Solução Não-óptima*** (*sub-óptima*), o que pode não servir o melhor interesse de toda a organização.

Uma possível abordagem consiste em utilizar uma função objectivo que inclua os principais objectivos pesados de forma "adequada". Estes pesos traduzem a importância relativa de cada objectivo.

1.3.2.3 Simplificação dos Modelos Matemáticos

A matemática contínua é, geralmente, de aplicação mais simples do ponto de vista analítico e computacional.

A maior parte das Técnicas de Investigação Operacional lidam com variáveis contínuas.

A simplificação de um modelo matemático passa por:

- Converter variáveis discretas em variáveis contínuas
- Linearizar funções não- lineares
- Eliminar algumas condições

A solução da maior parte dos modelos de Investigação Operacional que lidam com funções não-lineares baseia-se em aproximações a funções lineares.

Quanto maior o número de condições, menos eficiente é a aplicação do algoritmo para solução do modelo. Pode, então, haver vantagem em eliminar as condições que potencialmente não restringem a solução óptima. Uma posterior verificação das condições removidas (para os valores da solução encontrada) determina a necessidade de as introduzir no modelo.

1.3.2.4 Disponibilidade de Dados e Concepção do Modelo

Qualquer que seja o grau de sofisticação e exactidão do modelo, pouco valor tem se não for suportado por dados de confiança.

Suponhamos, por exemplo, um modelo de *controle de inventário*, em que o nível de inventário de um artigo é determinado por forma a minimizar o custo conjunto total de posse de inventário (*custo de existência de inventário*) e de não satisfação de toda a procura (*custo de quebra*).

Para esse modelo, torna-se necessário estimar o custo de posse de cada unidade de inventário e o custo por cada unidade de procura não satisfeita.

O custo de posse depende de factores conhecidos (despesas de armazenamento, custo do capital, etc.), podendo considerar-se de cálculo simples.

Porém, a inclusão no custo da procura não satisfeita de um factor intangível que represente a perda de "boa-vontade" do comprador é difícil.

O modelo poderá ter que ser modificado, aceitando como objectivo o cumprimento de um limite superior para o inventário em penúria em qualquer ocasião.

1.4 Fases de um Projecto de Investigação Operacional

Um estudo de Investigação Operacional não pode (**nem deve**) ser conduzido nem controlado isoladamente pelo analista de Investigação Operacional. Embora ele possa ser um especialista em modelagem e em técnicas para solução de modelos, não pode ser um especialista em todas as áreas em que os problemas de Investigação Operacional ocorrem.

Uma equipa de Investigação Operacional deve incluir membros da organização que sejam directamente responsáveis pelas funções ou sectores em que o problema existe, bem como pela implementação e execução da solução que vier a ser recomendada.

As fases de um estudo podem ser sintetizadas em cinco pontos:

(1) - <u>Definição do Problema</u>

- Descrição exacta do objectivo do estudo
- Identificação das alternativas de decisão do sistema
- Reconhecimento das limitações e requisitos do sistema

(2) - <u>Construção do Modelo</u>

Consiste na especificação de expressões quantitativas para o objectivo e restrições do problema, em função das suas variáveis de decisão.

(3) - <u>Solução do Modelo</u>

Consiste na aplicação de algoritmos existentes ou no desenvolvimento de novos algoritmos para obtenção de uma solução óptima para o modelo.

(4) - <u>Validação do Modelo</u>

Consiste na comparação de soluções obtidas para o modelo com dados históricos do sistema, quando se trata de um sistema já existente.

Para sistemas não existentes, poder-se-á utilizar um modelo de simulação.

(5) - <u>Implementação dos Resultados Finais</u>

O objectivo de um estudo de Investigação Operacional é produzir uma solução que possa e deva ser executada. Os resultados devem ser traduzidos em instruções de operação detalhadas, em forma compreensível para as pessoas que operam e administram o sistema.

II - PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

2-Programação Matemática

2.1 Programação Linear

2.1.1 Introdução

A ***Programação Linear*** inclui uma classe de modelos de ***Programação Matemática*** relacionados com a atribuição (*alocação*) eficiente de meios (*recursos*) limitados a actividades conhecidas, com a finalidade de atingir determinado objectivo (maximização de lucro, minimização de custos, etc.).

As características distintas de um ***Modelo de Programação Linear*** são:

- Função Objectivo linear
- Condições lineares

Para além da linearidade da função objectivo e dos constrangimentos, também se assume a linearidade de combinações das equações referidas.

Por exemplo, se uma máquina executa dois artigos diferentes, calculamos o tempo total de execução adicionando os tempos dispendidos com cada produto.

Note-se, contudo, que a adição de duas substâncias que interaccionem entre si pode resultar em redução do peso ou volume relativamente à soma do peso ou volume de ambas as substancias.

Na sua ***Forma Normal*** (*standard*), o ***Modelo de Programação Linear*** tem a seguinte representação:

Função objectivo $\Rightarrow$ $Min\ F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Condições: $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

2.1.2 Representação Explícita do Problema

Outra forma de exprimir o ***Modelo de Programação Linear*** é:

$$\min \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i; \quad (i = 1, 2, \ldots., n)$$

$$x_j \geq 0; \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

com,

x_j - Quantidades

C_j - Custos unitários

2.1.3 Representação Matricial do Problema de Programação Linear

O problema de *Programação Linear* pode, também, ser expresso matricialmente, na forma

$$\text{Min / Máx} \quad \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{X}$$

s.a

$$\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{b}$$

$$\underset{\sim}{X} \geq \underset{\sim}{0}$$

com

$\underset{\sim}{C}$ - Vector de custos

$\underset{\sim}{A}$ - Matriz de coeficientes tecnológicos

$\underset{\sim}{X}$ - Vector de variáveis

2.1.4 Mínimo de uma Função Objectivo

O problema da determinação do mínimo de uma função objectivo linear torna-se trivial (desde que se conheça processo para a determinação do máximo), na medida em que:

$$\text{Máx } \underset{\sim}{C}\underset{\sim}{x} = -\min(-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{x})$$

2.1.5 Outros Tipos de Função Objectivo

<u>Quadrática</u>

Pode exprimir-se na forma:

$$C_{11}x_1^2 + C_{22}x_2^2 + 2C_{12}x_1x_2$$

Tem aplicação, por exemplo, em problemas em que os "custos" incluídos na *Função Objectivo* dependem da quantidade a que estão associados.

<u>Separável</u>

Surge quando a *Função Objectivo* pode ser expressa com base num conjunto de funções lineares das suas variáveis.

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{f}_1(x_1) + \mathrm{f}_2(x_2) + \ldots + \mathrm{f}_n(x_n)$$

Estocástica

Os custos, a procura, os níveis de recursos disponíveis podem não ser valores determinísticos, mas sim modelados como variáveis aleatórias provenientes de uma determinada *Função de Probabilidade*. Um possível método de solução consiste em utilizar as esperanças matemáticas desses custos, procura, disponibilidades, etc.

Razão ("*Ratio*")

Quando o objectivo a optimizar corresponde, por exemplo, a um *Índice de Produção*, a função objectivo traduz-se numa fracção da forma:

$$\frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n}$$

Em resumo:

Tipo de Função Objectivo	Tipo de Expressão que traduz a Função Objectivo
Linear	$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$
Quadrática	$F = C_{11}x_1^2 + C_{22}x_2^2 + 2C_{12}x_1x_2$
Separável	$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$
Estocástica	Utilizar a Esperança Matemática dos parâmetros estocásticos
Razão	$F = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n}$

2.1.6 Exemplo de um Problema de Programação Linear

2.1.6.1 Enunciado

Iremos introduzir alguns conceitos de *Programação Linear* com base num problema-tipo que designaremos por ***Problema de Produção***.

Considere-se uma empresa que produz dois tipos de artigos, ***Artigo 1*** e ***Artigo 2***, respectivamente.

A produção destes artigos requer três tipos diferentes de recursos (***Material, Tempo-Máquina*** e ***Mão de Obra***).

O nível de recursos disponíveis, o consumo de recursos por cada unidade de cada um dos artigos produzidos, bem como o ***Lucro Líquido*** obtido da venda de cada unidade dos artigos estão sintetizados na tabela.

Admitimos que o objectivo da Gestão corresponde à maximização do seu lucro total, e que pretende saber qual o *Plano de Produção* que cumpre esse objectivo.

	Produto 1	Produto 2	Disponibilidade
Material	*5*	*4*	*200*
Tempo-Máquina	*4*	*6*	*230*
Tempo-Homem	*2*	*1*	*70*
Lucro Unitário	*10*	*9*	

2.1.6.2 Formulação

Para formulação do problema, devemos começar por definir as suas *Variáveis de Decisão* (incógnitas do problema).

Vamos adoptar as seguintes variáveis:

x_1 - Quantidade a produzir do produto 1

x_2 - Quantidade a produzir do produto 2

Função objectivo $x_0 = \text{Máx } 10\,x_1 + 9\,x_2$

Condições:

	$5\,x_1 + 4\,x_2 \leq 200$	Material
Forma	$4\,x_1 + 6\,x_2 \leq 230$	Tempo - Máquina
canónica	$2\,x_1 + x_2 \leq 70$	Tempo - Homem
	$x_1, x_2 \geq 0$	

2.1.6.3 Solução Gráfica do Problema

Dado que o problema inclui duas *Variáveis de Decisão*, podemos fazer a sua representação no plano.

Podemos representar as condições como zonas limitadas pelas rectas

$$5\,x_1 + 4\,x_2 = 200$$
$$4\,x_1 + 6\,x_2 = 230$$
$$2\,x_1 + x_2 = 70$$

e pelos eixos (x_1, x_2).

Não existe nenhum ponto para o qual se verifiquem simultaneamente as três condições.

Na **Figura-2.1**, a tracejado, podemos observar a ***Região de Soluções Válidas***. Qualquer ponto-solução pertencente a esta região obedece ao conjunto de condições (e às ***Condições de Não-Negatividade***).

A ***Direcção da Função de Custo*** pode ser obtida traçando a recta da função objectivo relativa a determinado valor dessa função, e deslocando-a paralelamente a si mesma.

Veremos que um processo de atingir a ***Solução Óptima*** consiste em caminhar de vértice em vértice, ao longo das linhas que representam as condições.

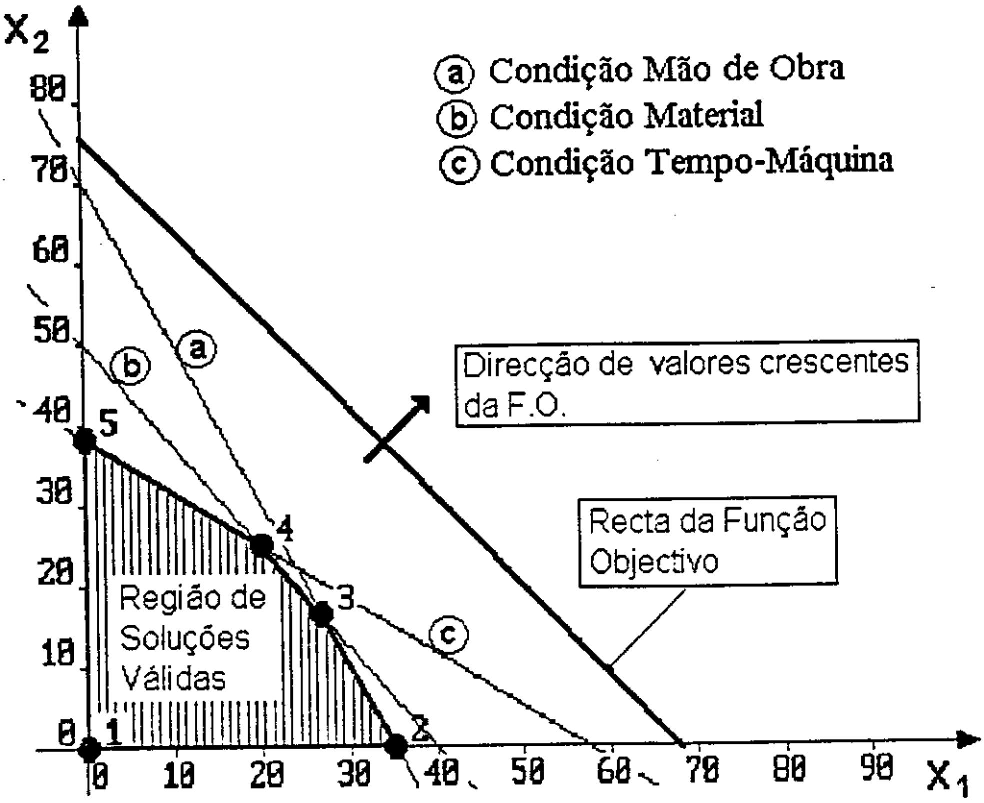


Figura-2.1

O processo algorítmico que iremos introduzir oportunamente é análogo ao procedimento de um alpinista que, em nevoeiro absoluto, munido de um altímetro, procura atingir o cume de uma montanha. Admitindo que não há "covas" (a superfície é ***convexa***), o alpinista dá um passo em cada direcção, e verifica se o altímetro indica subida ou descida. Assim, ele decide que direcção oferece o maior declive (potencial) e desloca-se nessa direcção.

Na **Figura-2.1**, os vértices do polígono que representa a ***Região de Soluções Válidas*** (pontos em que duas condições se verificam para a igualdade simultaneamente) chamam-se ***Soluções Válidas de Base***.

Podemos transformar as restrições relativas aos recursos disponíveis em igualdades, introduzindo novas variáveis, a que chamaremos ***Variáveis de Folga***. No presente exemplo, as variáveis de folga irão corresponder a :

- Material não utilizado
- Horas-Homem não utilizadas
- Horas-Máquina não utilizadas

Naturalmente, estas ***Variáveis de Folga*** devem ser positivas ou nulas.

Assim, obtemos:

Restrições

$$\begin{array}{llllllll} \text{Forma} & 5\,x_1 & + & 4\,x_2 & + x_3 & & & = 200 \\ \text{Normal} & 4\,x_1 & + & 6\,x_2 & & + x_4 & & = 230 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & & & + x_5 & = 70 \end{array}$$

$$\text{Com } x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

A função objectivo passará a ser expressa, também, em função das variáveis de folga:

$$\text{Máx } 10.\,x_1 + 9.\,x_2 + 0.\,x_3 + 0.\,x_4 + 0.x_5$$

Os coeficientes nulos na função objectivo associados às variáveis de folga traduzem o facto de a não utilização da totalidade dos recursos não implicar qualquer custo adicional.

O problema passou a ser definido por três equações a cinco incógnitas. O número possível de combinações de sistemas definidos (atribuindo valor nulo a duas variáveis e resolvendo o resultante problema de três equações a três incógnitas) será

$$C_3^5 = 10$$

e nem todas as soluções pertencem à *Região de Soluções Válidas.*

2.1.6.4 Solução Óptima do Problema por Redução

No ***Poliedro de Soluções Válidas***, os vértices são intersecções de pares de equações de restrição.

Para a solução gráfica desenvolvida, as coordenadas dos vértices são:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1 - (	0,	0,	200,	230,	70)
2 - (	0,	38.3,	46.7,	0,	31.7)
3 - (	20,	25,	0,	0,	5)
4 - (	26.7,	16.7,	0,	23.2,	0)
5 - (	35,	0,	25,	90,	0)

A *Função Objectivo* apresenta o seu valor máximo para o ***Vértice 3***, *i.e.* a ***Solução Óptima*** é:

$$x_1 = 20,\ x_2 = 25$$
$$x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5$$

sendo o valor da Função Objectivo $x_0 = 425$

No sentido de generalizarmos alguns aspectos da formulação de *Programação Linear* que temos vindo a apresentar, devemos observar que, após a introdução das variáveis de folga, o problema se traduz num conjunto de ***n*** equações e ***m*** variáveis, com ***m> n.***

Das ***m*** variáveis, ***n*** serão positivas e ***(m - n)*** nulas.
Às ***n*** variáveis positivas chamamos ***Variáveis de Base*** ou ***Básicas***.
Às ***(m - n)*** variáveis nulas chamamos ***Variáveis Não-Básicas***.

Veremos que, cada ***Solução Válida de Base*** (vértice do poliedro de soluções válidas) difere da anterior pela troca de uma variável básica por uma variável não-básica.

Para o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 200 \\ 4x_1 + 6x_2 \quad + x_4 \quad &= 230 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 &= 70 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Uma possível solução é:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= 0 \\ x_3 &= 200 \\ x_4 &= 230 \\ x_5 &= 70 \end{aligned}$$

Ou seja, a solução corrente é:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (0, & 0, & 200, & 230, & 70) \end{array}$$

Essa solução é obtida directamente, se exprimirmos as variáveis básicas em função das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} x_3 &= 200 - 5x_1 - 4x_2 \\ x_4 &= 230 - 4x_1 - 6x_2 \\ x_5 &= 70 - 2x_1 - x_2 \end{aligned} \qquad \begin{cases} x_1 \text{ e } x_2 & \text{n / básicas} \\ x_3,\ x_4 \text{ e } x_5 & \text{básicas} \end{cases}$$

A *Função Objectivo* deverá ser, também, expressa em função das variáveis não básicas.

$$\text{máx } 10x_1 + 9x_2$$

A ***Solução Válida de Base*** corrente é (0, 0, 200, 230, 70).
O valor corrente da ***Função Objectivo*** é zero.

Será esta a melhor solução (*Solução Óptima*)?

A resposta a esta questão requer a análise da *Função Objectivo* expressa em função das *Variáveis Não-Básicas*. Assim, vemos que:

- Aumentar ***1*** unidade em x_1 aumenta o valor da *Função Objectivo* em ***10*** unidades monetárias.
- Aumentar ***1*** unidade em x_2 aumenta o valor da *Função Objectivo* em ***9*** unidades monetárias.

Tanto x_1 como x_2 poderão melhorar o valor da função objectivo se passarem a *Variáveis Básicas*. Optaremos por transformar em *Variável Básica* a *Variável Não-Básica* que possui maior "potencial" para melhorar o valor da *Função Objectivo, i.e.* x_1.

É necessário decidir que valor x_1 pode tomar. Observando a primeira equação, vemos que:

$$x_3 = 200 - 5x_1 - 4x_2$$

- x_1 pode aumentar até $200/5 = 40$ (mantendo a condição de $x_3 \geq 0$)
- para esse valor de x_1, x_3 passa a *Variável Não-Básica*
- o termo $4x_2$ é nulo, pois x_2 é *Variável Não-Básica*

Mas, vejamos o que acontece ás outras equações se x_1 assumir o valor ditado pela primeira condição:

- Para a 2ª equação

$$x_4 = 230 - 4 * 40 - 0 = 70$$

e x_4 mantém-se na base.

- Para a 3ª equação

$$x_5 = 70 - 2 * 40 - 0 = -10$$

o que viola a condição de não-negatividade, pois $x_5 < 0$.

Para que esse problema não exista, é a terceira equação que deve ditar o valor máximo para x_1, *i.e.*:

$x_1 = 70/2 = 35$, passando x_5 a não-básica

O processo é equivalente a exprimir x_1, x_3 e x_4 em função x_2 e x_5 (novas *Variáveis Não-Básicas*):

$$x_1 = 35 - \tfrac{1}{2}x_5 - \tfrac{1}{2}x_2 \quad \text{(a partir de } x_5 = 70 - 2x_1 - x_2\text{)}$$
$$x_3 = 200 + \tfrac{5}{2}x_5 + \tfrac{5}{2}x_2 - 175 - 4x_2$$
$$= 25 + \tfrac{5}{2}x_5 - \tfrac{3}{2}x_2$$
$$x_4 = 230 - 140 + 2x_5 + 2x_2 - 6x_2$$
$$= 90 + 2x_5 - 4x_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 35 - \tfrac{1}{2}x_5 - \tfrac{1}{2}x_2 \\ x_3 &= 25 + \tfrac{5}{2}x_5 - \tfrac{3}{2}x_2 \\ x_4 &= 90 + 2x_5 - 4x_2 \end{aligned}}$$

A solução corrente é:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(35,	0,	25,	90,	0)

Para a função objectivo temos:

$$\max\ (35 - \tfrac{1}{2}x_5 - \tfrac{1}{2}x_2) * 10 + 9x_2 =$$
$$= \max\ 350 - 5x_5 - 5x_2 + 9x_2 =$$
$$= \max\ 350 - 5x_5 + 4x_2$$

Podemos recomeçar o processo de análise inspeccionando a *Função Objectivo*:

- Aumentar *1* unidade em x_5 diminui o valor da *Função Objectivo* em *5* unidades monetárias.

- Aumentar *1* unidade em x_2 aumenta o valor da *Função Objectivo* em *4* unidades monetárias.

Decidimos fazer entrar x_2 na base. A variável que deve abandonar a base é determinada pela equação que limita o valor máximo que x_2 pode tomar.

- Para a 1ª equação

$$x_2 \leq \frac{35}{\frac{1}{2}} = 70$$

- Para a 2ª equação

$$x_2 \leq \frac{25}{\frac{3}{2}} = \frac{50}{3} \cong 16.6$$

- Para a 3ª equação

$$x_2 \leq \frac{90}{4} = 22.5$$

A equação condicionante é, portanto, a 2ª, e deverá ser x_3 a abandonar a base (trocando com x_2).

A partir da 2ª equação, podemos definir x_2 em função de x_3:

$$x_3 = 25 + \frac{5}{2}x_5 - \frac{3}{2}x_2$$
$$2x_3 = 50 + 5x_5 - 3x_2$$
$$3x_2 = 50 - 2x_3 + 5x_5$$

$$\boxed{x_2 = \frac{50}{3} - \frac{2}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_5}$$

O sistema de equações pode, então, ser rescrito:

$$x_1 = \frac{80}{3} - \frac{4}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_3$$
$$x_2 = \frac{50}{3} + \frac{5}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_3$$
$$x_4 = \frac{70}{3} - \frac{14}{3}x_5 + \frac{8}{3}x_3$$

A solução corrente é:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (\frac{80}{3}, & \frac{50}{3}, & 0, & \frac{70}{3}, & 0) \end{array}$$

A função objectivo passa a ser expressa em função de x_3 e x_5:

(1) $$\max \frac{1250}{3} + \frac{5}{3}x_5 - \frac{8}{3}x_3$$

e o valor corrente da função objectivo é, portanto:

$$x_0 = \frac{1250}{3}$$

A continuação do processo leva-nos a concluir que x_5 deve passar a *Variável Básica.*

O limite ao valor de x_5 para cada uma das equações é:

- $x_5 \leq 20$
- $x_5 \geq -10$ (irrelevante, pois $x_j \geq 0$)
- $x_5 \leq 5$

É, portanto, x_5 a entrar na base e x_4 a sair da base.

$$x_1 = 20 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$$
$$x_2 = 25 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{5}{14}x_4$$
$$x_5 = 5 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{3}{14}x_4$$

Para a função objectivo temos:

(2) $$\max 425 - \frac{12}{7}x_3 - \frac{5}{14}x_4$$

e um valor corrente de $x_0 = 425$.

É fácil ver que não é possível melhorar este valor da função objectivo.

A ***Solução Óptima*** é:

$$x_1 = 20$$
$$x_2 = 25$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 5$$

Para finalizar, podemos verificar as restrições do problema para a solução encontrada:

- **Matéria Prima**

$$5x_1 + 4x_2 = 5*20 + 4*25 = 200 \leq 200$$

A solução utiliza a totalidade da *Matéria Prima* disponível.

- **Tempo-Máquina**

$$4x_1 + 6x_2 = 4*20 + 6*25 = 230 \leq 230$$

A solução utiliza a totalidade do *Tempo-Máquina* disponível.

- **Mão de Obra**

$$2x_1 + x_2 = 2*20 + 25 = 75 \leq 80$$

A solução não utiliza a totalidade da *Mão de Obra* disponível. A folga de *5* unidades corresponde ao valor de x_5.

A verificação agora efectuada para a solução final poderia ter sido aplicada a cada um dos passos do processo para confirmação.

O ganho obtido para a *Função Objectivo* numa iteração também pode ser sujeito a confirmação. Na expressão *(1)*, tínhamos para a *Função Objectivo*:

$$\max \frac{1250}{3} + \frac{5}{3}x_5 - \frac{8}{3}x_3$$

o que representava um valor corrente de $x_0 = \dfrac{1250}{3}$ unidades monetárias.

Verificámos, nessa iteração, que x_5 oferecia um potencial de $5/3$ de unidade monetária para a *Função Objectivo* por cada unidade colocada na base. Nessa iteração foi possível aumentar em *5* unidades o valor de x_5.

O aumento no valor da *Função Objectivo* deveria ser, portanto, de

$$\frac{5}{3}*5 = \frac{25}{3} \text{ unidades monetárias}$$

e o novo valor da *Função Objectivo* deveria ser

$$\frac{1250}{3} + \frac{25}{3} = \frac{1275}{3} = 425$$

A expressão *(2)* coincide com este resultado.

2.1.7 O Algoritmo do SIMPLEX

2.1.7.1 Construção de um Quadro Válido de Base

Ainda para o ***Problema de Produção*** apresentado em **2.1.6**, com a correspondente ***Forma Canónica***:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \text{Máx } 10\,x_1 + 9\,x_2 \\
5\,x_1 + 4\,x_2 &\leq 200 \\
4\,x_1 + 6\,x_2 &\leq 230 \\
2\,x_1 + x_2 &\leq 70 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

podemos construir o ***Quadro-I***.

Quadro-I

Todas as Variáveis (de Decisão e de Folga)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Variáveis Básicas	x_3	*5*	*4*	*1*	*0*	*0*	*200*
	x_4	*4*	*6*	*0*	*1*	*0*	*230*
	x_5	*2*	*1*	*0*	*0*	*1*	*70*
	W_j	*-10*	*-9*	*0*	*0*	*0*	*0*

A parte central do quadro não é mais do que uma representação matricial do sistema de equações (matriz $\underline{A}$).

A última linha (W_j) inclui os coeficientes da função objectivo, mas com sinal trocado (*problema de maximização*).

A *Coluna* $\underline{P}_0$ inclui as disponibilidades relativas a cada um dos recursos.

Na parte superior do quadro são colocados os identificadores das ***Variáveis de Decisão*** e das ***Variáveis de Folga***.

Ao lado esquerdo do quadro são colocados os identificadores das *variáveis de folga* para constituírem uma ***Base*** de partida para a solução do problema. Veremos que para condições do *tipo menor ou igual* ("≤"), a colocação na *base* da correspondente ***Variável de Folga*** cumpre as condições necessárias à produção de uma ***Solução Válida de Base***.

Existe no quadro informação suficiente para a obtenção de uma primeira ***Solução Válida***.

No procedimento algorítmico que iremos descrever consideramos apenas formulações para problemas de *maximização da Função Objectivo*. Embora seja possível utilizar um procedimento alternativo para problemas de minimização, optou-se por converter *formulações de mínimo* em *formulações de máximo*, com base na transformação

$$\text{máx }(C_1x_1+\ldots+C_nx_n)=-\{\text{mín}(-C_1x_1-\ldots-C_nx_n)\}$$

2.1.7.2 Características do Quadro SIMPLEX

1. Em cada *linha do quadro* (equação) existe uma variável que só nela possui *coeficiente* não-nulo.
2. As *variáveis* referidas em *1.* têm *coeficiente* nulo na *linha* da *Função Objectivo.*
3. Existe uma matriz identidade embebida na matriz do sistema de equações do quadro.
4. A existência da estrutura referida em *1.*, *2.* e *3.* e, ainda, o facto de os valores inscritos na coluna P_0 serem não-negativos é suficiente para determinar a ***Solução Válida de Base*** corrente:

$$x_3=200$$
$$x_4=230$$
$$x_5=\ 70$$
$$x_1=x_2=0$$

O custo dessa solução é, evidentemente, nulo e corresponde a não desenvolver qualquer actividade.

2.1.7.3 O Algoritmo

O ***Algoritmo do Simplex*** cumpre dois critérios:

- **Critério de Validade**
  Qualquer solução deve verificar as restrições do problema e, ainda, as condições de não-negatividade.

- **Critério de Optimabilidade**
  O algoritmo obtém a solução óptima quando todos os coeficientes da *linha da Função Objectivo* forem positivos.

Procedimento:

1. Examinar as entradas na linha W_j. Se não houver nenhum *coeficiente negativo*, o algoritmo terminou, e o problema está resolvido. Se houver mais do que um *coeficiente negativo*, escolhemos o *coeficiente* mais negativo (o que oferece o maior ***Ganho Potencial***). A escolha do elemento mais negativo não é essencial, mas oferece potencial para tornar o algoritmo mais rápido.

2. A *variável* na *coluna* correspondente ao *coeficiente* seleccionado vai entrar na base, permutando com outra *variável*, actualmente na *base*, que passará a *não--básica*.

3. A selecção da *variável* que deve abandonar a *base* é feita observando a razão entre os elementos da *coluna* P_0 e os correspondentes elementos da *coluna* correspondente à *variável* seleccionada para entrar na *base*. Selecciona-se a *linha* do quadro correspondente à menor razão. Como é evidente, só tem significado considerar as razões de denominador positivo.

Quadro - II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	Razão	
x_3	5	4	1	0	0	200	200/5	
x_4	4	6	0	1	0	230	230/4	
x_5	$\boxed{2}$	1	0	0	1	70	70/2	⇐ Linha Pivôt
W_j	-10	-9	0	0	0	0		
	⇑							
	Coluna Pivôt							

Coluna Pivôt é a *coluna* correspondente ao *coeficiente* mais negativo da *Função Objectivo*, e que identifica a variável que deve entrar na *base*.

Linha Pivôt é a *linha* do quadro que produz a menor razão, e que identifica a *variável* que deve abandonar a *base*.

Elemento Pivôt é o *elemento* do quadro no cruzamento da ***Linha Pivôt*** com a ***Coluna Pivôt*** (elemento marcado no *Quadro - II*).

Para o exemplo, x_1 deve entrar na *base*, e x_5 deve abandonar a *base*.

4. Reduz-se o ***Elemento Pivôt*** a *1*, dividindo toda a ***Linha Pivôt*** pelo ***Elemento Pivôt***. Note-se que as *linhas* do quadro representam equações ordinárias que podem ser manipuladas como tal.

5. Transforma-se o quadro por forma a que na ***Coluna Pivôt*** o único elemento não nulo seja o colocado na posição do ***Elemento Pivôt***. Isto é possível multiplicando a ***Linha Pivôt*** reduzida (depois de dividida pelo *Elemento Pivôt*) por factores adequados e somando-a às outras *linhas* do quadro.

Aplicando ao ***Problema de Produção***, temos:

Quadro - III

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	
x_3	0	$4-5/2$	$1-0$	$0-0$	$0-5/2$	$200-5*35$	
x_4	0	$6-4/2$	$0-0$	$1-0$	$0-4/2$	$230-4*35$	
x_1	$\boxed{1}$	$1/2$	0	0	$1/2$	35	⇐ Linha Pivôt
W_j	0	$-9+10/2$	$0+0$	$0+0$	$0+10/2$	$0+35*10$	

⇑

Coluna Pivôt

Note-se que x_1 substituiu x_5 ao lado esquerdo do quadro, passando a pertencer à lista de ***Variáveis Básicas***.

Executando os cálculos indicados no **Quadro-III**, obtemos:

Quadro - IV

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
x_3	0	3/2	1	0	$-5/2$	25
x_4	0	4	0	1	-2	90
x_1	1	1/2	0	0	1/2	35
W_j	0	-4	0	0	5	350

A solução após esta primeira iteração é:

$x_3 = 25 \quad x_2 = 0$

$x_4 = 90 \quad x_5 = 0$

$x_1 = 35$

Função Objectivo $\Rightarrow x_0 = 350$

e corresponde ao ***Ponto 5*** da representação gráfica. Três das *variáveis* são *não-nulas* (uma por cada equação do quadro).

Seleccionemos o novo ***Elemento Pivôt***

Quadro - V

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	Razão	
x_3	0	$\boxed{3/2}$	1	0	$-5/2$	25	50/3	⇐ Linha Pivôt
x_4	0	4	0	1	-2	90	90/4	
x_1	1	1/2	0	0	1/2	35	70	
W_j	0	-4	0	0	5	350		

⇑

Coluna Pivôt

Nesta *iteração* x_2 deve entrar na *base* e x_3 deve abandonar a *base*.

Quadro - VI

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	Razão	
x_2	0	1	2/3	0	−5/3	50/3	−10	
x_4	0	0	−8/3	1	$\boxed{14/3}$	70/3	+5	⇐ Linha Pivôt
x_1	1	0	−1/3	0	4/3	80/3	+20	
W_j	0	0	8/3	0	−5/3	1250/3		

⇑

Coluna Pivôt

Nesta *iteração* x_5 deve entrar na *base* e x_4 deve abandonar a *base*.

Quadro - VII

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
x_2	0	1	−6/21	5/14	0	25
x_5	0	0	−4/7	3/14	1	5
x_1	1	0	3/7	−2/7	0	20
W_j	0	0	12/7	5/14	0	425

Para este quadro já não há *coeficientes* negativos na *linha da Função Objectivo*. O algoritmo terminou.

O *Valor Óptimo* da função objectivo é $x_0 = 425$

A *Solução Óptima* é

$$x_1 = 20 \quad x_5 = 5 \quad x_4 = 0$$
$$x_2 = 25 \quad x_3 = 0$$

2.1.7.4 Características Particulares do Problema

2.1.7.4.1 Introdução

1. O problema possuía uma *solução válida de base* de partida evidente, que consistia em colocar na base as *Variáveis de Folga*. Isto foi possível porque todas as restrições do problema eram do tipo *menor ou igual* ("$\leq$").

2. Não houve ambiguidade na selecção das *variáveis* que deveriam passar a *básicas* em cada iteração. Se nalguma iteração mais do que uma *variável* oferecer o mesmo *ganho potencial*, a selecção é indiferente. Qualquer *variável* com *coeficiente negativo* na *Função Objectivo* é candidata a entrar na *base*.

3. Não houve ambiguidade na selecção da *variável* que deveria abandonar a *base* em cada iteração.

2.1.7.4.2 Degenerescência em Problemas de Programação Linear

Para o enunciado do ***Problema de Produção*** vamos admitir que a disponibilidade de mão de obra era aumentada para ***80*** unidades.

A formulação do problema altera-se, então, para:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \text{Máx } 10\,x_1 + 9\,x_2 \\
5\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 &= 200 \\
4\,x_1 + 6\,x_2 \quad + x_4 &= 230 \\
2\,x_1 + \ x_2 \quad\quad + x_5 &= 80 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

podemos construir o respectivo quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	Razão	
x_3	*5*	*4*	*1*	*0*	*0*	*200*	$200/5=40$	$\Leftarrow$
x_4	*4*	*6*	*0*	*1*	*0*	*230*	$230/4$	
x_5	*2*	*1*	*0*	*0*	*1*	*80*	$80/2=40$	$\Leftarrow$
W_j	*-10*	*-9*	*0*	*0*	*0*	*0*		

Vemos que obtemos razões iguais para a *linha* de x_3 e *linha* de x_5.

A escolha indiferente de uma das variáveis nestas condições pode fazer o algoritmo entrar em ciclo, não convergindo para a *Solução Óptima* pretendida.

A solução que iremos adoptar consiste em criar uma pequena perturbação em cada um dos recursos envolvidos no problema da degenerescência.

Assim, em vez de considerarmos que dispomos de ***200*** unidades de *Matéria Prima*, consideramos que dispomos de *(200+*ε *)* unidades. Em vez de considerarmos que dispomos de ***80*** unidades de *Mão de Obra*, consideramos que dispomos de *(80+*ε *)* unidades.

A razão para cada uma das linhas passa a ser:

- Linha de $x_3 \Rightarrow \dfrac{(200+\varepsilon)}{5} = 40 + \dfrac{\varepsilon}{5}$
- Linha de $x_5 \Rightarrow \dfrac{(80+\varepsilon)}{2} = 40 + \dfrac{\varepsilon}{2}$

e a *linha* de x_3 oferece-nos a menor razão devendo, portanto, x_3 sair da *base*.

Este tipo de procedimento equivale a seleccionar a razão de maior divisor.

Utilizando esta regra, temos para os sucessivos quadros do problema:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	
x_3	$\boxed{5}$	4	1	0	0	200	⇐
x_4	4	6	0	1	0	230	
x_5	2	1	0	0	1	80	
W_j	-10	-9	0	0	0	0	
	⇑						

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
x_1	1	4/5	1/5	0	0	40
x_4	0	14/5	−4/5	1	0	70
x_5	0	−3/5	−2/5	0	1	0
W_j	0	−1	2	0	0	400

Neste caso, a solução obtida ao fim da *1ª iteração* é:

$$x_1 = 40 \quad x_4 = 70$$
$$x_2 = 0 \quad x_5 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Para esta solução, verificamos que em vez de *2 Variáveis* nulas, obtivemos *3 Variáveis* nulas. Para um problema com $m = 5$ *variáveis* e $n = 3$ *equações*, deveríamos ter *3 Variáveis Básicas* (maiores que zero) e $m - n = 2$ *Variáveis Não-Básicas* (iguais a zero). Consideramos que a *variável* x_5 está na *base* ao nível zero.

Nestas condições, diz-se que o *Simplex **degenerou***, ou que o problema era um ***Problema Degenerado***.

A **Figura-2.2** ilustra graficamente, o significado desta situação de *degenerescência*:

É fácil ver que a restrição representada pela *3ª recta* não constitui uma *restrição* ao sistema, pois a *1ª recta* é mais restritiva.

Em $x_1 = 40$, $x_2 = 0$, três rectas que delimitam o espaço de soluções têm intersecção comum (*Vértice 2*).

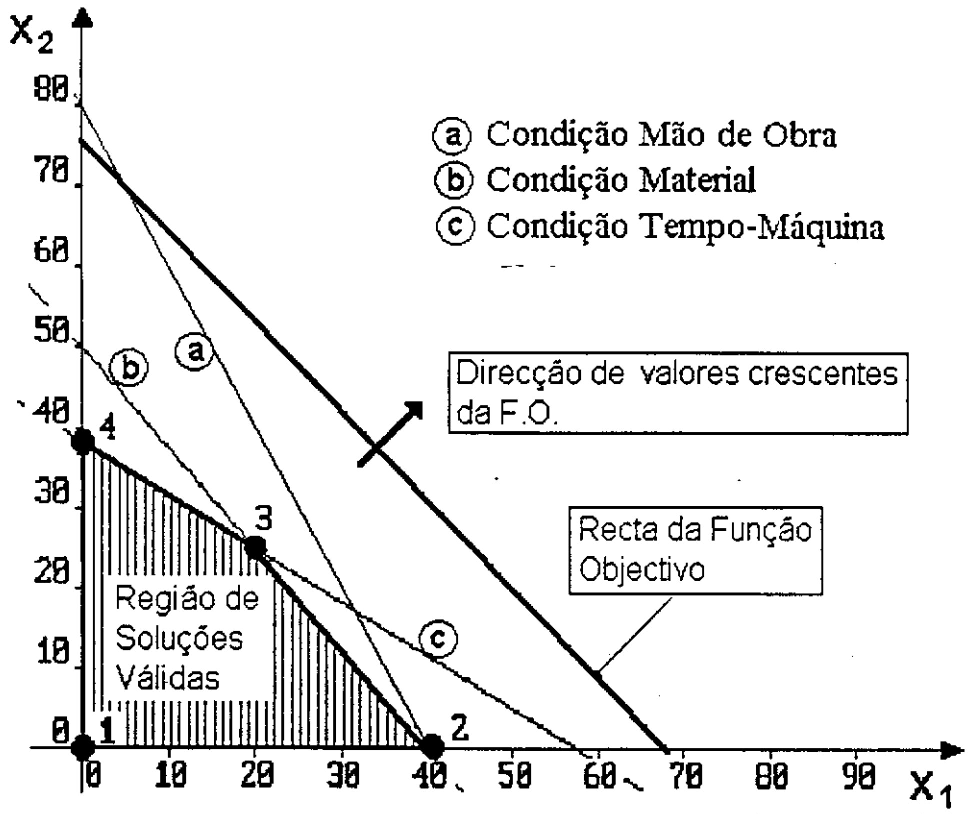


Figura-2.2

2.1.7.4.3 Inequações do Tipo Maior ou Igual (≥)

É evidente que apenas um reduzido número de problemas poderá ser formulado apenas com recurso a inequações do tipo *menor ou igual.*

Com base num exemplo numérico, vejamos o que acontece quando procuramos aplicar a mesma metodologia que definimos para problemas com inequações do tipo *menor ou igual.*

<u>Exemplo Numérico:</u>

$$\begin{aligned} &\min\ 200y_3 + 230y_4 + 70y_5 \\ &\text{s.a}\ \ 5y_3 + 4y_4 + 2y_5 \geq 10 \\ &\qquad 4y_3 + 6y_4 + y_5 \geq 9 \\ &\qquad y_3,\ y_4,\ y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Transformemos as inequações em equações introduzindo as necessárias *Variáveis de Folga* (y_1 e y_2). Note-se que estas *variáveis* são não-negativas, e que devem ser subtraídas ao lado esquerdo das inequações para as transformar em equações.

$$\begin{aligned} -y_1 \quad\quad + 5y_3 + 4y_4 + 2y_5 &= 10 \\ -y_2 + 4y_3 + 6y_4 + y_5 &= 9 \end{aligned}$$

Tentemos construir o quadro simplex para estas equações:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	P_0
y_1 ?	-1	0	5	4	2	10
y_2 ?	0	-1	4	6	1	9
W_j	0	0	200	230	70	0

Tal como o problema está formulado, não nos é possível obter uma *solução de base* com $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$.

Note-se que y_1 e y_2 expressos em função das *variáveis* indicadas como *não-básicas* no quadro são:

$$y_1 = -10 + 5y_3 + 4y_4 + 2y_5$$
$$y_2 = -9 + 4y_3 + 6y_4 + y_5$$

e, portanto, o quadro construído não constitui uma *base válida*, por não obedecer à *condição de não-negatividade*.

Vamos referir dois métodos para solucionar este problema, respectivamente designados por ***Método do Grande "M"*** e ***Técnica das Duas Fases***.

2.1.7.4.3.1 O Método do "Grande M"

O ***Método do "Grande M"*** (***Big M***) pretende alterar a formulação do problema original por forma a permitir obter um *Quadro Válido de Base* com uma estrutura que possibilite a identificação fácil de uma *Solução Válida de Base* inicial. Este problema modificado deve produzir (existindo) uma *Solução Óptima* igual à do problema original.

Vamos introduzir ***Variáveis Artificiais*** no problema associadas às inequações do *tipo maior ou igual*.

Assim, para as duas equações:

$$-y_1 + 5y_3 + 4y_4 + 2y_5 + z_1 = 10$$
$$-y_2 + 4y_3 + 6y_4 + y_5 + z_2 = 9$$

Para forçar as ***Variáveis Artificiais*** z_1 e z_2 a serem nulas na solução final, atribuímos-lhes um custo muito elevado na *Função Objectivo* (Problema de Mínimo).

Se na solução final $z_1 = 0$ e $z_2 = 0$, as equações são equivalentes às da formulação original.

A *Função Objectivo* do problema modificado toma a forma:

$$\min\ 200y_3 + 230y_4 + 70y_5 + Mz_1 + Mz_2$$

Nesta expressão, ***M*** representa um ***valor muito elevado***. Assim, para se obter um mínimo, z_1 e z_2 serão (sendo possível) forçados a serem nulos.

Tracemos o quadro relativo ao problema reformulado:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	P_0
z_1	-1	0	5	4	2	1	0	10
z_2	0	-1	4	6	1	0	1	9
W_j	0	0	200	230	70	M	M	0

O quadro não corresponde à forma exigida pelo *simplex*, porque os *coeficientes na função objectivo* correspondentes a *variáveis* na *base* não são nulos (*coeficientes* de z_1 e de z_2).

Podemos, utilizando as *linhas* do quadro, eliminar esses *coeficientes*. As *linhas* do quadro representam equações ordinárias, e ***M*** pode ser tratado como qualquer valor numérico.

Multiplicando a *1ª linha* do quadro por ***(-1)*** e somando-a à *linha* da *Função Objectivo* eliminamos o *coeficiente* nessa *linha* relativo à *coluna* de z_1.

Multiplicando a *2ª linha* do quadro por ***(-1)*** e somando-a à *linha* da *Função Objectivo* eliminamos o *coeficiente* nessa *linha* relativo à *coluna* de z_2.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	P_0
z_1	-1	0	5	4	2	1	0	10
z_2	0	-1	4	6	1	0	1	9
W_j	0	0	200	230	70	M	M	0
	$+M$	$+0$	$-5M$	$-4M$	$-2M$	$-M$	$+0$	$-10M$
	$+0$	$+M$	$-4M$	$-6M$	$-M$	$+0$	$-M$	$-9M$
	M	M	$200-9M$	$230-10M$	$70-3M$	0	0	$-19M$

É fácil verificar que o valor da *Função Objectivo* está correcto

$$\begin{aligned} \text{F.O.} &= 200y_3 + 230y_4 + 70y_5 + Mz_1 + Mz_2 = \\ &= 10M + 9M = 19M \end{aligned}$$

O facto de o ***Valor da Função Objectivo*** inscrito no quadro ter o sinal negativo advém de estarmos a resolver o problema de $\left\{\text{máx}\left[-f(\underline{x})\right]\right\}$.

Prosseguindo na execução do algoritmo,

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	P_0	
z_1	-1	0	5	4	2	1	0	10	
z_2	0	-1	4	$\boxed{6}$	1	0	1	9	$\Leftarrow$
W_j	M	M	$200-9M$	$230-10M$	$70-3M$	0	0	$-19M$	
				$\Uparrow$					

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	P_0	
z_1	-1	$2/3$	$\boxed{7/3}$	0	$4/3$	1	$-2/3$	4	$\Leftarrow$
y_4	0	$-1/6$	$2/3$	1	$1/6$	0	$1/6$	$3/2$	
W_j	0	$230/6$	$140/3$	0	$190/6$	0	$-230/6$	-345	
	M	$-2M/3$	$-7M/3$	0	$-4M/3$	0	$5M/3$	$-4M$	
			$\Uparrow$						

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	P_0
y_3	$-3/7$	$2/7$	1	0	$4/7$	$3/7$	$-2/7$	$12/7$
y_4	$2/7$	$-5/14$	0	1	$-3/14$	$-2/7$	$5/14$	$5/14$
W_j	20	25	0	0	5	-20	25	-425
	0	0	0	0	0	$\underbrace{+M}_{(>0)}$	$\underbrace{+M}_{(>0)}$	0

Obtivemos, portanto, a ***Solução Óptima***

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = 0 & z_1 = 0 \\
y_2 = 0 & z_2 = 0 \\
y_3 = 12/7 & \\
y_4 = 5/14 & \\
y_5 = 0 &
\end{array}
$$

Devemos, ainda, notar que após z_2 abandonar a *base* a *coluna* correspondente poderia ter sido eliminada do quadro, pois nenhuma *solução válida* poderá ter $z_2 > 0$.

Para a ***Função Objectivo*** obtivemos o valor $x_0 = -(-425) = 425$.

O sinal da *função objectivo*, no quadro, aparece trocado porque em vez de resolvermos

$$\text{mín } 200y_3 + 230y_4 + 70y_5$$

resolvemos

$$\text{máx } -200y_3 - 230y_4 - 70y_5$$

Referência à Dualidade

O primeiro problema que resolvemos, designado por ***Problema de Produção***, tinha a formulação:

Forma Canónica

$$\begin{aligned} \text{máx } & 10x_1 + 9x_2 \\ & 5x_1 + 4x_2 \le 200 \\ & 4x_1 + 6x_2 \le 230 \\ & 2x_1 + \ \ x_2 \le 70 \\ & x_1, \ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Forma Normal

$$\begin{aligned} \text{máx } & 10x_1 + 9x_2 \\ & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\qquad = 200 \\ & 4x_1 + 6x_2 \qquad + x_4 \qquad = 230 \\ & 2\,x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 70 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

O valor óptimo era *425* U.M.

O segundo problema tem a formulação:

$$\begin{aligned} \min & \ 200y_3 + 230y_4 + 70y_5 \\ & 5y_3 + 4y_4 + 2y_5 \ge 10 \\ & 4y_3 + 6y_4 + \ \ y_5 \ge 9 \\ & y_3, \ \ y_4, \ \ y_5 \ge 0 \end{aligned}$$

O ***Valor Óptimo*** é ***425*** U.M.

O segundo problema corresponde ao que se chama o ***Problema Dual*** do primeiro.

Desvantagens da Técnica do Grande "M"

A desvantagem da ***Técnica do M*** é, para além da acrescida dificuldade de cálculo, o erro computacional que pode resultar por se atribuir um valor muito elevado à constante ***M***.

Para exemplificar este ponto, suponhamos que $M = 10.000$ no seguinte problema resolvido com base no método do M.

	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	P_0	
R_1	3	1	0	1	0	0	3	Quadro
R_2	4	3	-1	0	1	0	6	não
S_3	1	2	0	0	0	1	3	válido
W_j	-4	-1	0	$-M$	$-M$	0	0	

O *Quadro* não é válido, pois há *variáveis* na *base* para as quais o *coeficiente* na *linha da **Função Objectivo*** não é nulo.

Validando o quadro, obtemos

	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	P_0	
R_1	3	1	0	1	0	0	3	Quadro
R_2	4	3	-1	0	1	0	6	válido
S_3	1	2	0	0	0	1	3	
W_j	-4 $+7M$	-1 $+4M$	0 $-M$	$-M$ $+M$	$-M$ $+M$	0 0	0 $+9M$	

Aqui, os *coeficientes* de x_1 e de x_2 são, respectivamente, $(-4+70.000)$ e $(-1+70.000)$. O "*peso*" dos *coeficientes* originais é agora muito pequeno, quando comparado com os valores elevados criados pelos termos em M.

Devido a problemas de arredondamento a solução pode tornar-se insensível aos valores relativos dos *coeficientes* da *Função Objectivo*.

2.1.7.4.3.2 A Técnica das Duas Fases

O ***Método*** ou ***Técnica das Duas Fases*** consiste em:

Fase I

Formular um novo problema, por substituição da *função objectivo* inicial pela soma das *variáveis artificiais*. Esta nova *função objectivo* é, então, minimizada, obedecendo ás condições do problema original.

Se o problema tiver um ***Espaço Válido de Soluções***, o *valor mínimo* da *função objectivo* será zero (o que indica que o valor de todas as *variáveis artificiais* é nulo).

Se, contudo, o valor mínimo não for nulo, não há *Solução Válida*, e o problema é designado por ***Problema Impossível***.

Fase II

Utilizar a *solução óptima* da ***Fase I*** como solução de partida para o problema original (*Função Objectivo* do *Problema Original*).

Neste caso, a *função objectivo* incial deve, primeiro, ser expressa em função das *variáveis não-básicas*

Apliquemos a ***Técnica das Duas Fases*** ao problema:

$$\begin{aligned} &5y_3+4y_4+2y_5\geq 10\\ &4y_3+6y_4+\ \ y_5\geq 9\\ &y_3,\ y_4,\ y_5\geq 0 \end{aligned}$$

As *condições* são trasformadas em equações pela introdução das *Variáveis de Folga* y_1 e y_2 e das *Variáveis Artificiais* S_1 e S_2.

$$\begin{aligned} -y_1 \qquad +5y_3+4y_4+2y_5+S_1 \qquad &=10\\ -y_2+4y_3+6y_4+\ \ y_5 \qquad +S_2 &=9 \end{aligned}$$

Fase I

Para a ***Fase I***, o objectivo consiste em *minimizar* a soma das *Variáveis Artificiais*.

$$\min\ (S_1+S_2)$$

O quadro correspondente tem a forma:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	P_0	
S_1	-1	0	5	4	2	1	0	10	
S_2	0	-1	4	$\boxed{6}$	1	0	1	9	$\Leftarrow$
	0	0	0	0	0	1	1	0	
	$+1$	$+0$	-5	-4	-2	-1	0	-10	
	$+0$	$+1$	-4	-6	-1	$+0$	-1	-9	
W_j	1	1	-9	-10	-3	0	0	-19	
				$\Uparrow$					

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	P_0	
S_1	-1	$2/3$	$\boxed{7/3}$	0	$4/3$	1	$-2/3$	4	$\Leftarrow$
y_4	0	$-1/6$	$2/3$	1	$1/6$	0	$1/6$	$3/2$	
W_j	1	$-2/3$	$-7/3$	0	$-4/3$	0	$6/3$	-4	
			$\Uparrow$						

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	P_0
y_3	$-3/7$	$2/7$	1	0	$4/7$	$3/7$	$-2/7$	$12/7$
y_4	$2/7$	$-5/14$	0	1	$-3/4$	$-2/7$	$5/14$	$5/14$
W_j	0	0	0	0	0	1	1	0

O valor da ***Função Objectivo*** é nulo. É, portanto, possível ter $S_1 = 0$ e $S_2 = 0$, *i.e.* obedecer ao conjunto de *condições* originais do problema.

A *Base Válida* construída com *Variáveis de Decisão* e/ou *Variáveis de Folga* do enunciado original pode ser extraída do último Quadro.

Fase II

Eliminam-se as colunas correspondentes às *Variáveis Artificiais* no último quadro da ***Fase I***. Note-se que a *1ª Fase* permitiu encontrar uma *Base* constituída apenas por *Variáveis de Decisão* e/ou *Variáveis de Folga*. Essa *Base* não era evidente à partida.

Adopta-se a ***Função Objectivo*** original, inscrevendo-a no quadro.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	P_0	
y_3	$-3/7$	$2/7$	1	0	$4/7$	$12/7$	
y_4	$2/7$	$-5/14$	0	1	$-3/4$	$5/14$	
W_j	0	0	200	230	70	0	
	$+600/7$	$-400/7$	-200	$+0$	$-800/7$	$-2400/7$	
	$+460/7$	$+575/7$	$+0$	-230	$+345/7$	$-575/7$	
	20	25	0	0	5	$-2975/7$	$=-425$

A introdução da verdadeira *Função Objectivo* conduzia a um quadro em que não se cumpria a condição de a ***Função Objectivo*** ser expressa em função das *Variáveis Não-Básicas*. A necessária manipulação passa por multiplicar a *1ª linha* do quadro por ***(-200)*** e somá-la à *linha da Função Objectivo* e por multiplicar a *2ª linha* do quadro por *(-230)* e somá-la à *linha da Função Objectivo*.

Para o exemplo apresentado, a modificação executada para obter o *1º Quadro Válido de Base* conduziu, imediatamente, à *Solução Óptima*. Poderia ter sido necessário executar várias iterações na *2ª Fase* antes de atingir a *Solução Óptima*.

O resultado da *1ª Fase* pode incluir *Variáveis Artificiais na Base* ao nível zero (*Solução Degenerada*). Isso significa que é possível encontrar uma *Solução Válida* para o problema, mas que a coluna correspondente a essa variável não pode ser eliminada na passagem à *2ª Fase*. Neste caso, a *2ª Fase* é executada, não sendo possível qualquer modificação do quadro que obrigue a *variável artificial* a assumir um valor maior que zero (Dantzig, G.B.,*Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton,N.J.,sec 5.2).

2.1.7.4.3.3 Método Multifase

Outra alternativa aos métodos anteriores consiste em tomar como *objectivo* a *minimização* do "afastamento" em relação à validade das restrições do problema.

Uma solução não é válida se resultar em valores para as *variáveis de folga* que não cumpram a *condição de não-negatividade*.

Em cada passo, escolheremos para *objectivo* a *maximização* da *Variável de Folga* da condição que mais se afasta da validade.

Assim, dado o problema genérico de *Programação Linear*:

$$\max\ x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_{0i} x_i$$

s. a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + x_{n+j} = a_{j0} \qquad ;(j = 1,\ldots,m)$$

$$x_i \geq 0 \qquad ;(i = 1,\ldots,m+n)$$

Se adoptarmos como solução tentativa o ponto que representa a origem do sistema de coordenadas, *i.e.* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, iremos, provavelmente, verificar que algumas das *condições* do problema são violadas.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que nesta situação estão as primeiras *r<m condições*.

Passamos a considerar o sistema constituído, apenas, pelas restantes equações ($m-r$ equações) não violadas, *i.e.*:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + x_{n+j} = a_{j0} \qquad ;(j = r+1,\dots,m)$$
$$x_i \geq 0 \qquad ;(i = 1,\dots,m+n)$$

Escolhemos uma das outras *restrições* abandonadas para formar a nova *Função Objectivo*. Também, sem perda de generalidade, admitamos que seleccionamos a *1ª condição* violada.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + x_{n+1} = a_{10}$$

ou seja

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-x_1) + a_{10}$$

O problema passou a ser definido por:

$$\max \; x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-x_1) + a_{10}$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + x_{n+j} = a_{j0} \qquad ;(j = r+1,\dots,m)$$
$$x_i \geq 0 \quad ;(i = 1,\dots,n,n+r+1,\dots,n+m)$$

Para este problema, a origem do sistema de eixos constitui uma *Solução Válida de Base*.

O problema é iterado até que x_{n+1} se torne positivo, ou seja, até que a *condição* de ordem $j=1$ seja satisfeita.

Possivelmente, algumas das outras *condições* que eram violadas terão, igualmente, deixado de o ser.

O processo é reiniciado considerando o conjunto remanescente de *condições* não violadas, e uma *função objectivo* baseada numa das *condições* ainda violadas.

- São várias as vantagens da ***Técnica Multifase***:

  - Não é necessário introduzir *Variáveis Artificiais* na formulação.
  - A obtenção da *1ª Solução Válida de Base* recorre ao *Método Simplex* normal.
  - Evita o possível *overflow* a que *o Método do "Grande M"* pode conduzir.

Aplicação a um exemplo

Consideremos um exemplo com o seguinte enunciado:

$$\min\ C = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$s.a$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \quad\quad &\geq 8 \\ 2x_2 + 5x_3 &\geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 16 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

A origem do sistema de coordenadas $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ viola todas as condições.

1ª condição: $2x_1 + 3x_2 = 0 \quad < 8$
2ª condição: $2x_2 + 5x_3 = 0 \quad < 10$
3ª condição: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \quad < 16$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	
x_4	−2	−3	0	1	0	0	−8	
x_5	0	−2	−5	0	1	0	−10	
x_6	−3	−2	$\boxed{-4}$	0	0	1	−16	⇐
W_j	3	5	4	0	0	0	0	
			⇑					

A condição que mais se afasta da validade é a que corresponde à *3ª linha* do quadro. Para essa equação, a variável de folga pode ser expressa como:

$$x_6 = -16 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

É esta folga que queremos optimizar (considerando-a como objectivo). O *coeficiente* de maior peso na expressão de x_6 tem o valor *+4*. Na *3ª linha* isto corresponde ao coeficiente mais negativo, *i.e. -4*.

No quadro presente não há nenhuma condição satisfeita.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	
x_4	−2	$\boxed{-3}$	0	1	0	0	−8	⇐
x_5	15/4	1/2	0	0	1	−5/4	10	
x_3	3/4	1/2	1	0	0	−1/4	4	
W_j	0	3	0	0	0	−1	−16	
		⇑						

A *2ª* e a *3ª condições* passaram a ser satisfeitas.
A *1ª condição* (violada) define a nova *função objectivo* a *maximizar*.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
x_2	2/3	1	0	−1/3	0	0	8/3
x_5	41/12	0	0	1/6	1	−5/4	26/3
x_3	5/12	0	1	1/6	0	−1/4	8/3
W_j	−2	0	0	1	0	−1	−24

Este último *Quadro* constitui, finalmente, uma *Solução Válida de Base* (verifica todas as restrições e as condições de não negatividade).

O quadro seguinte produziria a ***Solução Óptima***

$$x_1 = 2.54 \quad x_4 = 0$$
$$x_2 = 0.973 \quad x_5 = 0 \quad x_0 = 18.93$$
$$x_3 = 1.61 \quad x_6 = 0$$

2.1.8 Revisão do Algoritmo do Simplex

Vimos que qualquer *Quadro Simplex* contém, embebida, uma *matriz identidade*. É possível aplicar o algoritmo a um quadro que não represente explicitamente a *matriz identidade*. A vantagem desta representação está na redução da dimensão dos quadros.

Vamos mostrar o desenvolvimento paralelo do algoritmo para as duas representações, tomando para exemplo o *Problema da Produção*.

Quadro Completo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	
x_3	5	4	1	0	0	200	
x_4	4	6	0	1	0	230	
x_5	$\boxed{2}$	1	0	0	1	70	⇐
W_j	−10	−9	0	0	0	0	
	⇑						

Quadro Restrito

	x_1	x_2	P_0	
x_3	5	4	200	
x_4	4	6	230	
x_5	$\boxed{2}$	1	70	⇐
W_j	−10	−9	0	
	⇑			

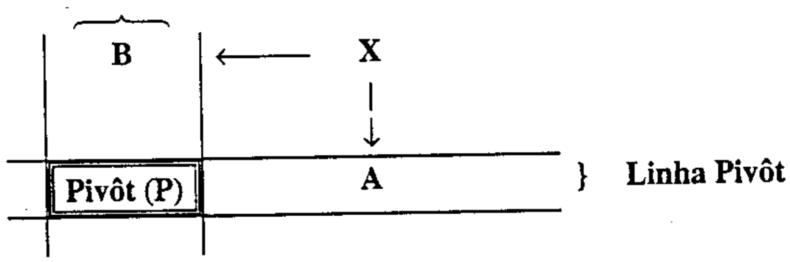
Vemos que o ***Quadro Restrito*** contém a informação necessária para determinar que *variável* deve entrar na *base*, e que *variável* deve sair da *base*.

O ***Quadro Restrito*** contém apenas as *colunas* correspondentes às *variáveis não-básicas*. Assim, uma mudança de *base* também deve modificar as *colunas* relativas às *variáveis não-básicas* representadas no quadro.

O *elemento* no cruzamento da *linha* x_5 com a *coluna* x_5 é igual a *1* nos quadros anteriores por se tratar de uma *Variável Básica*. Quando a *Linha Pivôt* for reduzida, nessa posição obteremos o inverso do *Elemento Pivôt*. Todos os restantes elementos da *Linha Pivôt* aparecerão divididos pelo *Elemento Pivôt*.

Observando a *coluna* correspondente à *variável* que sai da *base*, observamos o facto de ser constituída por *elementos* todos nulos, à excepção do *elemento* no cruzamento da *linha* de x_5 com a *coluna* de x_5. Isto significa que os *elementos* nulos na *coluna* serão substituídos pelo valor negativo das razões entre os *elementos* da *Coluna Pivôt* e o *Elemento Pivôt* (que correspondem aos factores que multipicam a *Linha Pivot* depois somada às várias *linhas* do quadro).

Os restantes *elementos* do ***Quadro Restrito*** podem ser calculados por referência à nova coluna, à nova linha e ao *Elemento Pivôt*, conforme ilustra a **Figura- 2.3**.



$$X = X - (B/P) * A$$

Figura-2.3

Quadro Completo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
x_3	0	$4-5/2$	1	0	$-5/2$	$200-5*35$
x_4	0	$6-4/2$	0	1	$-4/2$	$230-4*35$
x_1	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35
W_j	0	$-9+10/2$	0	0	$10/2$	$0+10*35$

Quadro Restrito

	x_5	x_2	P_0
x_3	$-5/2$	$4-5/2$	$200-5*35=25$
x_4	$-4/2$	$6-4/2$	$230-4*35=90$
x_1	$1/2$	$1/2$	35
W_j	$10/2$	$-9+10/2$	$0+10*35=350$

ou seja,

	x_5	x_2	P_0	Razão	
x_3	$-5/2$	$\boxed{3/2}$	25	50/3	$\Leftarrow$
x_4	-2	4	90	90/4	
x_1	$1/2$	$1/2$	35	70	
W_j	5	-4	350		
		$\Uparrow$			

	x_5	x_3	P_0	Razão	
x_2	$-5/3$	$2/3$	50/3	—	
x_4	$\boxed{14/3}$	$-8/3$	70/3	5	$\Leftarrow$
x_1	$4/3$	$-1/3$	80/3	20	
W_j	$-5/3$	$8/3$	1250/3		
	$\Uparrow$				

O quadro final é:

	x_4	x_3	P_0
x_2	$5/14$	$-2/7$	25
x_5	$3/14$	$-4/7$	5
x_1	$-2/7$	$3/7$	20
W_j	$5/14$	$12/7$	425

2.1.9 Transformações Básicas para problemas de Programação Linear

Alguns problemas traduzem-se em *Modelos de Programação Linear* que não correspondem directamente à *Forma Normal* que foi referida.

Vamos ver o tipo de transformações necessárias para algumas destas situações:

(a) Igualdade nas Restrições

Uma *condição* pode traduzir-se por uma *equação* e não por uma *inequação*. Uma alternativa de transformação consiste em exprimir a *equação* como duas *inequações* simultaneamente activas de *maior ou igual* e de *menor ou igual* ("$\geq$" e "$\leq$").

Por exemplo, suponhamos que para um modelo uma *condição* se traduz pela *equação*

$$5x_1 - 2x_2 = 8$$

as *inequações*

$$5x_1 - 2x_2 \leq 8$$
$$5x_1 - 2x_2 \geq 8$$

são equivalentes àquela *equação*.

Deve notar-se que as duas *inequações* actuam simultaneamente. A primeira *inequação*, para permitir a representação de um *quadro válido de base*, vai exigir uma *Varável de Folga*. A segunda *inequação* requer uma *Variável de Folga e uma Variável Artificial*.

Ao todo, a transformação requer duas *Variáveis de Folga* e uma *Variável Artificial*.

Uma alternativa a este procedimento consiste em adicionar apenas uma *Variável Artificial, i.e.*

$$5x_1 - 2x_2 + A_1 = 8$$

Uma vez que a *equação* passa a conter uma *variável* com coeficiente igual a *1*, e que essa variável tem coeficiente nulo nas outras condições do problema, fica garantida a estrutura necessária à construção do quadro de solução. Esta metodologia requer, portanto, apenas uma *Variável Artificial* (A_1).

(b) Variáveis que admitem Domínio Negativo

Referimos que a ***Condição de Não-Negatividade*** correspondia aos requisitos de formulação da maior parte dos problemas reais. Normalmente, as *Variáveis de Decisão* exprimem grandezas físicas, número de unidades, etc. São, portanto, intrinsecamente *não-negativas*.

Situações em que seja necessário permitir que uma *variável* possa assumir valores negativos podem ser formuladas, para solução com base no *Método Simplex*, fazendo a sua substituição prévia pela diferença entre duas *variáveis não--negativas*. Por exemplo,

$$x + y + z \leq 150$$
$$\text{com } -\infty \leq x \leq +\infty$$

é equivalente a

$$(x_1 - x_2) + y + z \leq 150$$
$$\text{com } x_1,\ x_2 \geq 0$$

Um exemplo de um problema em que seja necessário incluir variáveis não limitadas em sinal é, por exemplo, um problema de *Planeamento da Produção* em que uma variável traduza a folga em relação à data de entrega de um artigo. Um valor negativo significa um atraso em relação à data de entrega.

(c) Variáveis com Limite Inferior

Para este tipo de problemas, uma alternativa consiste em exprimir explicitamente as *condições de limite inferior* como qualquer outra condição.

Uma outra alternativa consiste em efectuar uma substituição de *Variáveis*, por forma que às *Variáveis* utilizadas no problema apenas se apliquem as *Condições de Não-Negatividade*.

Por exemplo, se, para além do conjunto de *restrições* do problema for necessário que $y \geq 8$, pode-se efectuar a transformação $y' = y - 8$, ou seja, $y = y' + 8$ com $y \geq 0$.

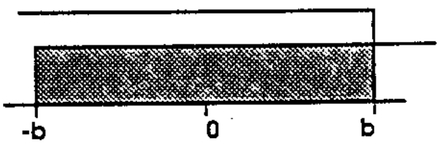
(d) Restrições do Tipo Módulo

Uma inequação do tipo

$$|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$$

pode ser expressa pelo conjunto de duas *condições*:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &\leq b \\ a_1x_1 + a_2x_2 &\geq -b \end{aligned}$$

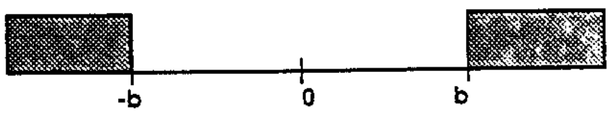


Outro caso corresponde a uma *inequação* do tipo

$$|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$$

que pode ser expressa como uma ***dicotomia***, *i.e.* duas condições ***alternativas***.

$$\begin{aligned} & a_1x_1 + a_2x_2 \leq -b \\ \text{ou}\quad & a_1x_1 + a_2x_2 \geq +b \end{aligned}$$

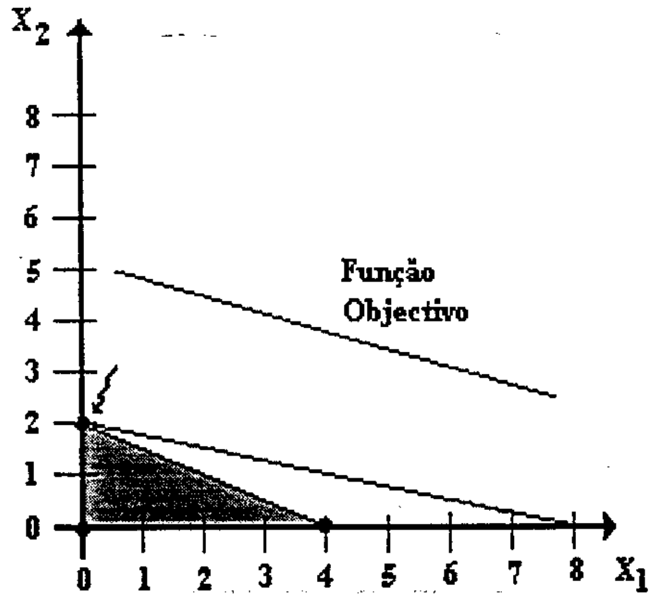


O processo de lidar com esta situação, em que apenas uma de um conjunto de condições deve ser activa, será abordado quando for introduzido o problema das ***Dicotomias***.

2.1.10 Síntese de Variantes em Problemas de Programação Linear

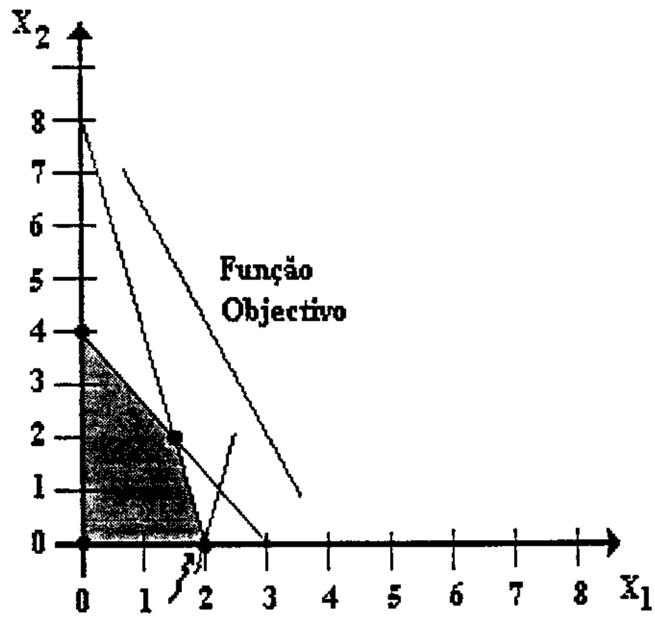
(a) Solução Óptima Degenerada

$$\max \; x_0 = 3x_1 + 9x_2$$
$$x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1,\; x_2 \ge 0$$



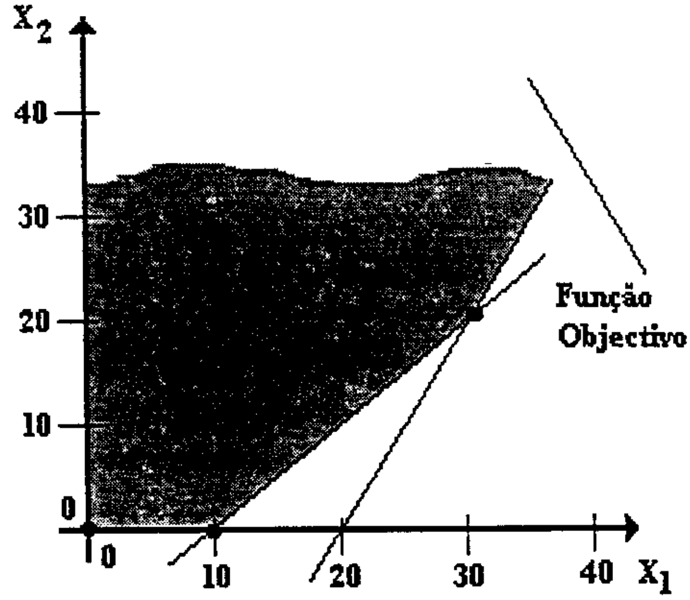
(b) Solução Temporária Degenerada

$$\max \; x_0 = 2x_1 + x_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$4x_1 - x_2 \le 8$$
$$x_1,\; x_2 \ge 0$$



(c) Solução Óptima Ilimitada

$$\max\ x_0 = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 \leq 40$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$



Vejamos, em relação à representação do *Quadro Simplex*, quais as características especiais deste problema.

	x_1	x_2	s_1	s_2	P_0
s_1	1	−1	1	0	10
s_2	2	−1	0	1	40
W_j	−2	−1	0	0	0

Neste *Quadro*, podemos observar que a *coluna* correspondente à *variável* x_2 apresenta todos os *coeficientes* negativos (incluindo o da *Função Objectivo*).

Esta situação num *Quadro do Simplex* permite identificar, imediatamente, a situação de ***Solução Óptima Ilimitada***.

Por observação da *Função Objectivo*, vemos que a variável x_2 deve passar a *variável básica*.

Para aquele *Quadro*, podemos exprimir s_1 e s_2 em função das *variáveis não-básicas*, através de:

$$s_1 = 10 - x_1 + x_2$$
$$s_2 = 40 - 2x_1 + x_2$$

e é evidente que x_2 pode aumentar para qualquer valor, sem que s_1 ou s_2 alguma vez sejam forçados a assumir valores negativos. A ***Função Objectivo*** terá, portanto, um *valor infinito*.

Se prosseguíssemos a execução do problema, introduzindo na base x_1, teríamos, sucessivamente:

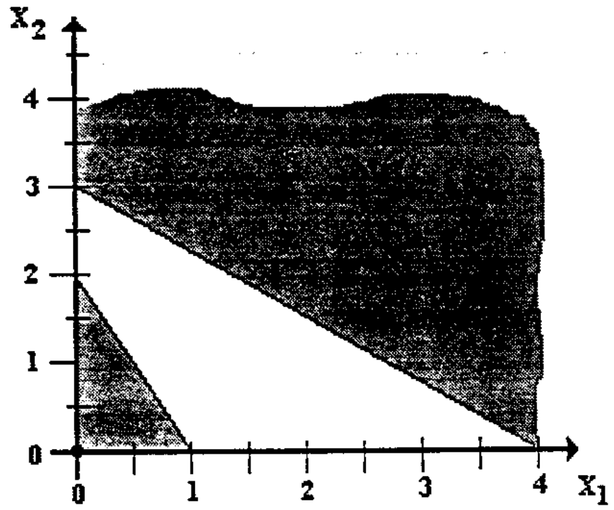
	x_1	x_2	s_1	s_2	P_0
x_1	1	−1	1	0	10
s_2	0	1	−2	1	20
W_j	0	−3	2	0	20

	x_1	x_2	s_1	s_2	P_0
x_1	1	0	−1	1	30
x_2	0	1	−2	1	20
W_j	0	0	−4	3	80

Para este *Quadro*, s_1 deverá entrar na *base*. A *coluna* de s_1 não inclui nenhum *coeficiente* positivo. Não existe, portanto, nenhuma limitação ao valor que s_1 pode assumir.

(d) Problema Impossível

$$\max\ x_0 = 3x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$



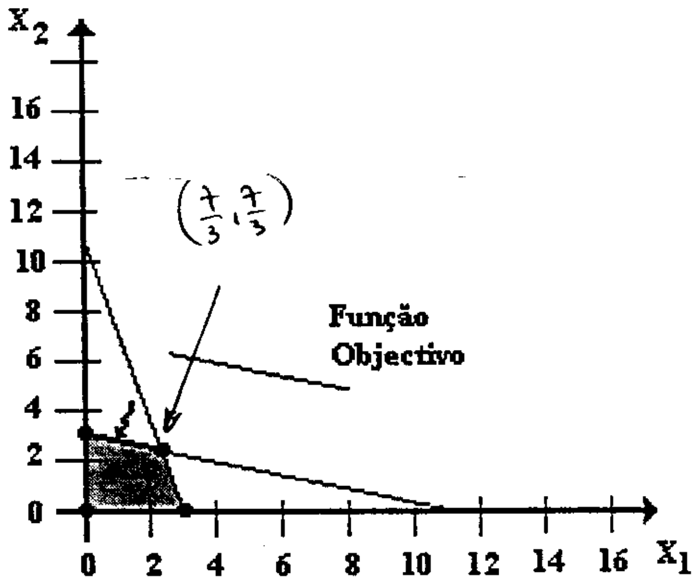
Como se pode observar da representação gráfica, neste caso o *Espaço de Soluções* é disjunto, e não há nenhum ponto que obedeça ao conjunto das *condições*.

Se o método de solução for a *Técnica do Grande M*, um ***Problema Impossível*** será reconhecido pela existência de uma solução com um *Valor de Função Objectivo* expresso em função de *M* (solução igual a menos infinito, no caso de um *problema de máximo* ou solução de mais infinito, no caso de um *problema de mínimo*).

Se o método utilizado for a *Técnica das Duas Fases*, um *Problema Impossível* é reconhecido quando se atinge o final da *1ª Fase* com um valor da *Função Objectivo* diferente de zero (*i.e.*, a *base* inclui, pelo menos, uma das *variáveis artificiais*).

(e) Soluções Óptimas Alternativas

$$\max\ x_0 = 4x_1 + 14x_2$$
$$2x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$7x_1 + 2\,x_2 \le 21$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$



Quando a *Função Objectivo* é paralela a uma das *condições*, o *óptimo* ocorre para todos os *pontos* sobre a recta que representa a *condição* (*i.e.*, para todas as *combinações lineares* dos *vértices extremos* dessa condição na *Região de Soluções Válidas*).

Esta situação ocorre quando os coeficientes da Função Objectivo podem ser obtidos a partir dos coeficientes de uma restrição, multiplicando-os por um factor constante.

O conhecimento de *soluções alternativas* é importante. Frequentemente, um *Modelo* traduz apenas uma simplificação do problema. O conhecimento de *soluções alternativas* permite a posterior aplicação de outros critérios de avaliação da *qualidade das soluções*.

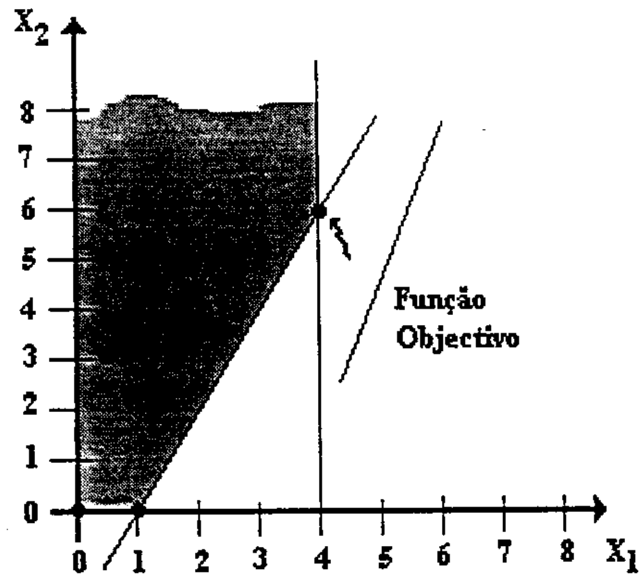
As *coordenadas* de qualquer ponto sobre a *recta-solução* são dadas por:

$$\alpha * V_1 + (1-\alpha) * V_2 \qquad\qquad \alpha * V_1 + (1-\alpha) * V_2$$

com $0 \le \alpha \le 1$.

(f) Espaço de Soluções Ilimitado, mas Solução Óptima Limitada

$$\max\ x_0 = 6\,x_1 - 2x_2$$
$$2x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$



2.2 Programação Linear Avançada

2.2.1 Definição Matricial do Problema de Programação Linear

Como já tivemos oportunidade de referir, na *Forma Normal*, o problema de *Programação Linear*, pode ser expresso por

$$Max\ x_0 = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x}$$

$$s.a$$

$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{I})\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{P_0};\quad \underset{\sim}{P_0} \geq 0;\quad \underset{\sim}{x} \geq 0$$

Note-se que, nesta formulação, a matriz $\underset{\sim}{A}$ exclui a matriz identidade embebida no quadro do problema.

Para a definição apresentada, temos:

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})^T$$

$$\underset{\sim}{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_{m+n})^T$$

$$\underset{\sim}{P_0} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

As condições $(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{I})\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{P_0}$ também se podem escrever

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_j\,\underset{\sim}{P_j} = \underset{\sim}{P_0}$$

onde o vector $\underset{\sim}{x}$ inclui todas as variáveis (*variáveis de decisão, variáveis de folga* e *variáveis artificiais*).

Os vectores $\underset{\sim}{P_j}$ representam cada uma das colunas de um *Quadro Simplex* correspondente à formulação.

Assim,

$$\underset{\sim}{P_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Consideremos o exemplo de um problema de *Programação Linear*

$$\max\ x_0 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$
$$x_1 + 2x_2 = 7$$
$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Admitindo a introdução das necessárias *Variáveis de Folga* e *Variáveis Artificiais*, para solução pela *Técnica do M*, temos, na forma matricial

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} \text{Variáveis de Decisão}$$

x_4 – Variável de Folga da 1ª Condição

x_5 – Variável Artificial associada à 1ª Condição

x_6 – Variável Artificial associada à 2ª Condição

x_7 – Variável de Folga da 3ª Condição

$$\max\ x_0 = (2,3,4,0,-M,-M,0)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7)^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$x_j \geq 0$ para todos os j

Então,

$$\underset{\sim}{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7)^T$$

$$\underset{\sim}{C} = (2,3,4,0,-M,-M,0)$$

$$\underset{\sim}{P_0} = (5,7,9)^T$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

x_5, x_6 e x_7 são as *Variáveis Básicas* iniciais.

2.2.2 Soluções Válidas de Base

Considere-se um conjunto de **m** equações linearmente independentes e **r** incógnitas $(m < r)$.

$\underset{-}{A}\,\underset{-}{x} = \underset{-}{b}$, onde $\underset{-}{x}$ representa o vector de **r** incógnitas.

Uma *Solução Válida de Base* para o sistema obtém-se fazendo **r-m** variáveis iguais a zero, e resolvendo o sistema de **m** equações a **m** incógnitas, desde que o sistema assim definido seja determinado.

Outra forma de exprimir esta condição (de existência de uma única solução), consiste em afirmar que os *vectores coluna* resultantes do fraccionamento da matriz $\underset{-}{A}$ devem ser *Linearmente Independentes*.

$$\underset{-}{A} = \left(\underset{-}{P_1}\ , \underset{-}{P_2}, \ldots, \underset{-}{P_m}\right)$$

Por outras palavras, a matriz quadrada que engloba os **m** vectores associados às *Variáveis Básicas* deve ser ***não-singular***.

Como exemplo de uma *Matriz-Singular*, considere-se a matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \underset{-}{P_1} & \underset{-}{P_2} & \underset{-}{P_3} \end{array} \\ \underset{-}{B} = & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para a matriz $\underset{-}{B}$ tem-se que:

$$\underset{-}{P_2} = 2\,\underset{-}{P_1} + \underset{-}{P_3}$$

e, evidentemente,

$$\left|\underset{-}{B}\right| = 0$$

Quando as **m** equações são *Linearmente Independentes*, obtemos uma *Solução Válida de Base*.

Veremos, oportunamente, que os vectores associados a uma *Solução Válida de Base* são *Linearmente Independentes*, e vice-versa.

2.2.3 Combinação Convexa

Dado um conjunto de k pontos distintos

$$X^{(i)} = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i);\; i = 1, 2, \ldots, k$$

num espaço a n dimensões, então, para $0 \le \lambda_i \le 1$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^{(i)}$$

constitui uma ***Combinação Convexa*** dos $X^{(i)}$.

2.2.4 Conjunto Convexo

Um conjunto C num espaço a n dimensões diz-se um ***Conjunto Convexo*** se todos os pontos da recta que une dois pontos distintos do conjunto forem, também, pontos do conjunto.

Assim, se $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ forem pontos do conjunto C, a *Combinação Convexa* tem a forma

$$X = \lambda X^{(1)} + (1-\lambda) X^{(2)};\; 0 \le \lambda \le 1$$

A **Figura-2.4** ilustra o conceito de *Conjunto Convexo*.

[a] [b] [c]

Figura-2.4

Na **Figura-2.4**, os conjuntos representados por *(a)* e *(b)* são ***Conjuntos Convexos***, enquanto que *(c)* não é, pois há pontos na *combinação convexa* de dois pontos do conjunto que não lhe pertencem.

2.2.5 Pontos Extremos de um Conjunto Convexo

Um ponto S de um *Conjunto Convexo* é chamado ***Ponto Extremo do Conjunto Convexo*** se não puder ser expresso como uma *Combinação Convexa* de quaisquer dois pontos distintos do *Conjunto Convexo*.

Na **Figura-2.4** *(a)*, os pontos no perímetro são *Pontos Extremos.*

Na **Figura-2.4** *(b)*, os vértices da fronteira limite do conjunto são *Pontos Extremos.*

2.2.6 Solução Óptima do Problema de Programação Linear-Teoremas

Seja $\underline{Q}$ o conjunto de todas as *Soluções Válidas* do sistema

$$(\underline{A},\underline{I})\,\underline{X} = \underline{P}_0; \quad \underline{X} \geq 0$$

então,

Teorema I - O conjunto de todas as *Soluções Válidas* de um *Problema de Programação Linear* é um *Conjunto Convexo.*

Como prova, vamos mostrar que, dados dois pontos distintos de $\underline{Q}$, uma *Combinação Convexa* desses pontos também pertence a $\underline{Q}$.

Sejam $\underline{X}_1$ e $\underline{X}_2$ tais que:

$$(\underline{A},\underline{I})\,\underline{X}_1 = \underline{b} \quad \text{e} \quad (\underline{A},\underline{I})\,\underline{X}_2 = \underline{b}$$
$$\underline{X}_1 \geq 0 \qquad\qquad \underline{X}_2 \geq 0$$

Uma *Combinação Convexa* de $\underline{X}_1$ e $\underline{X}_2$ será:

$$0 \leq \alpha \leq 1$$
$$\underline{X} = \alpha\,\underline{X}_1 + (1-\alpha)\,\underline{X}_2$$

Note-se que, sendo α positivo, também *(1-*α *)* é positivo. Isto significa que se tem $\underline{X} \geq 0$.

Verificando o sistema de equações para $\underline{X}$, temos:

$$(\underline{A},\underline{I})\,\underline{X} = \alpha(\underline{A},\underline{I})\,\underline{X}_1 + (1-\alpha)(\underline{A},\underline{I})\,\underline{X}_2 =$$
$$= \alpha\underline{b} + (1-\alpha)\underline{b} = \underline{b}$$

Ficou, assim, provado que o *Conjunto de Soluções Válidas* do *Problema de Programação Linear* é um *Conjunto Convexo.*

Teorema II - O Mínimo (problemas de minimização) para o *Problema de Programação Linear* ocorre num *Ponto Extremo* do *Conjunto de Soluções Válidas.*

Corolário - Se a *Função Objectivo* tiver o seu *Mínimo* (problemas de minimização) em mais do que um *Ponto Extremo*, ela toma o mesmo valor em todos os pontos que são *Combinação Convexa* desses *Pontos Extremos*.

Vamos efectuar a prova por absurdo. Suponhamos que a afirmação é falsa.

Então,

1-Como $\underset{\sim}{Q}$ é um *Poliedro Convexo*, possui um número finito de *Pontos Extremos* $\bar{\underset{\sim}{X}}_1, \bar{\underset{\sim}{X}}_2, \ldots, \bar{\underset{\sim}{X}}_p$

2-Suponhamos que encontrámos uma *Solução de Custo Mínimo* $\underset{\sim}{X}_0$ que não é um *Ponto Extremo*.

Isto corresponde a afirmar que $f(\underset{\sim}{X}_0) \leq f(\underset{\sim}{X})$; sendo $\underset{\sim}{X}$ qualquer outra solução. Esta condição de optimabilidade também pode ser expressa por $C\underset{\sim}{X}_0 \leq C\underset{\sim}{X}$.

Se se assumir que $\underset{\sim}{X}_0$ não é um *Ponto Extremo*, podemos exprimi-lo como *Combinação Convexa* do conjunto de *Pontos Extremos*.

$$\underset{\sim}{X}_0 = \alpha_1 \bar{\underset{\sim}{X}}_1 + \alpha_2 \bar{\underset{\sim}{X}}_2 + \ldots + \alpha_p \bar{\underset{\sim}{X}}_p$$

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$$

$$\alpha_k \geq 0$$

Então,

$$f(\underset{\sim}{X}_0) = \alpha_1 f(\bar{\underset{\sim}{X}}_1) + \alpha_2 f(\bar{\underset{\sim}{X}}_2) + \ldots + \alpha_p f(\bar{\underset{\sim}{X}}_p)$$

Seja $f(\bar{\underset{\sim}{X}}_k)$ o menor dos $f(\bar{\underset{\sim}{X}}_i)$.

Então,

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{X}_0) &\geq \alpha_1 f(\bar{\underset{\sim}{X}}_k) + \alpha_2 f(\bar{\underset{\sim}{X}}_k) + \ldots + \alpha_p f(\bar{\underset{\sim}{X}}_k) \\ &\geq f(\bar{\underset{\sim}{X}}_k) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \\ &\geq f(\bar{\underset{\sim}{X}}_k) \end{aligned}$$

Mas, da *Condição de Optimabilidade* tínhamos que $f(\underset{\sim}{X}_0) \leq f(\underset{\sim}{X})$, o que só é possível se $f(\underset{\sim}{X}_0) = f(\underset{\sim}{X})$, ou seja, se $\underset{\sim}{X}_0 = \underset{\sim}{X}_k$.

Em conclusão, o ponto $\underset{\sim}{X}_0$ tem que ser um *Ponto Extremo*.

Para prova do *Corolário*, considerem-se $\bar{\underset{\sim}{X}}_1, \bar{\underset{\sim}{X}}_2, \ldots, \bar{\underset{\sim}{X}}_q$ *Pontos Extremos* do *Conjunto Convexo de Soluções Válidas* do *Problema de Programação Linear*, para os quais a *Função Objectivo* toma o mesmo valor Q.

Então,

$$f(\bar{\underset{\sim}{X}}_1) = f(\bar{\underset{\sim}{X}}_2) = \ldots = f(\bar{\underset{\sim}{X}}_q) = Q$$

Seja $\underset{\sim}{X} = \alpha_1 \bar{\underset{\sim}{X}}_1 + \alpha_2 \bar{\underset{\sim}{X}}_2 + \ldots + \alpha_q \bar{\underset{\sim}{X}}_q$ uma *Combinação Convexa* desses *Pontos Extremos*.

Então,

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{X}) &= \alpha_1 f(\bar{\underset{\sim}{X}}_1) + \alpha_2 f(\bar{\underset{\sim}{X}}_2) + \ldots + \alpha_q f(\bar{\underset{\sim}{X}}_q) \\ &= Q \sum_{k=1}^{q} \alpha_k = Q \end{aligned}$$

Teorema III - Se for possível encontrar um conjunto de $k \leq m$ *Vectores **Linearmente Independentes*** tais que:

$$\begin{aligned} & x_1 \underset{\sim}{P}_1 + x_2 \underset{\sim}{P}_2 + \ldots + x_k \underset{\sim}{P}_k = \underset{\sim}{P}_0 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

então, o ponto $\underset{\sim}{X} = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_k, 0, \ldots\ldots, 0)$ é um *Ponto Extremo* do *Conjunto Convexo de Soluções Válidas*.

Vamos fazer a prova por absurdo deste *Teorema*.

Suponhamos que $\underset{\sim}{X}$ não é um *Ponto Extremo*.

Então, $\underset{\sim}{X}$ pode ser expresso como uma *Combinação Convexa* de dois pontos distintos $\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$. do ***Espaço de Soluções Válidas***.

$$\underset{\sim}{X} = \alpha \underset{\sim}{X}_1 + (1-\alpha) \underset{\sim}{X}_2; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Sendo $a \geq 0$ e $(1-a) \geq 0$, bem como todos os $x_{1j} \geq 0$ e $x_{2j} \geq 0$, terá, necessariamente que ser:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{X}_1 &= (x_{11} \; x_{12} \; \ldots\ldots\ldots \; x_{1k} \; 0 \; \ldots\ldots \; 0) \\ \underset{\sim}{X}_2 &= (x_{21} \; x_{22} \; \ldots\ldots\ldots \; x_{2k} \; 0 \; \ldots\ldots \; 0) \end{aligned}$$

Sendo $\underset{-}{X}_1$ e $\underset{-}{X}_2$ *Soluções Válidas*, verifica-se

$$x_{11}\,\underset{-}{P}_1 + x_{12}\,\underset{-}{P}_2 + \dots\dots\dots + x_{1k}\,\underset{-}{P}_k = \underset{-}{P}_0$$
$$x_{21}\,\underset{-}{P}_1 + x_{22}\,\underset{-}{P}_2 + \dots\dots\dots + x_{2k}\,\underset{-}{P}_k = \underset{-}{P}_0$$

Subtraindo termo a termo, obtemos

$$(x_{11} - x_{21})\,\underset{-}{P}_1 + (x_{12} - x_{22})\,\underset{-}{P}_2 + \dots\dots + (x_{1k} - x_{2k})\,\underset{-}{P}_k = \underset{-}{0}$$

Pela definição de *Independência Linear*, na equação anterior todos os coeficientes dos $\underset{-}{P}_j$ deverão ser nulos, ou seja:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} = x_{21} \\ x_{12} = x_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{1k} = x_{2k} \end{array}\right\} \; i.e. \;\rightarrow\; \underset{-}{X}_1 = \underset{-}{X}_2$$

Não foi, portanto, possível exprimir $\underset{-}{X}$ como *Combinação Convexa* de dois pontos distintos. O ponto $\underset{-}{X}$ é, portanto, um *Ponto Extremo do Conjunto Convexo de Soluções Válidas.*

Teorema IV - Se $\underset{-}{X} = (x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_k, 0, \dots\dots, 0)$ for um *Ponto Extremo do Conjunto de Soluções Válidas*, então os vectores $\underset{-}{P}_i$ associados aos x_i positivos são *Vectores Linearmente Independentes.*

Sem perda de generalidade, suponhamos que os k primeiros x_i são positivos, *i.e.*

$$(1) \qquad x_1\,\underset{-}{P}_1 + x_2\,\underset{-}{P}_2 + \dots\dots\dots + x_k\,\underset{-}{P}_k = \underset{-}{P}_0$$

Vamos efectuar a prova por absurdo, admitindo que os vectores $\underset{-}{P}_1$ a $\underset{-}{P}_k$ são *Linearmente Dependentes.* Se assim fosse, seria possível ter

$$(2) \qquad \alpha_1\,\underset{-}{P}_1 + \alpha_2\,\underset{-}{P}_2 + \dots\dots\dots + \alpha_k\,\underset{-}{P}_k = \underset{-}{0}$$

com pelo menos um valor $\alpha_i > 0$.

Seleccione-se um valor $\alpha > 0$, e multiplique-se a *Equação 2* por esse valor.

Obtém-se

$$(3) \qquad \alpha\alpha_1\,\underset{-}{P}_1 + \alpha\alpha_2\,\underset{-}{P}_2 + \dots\dots\dots + \alpha\alpha_k\,\underset{-}{P}_k = \underset{-}{0}$$

Subtraindo a *Equação 3* da *Equação 1* obtemos

$$(x_1 - \alpha\alpha_1)\, \underset{-}{P_1} + (x_2 - \alpha\alpha_2)\, \underset{-}{P_2} + \ldots\ldots + (x_k - \alpha\alpha_k)\, \underset{-}{P_k} = \underset{-}{P_0}$$

Somando à *Equação 3* a *Equação 1* obtemos

$$(x_1 + \alpha\alpha_1)\, \underset{-}{P_1} + (x_2 + \alpha\alpha_2)\, \underset{-}{P_2} + \ldots\ldots + (x_k + \alpha\alpha_k)\, \underset{-}{P_k} = \underset{-}{P_0}$$

Assim,

$$\underset{-}{X_1} = (x_1 - \alpha\alpha_1, x_2 - \alpha\alpha_2, \ldots\ldots, x_k - \alpha\alpha_k, 0, \ldots\ldots, 0)$$
$$\underset{-}{X_2} = (x_1 + \alpha\alpha_1, x_2 + \alpha\alpha_2, \ldots\ldots, x_k + \alpha\alpha_k, 0, \ldots\ldots, 0)$$

são *Soluções* (não necessariamente válidas).

A escolha de um valor adequado de α permite que todas as coordenadas de ambos os pontos $\underset{-}{X_1}$ e $\underset{-}{X_2}$ sejam positivas ou nulas. Então, ambos os pontos passarão a constituir *Soluções Válidas*, pois, para além de verificarem as condições, possuem coordenadas não-negativas.

Contudo, nestas condições, é possível escrever

$$\underset{-}{X} = \frac{1}{2}\underset{-}{X_1} + \frac{1}{2}\underset{-}{X_2}$$

o que significa que $\underset{-}{X}$ pode ser expresso como uma *Combinação Convexa* de duas *Soluções Válidas*. Assim sendo, $\underset{-}{X}$ não é um *Ponto Extremo*, contrariando a hipótese inicial.

Portanto, os vectores $\left(\underset{-}{P_1}, \underset{-}{P_2}, \ldots, \underset{-}{P_k}\right)$ devem ser *Linearmente Independentes*.

Metodologia de Mudança de Base

Vamos desenvolver formalmente a *metodologia de mudança de base* que adoptámos na aplicação do *Método Simplex*, demonstrando que ela nos garante a passagem de uma *Solução Válida de Base* para outra *Solução Válida de Base*.

Considere-se o seguinte *Ponto Extremo* do *Espaço de Soluções Válidas*:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\underset{-}{X} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \\ &x_1\, \underset{-}{P_1} + x_2\, \underset{-}{P_2} + \ldots\ldots + x_n\, \underset{-}{P_n} = \underset{-}{P_0} \end{aligned}$$

com $\underset{-}{P_1}, \underset{-}{P_2}, \ldots\ldots, \underset{-}{P_n}$ *Linearmente Independentes*.

Qualquer vector pode ser expresso em função dos *Vectores Linearmente Independentes* $\underset{\sim}{P_1}$ a $\underset{\sim}{P_n}$.

$$\underset{\sim}{P_j} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, \underset{\sim}{P_i} \quad \leftarrow \text{Combinação Linear de Vectores}$$

Linearmente Independentes

Por exemplo, para o vector $\underset{\sim}{P_{n+1}}$

(2) $$\underset{\sim}{P_{n+1}} = x_{1,n+1}\, \underset{\sim}{P_1} + x_{2,n+1}\, \underset{\sim}{P_2} + \ldots\ldots + x_{n,n+1}\, \underset{\sim}{P_n}$$

Podemos calcular *Equação 1* - θ**Equação 2*

$$(x_1 - \theta x_{1,n+1})\, \underset{\sim}{P_1} + (x_2 - \theta x_{2,n+1})\, \underset{\sim}{P_2} + \ldots\ldots + (x_n - \theta x_{n,n+1})\, \underset{\sim}{P_n} + \theta\, \underset{\sim}{P_{n+1}} = \underset{\sim}{P_0}$$

Então,

$$\underset{\sim}{X}' = (\overline{x_1 - \theta x_{1,n+1}}, \overline{x_2 - \theta x_{2,n+1}}, \ldots\ldots, \overline{x_n - \theta x_{n,n+1}}, \theta, 0, \ldots, 0)$$

é um ponto que satisfaz as condições para ser uma *Solução Válida* desde que cada uma das suas coordenadas seja não-negativa. Portanto, deverá ter-se θ positivo, bem como todas as outras coordenadas.

Se isto for possível, teremos uma nova *Solução Válida* com ***n+1*** coordenadas positivas.

Pretendemos ter apenas ***n*** coordenadas positivas (condição para que a nova solução seja básica).

O cálculo de θ deve ser efectuado por forma a que uma das coordenadas de $\underset{\sim}{X}'$ se torne nula.

Deverá ser, então:

$$\theta_0 = \min_{x_{i,n+1} > 0} \left(\frac{x_i}{x_{i,n+1}} \right)$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que θ_0 é determinado pela primeira coordenada, *i.e.*

$$\theta_0 = \frac{x_1}{x_{1,n+1}} \quad (\text{portanto com } x_{1,n+1} > 0)$$

Então, temos

$$\underline{X}' = (0, x_2', \ldots\ldots, \underbrace{x_{n+1}'}_{\theta_0}, 0, \ldots, 0)$$

$$x_2' \underline{P}_2 + \ldots\ldots + x_{n+1}' \underline{P}_{n+1} = \underline{P}_0$$

Resta provar que esta *Solução Válida* é um *Ponto Extremo.*

Para tal, é necessário provar que os vectores $\underline{P}_2, \ldots\ldots, \underline{P}_{n+1}$ são *Linearmente Independentes.*

Vamos provar que assim é por absurdo. Assim, se admitirmos que não são *Linearmente Independentes* teremos

$$d_2 \underline{P}_2 + d_3 \underline{P}_3 + \ldots\ldots + d_{n+1} \underline{P}_{n+1} = \underline{0}$$

com algum $d_i \neq 0$.

Sabemos que os vectores $\underline{P}_1$ a $\underline{P}_n$ são *Linearmente Independentes.* Portanto, $\underline{P}_2$ a $\underline{P}_n$ são *Linearmente Independentes.* Logo, d_{n+1} não deverá ser nulo, e podemos escrever

$$\underline{P}_{n+1} = e_2 \underline{P}_2 + e_3 \underline{P}_3 + \ldots\ldots + e_n \underline{P}_n$$

$$com \;\; e_i = -\frac{d_i}{d_{n+1}}$$

Subtraindo da *Equação* 2, obtém-se

$$x_{1,n+1} \underline{P}_1 + (x_{2,n+1} - e_2)\, \underline{P}_2 + \ldots\ldots + (x_{n,n+1} - e_n)\, \underline{P}_n = \underline{0}$$

Sendo $\underline{P}_1$ a $\underline{P}_n$ *Linearmente Independentes*, todos os coeficientes devem ser nulos, incluindo $x_{1,n+1} = 0$, contrariamente à hipótese que conduziu à escolha de θ_0.

Portanto, $\underline{P}_2, \ldots, \underline{P}_{n+1}$ são ***n*** *Vectores Linearmente Independentes.*

Concluindo, a nova solução obtida, $\underline{X}'$, é uma *Solução Válida de Base* pois todos os $\underline{P}_i$ são *Linearmente Independentes.*

∴ O processo de *Mudança de Base* produziu, assim, um novo *Ponto Extremo.*

Critério de Optimabilidade

Em primeiro lugar, faremos uma revisão do procedimento computacional no *Simplex*.

Tomando como referência o exemplo que designámos por *Problema de Produção*, temos

Quadro Inicial

	$\underline{P}_1$ x_1	$\underline{P}_2$ x_2	$\underline{P}_3$ x_3	$\underline{P}_4$ x_4	$\underline{P}_5$ x_5	$\underline{P}_0$
x_3	5	4	1	0	0	200
x_4	4	6	0	1	0	230
x_5	2	1	0	0	1	70
W_j	−10	−9	0	0	0	0

Quadro Final

	$\underline{P}_1$ x_1	$\underline{P}_2$ x_2	$\underline{P}_3$ x_3	$\underline{P}_4$ x_4	$\underline{P}_5$ x_5	$\underline{P}_0$
x_2	0	1	−2/7	5/14	0	25
x_5	0	0	−4/7	3/14	1	5
x_1	1	0	3/7	−2/7	0	20
W_j	0	0	12/7	5/14	0	425

Podemos observar que a *Solução Óptima* contém na *Base* as variáveis x_1, x_2 e x_5.

Suponhamos que, no quadro inicial, seleccionávamos x_1, x_2 e x_5 para constituírem a nova *base*. No quadro que traduz esta transformação, as correspondentes colunas deverão conter a matriz identidade.

Como já vimos, podemos exprimir qualquer vector em função de um conjunto de vectores *Linearmente Independentes*.

Vamos exprimir, por exemplo, $\underline{P}_3$ em função de $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$ e $\underline{P}_5$.

$$\underline{P}_3 = \alpha_{31}\,\underline{P}_1 + \alpha_{32}\,\underline{P}_2 + \alpha_{35}\,\underline{P}_5$$

Ou seja:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha_{31}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + \alpha_{35}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5\alpha_{31} & +4\alpha_{32} & & =1 \\ 4\alpha_{31} & +6\alpha_{32} & & =0 \\ 2\alpha_{31} & +\alpha_{32} & +\alpha_{35} & =0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} & = & 3/7 \\ \alpha_{32} & = & -2/7 \\ \alpha_{35} & = & -4/7 \end{cases}$$

O coeficiente de x_3 na *Linha da Função Objectivo* é sujeito às mesmas *transformações* determinadas por α_{31}, α_{32} e α_{35}.

$$z_3 = (3/7)*(+10) + (-2/7)*(+9) + (-4/7)*(0) = +12/7$$

A inclusão no quadro da equação correspondente à *Função Objectivo* permite, mais claramente, identificar esta *transformação.*

		$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{P}_0$
x_3	*0*	*5*	*4*	*1*	*0*	*0*	200
x_4	*0*	*4*	*6*	*0*	*1*	*0*	230
x_5	*0*	*2*	*1*	*0*	*0*	*1*	70
x_0	*1*	*-10*	*-9*	$-c_3$	*0*	*0*	0

Note-se que se considera que este problema é um problema de *máximo*, e que o coeficiente de x_3 na *Função Objectivo* é igual a $+c_3$. Para o presente enunciado, $c_3 = 0$.

A *variável* x_0, representando o valor da *Função Objectivo*, deve fazer parte da *base* em cada quadro.

O conjunto de equações que permitem definir $\underline{P}_3$ em função dos vectores que constituem a base no quadro anterior é:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -c_3 \end{pmatrix} = \alpha_{30}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{31}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + \alpha_{35}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} & 5\alpha_{31} & +4\alpha_{32} & & =1 \\ & 4\alpha_{31} & +6\alpha_{32} & & =0 \\ & 2\alpha_{31} & +\alpha_{32} & +\alpha_{35} & =0 \\ \alpha_{30} & -10\alpha_{31} & -9\alpha_{32} & & =0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} & = & 3/7 \\ \alpha_{32} & = & -2/7 \\ \alpha_{35} & = & -4/7 \\ \alpha_{30} & = & 12/7 - c_3 \end{cases}$$

Supondo que o *Conjunto de Soluções Válidas* para um problema de *Programação Linear* não é vazio, uma *Solução Válida de Base* será:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \\ &x_1 \underline{P}_1 + x_2 \underline{P}_2 + \ldots\ldots + x_n \underline{P}_n = \underline{P}_0 \end{aligned}$$

O valor da *Função Objectivo* correspondente é

$$(2) \qquad z_0 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots\ldots + x_n c_n$$

Podemos definir um vector $\underline{P}_j$ em função dos *Vectores Linearmente Independentes* $\underline{P}_1$ a $\underline{P}_n$ através de

$$(3) \qquad \underline{P}_j = x_{1j} \underline{P}_1 + x_{2j} \underline{P}_2 + \ldots\ldots + x_{nj} \underline{P}_n$$

Com base nos mesmos coeficientes utilizados em *(3)*, podemos definir

$$(4) \qquad z_j = x_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \ldots\ldots + x_{nj} c_n$$

Finalmente, estamos em condições de enunciar e provar mais alguns teoremas.

Teorema V - Se numa iteração com *Valor de Função Objectivo* z_0, para qualquer valor fixo j, $z_j - c_j$ for menor que zero (problema de *maximização* da *Função Objectivo*), então existe um conjunto de *Soluções Válidas* tais que $z > z_0$ para todas as soluções do conjunto.

Para prova deste *Teorema*, considere-se

$$\begin{cases} \textit{Equação}\, 1 \ - \ \theta * \textit{Equação}\, 3 \\ \textit{Equação}\, 2 \ - \ \theta * \textit{Equação}\, 4 \end{cases}$$

i.e.

$$\underbrace{(x_1 - \theta x_{1j})}_{\geq 0} \underline{P}_1 + \underbrace{(x_2 - \theta x_{2j})}_{\geq 0} \underline{P}_2 + \ldots + \underbrace{(x_n - \theta x_{nj})}_{\geq 0} \underline{P}_n + \underbrace{\theta}_{\geq 0} \underline{P}_j = \underline{P}_0$$

$$(x_1 - \theta x_{1j}) c_1 + (x_2 - \theta x_{2j}) c_2 + \ldots + (x_n - \theta x_{nj}) c_n + \theta c_j = z_0 - \theta \underbrace{(z_j - c_j)}_{<0}$$

Através da escolha apropriada de θ, as expressões anteriores representam *Soluções Válidas* com um *Valor de Função Objectivo* maior que z_0, ou seja $z > z_0$.

Deve notar-se que as *Soluções Válidas* encontradas não são *Soluções Válidas de Base*, pois são expressas em função de ***n+1*** vectores.

A **Figura-2.5** ilustra o enunciado deste *Teorema*. Note-se que, para qualquer iteração, antes da obtenção da *Solução Óptima*, existe uma infinidade de *Soluções Válidas* com melhor *Valor da Função Objectivo*.

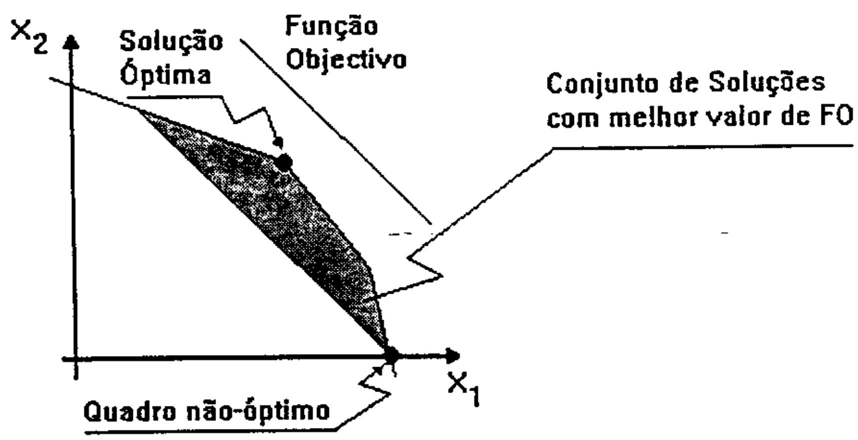


Figura-2.5

Teorema VI - Se para qualquer *Solução Válida de Base* $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ a condição $z_j - c_j \geq 0$ se verificar para todos os *j*, então as *Equações 1* e *2* constituem uma *Solução Válida de Base* com *Valor de Função Objectivo* máximo (problema de maximização).

A *Solução* actual é $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$

$$x_1\, \underline{P_1} + x_1\, \underline{P_1} + \ldots\ldots + x_1\, \underline{P_1} = \underline{P_0} \quad \leftarrow \text{ Condições}$$
$$z_0 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots\ldots + x_n c_n \quad \leftarrow \text{ Função Objectivo}$$

Vamos começar por admitir que existe uma outra *Solução de Custo Máximo*.

Essa outra *Solução* deverá ter a forma

(5) $\quad y_1\, \underline{P_1'} + y_2\, \underline{P_2'} + \ldots\ldots + y_n\, \underline{P_n'} = \underline{P_0} \quad \leftarrow$ Condições

(6) $\quad z^* = y_1 c_1' + y_2 c_2' + \ldots\ldots + y_n c_n' \quad \leftarrow$ Função Objectivo

Pretendemos provar que $z_0 \geq z^*$.

Sabendo que $z_j' - c_j' \geq 0$, teremos, para todos os *j*

$$z_j' \geq c_j'$$

Pode-se, portanto, escrever

(7) $\quad z^* \leq y_1 z_1' + y_2 z_2' + \ldots\ldots + y_n z_n'$

Substituindo *(3)* em *(5)*

(8) $\quad y_1(x_{11}\,\underset{\sim}{P_1}+\ldots+x_{n1}\,\underset{\sim}{P_n})+\ldots+y_n(x_{1n}\,\underset{\sim}{P_1}+\ldots+x_{nn}\,\underset{\sim}{P_n}) = \underset{\sim}{P_0}$

$$(y_1x_{11}+y_2x_{12}+\ldots+y_nx_{1n})\,\underset{\sim}{P_1}+\ldots+(y_1x_{n1}+y_2x_{n2}+\ldots+y_nx_{nn})\,\underset{\sim}{P_n} = \underset{\sim}{P_0}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} y_jx_{1j})\,\underset{\sim}{P_1}+\ldots\ldots+(\sum_{j=1}^{n} y_jx_{nj})\,\underset{\sim}{P_n} = \underset{\sim}{P_0}$$

Substituindo os z_j' em *(7)*

$$z^* \leq y_1(x_{11}c_1+\ldots+x_{n1}c_n)+\ldots+y_n(x_{1n}c_1+\ldots+x_{nn}c_n)$$

o que é equivalente a:

(9) $\quad z^* \leq (\sum_{j=1}^{n} y_jx_{1j})c_1+\ldots\ldots+(\sum_{j=1}^{n} y_jx_{nj})c_n$

As *Equações 1* e *8* devem ser idênticas, dada a *Independência Linear* dos vectores $\underset{\sim}{P_1}$ a $\underset{\sim}{P_n}$. Portanto,

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=1}^{n} y_jx_{1j} \\ x_2 = \sum_{j=1}^{n} y_jx_{2j} \\ \quad etc. \end{cases}$$

A partir de *(9)* podemos escrever

$$z^* \leq x_1c_1+\ldots\ldots+x_nc_n \leq z_0$$

e

$$z_0 \geq z^*$$

Não foi, portanto, possível encontrar uma solução distinta com melhor valor de *Função Objectivo*.

2.3 Modelo de Transportes

2.3.1 Introdução

O *Modelo de Transportes* traduz uma situação em que se pretende *minimizar* (maximizar) o *custo total de transporte* de um *artigo* entre um conjunto de *origens* e um conjunto de *destinos*.

2.3.2 Definição Matemática

Para ***m origens*** e ***n destinos***, seja a_i a ***disponibilidade*** na ***origem i*** e b_j a ***procura*** no ***destino j***.

Seja c_{ij} o ***custo unitário de transporte*** entre a *origem* i e o *destino* j.

Defina-se como ***objectivo*** a ***Minimização do Custo Total de Transporte.***

Pretende-se determinar que quantidades x_{ij} devem ser transportadas entre cada *origem* i e cada *destino* j para obter esse *custo mínimo*.

$$\min x_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad ; i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad ; j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Tanto a *Função Objectivo* como as *Restrições* são lineares, pelo que o modelo pode ser tratado como um *Problema de Programação Linear.*

Deve observar-se a estrutura especial deste modelo:

- Todas as *Condições* são do tipo "igualdade".
- Os *coeficientes* não nulos das *variáveis*, nas *condições* são iguais a *1*.

2.3.3 Balanceamento de um Modelo de Transportes

Para o *Modelo de Transportes* devemos ter igualdade entre a ***Disponibilidade Total*** e a ***Procura Total***, *i.e.*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Quando não houver equilíbrio entre a *disponibilidade* e a *procura*, é possível introduzir uma ***Origem Artificial*** se a *disponibilidade* for inferior à *procura*, ou um ***Destino Artificial*** se a *disponibilidade* exceder a *procura*.

Numa solução, quantidades transportadas de uma *Origem Artificial* para qualquer *destino* correspondem a procura não satisfeita nesse *destino*. Quantidades recebidas de qualquer origem para um *Destino Artificial* correspondem a disponibilidade não utilizada nessa origem.

2.3.4 Variáveis Básicas num Modelo de Transportes

O *Problema de Transportes* é, como vimos, um *Problema de Programação Linear*. Como tal, o número de *Variáveis Básicas* é igual ao número de *equações linearmente independentes*.

Vimos que, para o *Problema de Transportes*, o *total da procura* é igual ao *total da disponibilidade*. Uma das condições pode, portanto, ser obtida a partir das restantes.

Para ***m*** origens e ***n*** destinos, temos um total de *(m+n)* condições. O número de *equações linearmente independentes* é *(m+n-1)*.

2.3.5 O Modelo de Transportes e o Algoritmo do Simplex

Considere-se o *Problema de Transportes*

Destino j

Origem i	**a**	**b**	**c**	
A	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
B	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
	b_1	b_2	b_3	

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}		
1	1	1	0	0	0	a_1	**Condições sobre**
0	0	0	1	1	1	a_2	**as Origens**
1	0	0	1	0	0	b_1	**Condições**
0	1	0	0	1	0	b_2	**sobre os**
0	0	1	0	0	1	b_3	**Destinos**
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}		

O quadro anterior não apresenta as características necessárias a um *Quadro Válido de Base*. Para as obter, teríamos que introduzir uma *Variável Artificial* por cada condição do problema, e resolvê-lo, por exemplo, com a *Técnica das Duas Fases*.

2.3.6 Solução Válida de Base para o Modelo de Transportes

As condições que uma *Solução Válida de Base* deve cumprir traduzem-se na verificação das condições de *Disponibilidade* e de *Procura*, na verificação das *Condições de Não-Negatividade* e na existência de *(m+n-1)* variáveis não-nulas.

Observemos o ***Quadro de Transportes*** da **Figura-2.6**

Na coluna à esquerda do quadro identificam-se as várias ***origens*** do problema.

Na linha acima do quadro identificam-se os vários ***destinos*** do problema.

A coluna à direita do quadro representa as disponibilidades em cada uma das origens, enquanto que a linha abaixo do quadro representa a procura em cada um dos destinos.

No canto inferior direito de cada célula, encontra-se representado o custo unitário de transporte entre a origem que corresponde à linha do quadro em que a célula se situa e o destino que corresponde à coluna do quadro em que a célula se situa.

Assim, por exemplo, a *disponibilidade* na *origem **A*** é de ***100*** unidades, a *procura* no *destino **b*** é de ***90*** unidades, e o *custo unitário de transporte* entre ***A*** e ***b*** é de ***1*** unidade monetária.

No centro de cada *célula* encontra-se inscrito um valor que representa a quantidade a transportar entre a origem e destino que correspondem à posição da célula. O quadro representa uma *solução válida*, como passamos a verificar.

Destino j

		a	b	c	
	A	7	70 4	30 9	100
Origem i	**B**	40 2	1	90 5	130
	C	6	20 3	8	20
		40	90	120	

Figura-2.6

- As equações representadas pelas *linhas do quadro* verificam:

$$70+30=100$$
$$40+90=130$$
$$20=20$$

- As equações representadas pelas *colunas do quadro* verificam:

$$40=40$$
$$70+20=90$$
$$30+90=120$$

- Nenhuma das variáveis assume valores negativos ($x_{ij} \geq 0$).

Podemos afirmar que o *Quadro* representa uma *Solução Válida.*

- Ao todo temos ***5 variáveis*** não-nulas, o que corresponde ao número de ***equações linearmente independentes.***

Podemos afirmar que o *Quadro* representa, portanto, uma *Solução Válida de Base.*

A *Solução* é:

$x_{Ab}=70$ unidades transportadas entre A e b
$x_{Ac}=30$ unidades transportadas entre A e c
$x_{Ba}=40$ unidades transportadas entre B e a
$x_{Bc}=90$ unidades transportadas entre B e c
$x_{Cb}=20$ unidades transportadas entre C e b

O custo dessa solução é:

$$C=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=$$
$$=4*70+9*30+2*40+5*90+3*20=$$
$$=1140$$

2.3.7 Análise de Optimabilidade de uma Solução de Base

A *Solução* anterior só será *óptima*, se não puder ser melhorada.

Tal como procedemos para a execução do *Algoritmo do Simplex*, temos que verificar se a entrada na *base* de uma *variável não-básica* do quadro tem potencial para melhorar o valor da *Função Objectivo.*

Qualquer iteração deve traduzir-se pela passagem de uma *variável básica* a *não-básica*, e de uma *variável não-básica* a *básica*. Qualquer iteração deve, também, garantir que se continuam a verificar as equações relativas às *linhas* (disponibilidades) e às *colunas* do *Quadro* (procuras).

Para cada *célula não-básica*, vamos construir um *circuito* que aumente essa célula de uma unidade, que passe apenas em outras *células básicas*, de tal forma que se mantenha a verificação das equações do *Quadro*.

Determinamos, então, a variação do valor da *Função Objectivo*. Esse valor indicará o *Ganho Potencial* associado à passagem da célula a *célula básica*.

Seleccionemos a célula *(A,a)*. Aumentar uma unidade nesta célula desequilibra a *1ª coluna* do *Quadro*. Será necessário subtrair uma unidade à *célula (B,a)*. Nestas condições, ficou desequilibrada a equação relativa à *2ª linha* do quadro. Será necessário somar uma unidade à *célula (B,c)*. Para equilibrar a *3ª coluna*, subtrai-se uma unidade à *célula (A,c)*. Esta última subtracção compensa o desequilíbrio causado na *1ª linha* quando se colocou uma unidade no início do circuito em *(A,a)*.

Destino j

Origem i	**a**	**b**	**c**	
A	+1 → ↑ 7	— 70 — 4	→ -1 30 ↓ 9	**100**
B	-1 ↑ 40 — 2	← — — 1	← +1 90 5	**130**
C	6	20 3	8	**20**
	40	**90**	**120**	

A este circuito corresponde uma variação no *Valor da Função Objectivo*:

$$(A,a)^{+} \rightarrow (B,a)^{-} \rightarrow (B,c)^{+} \rightarrow (A,c)^{-}$$
$$+7 \quad -2 \quad +5 \quad -9 \quad = +1$$

Temos, portanto, para *Ganho Potencial* da *célula (A,a)*:

$$\Delta(A,a) = +1$$

Podemos conduzir um raciocínio análogo para as outras *células não-básicas* do quadro, para calcularmos os respectivos *Ganhos Potenciais*.

Destino j

		a	b	c	
	A	7	-1 70 → ↑ 4	+1 — 30 │ 9	**100**
Origem i	**B**	40 2	│ +1 ← — 1	↓ -1 ← 90 5	**130**
	C	6	20 3	8	**20**
		40	**90**	**120**	

A este circuito corresponde uma variação no *Valor da Função Objectivo*:

$$(B,b)^{+} \rightarrow (A,b)^{-} \rightarrow (A,c)^{+} \rightarrow (B,c)^{-}$$

$$+1 \quad -4 \quad +9 \quad -5 \quad = +1$$

Temos, portanto, para *Ganho Potencial* da *célula (B,b)*:

$$\Delta(B,b) = +1$$

Destino j

		a	b	c	
	A	7	+1 70 → ↑ 4	-1 — 30 │ 9	**100**
Origem i	**B**	40 2	│ │ │ 1	↓ 90 │ 5	**130**
	C	6	│ -1 20 ← 3	│ +1 — ↓ 8	**20**
		40	**90**	**120**	

A este circuito corresponde uma variação no *Valor da Função Objectivo*:

$$(C,c)^{+} \rightarrow (C,b)^{-} \rightarrow (A,b)^{+} \rightarrow (A,c)^{-}$$

$$+8 \quad -3 \quad +4 \quad -9 \quad = 0$$

Temos, portanto, para *Ganho Potencial* da *célula (C,c)*:

$$\Delta(C,c) = 0$$

Destino j

		a	b	c	
	A	7	+1 70 ← ↓ 4	-1 — 30 ↑ 9	**100**
Origem i	B	-1 40 → | 2	→ | → | 1	| +1 → 90 5	**130**
	C	↑ +1 — ← 6	↓ -1 — 20 3	8	**20**
		40	**90**	**120**	

A este circuito corresponde uma variação no *Valor da Função Objectivo*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (C,a)^+ & \rightarrow & (B,a)^- & \rightarrow & (B,c)^+ & \rightarrow & (A,c)^- & \rightarrow & (A,b)^+ & \rightarrow & (C,b)^- & & \\ +6 & & -2 & & +5 & & -9 & & +4 & & -3 & = & +1 \end{array}$$

Temos, portanto, para *Ganho Potencial* da *célula (C,c)*:

$$\Delta(C,a) = +1$$

Resumindo,

$$\Delta(A,a) = +1$$
$$\Delta(B,b) = +1$$
$$\Delta(C,a) = +1$$
$$\Delta(C,c) = 0$$

Nenhuma célula possui potencial para melhorar o valor da *Função Objectivo*, pelo que a solução apresentada constitui uma ***Solução Óptima***.

Deve observar-se, porém, que existe uma ***Solução Óptima Alternativa***, *i.e.* uma outra *Solução Válida de Base* com o mesmo valor da *Função Objectivo*. Essa solução obtém-se passando a *célula (C,c)* a *Básica*.

Para passagem ao *Quadro Válido de Base* com *(C,c)* na *Base*, devemos observar o circuito que construímos quando do cálculo do *Ganho Potencial* para *(C,c)*, e determinar o valor máximo que podemos colocar nessa célula, sem que o valor das restantes *células básicas* do circuito assuma valores negativos. Este valor máximo será determinado por uma das células, que passará a *não-básica* no quadro seguinte.

Destino j

Origem i	a	b	c	
A	7	70+θ / 4	30-θ / 9	**100**
B	40 / 2	1	90 / 5	**130**
C	6	20-θ / 3	+θ / 8	**20**
	40	**90**	**120**	

Para que o novo quadro seja válido, é necessário que:

$$20-\theta \geq 0$$
$$30-\theta \geq 0$$

ou seja, que

$$\theta_{max} = 20$$

A *Solução Óptima Alternativa* obtém-se substituindo θ por *20*.

Destino j

Origem i	a	b	c	
A	7	90 / 4	10 / 9	**100**
B	40 / 2	1	90 / 5	**130**
C	6	3	20 / 8	**20**
	40	**90**	**120**	

O custo dessa solução é:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = \\ &= 4*90+9*10+2*40+5*90+8*20 = \\ &= 1140 \end{aligned}$$

equivalente, portanto, ao da anterior solução.

2.3.8 Obtenção da Primeira Solução Válida de Base

2.3.8.1 Introdução

O *Quadro de Transportes* que serviu de ponto de partida para a análise de optimabilidade era já um *Quadro Válido de Base*.

Para um problema apresentado na forma de um conjunto de *disponibilidades* nas *origens* e valores de *procura* nos *destinos*, torna-se necessário definir metodologias que permitam encontrar uma primeira *Solução Válida de Base*.

Vamos referir dois métodos de obtenção de um *Quadro Válido de Base*, respectivamente o ***Método do Canto Noroeste*** e o ***Método do Custo Mínimo***.

2.3.8.2 Método do Canto NW

1 - Começar pela *célula* no *canto superior esquerdo* do quadro (*Canto NW*)

2- Inscrever na *célula* uma quantidade que não exceda a *disponibilidade* na *origem* correspondente à *célula* nem a *procura* no *destino* correspondente à *célula*.

3- Subtrair à *disponibilidade* na *origem* e na *procura* no *destino* correspondentes à *célula* o valor que lhe foi atribuído.

4- No passo anterior, um dos valores da *disponibilidade* ou *procura* residual é reduzido a zero. Considerar que, consoante o caso, a *linha* ficou ***saturada*** ou a *coluna* ficou ***saturada***. A *linha* ou *coluna* do quadro nesta condição deve ser *marcada* (***cortada***). Quando ocorre uma situação em que, simultaneamente, uma *linha* e uma *coluna* forem *saturadas*, apenas uma deve ser considerada como tal.

5- Se no passo anterior uma *linha* tiver sido *saturada*, deve passar-se à *linha* seguinte, e voltar ao *passo* 2. Se tiver sido *saturada* uma *coluna*, deve passar-se à *coluna* seguinte e voltar ao *passo* 2.

6- O processo termina quando faltar apenas uma *linha* ou uma *coluna* por saturar.

Vamos exemplificar este método a um *Problema de Transportes* com três *origens* e três *destinos*, com os valores de *disponibilidade* e *procura* indicados.

Origem	Disponibilidade
A	100
B	130
C	20

Destino	Procura
a	40
b	90
c	120

Destino j

Origem i	**a**	**b**	**c**	
A	**40**			**(100) 60**
B				**130**
C				**20**
	(40) **0**	**90**	**120**	

Destino j

Origem i	**a**	**b**	**c**	
A	**40**	**60**		**(100) (60) 0**
B				**130**
C				**20**
	(40) **0**	**(90)** **30**	**120**	

Destino j

Origem i		a	b	c	
	A	40	60		(100) (60) 0
	B		30		(130) 100
	C				20
		(40) 0	(90) (30) 0	120	

Destino j

Origem i		a	b	c	
	A	40	60		(100) (60) 0
	B		30	100	(130) (100) 0
	C				20
		(40) 0	(90) (30) 0	(120) 20	

Destino j

		a	b	c	
	A	40	60		(100) (60) 0
Origem i	B		30	100	(130) (100) 0
	C			20	20
		(40) 0	(90) (30) 0	(120) (20) 0	

Obtém-se a solução:

Destino j

		a	b	c	
	A	40	60		100
Origem i	B		30	100	130
	C			20	20
		40	90	120	

O processo de construção da solução garante que $x_{ij} \geq 0$, e que as equações relativas a cada linha e a cada coluna do quadro são verificadas.

O processo garante, também, que se obtêm $m+n-1$ variáveis não nulas (com m a representar o *número de origens* e n a representar o *número de destinos*). Trata--se, portanto, de uma ***Solução Válida de Base***.

Deve observar-se que, para a determinação da *Solução Válida de Base*, não é necessário ter em consideração a informação relativa aos *custos unitários de transporte* associados ao problema. Esta informação será relevante na aplicação do *Critério de Optimabilidade*.

2.3.8.3 Método do Custo Mínimo

A essência deste método consiste em procurar atribuir a maior quantidade possível a células de menor custo. Deve notar-se que não existe garantia de esta atribuição sequencial obter o resultado pretendido, uma vez que as primeiras atribuições vão determinar as células e quantidades que podem ser decididas posteriormente.

A identificação de *linhas* e *colunas* saturadas segue a mesma definição indicada para o *Método do Canto NW*. O critério de paragem é, também, idêntico.

Passamos a ilustrar a aplicação do método ao exemplo utilizado para a explicação sobre o *Método do Canto NW*.

Destino j

Origem i	a	b	c	
A	7	4	**100** 9	(100) 0
B	2	1	5	130
C	6	3	8	20
	40	90	(120) 20	

Destino j

Origem i	a	b	c	
A	7	4	**100** 9	(100) 0
B	2	1	5	130
C	6	3	**20** 8	(20) 0
	40	90	(120) (20) 0	

Destino j

Origem i		a	b	c	
	A	7	4	**100** 9	(100) 0
	B	2	1	5	130
	C	ε 6	3	**20** 8	(20) (0) 0
		(40) 40	90	(120) (20) 0	

Destino j

Origem i		a	b	c	
	A	7	4	**100** 9	(100) 0
	B	**40** 2	1	5	(130) 90
	C	ε 6	3	**20** 8	(20) (0) 0
		(40) (40) 0	90	(120) (20) 0	

Destino j

		a	b	c	
	A	7	4	**100** 9	(100) 0
Origem i	**B**	**40** 2	**90** 1	5	(130) 90
	C	ε 6	3	**20** 8	(20) (0) 0
		(40) (40) 0	(90) 0	(120) (20) 0	

A *solução* obtida corresponde ao quadro:

Destino j

		a	b	c	
	A	7	4	**100** 9	100
Origem i	**B**	**40** 2	**90** 1	5	130
	C	ε 6	3	**20** 8	20
		40	90	120	

O valor desta *solução* é:

$$C=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=$$

$$=9*100+2*40+1*90+6*\varepsilon+8*20=$$

$$=1230$$

Deve observar-se que o ε inscrito na *célula (C,a)* corresponde a um valor nulo. Ele representa uma *Variável Básica* ao nível zero.

Analogamente à terminologia que adoptámos quando do tratamento de problemas de *Programação Linear* com estas características, dizemos que o quadro representa uma ***Solução Válida Degenerada***. Contando com a célula preenchida com ε, o quadro apresenta $m+n-1=3+3-1=5$ *variáveis* na *base*, pelo que constitui um ***Quadro Válido de Base***.

2.3.9 Exemplo Numérico (*Método da Stepping Stone*)

O processo de cálculo que utilizámos para calcular os ***Ganhos Potenciais*** é, geralmente, designado por ***Método da Stepping Stone***. Este método **não é** adequado à solução de problemas de grande dimensão, sendo apresentado apenas no sentido de clarificar alguns dos conceitos relevantes.

Posteriormente apresentaremos um outro método adequado para aplicação a problemas reais.

Considerando o problema que tem servido de exemplo, adoptamos a *Solução Válida de Base* que resultou da aplicação da regra do *Canto NW*.

Destino j

		a	b	c	
	A	**40** (7)	**60** (4)	(9)	**100**
Origem i	B	(2)	**30** (1)	**100** (5)	**130**
	C	(6)	(3)	**20** (8)	**20**
		40	**90**	**120**	

O valor desta solução é:

$$C=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=$$
$$=7*40+4*60+1*30+5*100+8*20=$$
$$=1210$$

Circuitos e Ganhos Potenciais:

$\Delta(A,c)$

$$(A,c)^+ \rightarrow (B,c)^- \rightarrow (B,b)^+ \rightarrow (A,b)^-$$
$$+9 \quad -5 \quad +1 \quad -4 \quad = +1$$

$\Delta(B,a)$

$$(B,a)^+ \rightarrow (A,a)^- \rightarrow (A,b)^+ \rightarrow (B,b)^-$$
$$+2 \quad -7 \quad +4 \quad -1 \quad = -2$$

$\Delta(C,a)$

$$(C,a)^+ \rightarrow (A,a)^- \rightarrow (A,b)^+ \rightarrow (B,b)^- \rightarrow (B,c)^+ \rightarrow (C,c)^-$$
$$+6 \quad -7 \quad +4 \quad -1 \quad +5 \quad -8 \quad = -1$$

$\Delta(C,b)$

$$(C,b)^+ \rightarrow (B,b)^- \rightarrow (B,c)^+ \rightarrow (C,c)^-$$
$$+3 \quad -1 \quad +5 \quad -8 \quad = -1$$

A célula mais promissora é a ***(B,a)***, com um ganho potencial igual a ***-2***.

Devemos analisar o valor máximo que podemos colocar nessa célula, mantendo a validade do quadro:

Destino j

Origem i	**a**	**b**	**c**	
A	**40-θ** (7)	**60+θ** (4)	(9)	**100**
B	**+θ** (2)	**30-θ** (1)	**100** (5)	**130**
C	(6)	(3)	**20** (8)	**20**
	40	**90**	**120**	

O valor máximo que θ pode assumir é *30*.

∴ O valor da *Função Objectivo* deve decrescer de 2 * 30 = ***60*** unidades monetárias.

Substituindo θ por *30*, obtemos o *Quadro Válido de Base* seguinte.

Destino j

Origem i	a		b		c		
A	**10**	7	**90**	4		9	**100**
B	**30**	2		1	**100**	5	**130**
C		6		3	**20**	8	**20**
	40		**90**		**120**		

O valor desta solução é:

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = \\
&= 7*10+4*90+2*30+5*100+8*20 = \\
&= 1150
\end{aligned}
$$

A melhoria no valor da *Função Objectivo* confirma o que anteriormente se afirmou.

$$\Delta C = 1210 - 1150 = 60$$

Circuitos e Ganhos Potenciais:

$\Delta(A,c)$

$$(A,c)^+ \rightarrow (B,c)^- \rightarrow (B,a)^+ \rightarrow (A,a)^-$$
$$+9 \quad -5 \quad +2 \quad -7 \quad = -1$$

$\Delta(B,b)$

$$(B,b)^+ \rightarrow (B,a)^- \rightarrow (A,a)^+ \rightarrow (A,b)^-$$
$$+1 \quad -2 \quad +7 \quad -4 \quad = +2$$

$\Delta(C,a)$

$$(C,a)^+ \rightarrow (B,a)^- \rightarrow (B,c)^+ \rightarrow (C,c)^-$$
$$+6 \quad -2 \quad +5 \quad -8 \quad = +1$$

$\Delta(C,b)$

$$(C,b)^+ \rightarrow (A,b)^- \rightarrow (A,a)^+ \rightarrow (B,a)^- \rightarrow (B,c)^+ \rightarrow (C,c)^-$$
$$+3 \quad -4 \quad +7 \quad -2 \quad +5 \quad -8 \quad = +1$$

A célula mais promissora (a única) é a *(A,c)*, com um ganho potencial igual a *-1*.

Devemos analisar o valor máximo que podemos colocar nessa célula, mantendo a validade do quadro:

Destino j

		a	b	c	
	A	10-θ (7)	90 (4)	+θ (9)	**100**
Origem i	**B**	30+θ (2)	(1)	100-θ (5)	**130**
	C	(6)	(3)	20 (8)	**20**
		40	**90**	**120**	

O valor máximo que θ pode assumir é *10*.

O valor da Função Objectivo deve decrescer de *1 * 10 = 10* unidades monetárias.

Substituindo θ por *10*, obtemos o *Quadro Válido de Base* seguinte.

Destino j

		a	b	c	
	A	(7)	90 (4)	10 (9)	**100**
Origem i	**B**	40 (2)	(1)	90 (5)	**130**
	C	(6)	(3)	20 (8)	**20**
		40	**90**	**120**	

O valor desta solução é:

$$C = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} =$$
$$= 4*90+9*10+2*40+5*90+8*20 =$$
$$= 1140$$

A melhoria no valor da *Função Objectivo* confirma o que anteriormente se afirmou.

$$\Delta C = 1150 - 1140 = 10$$

Circuitos e Ganhos Potenciais:

$\Delta(A,a)$

$$(A,a)^+ \to (A,c)^- \to (B,c)^+ \to (B,a)^-$$
$$+7 \quad -9 \quad +5 \quad -2 \quad = +1$$

$\Delta(B,b)$

$$(B,b)^+ \to (A,b)^- \to (A,c)^+ \to (B,c)^-$$
$$+1 \quad -4 \quad +9 \quad -5 \quad = +1$$

$\Delta(C,a)$

$$(C,a)^+ \to (B,a)^- \to (B,c)^+ \to (C,c)^-$$
$$+6 \quad -2 \quad +5 \quad -8 \quad = +1$$

$\Delta(C,b)$

$$(C,b)^+ \to (A,b)^- \to (A,c)^+ \to (C,c)^-$$
$$+3 \quad -4 \quad +9 \quad -8 \quad = 0$$

Como se pode observar, o valor da *Função Objectivo* correspondente ao último quadro não pode ser melhorada, pelo que ela constitui uma ***Solução Óptima***. Existe, contudo, uma ***Solução Alternativa*** que se pode obter passando a célula ***(C,b)*** a *básica*.

A ***Solução Alternativa*** pode ser obtida através do *circuito básico*

Destino j

		a	b	c	
	A	(7)	90-θ (4)	10+θ (9)	100
Origem i	B	40 (2)	(1)	90 (5)	130
	C	(6)	+θ (3)	20-θ (8)	20
		40	90	120	

Destino j

		a	b	c	
	A	(7)	70 (4)	30 (9)	100
Origem i	B	40 (2)	(1)	90 (5)	130
	C	(6)	20 (3)	(8)	20
		40	90	120	

O valor desta solução é, evidentemente:

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = \\
&= 4*70+9*30+2*40+5*90+3*20= \\
&= 1140
\end{aligned}
$$

2.3.10 O Método dos Multiplicadores

O ***Método dos Multiplicadores*** reproduz as mesmas iterações obtidas pelo ***Método da Stepping Stone***.

O método baseia-se na ***Teoria da Dualidade*** que será abordada posteriormente. Pretende-se, nesta fase, apresentar a mecânica do método.

1 - Associa-se a cada linha do quadro de transportes um ***multiplicador*** U_i. Analogamente, associa-se a cada coluna do quadro de transportes um ***multiplicador*** V_j.

2 - Para cada *Variável Básica* do quadro (na *Solução Válida de Base* corrente) escreve-se uma equação

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

Havendo ***m+n-1*** variáveis na base, o processo gera ***m+n-1*** equações, para um total de ***m+n multiplicadores***.

3 - Atribui-se um valor arbitrário a um dos ***multiplicadores***, e resolve-se o sistema de ***m+n-1*** equações.

4 - Para cada ***Célula Não-Básica*** calcula-se

$$\overline{C}_{pq} = C_{pq} - U_p - V_q$$

Estes valores, assim calculados, reproduzem os ***Ganhos Potenciais*** calculados pelo ***Método da Stepping Stone***.

Passamos a analisar a execução de um exemplo numérico.

Tomemos o ***Exemplo de Transportes*** já utilizado anteriormente, e a ***Solução Válida de Base*** indicada no quadro.

V_j		V_1	V_2	V_3	
U_i		**a**	**b**	**c**	
U_1	**A**	**10** (7)	**90** (4)	(9)	**100**
U_2	**B**	**30** (2)	(1)	**100** (5)	**130**
U_3	**C**	(6)	(3)	**20** (8)	**20**
		40	**90**	**120**	

$$U_1 + V_1 = 7$$
$$U_1 + V_2 = 4$$
$$U_2 + V_1 = 2$$
$$U_2 + V_3 = 5$$
$$U_3 + V_3 = 8$$

Tomando, arbitrariamente, $U_1 = 0$, obtemos para os restantes *multiplicadores*:

$$V_1 = 7$$
$$V_2 = 4$$
$$U_2 = 2 - V_1 = 2 - 7 = -5$$
$$V_3 = 5 - U_2 = 5 - (-5) = 10$$
$$U_3 = 8 - V_3 = 8 - 10 = -2$$

Colocando o valor destes ***multiplicadores*** no quadro, obtemos

U_i	V_j	**+7**	**+4**	**+10**	
		a	**b**	**c**	
0	**A**	**10** (7)	**90** (4)	(9)	**100**
-5	**B**	**30** (2)	(1)	**100** (5)	**130**
-2	**C**	(6)	(3)	**20** (8)	**20**
		40	**90**	**120**	

Para as *Células Não-Básicas (A,c), (B,b), (C,a)* e *(C,b)* podemos, agora, calcular os *Ganhos Potenciais*:

$$\overline{C}_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 9 - 0 - 10 = -1$$
$$\overline{C}_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 1 - (-5) - 4 = +2$$
$$\overline{C}_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 6 - (-2) - 7 = +1$$
$$\overline{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 3 - (-2) - 4 = +1$$

Estes *Ganhos Potenciais* podem ser inscritos no quadro, e obtemos

V_j		+7	+4	+10	
U_i		a	b	c	
0	A	10 7	90 4	-1 9	100
-5	B	30 2	+2 1	100 5	130
-2	C	+1 6	+1 3	20 8	20
		40	90	120	

A única célula promissora é a *célula (A,c)*, que oferece uma redução de *1* unidade monetária por unidade atribuída.

A mudança de base (para o *Quadro Válido de Base* seguinte) segue a mesma metodologia utilizada quando da descrição do *Método da Stepping Stone*.

V_j		+7	+4	+10	
U_i		a	b	c	
0	A	$10-\theta$ 7	90 4	-1 $+\theta$ 9	100
-5	B	$30+\theta$ 2	+2 1	$100-\theta$ 5	130
-2	C	+1 6	+1 3	20 8	20
		40	90	120	

O novo quadro toma a forma

	V_j	V_1	V_2	V_3	
U_i		a	b	c	
U_1	A	 7	90 4	10 9	100
U_2	B	40 2	 1	90 5	130
U_3	C	 6	 3	20 8	20
		40	90	120	

$$U_1 + V_2 = 4$$
$$U_1 + V_3 = 9$$
$$U_2 + V_1 = 2$$
$$U_2 + V_3 = 5$$
$$U_3 + V_3 = 8$$

Tomando, arbitrariamente, $U_1 = 0$, obtemos para os restantes *multiplicadores*:

$$V_2 = 4$$
$$V_3 = 9$$
$$V_1 = 6$$
$$U_2 = -4$$
$$U_3 = -1$$

	V_j	+6	+4	+9	
U_i		a	b	c	
0	A	$\boxed{+1}$ 7	90 4	10 9	100
-4	B	40 2	$\boxed{+1}$ 1	90 5	130
-1	C	$\boxed{+1}$ 6	$\boxed{0}$ 3	20 8	20
		40	90	120	

Como se pode observar, o último quadro constitui uma ***Solução Óptima***.

2.3.11 Degenerescência num Problema de Transportes

Uma situação de ***Degenerescência*** ocorre num problema de transportes quando numa iteração mais do que uma *Variável Básica* for reduzida a zero. Já tivemos oportunidade de encontrar este tipo de situação. Vamos, agora, introduzir um possível contexto em que a situação de ***Degenerescência*** pode ocorrer, e analisar métodos para tratamento desta situação.

O *Problema-Exemplo* que temos vindo a utilizar tem a seguinte estrutura de custos unitários, disponibilidades e valores de procura:

	a	b	c	
A	7	4	9	**100**
B	2	1	5	**130**
C	6	3	8	**20**
	40	**90**	**120**	

Suponhamos que esta estrutura de custos corresponde a um problema de distribuição semanal de determinada empresa e que, no início de uma semana, é rectificada a informação sobre os *Custos Unitários de Transporte*, devendo ser adoptado o seguinte quadro:

	a	b	c	
A	7	5	9	**100**
B	1	0	5	**130**
C	6	4	8	**20**
	40	**90**	**120**	

Duas alternativas se põem na resolução:

1- Executar o problema como se se tratasse de um novo problema, *i.e.* construir a *primeira solução válida de base* pelo *Canto NW*, e prosseguir através do cálculo dos *Ganhos Potenciais* pelo método dos *multiplicadores*, até encontrar uma *Solução Óptima*.

2- Dado que a estrutura de *Custos Unitários* sofreu apenas uma pequena alteração, e atendendo a que a *Solução Óptima* obtida para a anterior estrutura de custos constitui uma *Solução Válida de Base*, independente dos custos, será razoável progredir a solução a partir do último quadro obtido.

Como *Solução Óptima*, tínhamos:

	V_j	6	5	9	
U_i		a	b	c	
0	A	$\boxed{+1}$ 7	$90-\theta$ 5	$10+\theta$ 9	100
-4	B	40 2	$\boxed{-1}$ $+\theta$ 0	$90-\theta$ 5	130
-1	C	$\boxed{+1}$ 6	$\boxed{0}$ 4	20 8	20
		40	90	120	

$\theta_{max} = 90$

e o próximo quadro resulta

	V_j				
U_i		a	b	c	
	A	7	5	100 9	100
	B	40 2	90 0	5	130
	C	6	4	20 8	20
		40	90	120	

Poderíamos observar, imediatamente, que o quadro só possui *4 variáveis básicas*, quando deveria ter *5 variáveis básicas* (quadro com *3 linhas* e *3 colunas*).

Se se pretendesse progredir no cálculo dos *multiplicadores*, obter-se-ia

	V_j	?	?	9	
U_i		a	b	c	
0	A	 7	 5	100 9	100
?	B	40 2	90 0	 5	130
-1	C	 6	 4	20 8	20
		40	90	120	

O problema surgiu pelo facto de numa iteração termos passado, simultaneamente, duas *Variáveis Básicas* a *Não-Básicas*.

A solução para este problema passa por:

1-Reconhecer que vai ocorrer uma situação de ***Degenerescência***.

2-Considerar que apenas uma das *Células Básicas* passa a *Não-Básica*. As outras células que vêm o seu valor reduzido a zero continuam a ser consideradas como *Células Básicas* ao nível zero, e são preenchidas com ε.

Assim, para o exemplo em questão, podemos considerar que a célula *(A,b)* se mantém na base, passando o quadro a ser representado por:

	V_j	7	5	9	
U_i		a	b	c	
0	A	 7	ε 5	100 9	100
-5	B	40 2	90 0	 5	130
-1	C	 6	 4	20 8	20
		40	90	120	

O cálculo dos *multiplicadores* já foi possível, e a solução progredia pelo processo já descrito.

A escolha arbitrária da *variável* de valor nulo que deve ser considerada *básica* pode conduzir a uma situação para a qual não é possível determinar o valor dos *multiplicadores*.

Por exemplo, se num exemplo viéssemos a obter

	a	b	c	
A	60	ε		60
B	5	80		85
C			10	10
	65	80	10	

não seria possível calcular o valor dos *multiplicadores*.

À semelhança do procedimento adoptado quando tratámos a questão da *Degenerescência* para problemas de *Programação Linear*, podemos *desequilibrar* o problema (*perturbação*), alterando de quantidades infinitésimais as *disponibilidades* e *procuras*.

Para o nosso exemplo, podemos admitir uma *disponibilidade* adicional de ε em cada *origem*, e uma *procura* adicional de 3ε no terceiro *destino*, conforme se representa no quadro.

	a	b	c	
A	7	5	100+ε 9	100+ε
B	40 2	90 0	ε 5	130+ε
C	6	4	20+ε 8	20+ε
	40	90	120+3ε	

Havendo, necessariamente, um ε em cada linha do quadro, deixará de se verificar a situação de *Degenerescência*.

2.3.12 Simplificação de Problemas de Transportes

Tal como nas fomulações de *Programação Linear*, a formulação de *Transportes* permite algumas simplificações, que passamos a enunciar.

1-Podem-se multiplicar ou dividir todos os *custos unitários de transporte* por um factor, sem que se altere a *Solução Óptima do Problema*.

Note-se que, para a estrutura de *custos* originais se tem

$$C = \sum_i \sum_j C_{ij} * x_{ij}$$

Para o mesmo problema, com os *custos unitários de transporte* divididos por um factor ***k***, temos

$$C' = \sum_i \sum_j (C_{ij}/k) * x_{ij} = (1/k) * \sum_i \sum_j C_{ij} * x_{ij} = C/k$$

i.e. aplicando o mesmo factor a todas as rotas, e atendendo a que toda a *disponibilidade* deve ser transportada, a solução é a mesma, resultando num valor de *Função Objectivo* afectada do factor ***k***.

2-Podem-se subtrair factores constantes aos *custos unitários de transporte* do quadro, sem que se altere a *Solução Óptima*.

$$C' = \sum_i \sum_j (C_{ij} - k) * x_{ij} = \sum_i \sum_j C_{ij} * x_{ij} - k * \sum_i \sum_j x_{ij} = C - k$$

3-Pode-se subtrair um factor a todos os *custos* de uma *linha* (*coluna*) do quadro, sem que se altere a *Solução Óptima*. Sem perda de generalidade, podemos considerar a primeira *linha* do quadro *(i=1)*.

$$\begin{aligned}
C' &= \sum_{i=2} \sum_{j=1} C_{ij} * x_{ij} + \sum_{j=1} (C_{1j} - k) * x_{1j} = \\
&= \sum_{i=2} \sum_{j=1} C_{ij} * x_{ij} + \sum_{j=1} C_{1j} * x_{1j} - \sum_{j=1} k * x_{1j} = \\
&= \sum_{i=1} \sum_{j=1} C_{ij} * x_{ij} - k * \sum_{j=1} x_{1j} = \\
&= \sum_{i=1} \sum_{j=1} C_{ij} * x_{ij} - k * a_1 = \\
&= C - k'
\end{aligned}$$

4-Podem-se dividir todas os valores de *disponibilidades* e de *procura* por um factor.

As regras enunciadas podem facilitar a execução de problemas, por exemplo, transformando a estrutura de custos em custos inteiros ou reduzindo a magnitude destes custos.

A possibilidade de subtrair aos custos de linhas e/ou colunas permite simplificar a estrutura de custos e, por exemplo, facilitar a construção de uma primeira *Solução Válida de Base* pela *Regra do Custo Mínimo.*

Por exemplo, a matriz de custos

7	4	9
2	1	5
6	3	8

pode ser convertida em

5	4	9
0	1	5
4	3	8

o que corresponde a reduzir todos os custos de transporte para o primeiro destino em *2* unidades.

Progredindo da mesma forma, obtemos

5	3	9
0	0	5
4	2	8

5	3	4
0	0	0
4	2	3

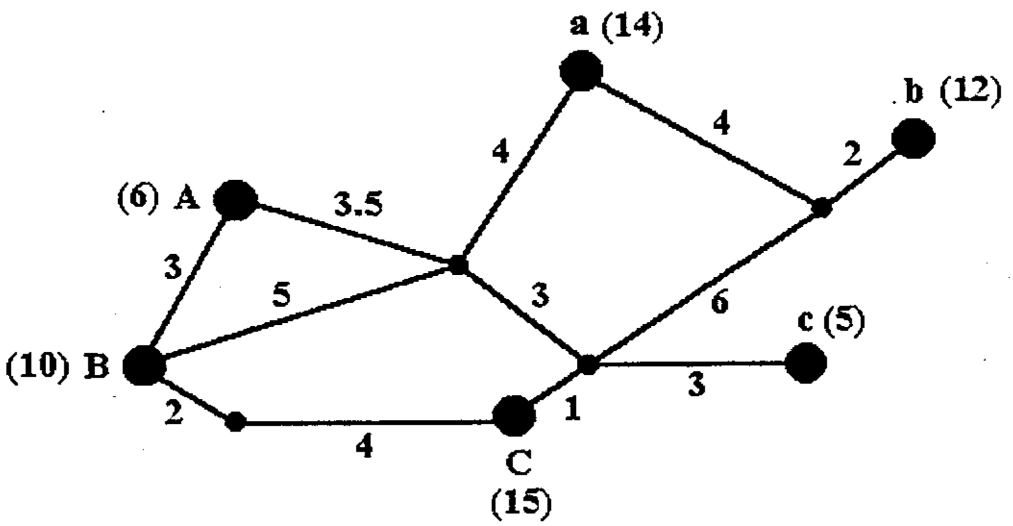
2	0	1
0	0	0
4	2	3

2	0	1
0	0	0
2	0	1

2.3.13 Métodos de Formulação em Problemas de Transportes

2.3.13.1 Introdução

O *Modelo de Transportes* que se apresentou oportunamente subentendia o conhecimento prévio dos *Custos Unitários de Transporte*. Assim, por exemplo, se estes *Custos Unitários* representarem *Distâncias Mínimas* entre *pontos-origem* e *pontos-destino* (**Figura-2.7**), é necessário que o problema da determinação destas *Distâncias Mínimas* tenha sido resolvido previamente.



Matriz de Distâncias

	a	b	c	
A	7.5	13.5	9.5	6
B	9.0	15.0	10.0	10
C	8.0	9.0	4.0	15
	14	12	5	

Figura-2.7

Também, os *Custos Unitários de Transporte* podem englobar, por exemplo, *Custos de Produção*.

2.3.13.2 Modelo de Transbordo *(Transshipment of Goods)*

Considere-se um *Problema de Transportes* (**Figura-2.8**) em que as *origens* representem fábricas com *capacidades* conhecidas e os *destinos* representem clientes com *procura* conhecida.

Considere-se, também, que é possível efectuar transbordo tanto entre as *origens* (fábricas) como entre os *destinos* (clientes).

Considerem-se as seguintes matrizes de *Custos Unitários*:

Matriz de Custos entre Fábricas e Clientes

	a	b	c	
A	6	7	4	6
B	4	9	3	10
C	1	2	6	15
	14	12	5	

Matriz de Custos de Transbordo entre Fábricas

	A	B	C
A	0	2	3
B	2	0	1
C	3	1	0

Matriz de Custos de Transbordo entre Clientes

	a	b	c
a	0	1	2
b	1	0	1
c	1	2	0

Normalmente, as *Matrizes de Custos de Transbordo* são *simétricas*. Assim, por exemplo, o *Custo Unitário de Transbordo* entre a ***Fábrica 1*** e a ***Fábrica 2*** será, normalmente, igual ao *Custo Unitário de Transporte* entre a ***Fábrica 2*** e a ***Fábrica 1***.

No exemplo, contudo, a *Matriz de Custos de Transbordo entre Destinos* não é *simétrica*. O *Custo Unitário de Transbordo* entre o ***Cliente 1*** e o ***Cliente 3*** é igual a *2* Unidades Monetárias, enquanto que o *Custo Unitário de Transbordo* entre o ***Cliente 3*** e o ***Cliente 1*** é igual a *1* Unidade Monetária. Este tipo de situação ocorreria, por exemplo, se o trajecto entre o ***Cliente 1*** e o ***Cliente 3*** (e neste sentido) fosse sujeito a uma portagem de valor igual a *1* Unidade Monetária.

Situação análoga ocorreria num transporte de mercadorias, por caminho de ferro, que, face ao desnível entre a localização do ***Cliente 1*** e do ***Cliente 3***, obrigasse a utilizar duas locomotivas para o percurso acendente, enquanto que apenas uma locomotiva seria suficiente para o percurso descendente.

Cada uma das *Origens* do problema funciona, simultaneamente, como *verdadeira origem* e como *destino* (quando recebe *transbordo*).

Cada um dos *Destinos* do problema funciona, simultaneamente, como *verdadeiro destino* e como *origem* (quando fornece *transbordo*).

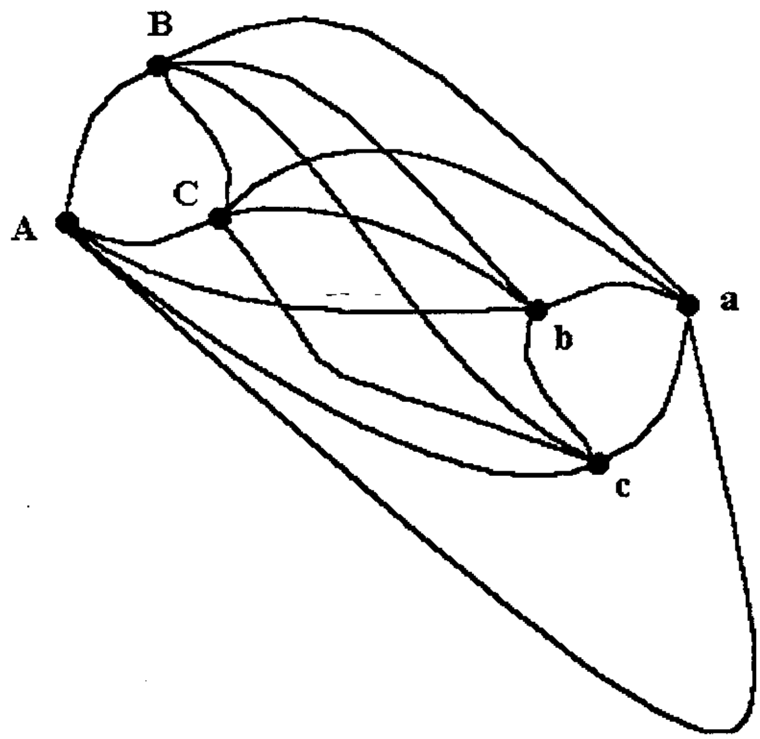


Figura-2.8

Se construirmos um *Quadro de Transportes* que traduza esta situação, obtemos

	A	B	C	a	b	c	
A	0	2	3	6	7	4	6
B	2	0	1	4	9	3	10
C	3	1	0	1	2	6	15
a	M	M	M	0	1	2	0
b	M	M	M	1	0	1	0
c	M	M	M	1	2	0	0
	0	0	0	14	12	5	

No quadro, podemos observar que *a*, *b* e *c*, considerados como *origens*, não têm *disponibilidade*. Igualmente, *A*, *B* e *C*, quando considerados como *destinos*, não têm *procura*.

Face à situação de possível *transbordo*, pode ter-se a totalidade da *disponibilidade* dirigida para uma das *origens* ***A***, ***B*** ou ***C***. Também pode ocorrer que a totalidade da *procura* seja dirigida para um dos *destinos* ***a***, ***b*** ou ***c***.

Vamos "emprestar" a cada *origem* e a cada *destino* uma "quantidade" no mínimo igual ao total da *disponibilidade* (ou, uma vez que o problema é *equilibrado*, total da *procura*).

$$\text{"Empréstimo"} \geq \sum_i a_i \quad \text{ou} \quad \text{"Empréstimo"} \geq \sum_j b_j$$

Na construção do quadro, deve notar-se que a matriz no canto inferior esquerdo representa uma situação de transporte entre os *destinos* e as *origens*. Os *Custos Unitários* associados a estas células estão representados por ***M***, traduzindo um custo infinito (*problema de minimização*) e uma situação considerada impossível. Caso este tipo de transporte fosse considerado possível, seria necessário dispôr de uma matriz de custos finitos correspondentes, que seriam inscritos naquela posição do quadro.

A alteração do quadro com a adição da quantidade "emprestada" produz o novo quadro

	A	B	C	a	b	c	
A	0	2	3	6	7	4	6+100
B	2	0	1	4	9	3	10+100
C	3	1	0	1	2	6	15+100
a	M	M	M	0	1	2	0+100
b	M	M	M	1	0	1	0+100
c	M	M	M	1	2	0	0+100
	0 +100	0 +100	0 +100	14 +100	12 +100	5 +100	

Resolvendo este quadro, encontramos a *Solução Óptima*

	A	B	C	a	b	c	
A	100 0	1 2	3	6	7	5 4	106
B	2	99 0	11 1	4	9	3	110
C	3	1	89 0	26 1	2	6	115
a	M	M	M	88 0	12 1	2	100
b	M	M	M	1	100 0	1	100
c	M	M	M	1	2	100 0	100
	100	100	100	114	112	105	

a que corresponde um custo $C = 71$.

Torna-se necessário interpretar a *solução* obtida.

Analisando o problema do ponto de vista das *origens*:

- A envia *1* para B e *5* para c (ao todo, A envia um total de *6* unidades)
- B envia *11* para C (B tinha *10* unidades à partida, e tinha recebido *1* de A)
- C envia *26* unidades para a (C tinha *15* unidades à partida, e tinha recebido *11* de B)

Analisando o problema do ponto de vista dos *destinos*:

- a recebe *26* de C e envia *12* para b (a fica com *14*)
- b recebe *12* de a
- c recebe *5* de A

2.3.13.3 Modelo de Transportes com Depósitos Intermédios

Vamos considerar um modelo de transportes em que a ligação das *origens* aos *destinos* é feita indirectamente através de *depósitos intermédios* de capacidade limitada.

Assim, os *depósitos* recebem produtos das fábricas (*origens*) e enviam-nos aos clientes (*destinos*). Os *depósitos* podem, eventualmente, executar outras funções adicionais como, por exemplo, uma operação de embalagem (**Figura-2.9**).

Os *depósitos* constituem *destinos* relativamente às fábricas (*origens*) e constituem *origens* em relação aos clientes (*destinos*).

	D_1	D_2	
F_1	x_{11}	x_{12}	f_1
F_2	x_{21}	x_{22}	f_2
F_3	x_{31}	x_{32}	f_3
	d_1	d_2	

	C_1	C_2	C_3	
D_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	d_1
D_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	d_2
	c_1	c_2	c_3	

Sejam f_1, f_2 e f_3 as *disponibilidades* nas fábricas F_1, F_2 e F_3.
Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 as *procuras* nos consumidores C_1, C_2, C_3 e C_4.
Sejam d_1 e d_2 as *capacidades* dos *depósitos* D_1 e D_2

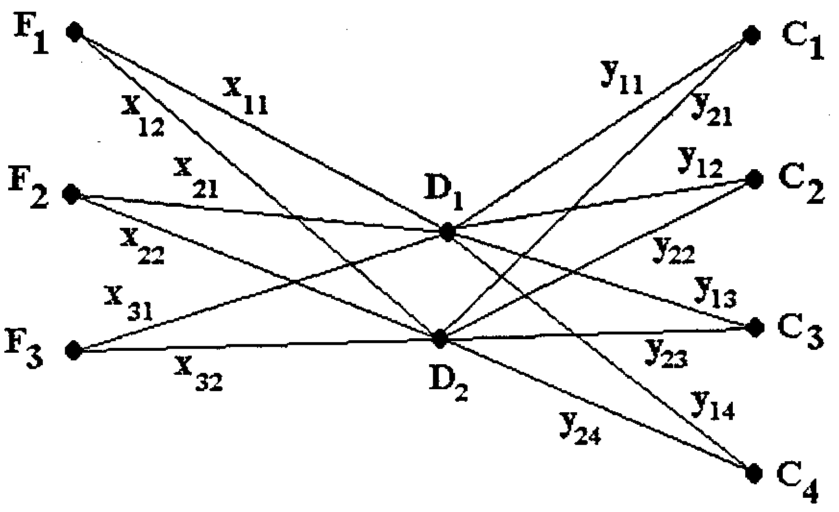


Figura-2.9

Para que o problema tenha *solução válida* é necessário que os *depósitos* possam comportar o total da produção (total da *disponibilidade*). Isto é equivalente a dizer que devam comportar o total da *procura* nos consumidores.

$$d_1 + d_2 \geq f_1 + f_2 + f_3$$
$$d_1 + d_2 \geq c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

Partimos do princípio que o problema é *equilibrado*, caso contrário seria necessário introduzir uma fábrica ou cliente fictícios.

$$\therefore \quad f_1 + f_2 + f_3 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

Para o problema, temos as seguintes condições a observar

Condições a Montante dos Depósitos

$$\begin{array}{lllcl} x_{11}+x_{12} & & & = & f_1 \\ & x_{21}+x_{22} & & = & f_2 \\ & & x_{31}+x_{32} & = & f_3 \end{array}$$

Condições à Capacidade dos Depósitos

$$\begin{array}{llllcl} x_{11}+x_{21}+x_{31} & +\lambda_1 & & & = & d_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} & & +\lambda_2 & & = & d_2 \\ y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14} & +\lambda_1 & & & = & d_1 \\ y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24} & & +\lambda_2 & & = & d_2 \end{array}$$

λ_1 e λ_2 representam *folgas* nas *capacidades* dos *Depósitos Intermédios.*

Condições a Jusante dos Depósitos

$$\begin{array}{lcl} y_{11}+y_{21} & = & c_1 \\ y_{12}+y_{22} & = & c_2 \\ y_{13}+y_{23} & = & c_3 \\ y_{14}+y_{24} & = & c_4 \end{array}$$

O quadro que representa este problema é apresentado adiante. Como podemos verificar, o quadro tem *5 linhas* e *6 colunas*. Deveremos ter, portanto, ***10*** *Variáveis Básicas*. No quadro temos indicadas ***16*** *variáveis*, devendo ***6*** ser nulas.

Deve notar-se que λ_1 e λ_2 são as *Folgas* nos *Depósitos*. Como tal, são comuns às equações verticais e horizontais do quadro relativas a cada *depósito*.

O custo associado à não utilização da totalidade da *capacidade* de cada *depósito* é considerada nula. Num enunciado diferente, estes *custos unitários* deveriam ser substituídos por valores apropriados.

O modelo descrito não contempla o envio directo de artigos entre as fábricas e os clientes. Nestas condições, os *custos unitários* associados à matriz no canto superior direito do quadro são infinitos (problema de minimização).

Também, no presente enunciado, não é considerada a possibilidade de *transbordo* entre os *depósitos intermédios.*

A resolução do problema, após a construção do quadro segue o algoritmo estabelecido para a solução de *Problemas de Transportes*. Só haverá *Solução Válida* se for possível encontrar uma solução que não tenha valores positivos colocados em células de *custo unitário* infinito.

	D_1	D_2	C_1	C_2	C_3	C_4	
F_1	x_{11} e_{11}	x_{12} e_{12}	M	M	M	M	f_1
F_2	x_{21} e_{21}	x_{22} e_{22}	M	M	M	M	f_2
F_3	x_{31} e_{31}	x_{32} e_{32}	M	M	M	M	f_3
D_1	λ_1 0	M	y_{11} c_{11}	y_{12} c_{12}	y_{13} c_{13}	y_{14} c_{14}	d_1
D_2	M	λ_2 0	y_{21} c_{21}	y_{22} c_{22}	y_{23} c_{23}	y_{24} c_{24}	d_2
	d_1	d_2	c_1	c_2	c_3	c_4	

2.13.4 Modelo de Selecção de Meios de Transporte

Consideremos um *problema de transportes* em que de um conjunto de duas fábricas se pretendem distribuir artigos a dois clientes através de diferentes meios de transporte, cada um com um valor-limite de capacidade conhecido.

Os diferentes *meios de transporte* aqui referidos poderiam incluir, por exemplo, *transporte rodoviário*, *transporte marítimo*, *transporte ferroviário*, *transporte aéreo*, etc. Para esta formulação, veículos de diferentes capacidades também poderiam ser considerados como *meios de transporte* alternativos.

As mesmas considerações sobre *disponibilidades*, *procuras*, *capacidades* e *folgas* são aplicáveis a este problema. Também, alguns "componentes" do sistema funcionam simultaneamente como *origens* e *destinos*.

No caso particular em análise, vamos considerar dois *meios de transporte*, respectivamente *via estrada* e *via caminho de ferro*.

Em cada fábrica, vamos considerar a existência de cais de carga separados, de *capacidades* limitadas, para cada uma das *vias*. Em cada cliente, vamos considerar a existência de cais de descarga separados, de *capacidades* limitadas, para cada uma das *vias*. Consideramos, também, que não é possível carregar num *cais de carga* de uma *via* e descarregar no *cais de descarga* de outra *via*. Também não é considerado qualquer tipo de *transbordo*.

A **Figura-2.10** representa o sistema que se pretende modelar.

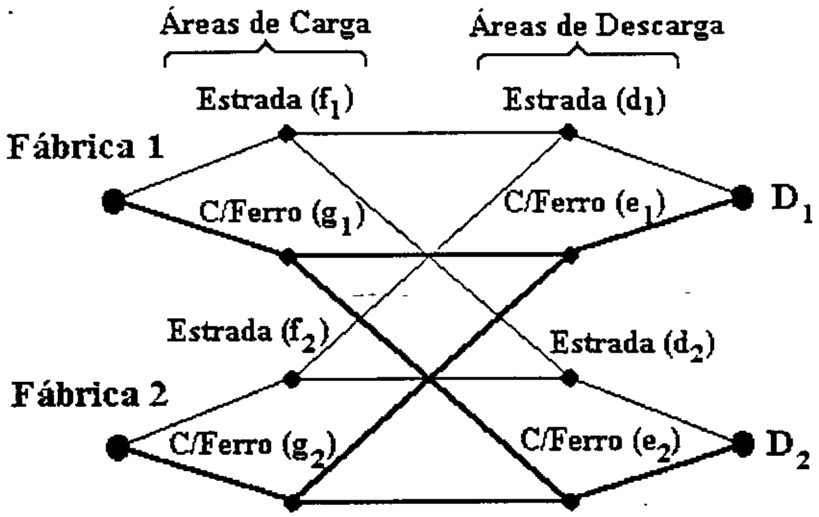


Figura-2.10

			Estrada				Caminhos de Ferro					
	D_1	D_2	F_1	F_2	D_1	D_2	F_1	F_2	D_1	D_2		
F_1			$f_1-\lambda_1$ 0				$g_1-\lambda_5$ 0				F_1	Capacidade das Fábricas
F_2				$f_2-\lambda_2$ 0				$g_2-\lambda_6$ 0			F_2	
F_1			λ_1 0		x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}					f_1	Capacidade via Estrada para as Fábricas (carga)
F_2				λ_2 0	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}					f_2	
D_1	$d_1-\lambda_3$ 0				λ_3 0						d_1	Capacidade via Estrada para os Clientes (desc.)
D_2		$d_2-\lambda_4$ 0				λ_4 0					d_2	
F_1							λ_5 0		y_{11} d_{11}	y_{12} d_{12}	g_1	Capacidade via C/Ferro para as Fábricas (carga)
F_2								λ_6 0	y_{21} d_{21}	y_{22} d_{22}	g_2	
D_1	$e_1-\lambda_7$ 0								λ_7 0		e_1	Capacidade via C/Ferro para os Clientes (desc.)
D_2		$e_2-\lambda_8$ 0								λ_8 0	e_2	
	D_1	D_2	f_1	f_2	d_1	d_2	g_1	g_2	e_1	e_2		
	Procura nos Consumidores				Capac. via Estrada nos Consumidores				Capac. via C/Ferro nos Consumidores			

O quadro correspondente terá a forma que se apresenta. As células que não têm o *custo unitário* correspondem a células de custo infinito. Para que exista *Solução Óptima* deve ser possível preencher o quadro por forma a que estas células tenham valor nulo.

2.3.13.5 Modelo de Transportes com Limite Superior

Vamos considerar um *problema de transportes* em que é imposto um *limite superior* à quantidade que pode ser transportada entre cada *origem* e cada *destino*.

Matematicamente, este problema tem a seguinte definição:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$$

com d_{ij} a representar o *limite superior* na *célula (i,j)*.

Se representarmos o problema como um quadro normal de transportes, inscrevendo no canto superior direito de cada *célula* o valor do seu *limite superior*, obtemos

4 6	4 7	4 4	6
5 4	5 9	5 3	10
8 1	6 2	4 6	15
14	12	5	

Vamos começar por preencher o quadro ignorando o *limite superior* em cada *célula.*

Como se pode observar, em todas as quantidades inscritas nas células, à excepção de uma na *célula (2,2)*, o *limite superior* foi excedido e, portanto a solução apresentada é *inválida.*

Vamos apresentar dois processos de solução deste problema, respectivamente o método que designaremos por ***Método do Limite Superior Generalizado*** (*Generalised Upper Bound*), e uma ***Reformulação do Problema de***

Transportes com Limites Superiores que permitirá a sua solução pelo algoritmo normal de transportes.

4 $\boxed{6}$ 6	4 7	4 4	6
5 $\boxed{8}$ 4	5 2 9	5 3	10
8 1	6 $\boxed{10}$ 2	4 $\boxed{5}$ 6	15
14	12	5	

2.3.13.5.1 Método do Limite Superior Generalizado

Voltando ao problema do preenchimento do quadro, vamos efectuá-lo novamente, mas atendendo ao *limite superior* em cada *célula*. Assim, em cada *célula* colocamos a quantidade máxima ditada pelo *limite superior* e pelos *valores residuais* da *disponibilidade* e *procura* associados à linha e coluna da *célula*.

Caso o valor inscrito numa *célula* tenha sido limitado pelo valor do seu *limite superior*, marcamos essa *célula* como *não-básica*. Deve notar-se que uma *célula* não deve ser marcada como *não-básica* se o valor nela inscrito for, simultaneamente, limitado pelo seu *limite superior* e pelo *valor residual* da *disponibilidade* ou da *procura*.

Preenchido nestas condições, e começando pelo *Canto NW*, temos para a *célula (1,1)* o valor máximo igual a *4*, limitado apenas pelo valor do *limite superior* na *célula*. Nestas circunstâncias, a *célula* deve ser marcada como *não-básica*.

4 $\boxed{4}$ 6	4 7	4 4	(6),2
5 4	5 9	5 3	10
8 1	6 2	4 6	15
(14) 10	12	5	

Na mesma linha (*Linha 1*), na *célula (1,2)*, temos uma *disponibilidade* de *2*, uma *procura* de *12* e um *limite superior* de *4*. O valor a inscrever na *célula* é, portanto, igual a *2*. A *célula* constitui uma *célula básica*.

O quadro passa à forma

4 — $\boxed{4}$ — 6	4 — 2 — 7	4 — — — 4	(6),(2),0 —
5 4	5 9	5 3	10
8 1	6 2	4 6	15
(14) 10	(12) 10	5	

Passamos, agora, à *Linha 2*, à *célula (2,1)*.

Na *célula (2,1)*, temos uma *disponibilidade* de ***10***, uma *procura* de ***10*** e um *limite superior* de *5*. O valor a inscrever na *célula* é, portanto, igual a *5*. A *célula* constitui uma *célula não-básica*.

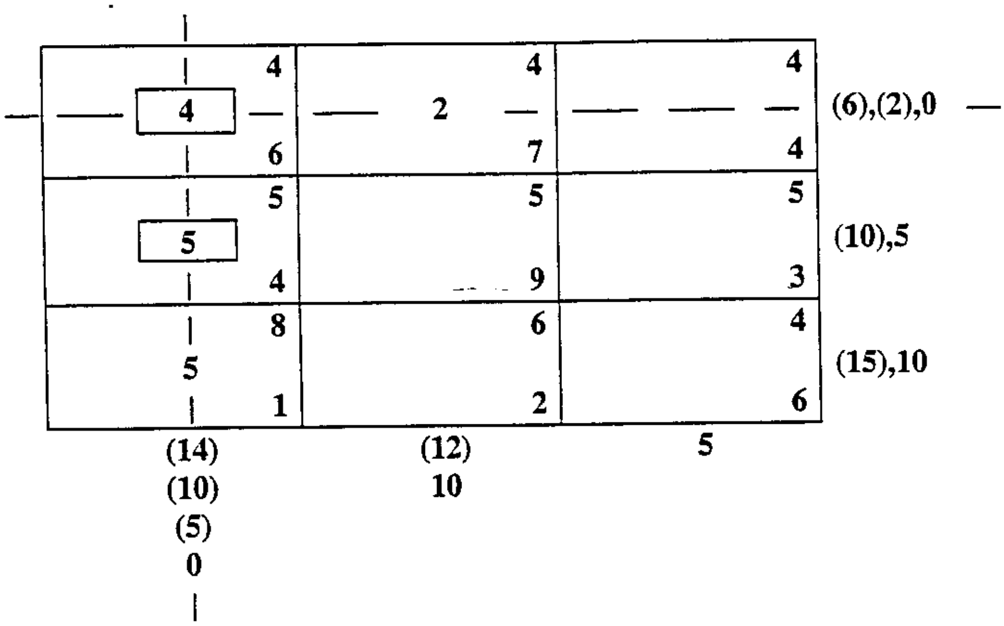
O quadro passa à forma

4 — $\boxed{4}$ — 6	4 — 2 — 7	4 — — — 4	(6),(2),0 —
5 $\boxed{5}$ 4	5 9	5 3	(10),5
8 1	6 2	4 6	15
(14) (10) 5	(12) 10	5	

Passamos, agora, à *Linha 3*, *célula (3,1)*.

Na *célula (3,1)*, temos uma *disponibilidade* de *15*, uma *procura* de *5* e um *limite superior* de *8*. O valor a inscrever na *célula* é, portanto, igual a *5*. A *célula* constitui uma *célula básica*.

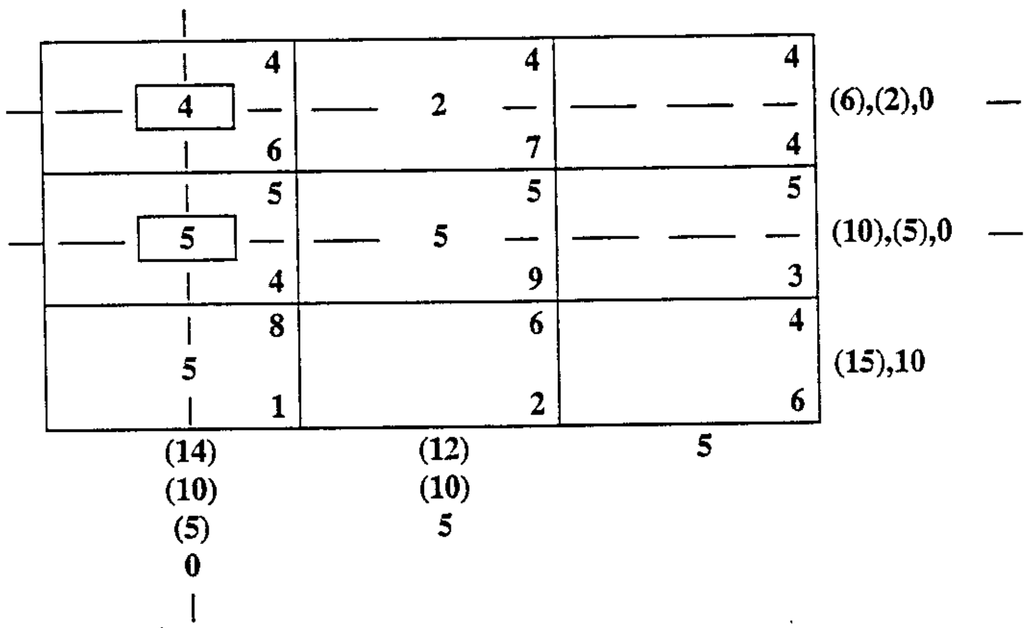
O quadro passa à forma



Passamos, agora, à *Linha 2, célula (2,2)*.

Na *célula (2,2)*, temos uma *disponibilidade* de *5*, uma *procura* de *10* e um *limite superior* de *5*. O valor a inscrever na *célula* é, portanto, igual a *5*. A *célula* constitui uma *célula básica.*

O quadro passa à forma



Passamos, agora, à *Linha 3, célula (3,2)*. Na *célula (3,2)*, temos uma *disponibilidade* de *10*, uma *procura* de *5* e um *limite superior* de *6*. O valor a inscrever na *célula* é, portanto, igual a *5*. A *célula* constitui uma *célula básica.*

O quadro passa à forma

<table>
<tr><td>4
$\boxed{4}$
6</td><td>4
2
7</td><td>4

4</td><td>(6),(2),0</td></tr>
<tr><td>5
$\boxed{5}$
4</td><td>5
5
9</td><td>5

3</td><td>(10),(5),0</td></tr>
<tr><td>8
5
1</td><td>6
5
2</td><td>4

6</td><td>(15),(10),5</td></tr>
<tr><td>(14)
(10)
(5)
0</td><td>(12)
(10)
(5)
0</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

Na *célula (3,3)*, para cumprir a *disponibilidade* igual a *5* e a *procura* igual a *5*, temos que ignorar o *limite superior* igual a *4*. Temos, portanto, o quadro

<table>
<tr><td>4
$\boxed{4}$
6</td><td>4
2
7</td><td>4

4</td><td>(6),(2),0</td></tr>
<tr><td>5
$\boxed{5}$
4</td><td>5
5
9</td><td>5

3</td><td>(10),(5),0</td></tr>
<tr><td>8
5
1</td><td>6
5
2</td><td>4
5
6</td><td>(15),(10),(5),0</td></tr>
<tr><td>(14)
(10)
(5)
0</td><td>(12)
(10)
(5)
0</td><td>(5)
0</td><td></td></tr>
</table>

A que corresponde a solução

<table>
<tr><td>4
$\boxed{4}$
6</td><td>4
2
7</td><td>4

4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5
$\boxed{5}$
4</td><td>5
5
9</td><td>5

3</td><td>10</td></tr>
<tr><td>8
5
1</td><td>6
5
2</td><td>4
5
6</td><td>15</td></tr>
<tr><td>14</td><td>12</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

A solução é *inválida* apenas porque a *célula (3,3)* com um valor igual a *5* execede o *limite superior* da *célula* que é igual a *4*. Vamos construir um circuito que remova da *célula (3,3)*.

4 $\boxed{4}$ 6	4 2 7	4 4	6
5 $\boxed{5}$ 4	5 5-θ ← | 9	5 —— +θ ↑ 3	10
8 5 1	↓ 6 5+θ — 2	| 4 ⟶ 5-θ 6	15
14	12	5	

O valor máximo de θ deve ser determinado com base nas *células* do *circuito básico* construído.

$$\left.\begin{array}{l}(3,3)\rightarrow\theta\geq 1,\theta\leq 5\\(2,3)\rightarrow\theta\geq 0,\theta\leq 5\\(2,2)\rightarrow\theta\geq 0,\theta\leq 5\\(3,2)\rightarrow\theta\geq -5,\theta\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow\ \theta_{max}=1$$

Substituindo o valor de θ, obtemos um novo quadro.

Note-se que foi o *limite superior* da *célula (3,2)* que determinou o valor máximo de θ. Essa *célula* deverá ser marcada como *não-básica*.

4 $\boxed{4}$ 6	4 2 7	4 4	6
5 $\boxed{5}$ 4	5 4 9	5 1 3	10
8 5 1	6 $\boxed{6}$ 2	4 4 6	15
14	12	5	

Este quadro constitui uma primeira *Solução Válida de Base*. Para um total de *linhas* e *colunas* igual a *6*, a solução tem *5* variáveis positivas.

No sentido de melhorar a solução, iremos, em primeiro lugar, analisar a situação das *células* marcadas como *não-básicas*. A estas *células* só é possível remover, pois encontram--se no seu *limite superior*. As *células* candidatas serão as que tiverem um *Ganho Potencial* associado positivo (para um problema de minimização). Retirando a estas *células* podemos melhorar o *Valor* da *Função Objectivo*.

O cálculo dos *Ganho Potenciais* conduz a

	-4	7	1	
0	+10 4 $\boxed{4}$ 6	4 2 7	4 4	6
2	+6 5 $\boxed{5}$ 4	5 4 9	5 1 3	10
5	8 5 1	-10 6 $\boxed{6}$ 2	4 4 6	15
	14	12	5	

Seleccionamos a *célula (1,1)*, e construímos o *circuito básico*

	-4	7	1	
0	+10 4 $\boxed{4-\theta}$ ← │ 6	4 —— $2+\theta$ ↑ 7	4 4	6
2	+6 │ 5 $\boxed{5}$ │ 4	│ 5 $4-\theta$ ← 9	5 —— $1+\theta$ ↑ 3	10
5	↓ 8 $5+\theta$ — 1	-10 6 —— $\boxed{6}$ — 2	│ 4 ⟶ $4-\theta$ 6	15
	14	12	5	

$$\left.\begin{array}{l} (1,1)\rightarrow\theta\geq\ 0,\theta\leq 4 \\ (3,1)\rightarrow\theta\geq -5,\theta\leq 3 \\ (3,3)\rightarrow\theta\geq\ 0,\theta\leq 4 \\ (2,3)\rightarrow\theta\geq -1,\theta\leq 4 \\ (2,2)\rightarrow\theta\geq -1,\theta\leq 4 \\ (1,2)\rightarrow\theta\geq -2,\theta\leq 2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \theta_{max}=2$$

A *célula* a que vamos retirar é a *célula (1,1)*. Ela vai passar a *básica*. A *célula* que determinou o valor máximo de θ foi a *célula (1,2)*, face ao valor do seu *limite superior*. Esta *célula* vai passar a *não-básica*.

4 2 6	4 $\boxed{4}$ 7	4 4	6
5 $\boxed{5}$ 4	5 1 9	5 3 3	10
8 7 1	6 $\boxed{6}$ 2	4 2 6	15
14	12	5	

Progredindo, temos

	6	17	11	
0	4 2 6	-10 4 $\boxed{4}$ 7	4 4	6
-8	+6 5 $\boxed{5}$ 4	5 1 9	5 3 3	10
-5	8 7 1	-10 6 $\boxed{6}$ 2	4 2 6	15
	14	12	5	

Optamos pela *célula* (2,1)

4 2 6	4 $\boxed{4}$ 7	4 4	6
5 $\boxed{5-\theta}$ — 4	5 — 1 — 9	5 — $3+\theta$ ↑ 3	10
↓ 8 $7+\theta$ — 1	6 — $\boxed{6}$ — 2	4 ⟶ $2-\theta$ 6	15
14	12	5	

$$\left.\begin{array}{l}(2,1)\rightarrow\theta\geq\ \ 0,\theta\leq 5\\(3,1)\rightarrow\theta\geq -7,\theta\leq 1\\(3,3)\rightarrow\theta\geq -2,\theta\leq 2\\(2,3)\rightarrow\theta\geq -3,\theta\leq 2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \theta_{max}=1$$

4 2 6	4 $\boxed{4}$ 7	4 4	6
5 4 4	5 1 9	5 4 3	10
8 $\boxed{8}$ 1	6 $\boxed{6}$ 2	4 1 6	15
14	12	5	

	6	11	5	
0	4 2 6	-4 4 $\boxed{4}$ 7	-1 4 4	6
-2	5 4 4	5 1 9	5 4 3	10
1	-6 8 $\boxed{8}$ 1	-10 6 $\boxed{6}$ 2	4 1 6	15
	14	12	5	

Já não há nenhuma *célula* marcada como *não-básica* que ofereça potencial para dela se poder retirar.

Nesta altura, progredimos analisando apenas a situação das *verdadeiras células não-básicas*, onde vamos procurar adicionar (procedimento usual em problemas de *minimização*).

A *célula* candidata é a *célula (1,3)* com um *Ganho Potencial* igual a *-1*.

4 2-θ ← │ 6	4 —— $\boxed{4}$ — 7	4 —— +θ ↑ 4	6
↓ 5 4+θ — 4	5 —— 1 — 9	│ 5 ⟶ 4-θ 3	10
8 $\boxed{8}$ 1	6 $\boxed{6}$ 2	4 1 6	15
14	12	5	

$$\left.\begin{array}{l}(1,3)\rightarrow\theta\geq\ \ 0,\theta\leq 4\\ (1,1)\rightarrow\theta\geq -2,\theta\leq 2\\ (2,1)\rightarrow\theta\geq -4,\theta\leq 1\\ (2,3)\rightarrow\theta\geq -1,\theta\leq 4\end{array}\right\}\Rightarrow\ \theta_{max}=1$$

4 1 6	4 $\boxed{4}$ 7	4 1 4	6
5 $\boxed{5}$ 4	5 1 9	5 3 3	10
8 $\boxed{8}$ 1	6 $\boxed{6}$ 2	4 1 6	15
14	12	5	

Esta solução é *Solução Óptima*, conforme se pode comprovar pelo cálculo dos *Ganhos Potenciais* associados.

	6	10	4	
0	4 1 6	-3 4 $\boxed{4}$ 7	4 1 4	6
-1	-1 5 $\boxed{5}$ 4	5 1 9	5 3 3	10
2	-7 8 $\boxed{8}$ 1	-10 6 $\boxed{6}$ 2	4 1 6	15
	14	12	5	

2.3.13.5.2 Reformulação do Problema de Transportes com Limites Superiores

Tomando a definição matemática para o problema

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$$

podemos definir as *condições de limite superior* como

$$x_{ij} + y_{ij} = d_{ij} \Rightarrow y_{ij} = d_{ij} - x_{ij}$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ e } y_{ij} \geq 0$$

em que y_{ij} representa a *folga* de uma *célula* relativamente ao seu *limite superior*.

Vamos construir um *quadro de transportes* equivalente a esta formulação de acordo com as seguintes regras:

- Para cada variável x_{ij} do problema consideramos uma linha do quadro de transportes (que recebe a designação x_{ij}).

- Consideramos, no quadro, um número de colunas igual à soma do número de linhas com o número de colunas do problema original.

- A *disponibilidade* associada a cada linha do quadro assim construído é igual ao *limite superior* da *célula* que designa a linha do quadro.

- A *procura* correspondente a um número de colunas igual ao número de linhas do problema original é igual às *disponibilidades* do problema original.

- As equações representadas em cada linha do quadro construído correspondem a:

$$x_{ij} + y_{ij} = d_{ij}$$

ou seja

$$x_{ij} + (d_{ij} - x_{ij}) = d_{ij}$$

- As *procuras* das restantes colunas do quadro devem ser calculadas a partir da localização das entradas no quadro, o que corresponde a fazer

$$b_{m+l} = \left(\sum_{k=1}^{m} d_{k,l}\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} x_{k,l}\right); \ (l = 1, \dots, n)$$

com

m - Número de linhas do problema original
n - Número de colunas do problema original

Obtemos, assim, o quadro

	a_1	a_2	a_3				
x_{11}	x_{11} **6**			$d_{11}-x_{11}$ **0**			$d_{11}=4$
x_{12}	x_{12} **7**				$d_{12}-x_{12}$ **0**		$d_{12}=4$
x_{13}	x_{13} **4**					$d_{13}-x_{13}$ **0**	$d_{13}=4$
x_{21}		x_{21} **4**		$d_{21}-x_{21}$ **0**			$d_{21}=5$
x_{22}		x_{22} **9**			$d_{22}-x_{22}$ **0**		$d_{22}=5$
x_{23}		x_{23} **3**				$d_{23}-x_{23}$ **0**	$d_{23}=5$
x_{31}			x_{31} **1**	$d_{31}-x_{31}$ **0**			$d_{31}=8$
x_{32}			x_{32} **2**		$d_{32}-x_{32}$ **0**		$d_{32}=6$
x_{33}			x_{33} **6**			$d_{33}-x_{33}$ **0**	$d_{33}=4$
	6	**10**	**15**	$(d_{11}+d_{21}+d_{31})$ $-(x_{11}+x_{21}+x_{31})=$ **3**	$(d_{12}+d_{22}+d_{32})$ $-(x_{12}+x_{22}+x_{32})=$ **3**	$(d_{13}+d_{23}+d_{33})$ $-(x_{13}+x_{23}+x_{33})=$ **8**	

2.4 Análise de Sensibilidade

2.4.1 Introdução

O conhecimento da *Solução Óptima* de um *Problema de Programação Linear* é, em si, de valor limitado. É importante conhecer o efeito de variações tanto nos coeficientes das restrições (*coeficientes tecnológicos*) como no valor dos coeficientes da *Função Objectivo*.

Fundamentalmente, pretende-se saber qual o domínio possível de variação dos coeficientes do problema sem que haja alteração das variáveis que constituem a base no *Quadro Óptimo*.

Consideremos um *Problema de Programação Linear* com o seguinte *Quadro Inicial*:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0
x_5	1	1	1	1	1	0	0	35
x_6	1	4	2	2	0	1	0	80
x_7	2	3	6	1	0	0	1	90
W_j	−5	−4	−6	+8	0	0	0	0

O correspondente quadro para a *Solução Óptima* é:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0
x_1	1	$3/4$	0	$5/4$	$3/2$	0	$-1/4$	30
x_6	0	$11/4$	0	$5/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	40
x_3	0	$1/4$	1	$-1/4$	$-1/2$	0	$1/4$	5
W_j	0	$5/4$	0	$51/4$	$9/2$	0	$1/4$	180

2.4.2 Variações nos Coeficientes da Função Objectivo

a) Decréscimo em c_j para x_j não-básico ou <u>pequeno</u> aumento em c_j para x_j básico

Qualquer destas situações não altera a selecção de *Variáveis Básicas* no quadro da *Solução Óptima*. Um decréscimo em c_j para x_j *não-básico* torna x_j ainda menos atractivo para pertencer à base. Um <u>pequeno</u> aumento em c_j para x_j *básico* reforça o *interesse* da localização dessa variável na base do quadro da *Solução Óptima*.

Um grande aumento c_j para x_j *básico* pode, contudo, implicar a libertação de *recursos* de outras *actividades*, para uma especialização na actividade tornada mais atractiva do ponto de vista da contribuição para a *Função Objectivo*.

b) Aumento em c_j para x_j não-básico

Tomemos para exemplo a variável x_2.
Na *Função Objectivo* inicial, tem-se $c_2 = 4$.

Observando a linha da *Função Objectivo* no quadro final, podemos concluir que, se no quadro inicial, tivéssemos considerado um coeficiente de x_2 na *Função Objectivo* igual a $c_2' = c_2 + 5/4$, obteríamos no quadro final um coeficiente igual a zero. Um aumento superior a $5/4$ implicaria que x_2 passaria a ser variável candidata a entrar na base.

Analogamente, o incremento máximo para c_4 é de $51/4$.

Concluindo, o aumento máximo que o coeficiente na *Função Objectivo* de uma *Variável Não-Básica* pode ter é dado pelo valor do coeficiente inscrito na *Linha da Função Objectivo* do *Quadro Óptimo*.

c) Grande Variação em c_j para x_j básico

Tomemos como exemplo a *Variável Básica* x_1.

Considere-se que o coeficiente na *Função Objectivo* para essa variável toma o valor $c_1' = c_1 - \gamma$. A *Função Objectivo* passará a ter o valor $z' = z - \gamma x_1$, e deve ser expressa em função das *Variáveis Não-Básicas*.

$$z = 180 - (5/4)x_2 - (51/4)x_4 - (9/2)x_5 - (1/4)x_7$$

Sendo

$$x_1 = 30 - (3/4)x_2 - (5/4)x_4 - (3/2)x_5 + (1/4)x_7$$

Temos

$$\begin{aligned} z' = & (180 - 30\gamma) - (5/4 - 3/4\,\gamma)x_2 - (51/4 - 5/4\,\gamma)x_4 \\ & - (9/2 - 3/2\,\gamma)x_5 - (1/4 + 1/4\,\gamma)x_7 \end{aligned}$$

Haverá mudança de sinal nos coeficientes da *Função Objectivo* se:

$$\begin{cases} 5/4 - 3/4\gamma \leq 0 & \rightarrow \quad \gamma \geq 5/3 \\ 51/4 - 5/4\gamma < 0 & \rightarrow \quad \gamma \geq 51/5 \\ 9/2 - 3/2\gamma < 0 & \rightarrow \quad \gamma \geq 3 \\ 1/4 + 1/4\gamma < 0 & \rightarrow \quad \gamma \leq -1 \end{cases}$$

O domínio possível de variação de γ sem que haja alteração da base é:

$$-1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$$

Isto significa um domínio de variação possível para c_1 dado por

$$5-\frac{5}{3} \leq c_1 \leq 5-(-1)$$

$$\frac{10}{3} \leq c_1 \leq 4$$

Se $\gamma \geq 5/3$, então x_2 torna-se candidata a entrar na base.
Se $\gamma \leq -1$, então x_7 torna-se candidata a entrar na base.

2.4.3 Variações nas Disponibilidades das Restrições

a) Aumento da *disponibilidade* b_j quando a *Variável de Folga* relativa a uma condição está na base

Uma *Variável de Folga Básica* significa que o *recurso* representado pela condição não é *escasso*. Aumentar a *disponibilidade* desse *recurso* implica, apenas, aumentar de igual quantidade o valor da *Variável de Folga* na *Base*.

b) Decréscimo da *disponibilidade* b_j quando a *Variável de Folga* relativa a uma condição está na base

Desde que o decréscimo na *disponibilidade* não exceda o valor da *Variável de Folga* na *base*, o *Quadro Óptimo* mantém-se válido. Verifica-se, apenas, um decréscimo correspondente no valor da *Variável de Folga*.

c) Variação da *disponibilidade* b_j quando a *Variável de Folga* relativa a uma condição não está na base

Neste caso, pode-se afirmar que a *Solução* permanece *Válida* enquanto b_j no *Quadro Final* for maior ou igual a zero.

Analisemos uma variação de valor γ na primeira linha do quadro.

No *Quadro Inicial* x_5 representa a *Variável de Folga* correspondente à primeira condição.

No *Quadro Inicial*, a primeira linha toma a forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35 + \gamma$$

O conjunto das *restrições* do problema passa a ter *disponibilidades* que podem ser descritas por

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma$$

O vector-coluna associado a γ sofre (do *Quadro Inicial* para o *Quadro Final*) as mesmas transformações que a coluna associada à variável x_5.

A coluna de $\underset{\sim}{P_0}$ no *Quadro Final* vai alterar-se para

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \gamma$$

Para que o *Quadro Final* se mantenha válido, é necessário que

$$\begin{cases} x_1 \;\rightarrow\; 30+3/2\gamma \geq 0 \;\rightarrow\; \gamma \text{ pode decrescer até } -20 \\ x_6 \;\rightarrow\; 40-1/2\gamma \geq 0 \;\rightarrow\; \gamma \text{ pode aumentar até } +80 \\ x_3 \;\rightarrow\; 5-1/2\gamma \geq 0 \;\rightarrow\; \gamma \text{ pode aumentar até } +10 \end{cases}$$

Portanto,

$$-20 \leq \gamma \leq 10$$
$$35-20 \leq b_1 \leq 35+10$$
$$15 \leq b_1 \leq 45$$

2.4.4 Preço Sombra ou Benefício Marginal

Ainda relativamente à primeira *linha* do quadro utilizado, considere-se uma redução de *1* unidade na *disponibilidade* do primeiro *recurso*.

$$\begin{array}{c} x_1' \\ x_6' \\ x_3' \end{array} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 57/2 \\ 81/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que x_1 decresce de 30 para $57/2$.

∴ O *Valor da Função Objectivo* deverá alterar-se de acordo com as variações nas variáveis.

$$\begin{aligned}\Delta Z &= c_1(x_1^{'} - x_1) + c_3(x_3^{'} - x_3) = \\ &= 5*(57/2 - 30) + 6*(11/2 - 5) = \\ &= -15/2 + 6/2 = \\ &= -9/2\end{aligned}$$

A variação no *Valor da Função Objectivo* por unidade de variação na *disponibilidade do recurso* representado pela condição é igual a:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta b_1} = \frac{9}{2}$$

Este valor de $(\Delta Z)/(\Delta b_1)$ é designado por ***Preço-Sombra*** ou ***Benefício-Marginal*** do *recurso escasso* condicionado pela primeira condição do problema.

Pode observar-se, no *Quadro Final*, que este ***Preço-Sombra*** ou ***Benefício-Marginal*** aparece como custo reduzido da *Variável de Folga* x_5 na linha da *Função Objectivo*.

Efectivamente, todos os ***Custos-Sombra*** aparecem como *Custos Reduzidos* das *Variáveis de Folga.*

Vimos que para a primeira condição esse valor é igual a $9/2$.

Para a segunda condição o ***Custo-Sombra*** é nulo. Deve notar-se que a *Variável de Folga* relativa à segunda condição se encontra na base no *Quadro Final.* Isto significa que o recurso representado pela segunda condição não é um *recurso escasso*, e o seu ***Valor Marginal*** é nulo.

Para o recurso representado pela terceira condição temos um ***Preço-Sombra*** igual a $1/4$.

Resumindo:

Se o problema apresentado consistir em empreender as *actividades* alternativas x_1, x_2, x_3 ou x_4 a partir dos *recursos* $b_1 = 35, b_2 = 80$ e $b_3 = 90$, de acordo com as *condições* expressas anteriormente, podemos resolvê-lo por *Programação Linear*, e obtemos a ***Solução Óptima*** $x_1 = 30, x_3 = 5$.

Havendo oportunidade de aumentar a *disponibilidade* do *recurso* representado pela segunda condição, põe-se a questão de saber que preço devemos estar dispostos a pagar por cada unidade desse *recurso*. A resposta a esta questão é zero, pois a *Variável de Folga* x_6 correspondente a este *recurso* encontra-se na base (valor igual a ***40***) no *Quadro Final*, e o seu ***Preço-Sombra*** é igual a zero.

Pelo *recurso* representado pela primeira *condição* estamos dispostos a pagar um máximo de $9/2$ U.M./unidade.

Pelo *recurso* representado pela terceira *condição* estamos dispostos a pagar um máximo de 1/4 U.M./unidade.

Deve notar-se que x_1, x_2, x_3 e x_4 representam *actividades*. Os coeficientes na linha da *Função Objectivo* nas correspondentes colunas designam-se por ***Custos Reduzidos***.

Por outro lado, x_5, x_6 e x_7 são de natureza diferente. Representam *folgas* dos *recursos* do problema. Os coeficientes na linha da *Função Objectivo* nas correspondentes colunas designam-se por ***Preços-Sombra*** dos respectivos *recursos*.

Um processo alternativo de efectuar este tipo de análise consiste em observar a equação da *Função Objectivo* retirada do *Quadro Final*:

$$Z = 180 - (5/4)x_2 - (51/4)x_4 - (9/2)x_5 - (1/4)x_7$$

com

$$\begin{aligned} Z &= 180 \\ x_2 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \\ x_7 &= 0 \end{aligned}$$

As variáveis x_5 e x_7 são *Variáveis de Folga*.

Se o recurso de *disponibilidade* b_1 não for totalmente utilizado, por cada unidade de *folga* não utilizada (correspondente a aumentar x_5 acima do nível zero), perdemos 9/2 no valor da *Função Objectivo*. Este será, portanto, o ***Valor Marginal*** de uma unidade do *recurso* representado pela primeira *condição*.

2.5 Teoria da Dualidade

2.5.1 Definição da Formulação Dual

Definindo o ***Problema Primal*** como sendo o problema da determinação de $\underset{\sim}{X} = (x_1,\dots,x_n)'$ que ***minimiza*** (problema de mínimo)

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{X}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} &\geq \underset{\sim}{b} \\ \underset{\sim}{X} &\geq 0 \end{aligned}$$

o ***Problema Dual*** consiste em determinar $\underset{\sim}{W} = (w_1,\dots,w_m)$ que ***maximiza***

$$\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{b}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{A} &\leq \underset{\sim}{C} \\ \underset{\sim}{W} &\geq 0 \end{aligned}$$

Identicamente, para um ***Problema Primal*** de ***maximização*** com inequações do tipo *menor ou igual*, se define um correspondente ***Problema Dual*** de ***minimização*** com inequações do tipo *maior ou igual.*

<u>Exemplo Numérico de Formulação Dual</u>

Seja o ***Problema Primal*** definido por:

$$\left.\begin{array}{lll} Max & 10x_1 + 9x_2 & \\ & 5x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ & 4x_1 + 6x_2 & \leq 230 \\ & 2x_1 + 1x_2 & \leq 70 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right\} \text{Primal}$$

Temos, então,

$$\underset{\sim}{C} = (10,9) \qquad \underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 70 \end{pmatrix}$$

e a ***Formulação Dual*** vem

$$Min\ (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}200\\230\\70\end{pmatrix} = Min\ 200w_1 + 230w_2 + 70w_3$$

sujeito a

$$(w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 6\\2 & 1\end{pmatrix} \geq (10,9)$$

o que é equivalente a

$$(5w_1 + 4w_2 + 2w_3, 4w_1 + 6w_2 + 1w_3) \geq (10,9)$$

e ao conjunto de condições

$$5w_1 + 4w_2 + 2w_3 \geq 10$$
$$4w_1 + 6w_2 + 1w_3 \geq 9$$

2.5.2 Teoremas da Dualidade

Teorema I - Qualquer solução para o ***Problema Primal*** *(Dual)* constitui um limite para o *Valor Óptimo* do ***Problema Dual*** *(Primal)*.

<u>*Primal*</u>	<u>*Dual*</u>
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
s.a	s.a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i ; i = 1,\dots,m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j ; j = 1,\dots,n$
$x_j \geq 0$	$y_i \geq 0$

A partir das condições do ***Primal***, multiplicando-as por y_i (mantém o sinal, pois $y_i \geq 0$):

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \leq b_i y_i$$

Aplicando somatórios a esta condição, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Procedendo de forma análoga com as condições do ***Problema Dual***, vamos obter

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j \geq c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ou

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

e

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}_{\text{Função Objectivo do Primal (Maximização)}} \quad \leq \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i}_{\text{Função Objectivo do Dual (Minimização)}}$$

Ficou, assim, provado o *Teorema*.

Teorema II - O valor da *Solução Óptima* para o ***Problema Primal***, se existir, é igual ao valor da *Solução Óptima* para o ***Problema Dual***.

Este enunciado é de prova fácil quando se utiliza a notação matricial.

Considere-se o seguinte ***Problema Primal***:

$$Max\ \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{X}$$

sujeito a

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X} \leq \underset{\sim}{b}$$

$$\underset{\sim}{X} \geq 0$$

A forma tabular do quadro correspondente às condições é

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_1 & \underset{\sim}{A}_2 & \ldots & \underset{\sim}{A}_n & \underset{\sim}{U}_1 & \underset{\sim}{U}_2 & \ldots & \underset{\sim}{U}_m & \underset{\sim}{b} \\ -c_1 & -c_2 & \ldots & -c_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\hspace{6em}}_{\text{Correspondente às Variáveis Básicas}}$$

A última linha do quadro representa os *Coeficientes da Função Objectivo.*

A coluna à direita no quadro corresponde à coluna $\underset{\sim}{P}_0$.

Os vectores $\underset{\sim}{U}_i$ possuem um elemento igual a *1* na linha *i*, e todos os outros elementos são iguais a zero.

O quadro apresentado pode ser condensado para a forma

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{I}_{(mxm)} & \underset{\sim}{b}_{(mx1)} \\ -\underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{O}_{(1xm)} & \underset{\sim}{O}_{(1x1)} \end{bmatrix}$$

Deve notar-se que, na presente representação, $\underset{\sim}{A}$ representa o quadro do problema excluindo a *matriz identidade.*

Em cada iteração haverá *m* variáveis na base.

As colunas do quadro que se pretendem que venham a estar associadas à próxima *base* têm a forma

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_{(mxm)} \\ -\underset{\sim}{C}_{B\,(1xm)} \end{bmatrix}$$

Multiplicando estas colunas do *Quadro Inicial*, à esquerda, pela matriz

$$\underset{\sim}{\alpha} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}^{-1} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{C}_B \underset{\sim}{B}^{-1} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}$$

obtém-se, nas colunas a matriz

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{I}_{(mxm)} \\ \underset{\sim}{0}_{(1xm)} \end{bmatrix}$$

necessária à constituição da *base.*

Multiplicando todo o quadro do problema pela matriz $\underline{\alpha}$, obtém-se

$$\begin{array}{c|c|c}
\underline{B}^{-1}\underline{A} & \underline{B}^{-1} & \underline{B}^{-1}\underline{b} \\
\hline
\underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{A}-\underline{C} & \underline{C}_B\underline{B}^{-1} & \underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{b}
\end{array}$$

Este próximo quadro será *Óptimo* se todos os coeficientes na linha da *Função Objectivo* forem maiores ou iguais a zero.

Os *coeficientes da linha da Função Objectivo* são:

- Coeficientes nas colunas correspondentes à base no *Quadro Inicial*

$$\underline{C}_B\underline{B}^{-1}$$

- Restantes coeficientes (*Custos Reduzidos*)

$$\underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{A}-\underline{C}$$

Portanto, o quadro é *Óptimo* se

$$(1)\qquad \begin{cases} \underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{A}-\underline{C}\geq 0 \\ \underline{C}_B\underline{B}^{-1}\geq 0 \end{cases}$$

A *Solução Óptima* correspondente é

$$\underline{X}=\underline{B}^{-1}\underline{b}$$

e o *Valor Óptimo da Função Objectivo* é, então,

$$F.O.=\underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{b}$$

Adoptemos, tentativamente, para o ***Problema Dual***, a solução

$$\underline{Y}_B=\underline{C}_B\underline{B}^{-1}$$

Note-se que, atendendo a *(1)*, $\underline{Y}_B\geq 0$, obedecendo à *Condição de Não-Negatividade*.

Da definição do ***Problema Dual***

$$\begin{aligned} &Min\ \underline{Y}\,\underline{b} \\ &s.a \\ &\quad \underline{Y}\,\underline{A} \geq \underline{C} \\ &\quad \underline{Y} \geq 0 \end{aligned}$$

substituindo $\underline{Y}$ por $\underline{Y}_B = \underline{C}_B\, \underline{B}^{-1}$ temos

$$\underline{Y}_B\, \underline{A} = \underline{C}_B\, \underline{B}^{-1}\, \underline{A} \geq \underline{C} \leftarrow \text{Verifica a condição}$$

Portanto, $\underline{Y}_B = \underline{C}_B\, \underline{B}^{-1}$ é uma *Solução Válida* para o ***Problema Dual.***

O correspondente *Valor da Função Objectivo* é

$$\underline{Y}_B\, \underline{b} = \underline{C}_B\, \underline{B}^{-1}\, \underline{b}$$

Este valor é igual ao indicado para *Valor da Função Objectivo* para o ***Problema Primal.*** Sabendo que max(Primal) ≤ min(Dual), este *Valor da Função Objectivo* é *Valor Óptimo*. Também, $\underline{Y}_B = \underline{C}_B\, \underline{B}^{-1}$ é *Solução Óptima* do ***Problema Dual.***

Teorema III - Teorema da Folga Complementar - Sejam x_j^*, para j=1,2,...,n e y_i^* para i=1,2,...,m *Soluções Válidas*, respectivamente para o ***Problema Primal*** e para o ***Problema Dual.*** Estas *Soluções* só serão *Óptimas* se:

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0; \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_i^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0; \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Note-se que nestas equações, os termos entre parêntesis representam *Folgas*, respectivamente nas *condições* do *Primal* e do *Dual.* O *Teorema* afirma, portanto, que sempre que exista *Folga* numa *restrição* de um dos problemas, a variável correspondente no outro problema tem valor nulo.

A prova segue argumentação já desenvolvida

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \leq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* y_i^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \leq 0 \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \geq 0 \end{cases}$$

Sendo

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leftarrow \text{(Igualdade de Valores Óptimos de Função Objectivo)}$$

o conjunto das duas inequações anteriores implica a igualdade a zero para cada uma delas.

Num caso temos

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{ \underbrace{y_i^*}_{\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right)}_{\leq 0} \right\} = 0$$

i.e. todos os termos do somatório são negativos ou nulos. Contudo, como o valor do somatório é nulo, cada um dos termos do somatório deve ser nulo.

No outro caso, temos

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{ \underbrace{x_j^*}_{\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right)}_{\geq 0} \right\} = 0$$

i.e. todos os termos do somatório são positivos ou nulos. Contudo, como o valor do somatório é nulo, cada um dos termos do somatório deve ser nulo.

Concluindo, para todos os ***i*** e todos os ***j***, observa-se

$$\begin{cases} y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0 \\ x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0 \end{cases}$$

2.5.3 O Primal e as Soluções do Dual

2.5.3.1 Introdução

Observando a transformação do *Quadro Inicial*

$$\begin{array}{cc|c} \underline{B}^{-1}\underline{A} & \underline{B}^{-1} & \underline{B}^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{A}-\underline{C} & \underline{C}_B\underline{B}^{-1} & \underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{b} \end{array}$$

e tendo em consideração a formulação do ***Problema Dual***

$$\begin{aligned} & Min\ \underline{Y}\underline{b} \\ & s.a \\ & \quad \underline{Y}\underline{A} \geq \underline{C} \ \rightarrow\ \underline{Y}\underline{A}-\underline{C} \geq 0 \\ & \quad \underline{Y} \geq 0 \end{aligned}$$

podemos considerar $\underline{C}_B\underline{B}^{-1}$ como ***Solução Tentativa*** para o ***Problema Dual***.

Nestas circunstâncias, a *folga* nas *condições do dual* é dada por

$$\underline{Y}\underline{A}-\underline{C} = \underline{C}_B\underline{B}^{-1}\underline{A}-\underline{C}$$

Se esta *folga* for *não-negativa*, $\underline{C}_B\underline{B}^{-1}$ será uma *Solução Válida* e, então, o quadro é simultaneamente *Óptimo* para o *Primal* e para o *Dual*.

Veremos, agora um exemplo numérico.

Considere-se um *Problema Primal* com o enunciado

$$\begin{aligned} \text{max}\ & 4x_1+5x_2+9x_3+11x_4 \\ & 1x_1+1x_2+1x_3+1x_4 \leq 15 \\ & 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4 \leq 120 \\ & 3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \leq 100 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

O correspondente *Problema Dual* tem a formulação

$$\begin{aligned} \min\ & 15y_1 + 120y_2 + 100y_3 \\ & 1y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ & 1y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 5 \\ & 1y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 9 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 15y_3 \geq 11 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

O *Quadro Inicial* para o *Primal* tem a forma

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	P_0
S_1	1	1	1	1	1	0	0	15
S_2	7	5	3	2	0	1	0	120
S_3	3	5	10	15	0	0	1	100
W_j	−4	−5	−9	−11	0	0	0	0
					$\uparrow$ y_1	$\uparrow$ y_2	$\uparrow$ y_3	

Temos uma ***Solução Tentativa*** para o ***Problema Dual*** dada pelos *coeficientes* da *Linha da Função Objectivo* nas colunas correspondentes às *Variáveis de Folga* de cada uma das *condições*.

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Podemos calcular as *folgas* nas *restrições* do ***Problema Dual***:

$$\begin{aligned} & 1y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 4 = -4 \\ & 1y_1 + 5y_2 + 5y_3 - 5 = -5 \\ & 1y_1 + 3y_2 + 10y_3 - 9 = -9 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 15y_3 - 11 = -11 \end{aligned}$$

e concluir que a *Solução* proposta para o ***Problema Dual*** não é válida. As *folgas* calculadas representam os *Custos Reduzidos* ou *Ganhos Potenciais* associados ao ***Problema Primal***.

Prosseguindo mais uma iteração do ***Problema Primal*** obtemos o quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	P_0
S_1	$4/5$	$2/3$	$1/3$	0	1	0	$-1/15$	15
S_2	$33/5$	$13/3$	$8/3$	0	0	1	$-2/15$	120
x_4	$1/5$	$1/3$	$2/3$	1	0	0	$1/15$	100
W_j	$-9/5$	$-4/3$	$-5/3$	0	0	0	$11/15$	#

Folga nas condições do Problema Dual (x_1 a x_4); Solução Tentativa do Dual (S_1 a S_3)

e temos

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 11/15 \end{cases}$$

Podemos calcular as *folgas* nas *restrições* do **Problema Dual**:

$$\begin{aligned}
1y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 4 &= 3 * 11/15 - 4 = -9/5 \\
1y_1 + 5y_2 + 5y_3 - 5 &= 5 * 11/15 - 5 = -4/3 \\
1y_1 + 3y_2 + 10y_3 - 9 &= 10 * 11/15 - 9 = -5/3 \\
1y_1 + 2y_2 + 15y_3 - 11 &= 15 * 11/15 - 11 = 0
\end{aligned}$$

e verificar, mais uma vez, que a *Folga nas Condições do Dual* equivalem aos *Custos Reduzidos do Primal.*

2.5.3.2 Interpretação da Dualidade no Algoritmo Simplex-Primal

Os coeficientes das *Variáveis de Folga* na *Linha da Função Objectivo* de um *Quadro Primal* representam, em cada iteração *valores tentativos* para as *Variáveis Duais.*

O *Método Simplex-Primal* mantém a validade do *Problema Primal,* e procura a validade para o *Problema Dual.*

O *Algoritmo Simplex-Primal* termina quando se obtém a validade do *Problema Dual.*

2.5.3.3 Interpretação das Variáveis Duais na Solução Óptima

O *Valor Óptimo* de uma *Variável Dual* indica de quanto a *Função Objectivo* se modifica com uma variação unitária na *disponibilidade* do *recurso* que lhe está associado.

Esta interpretação é imediata se observarmos a forma da *Função Objectivo* do *Problema Dual.*

$$\text{Valor Óptimo FO} = \sum \left(\text{disponibilidade de recurso} * \text{variável óptima do dual associada}\right)$$

2.5.4 O Algoritmo Simplex-Dual

A interpretação do *Algoritmo do Simplex-Primal* feita com base na *Teoria da Dualidade* sugere um algoritmo alternativo que se designa por ***Algoritmo do Simplex-Dual***. Este algoritmo será aplicável a problemas expressos numa forma em que são *válidos* relativamente ao *Dual*, e inválidos relativamente ao *Primal*. O objectivo do algoritmo é, então, manter a validade do *Problema Dual* e procurar forçar o *Problema Primal* à validade.

Algoritmo Simplex-Dual

Uma vez construído o *Quadro-Simplex* normal para um problema, a aplicação do algoritmo segue o seguinte conjunto de regras:

- Se houver variáveis do *Primal* na base com valores negativos, selecciona-se a linha correspondente à entrada mais negativa para constituir a *Linha Pivôt*. Se todas as variáveis tiverem valores não-negativos, foi obtida a *Solução Óptima*. Por este processo, seleccionam-se as variáveis do *Primal* que mais se afastam da *condição de não-negatividade*. Estas correspondem aos *Ganhos Potenciais* associados ao *Problema Dual*.

- Efectuam-se as razões entre os coeficientes correntes da *Linha da Função Objectivo* correspondentes às variáveis não-básicas do *Primal* e os coeficientes negativos da *Linha Pivôt* escolhida. Selecciona-se como *Coluna Pivôt* a correspondente à menor razão. Intrinsecamente, este processo obriga a variável do *Primal* a obedecer à *condição de não-negatividade* e mantém a validade do *Problema Dual*.

Exemplo:

Considere-se o seguinte enunciado de um problema de *Programação Linear*

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + x_3 \\ s.a\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos rescrever este enunciado para uma formulação válida para o *Dual* e inválida para o *Primal*

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + x_3 \\ s.a\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -5 \\ & -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq -8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

O correspondente *Quadro* é

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2		
F_1	-1	-1	1	1	0	-5	
F_2	-1	2	-4	0	1	-8	⇐ Linha Pivôt
	2	0	1	0	0	0	
Razão	-2		-1/4				
			⇑				

Coluna Pivôt

Observe-se que neste quadro se tem uma *Solução Válida* do *Problema Dual* dada por

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

a que correspondem as *folgas* nas *condições do Dual* ***2.0*** e ***1***.

Continuando a aplicar o algoritmo, obtemos

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2		
F_1	-5/4	-1/2	0	1	1/4	-7	⇐ Linha Pivôt
x_3	1/4	-1/2	1	0	-1/4	2	
	7/4	1/2	0	0	1/4	-2	
Razão	-7/5	-1					
		⇑					

Coluna Pivôt

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1/4 \end{cases}$$

a que correspondem as *folgas* nas *condições do Dual* 7/4,1/2 e 0.

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	
x_2	5/2	1	0	-2	-1/2	14
x_3	3/2	0	1	-1	-1/2	9
	1/2	0	0	1	1/2	-9

$$\therefore \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1/2 \end{cases}$$

a que correspondem as *folgas* nas *condições do Dual* 1/2, 0 e 0.

Neste quadro temos, também, uma *Solução Válida* para o *Primal* com $x_1 = 0, x_2 = 14 \; e \; x_3 = 9$.

Escrevendo a formulação Dual correspondente ao exemplo apresentado, é possível verificar as *folgas* correspondentes a cada uma das soluções encontradas na aplicação do algoritmo.

2.5.5 Algoritmo Primal-Dual

Tivemos oportunidade de referir que na execução de um problema de *Programação Linear* se resolvem simultaneamente dois problemas, respectivamente um *Problema Primal* e um *Problema Dual*. A essência destes métodos está em partir de uma *formulação válida* para um dos problemas e forçar, sistematicamente, o outro problema à validade.

O ***Método Primal-Dual*** surge, naturalmente, da extensão destas metodologias, permitindo que no quadro de partida as *formulações* de ambos os problemas sejam *inválidas*. Procura-se, então, levar à validade a *formulação* que esteja mais próxima dessa condição. Depois, aplica-se o algoritmo (*Simplex-Primal* ou *Simplex-Dual*) necessário para validar o problema complementar.

<u>Exemplo</u>:

Considere-se o seguinte enunciado de um problema

$$\begin{aligned} \max \; & 4x_1 + 3x_2 \\ s.a \; & 5x_1 + 2x_2 \leq 44 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 44 \\ & 1x_1 + 1x_2 \geq 14 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Podemos representar o problema na forma equivalente

$$\begin{aligned} \max \; & 4x_1 + 3x_2 \\ s.a \; & 5x_1 + 2x_2 \leq 44 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 44 \\ & -1x_1 - 1x_2 \leq -14 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Passando à representação tabular do problema, temos

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	
F_1	5	2	1	0	0	44
F_2	2	3	0	1	0	44
F_3	-1	-1	0	0	1	-14
	-4	-3	0	0	0	0

Podemos observar que ambas as *formulações* são *inválidas.*

Para o *Primal* temos uma variável (F_3) que não obedece à *condição de não-negatividade.*

Para o *Dual*, a *solução-tentativa* $y_1 = 0, y_2 = 0$ e $y_3 = 0$ não verifica as *condições do Dual.*

Para o caso presente, vamos aplicar em primeiro lugar o *Método Simplex-Dual.* Deveremos, então, fazer x_2 entrar na base e F_3 sair da base.

O quadro seguinte é

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	
F_1	3	0	1	0	2	16
F_2	-1	0	0	1	3	2
x_2	1	1	0	0	-1	14
	-1	0	0	0	-3	42

Este quadro apresenta já uma *Solução Válida* para o *Problema Primal.* A execução progredia, agora, pela aplicação do *Simplex-Primal.*

O método deve ser aplicado de uma forma sistemática (que conduza primeiro à validação de um dos problemas), pois, noutras condições, pode não convergir para uma *solução.* A aplicação não sistemática dos dois algoritmos pode conduzir a situações em que a aplicação de um dos algoritmos *desfaz* a evolução da *solução* obtida pelo outro algoritmo.

2.5.6 Método dos Multiplicadores em Problemas de Transportes

A mecânica do *Método dos Multiplicadores* para cálculo dos *Ganhos Potenciais* em *Problemas de Transportes* foi oportunamente introduzida.

Estamos, agora, em condições de justificar o método com base na *Teoria da Dualidade* desenvolvida.

Voltando à definição do *Problema de Transportes*

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = a_i;\ i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j;\ j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Se transformarmos as condições de igualdade em inequações (cada igualdade substituída por duas inequações de sinal contrário), obtemos, por exemplo, para a equação relativa à primeira linha do *Quadro de Transportes*

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1$$

as inequações equivalentes

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}\leq a_1$$
$$-x_{11}-x_{12}-\ldots-x_{1n}\geq -a_1$$

Considerando todas as condições de igualdade do problema, obtemos

						Variáveis Duais
x_{11}	$+x_{12}$	+ ......+	x_{1n}	$\geq$	a_1	u_1
$-x_{11}$	$-x_{12}$	- ......-	$-x_{1n}$	$\geq$	$-a_1$	u_{1+m}
------	--------	--------	--------	--	--------	-----
x_{m1}	$+x_{m2}$	+ ......+	x_{mn}	$\geq$	a_m	u_m
$-x_{m1}$	$-x_{m2}$	- ......-	$-x_{mn}$	$\geq$	$-a_m$	u_{m+m}
x_{11}	$+x_{21}$	+ ......+	x_{m1}	$\geq$	b_1	v_1
$-x_{11}$	$-x_{21}$	- ......-	$-x_{m1}$	$\geq$	$-b_1$	v_{1+n}
------	--------	--------	--------	--	--------	-----
x_{1n}	$+x_{2n}$	+ ......+	x_{mn}	$\geq$	b_n	v_n
$-x_{1n}$	$-x_{2n}$	- ......-	$-x_{mn}$	$\geq$	$-b_n$	v_{n+n}

A parte superior do quadro contém as inequações correspondentes às equações relativas às linhas do *Quadro de Transportes.*

A parte inferior do quadro contém as inequações correspondentes às equações relativas às colunas do *Quadro de Transportes.*

À direita, indicam-se as *Variáveis do Dual* associadas a cada condição do *Primal.* Temos, assim, variáveis u_i ($i=1,\ldots,m+m$) associadas às restrições originadas das equações de linha e variáveis v_j ($j=1,\ldots,n+n$) associadas às restrições originadas das equações de coluna.

Por uma questão de conveniência para a equação de linha de índice i, as *Variáveis Duais* associadas às inequações correspondentes foram designadas, respectivamente, por u_i e u_{i+m}.

Também, para a equação de coluna de índice j, as *Variáveis Duais* associadas às inequações correspondentes foram designadas, respectivamente, por v_j e v_{j+n}.

Para a definição do *Problema Dual* correspondente, temos (note-se que o *Primal* tem *Função Objectivo* a *minimizar* e *condições* do tipo *menor ou igual*)

Dual

$$\begin{aligned}
\max\ & \sum_i a_i(u_i - u_{i+m}) + \sum_j b_j(v_j - v_{j+n}) \\
s.a\ \ & u_i - u_{i+m} + v_j - v_{j+n} \le c_{ij};\ (i=1,\dots,m)(j=1,\dots,n) \\
& u_i \ge 0;\ (i=1,\dots,m) \\
& v_j \ge 0;\ (j=1,\dots,n)
\end{aligned}$$

Esta *Formulação Dual* pode ser rescrita, definindo dois novos tipos de variáveis:

$$\begin{cases} U_i = u_i - u_{i+m} \\ V_j = v_j - v_{j+n} \end{cases}$$

Note-se que estas variáveis U_i e V_j, embora correspondendo à diferença entre variáveis *não-negativas*, não são condicionadas em sinal.

A redefinição do *Problema Dual* vem, assim

$$\begin{aligned}
\max\ & \sum_i a_i U_i + \sum_j b_j V_j \\
s.a\ \ & U_i + V_j \le c_{ij};\ (i=1,\dots,m)(j=1,\dots,n) \\
& U_i \text{ e } V_j \text{ sem restrição de sinal } (i=1,\dots,m)(j=1,\dots,n)
\end{aligned}$$

Sabemos que, para o *Quadro Óptimo* o *Valor das Funções Objectivo* do *Primal* e do *Dual* são iguais.

$$\sum_i a_i U_i + \sum_j b_j V_j = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

ou seja,

$$\sum_i \sum_j x_{ij} U_i + \sum_i \sum_j x_{ij} V_j - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = 0$$

ou, ainda,

$$\sum_i \sum_j \underbrace{x_{ij}}_{\ge 0} \underbrace{(U_i + V_j - c_{ij})}_{\le 0} = 0$$

Da última expressão, é evidente que

$$\begin{cases} U_i + V_j - c_{ij} < 0 \ \Rightarrow\ x_{ij} = 0 \\ x_{ij} \ge 0 \ \Rightarrow\ U_i + V_j - c_{ij} = 0 \end{cases}$$

o que está de acordo com o *Teorema da Folga Complementar* oportunamente apresentado.

Assim, para que um quadro seja *Óptimo*, é necessário que

$$\begin{cases} \text{Quando } x_{ij} = 0 \text{ então } U_i + V_j - c_{ij} < 0 \\ \text{Quando } x_{ij} \geq 0 \text{ então } U_i + V_j - c_{ij} = 0 \end{cases}$$

Também, $(U_i + V_j) - c_{ij}$ representa a *Folga* nas *Restrições do Dual*, o que é equivalente ao *Ganho Potencial* da célula correspondente.

Ficou, assim, demonstrado o procedimento adoptado no *Método dos Multiplicadores* utilizado no *Problema de Transportes*.

2.6 Modelo de Transportes Generalizado (*Aircraft Routing*)

2.6.1 Introdução

Como exemplo de um *Problema de Transportes Generalizado*, consideremos um problema de transporte de passageiros entre aeroportos (*rotas*), nas seguintes condições:

-É conhecida a procura em cada uma de várias *rotas*.

-Há diferentes tipos de avião, com *capacidades* diferentes. Estas *capacidades* diferentes podem resultar da capacidade física dos aviões ou de limitações inerentes às rotas em que são utilizados.

Evidentemente que, numa situação real, teríamos uma *procura* em cada *rota* caracterizada por uma particular *distribuição de probabilidade*. Vamos considerar que dispomos de um valor médio dessa *procura* em cada *rota*.

Matematicamente, se considerarmos a utilização de todos os aviões e o transporte de todos os passageiros, o problema tem a seguinte definição:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.a \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}x_{ij} = A_i \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

com

A_i - Procura na *rota* i (número de passageiros na *rota* i).
λ_{ij} - Capacidade de um avião do tipo j na *rota* i .
B_j - Número de aviões disponíveis do tipo j.
x_{ij} - Número de aviões do tipo j atribuídos à *rota* i .
c_{ij} - Custo associado à atribuição de um avião do tipo j à *rota* i .

Com esta definição, o problema dificilmente terá uma solução, pois ela obrigaria a que todos os aviões fossem utilizados, e que todos os passageiros fossem transportados.

A situação mais real consistiria em considerar que ou os passageiros podem não ser todos transportados (com uma penalização associada), ou os aviões podem não ser utilizados na totalidade (também com uma penalização associada).

Vamos considerar que o custo associado à não-utilização da totalidade dos aviões é incomportável. Admitimos, assim, que os passageiros podem não ser todos transportados.

O *Modelo Generalizado de Transportes* tem, assim, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i \\
s.a \quad & \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}x_{ij}\right) + y_i = A_i \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \\
& x_{ij} \geq 0 \\
& y_i \geq 0
\end{aligned}$$

com

A_i - Procura na *rota* i (número de passageiros na *rota* i).
λ_{ij} - Capacidade de um avião do tipo j na *rota* i .
B_j - Número de aviões disponíveis do tipo j.
x_{ij} - Número de aviões do tipo j atribuídos à *rota* i .
y_i - Número de passageiros não transportados na *rota* i .
c_{ij} - Custo associado à atribuição de um avião do tipo j à *rota* i .
d_i - Custo associado a cada passageiro não transportado na *rota* i .

Note-se que, para este problema, a solução não tem que ser, necessariamente, inteira. Assim, por exemplo, uma solução em que $x_{ij} = 1/7$ poderá ser interpretada como correspondente à utilização de um avião do *tipo* j na *rota* i , por semana.

A mesma formulação é aplicável a problemas com outro tipo de enunciado. Por exemplo, para um ***Problema de Produção***, o significado das variáveis do modelo seria:

A_i - Procura de artigos do *tipo* i (produção necessária de artigos do *tipo* i) no *período de planeamento*.
λ_{ij} - Capacidade de produção de artigos do *tipo* i numa hora-máquina do tipo j.
B_j - Número de horas disponíveis em máquinas do tipo j.
x_{ij} - Número de horas-máquina do tipo j atribuídos à produção de artigos do *tipo* i .
y_i - Número de artigos do *tipo* i não produzidos.
c_{ij} - Custo associado à atribuição de uma hora-máquina do tipo j à produção de um artigo do *tipo* i .
d_i - Custo associado a cada artigo do *tipo* i não produzido.

2.6.2 Solução do Modelo de Transportes Generalizado

Para solução deste modelo vamos adoptar a mesma metodologia aplicada quando da demonstração do *método dos multiplicadores* para o problema normal de transportes. Assim, vamos escrever o *Problema Primal* na forma de inequações e o correspondente *Problema Dual*. Da igualdade dos valores das *Funções Objectivo* para os dois problemas (nas *Soluções Óptimas*) vamos derivar *Condições de Optimabilidade* e uma metodologia para o cálculo do *Ganho Potencial* associado a cada *célula não-básica*.

<u>Problema Primal</u>

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i$$

s.a

$$\left.\begin{array}{llll} \sum_j (\lambda_{ij}[+x_{ij}]) & +y_i & \geq & a_i \\ \sum_j (\lambda_{ij}[-x_{ij}]) & +(-y_i) & \geq & -a_i \\ \sum_i (+x_{ij}) & & \geq & b_j \\ \sum_i (-x_{ij}) & & \geq & -b_j \end{array}\right] \begin{array}{l} u_i \\ u_{i+m} \\ v_j \\ v_{j+n} \end{array} \quad \textbf{Variáveis Duais}$$

<u>Problema Dual</u>

$$\max \sum_i u_i a_i + \sum_i [u_{i+m}(-a_i)] + \sum_j b_j v_j + \sum_j b_j(-v_{j+n})$$

s.a

$$\begin{array}{l} \lambda_{ij}u_i - (\lambda_{ij}u_{i+m}) + v_j - v_{j+n} \leq c_{ij};\ (i = 1,\ldots,m)(j = 1,\ldots,n) \\ u_i - u_{i+m} \leq d_i;\ (i = 1,\ldots,m) \\ u_i \geq 0,\ u_{i+m} \geq 0,\ v_j \geq 0,\ v_{j+n} \geq 0 \end{array}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{array}{l} U_i = u_i - u_{i+m} \\ V_j = v_j - v_{j+n} \end{array}$$

temos U_i e V_j não limitados em sinal, e a formulação do *Problema Dual* vem

$$\max \ \sum_i a_i U_i + \sum_j b_j V_j$$

s.a

$$\lambda_{ij} U_i + V_j \le c_{ij}; \ (i = 1,\dots,m)(j = 1,\dots,n)$$
$$U_i \le d_i; \ (i = 1,\dots,m)$$

Igualando os valores das *Funções Objectivo*, temos

$$\sum_i a_i U_i + \sum_j b_j V_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i$$

ou

$$\sum_i \underbrace{\left[\sum_j (\lambda_{ij} x_{ij}) + y_i) \right]}_{a_i} U_i + \sum_j \underbrace{\left[\sum_i x_{ij} \right]}_{b_j} V_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i$$

ou, ainda,

$$\sum_i \sum_j \underbrace{x_{ij}}_{\ge 0} \underbrace{(c_{ij} - \lambda_{ij} U_i - V_j)}_{\substack{\ge 0 \\ \text{Folga do Dual}}} + \sum_i \underbrace{y_i}_{\ge 0} \underbrace{(d_i - U_i)}_{\substack{\ge 0 \\ \text{Folga do Dual}}} = 0$$

Cada uma das parcelas da soma na equação anterior deverá, portanto, ser nula ou positiva. Como o resultado é nulo, as parcelas da soma deverão ser todas nulas.

Portanto,

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j x_{ij} (c_{ij} - \lambda_{ij} U_i - V_j) = 0 \\ \sum_i y_i (d_i - U_i) = 0 \end{cases}$$

A solução será uma *Solução Óptima* se:

$$\begin{cases} x_{ij} > 0 & \rightarrow & c_{ij} - \lambda_{ij} U_i - V_j = 0 \\ x_{ij} = 0 & \rightarrow & c_{ij} - \lambda_{ij} U_i - V_j > 0 \\ y_i > 0 & \rightarrow & d_i - U_i = 0 \\ y_i = 0 & \rightarrow & d_i - U_i > 0 \end{cases}$$

2.6.3 Construção de uma Solução Válida de Base e Execução de um Exemplo

Vamos analisar a solução de um *Problema de Transportes Generalizado* com base num exemplo.

Consideremos um problema de transporte aéreo de passageiros em três rotas, com procuras no período de planeamento iguais, respectivamente a *320*, *165* e *190* passageiros. Consideremos, também, que se dispõe de três tipos de aviões, respectivamente *15* aviões do ***tipo 1***, *14* aviões do ***tipo 2*** e *18* aviões do ***tipo 3***. A penalização associada a cada passageiro não transportado é de *15 U.M.* por passageiro na ***rota 1***, *15 U.M.* por passageiro na ***rota 2*** e *8 U.M.* por passageiro na ***rota 3***.

Admita-se, ainda, que é necessário utilizar a totalidade dos aviões, e que as ***matrizes de capacidade*** e de ***custos unitários*** (de utilização dos aviões) são dadas por:

Capacidade de cada tipo de avião em cada rota

		Tipo de Avião		
		1	2	3
Rota	1	20	15	
	2	18	13	10
	3		14	8

Custo de cada tipo de avião em cada rota (U.M.)

		Tipo de Avião		
		1	2	3
Rota	1	12	13	
	2	12	13	15
	3		11	14

Procura em cada rota

Rota	Nº de Passageiros
1	320
2	165
3	190

Penalização por passageiro não transportado em cada rota

Rota	Penalização (U.M.)
1	15
2	15
3	8

Aviões disponíveis de cada tipo

Tipo	Nº de Aviões
1	15
2	14
3	18

Podemos construir, para o problema, o seguinte quadro de transportes:

Avião j

Rota i	B_1	B_2	B_3		
1	20 x_{11} 12	15 x_{12} 13		1 y_1 15	320
2	18 x_{21} 12	13 x_{22} 13	10 x_{23} 15	1 y_2 15	165
3		14 x_{32} 11	8 x_{33} 14	1 y_3 8	190
	15	14	18		

$\underbrace{B_1 \quad B_2 \quad B_3}_{\text{Aviões disponíveis}}$ $\quad \underbrace{y}_{\text{Passageiros não transportados}}$

Em cada *célula* do quadro, adoptamos as seguintes localizações:

- Canto superior direito

Capacidade de um avião do tipo correspondente à *coluna* da *célula* quando em serviço na *rota* correspondente à linha da *célula*.

- Canto inferior direito

Custo por avião do tipo correspondente à *coluna* da *célula* quando em serviço na *rota* correspondente à linha da *célula*.

- Centro da *célula*

Número de aviões do tipo correspondente à *coluna* da *célula* quando em serviço na *rota* correspondente à linha da *célula*.

Para preenchimento do quadro, devemos atender que o máximo valor que podemos inscrever numa *célula* depende tanto do valor residual do número de passageiros por transportar como do número residual de aviões disponíveis. Para a representação utilizada no quadro, as equações que se lêem segundo as *linhas* devem ter em consideração o produto das capacidades de cada avião pelo número de aviões atribuídos (representando o número de passageiros transportados). Na vertical, em cada *coluna*, as equações traduzem, apenas, soma de número de aviões.

Vamos seguir o raciocínio de preenchimento do quadro para obtenção de uma *Solução Válida de Base*.

No *Canto NW*, *i.e.* ***célula (1,1)***, de acordo com a disponibilidade vertical, podemos colocar um valor máximo de ***15*** aviões. De acordo com a equação horizontal, atendendo a que o número de passageiros na ***rota 1*** é de ***320*** e a capacidade de um avião do ***tipo 1*** na ***rota 1*** é igual a ***20***, podemos ter um máximo de $320/20 = 16$ aviões. Portanto, iremos colocar ***15*** aviões nessa *célula*.

Após a referida atribuição, saturámos a primeira coluna do quadro (equação vertical). Na equação horizontal, na ***rota 1***, já estão servidos $20*15 = 300$ passageiros. A procura residual é, assim, igual a $320 - 300 = 20$ passageiros.

	B_1	B_2	B_3		
1	20 15 12	15 13		1 15	**(320),20**
2	18 12	13 13	10 15	1 15	**165**
3		14 11	8 14	1 8	**190**
	(15) **0**	**14**	**18**		

Passamos ao preenchimento da ***célula (1,2)***.

De acordo com a disponibilidade de aviões (equação de coluna), o valor máximo para a célula seria igual a ***14***. Contudo, segundo a equação de linha correspondente à *célula*, o número máximo de aviões de *capacidade* igual a ***15*** que transporta a *procura residual* de ***20*** passageiros é igual a $(20/15) = 1\frac{1}{3}$. Assim, saturamos a linha do quadro correspondente à *célula*.

	B_1	B_2	B_3		
1	20 / 15 / 12	15 / $1\frac{1}{3}$ / 13		1 / — / 15	(320),(20),0
2	18 / 12	13 / 13	10 / 15	1 / 15	165
3		14 / 11	8 / 14	1 / 8	190
	(15) 0	14	18		

Prosseguimos com a *célula (2,2)*.

Na correspondente equação vertical podemos observar que podemos colocar na *célula* um máximo de $14-1\frac{1}{3}=12\frac{2}{3}$ aviões. Da equação horizontal, temos um limite de $165/13>12\frac{2}{3}$. O valor máximo é, assim, $12\frac{2}{3}$ e saturamos a correspondente coluna do quadro.

	B_1	B_2	B_3		
1	20 / 15 / 12	15 / $1\frac{1}{3}$ / 13		1 / — / 15	(320),(20),0
2	18 / 12	13 / $12\frac{2}{3}$ / 13	10 / 15	1 / 15	(165),1/3
3		14 / 11	8 / 14	1 / 8	190
	(15) 0	(14) 0	18		

Passamos à *célula (2,3)*.

Da equação de coluna temos um limite máximo de *18* aviões do *tipo 3*.

Da equação horizontal temos um limite dado por

$$[165-(13*12\tfrac{2}{3})]/10=\tfrac{1}{30}.$$

O máximo possível é, portanto, $\frac{1}{30}$ e saturamos a correspondente linha do quadro.

	B_1	B_2	B_3		
—1	20 — 15 — 12	15 — $1\frac{1}{3}$ — 13	■	1 — — — 15	**(320),(20),0** —
—2	18 — — 12	13 — $12\frac{2}{3}$ — 13	10 — $\frac{1}{30}$ — 15	1 — — — 15	**(165),(1/3),0** —
3	■	14 11	8 14	1 8	**190**
	(15) **0**	**(14)** **0**	**(18)** $17\frac{29}{30}$		

Passamos à *célula (3,3)*.

Da equação de coluna temos um limite máximo de $17\frac{29}{30}$ aviões do *tipo 3*.

Da equação horizontal temos um limite dado por $(190/8) > 17\frac{29}{30}$.

O máximo possível é, portanto $17\frac{29}{30}$ e saturamos a correspondente coluna do quadro.

	B_1	B_2	B_3		
—1	20 — 15 — 12	15 — $1\frac{1}{3}$ — 13	■	1 — — — 15	**(320),(20),0** —
—2	18 — — 12	13 — $12\frac{2}{3}$ — 13	10 — $\frac{1}{30}$ — 15	1 — — — 15	**(165),(1/3),0** —
3	■	14 11	8 $17\frac{29}{30}$ 14	1 8	**(190)**,$46\frac{4}{15}$
	(15) **0**	**(14)** **0**	**(18)** $(17\frac{29}{30})$ **0**		

Resta, apenas, saturar a *rota 3*, preenchendo o valor da *variável de folga* y_3 como sendo igual ao número de passageiros ainda por transportar na *rota 3*.

Obtemos, assim, uma primeira *Solução Válida de Base*.

	B_1	B_2	B_3	Y	
1	20 15 12	15 $1\frac{1}{3}$ 13		1 - 15	**320**
2	18 12	13 $12\frac{2}{3}$ 13	10 $\frac{1}{30}$ 15	1 15	**165**
3		14 11	8 $17\frac{29}{30}$ 14	1 $46\frac{4}{15}$ 8	**190**
	15	**14**	**18**		

Para este quadro, passamos a determinar o valor dos *multiplicadores* (variáveis associadas do *Problema Dual*).

		V_1 B_1	V_2 B_2	V_3 B_3	Y	
U_1	**1**	20 15 12	15 $1\frac{1}{3}$ 13		1 15	**320**
U_2	**2**	18 12	13 $12\frac{2}{3}$ 13	10 $\frac{1}{30}$ 15	1 15	**165**
U_3	**3**		14 11	8 $17\frac{29}{30}$ 14	1 $46\frac{4}{15}$ 8	**190**
		15	**14**	**18**		

O cálculo dos *multiplicadores* deve iniciar-se com as *células básicas* da *coluna de folga* do quadro.

Célula (3,4)

$$y_3 = 46\tfrac{4}{15} > 0 \;\rightarrow\; U_3 = d_3 = 8$$

Passamos à ***Célula (3,3)***

$$c_{33} = \lambda_{33} U_3 + V_3$$
$$14 = 8*8 + V_3 \;\rightarrow\; V_3 = 14 - 64 = -50$$

Passamos à ***Célula (2,3)***

$$c_{23} = \lambda_{23} U_2 + V_3$$
$$15 = 10 * U_2 + (-50) \rightarrow U_2 = 65/10 = 6\tfrac{1}{2}$$

Passamos à ***Célula (2,2)***

$$c_{22} = \lambda_{22} U_2 + V_2$$
$$13 = 13 * (6\tfrac{1}{2}) + V_2 \rightarrow V_2 = -71\tfrac{1}{2}$$

Passamos à ***Célula (1,2)***

$$c_{12} = \lambda_{12} U_1 + V_2$$
$$13 = 15 * U_1 + (-71\tfrac{1}{2}) \rightarrow U_1 = 5\tfrac{19}{30}$$

Passamos à ***Célula (1,1)***

$$c_{11} = \lambda_{11} U_1 + V_1$$
$$12 = 20 * (5\tfrac{19}{30}) + V_1 \rightarrow V_1 = -100\tfrac{2}{3}$$

O quadro seguinte mostra o valor dos *multiplicadores* calculados colocados no quadro.

U_i \ V_j		$-100\tfrac{2}{3}$ B_1	$-71\tfrac{1}{2}$ B_2	-50 B_3	Y	
$5\tfrac{19}{30}$	**1**	20 / 15 / 12	15 / $1\tfrac{1}{3}$ / 13		1 / 15	**320**
$6\tfrac{1}{2}$	**2**	18 / 12	13 / $12\tfrac{2}{3}$ / 13	10 / $\tfrac{1}{30}$ / 15	1 / 15	**165**
8	**3**		14 / 11	8 / $17\tfrac{29}{30}$ / 14	1 / $46\tfrac{4}{15}$ / 8	**190**
		15	**14**	**18**		

Passamos ao cálculo dos *Ganhos Potenciais*, começando, novamente, pela *coluna de folga*, observando, agora, as *variáveis não-básicas*.

Para a ***Célula (1,4)***

$$Ganho = d_1 - U_1 = 15 - 5\tfrac{19}{30} = 9\tfrac{11}{30}$$

Para a *Célula (2,4)*

$$Ganho = d_2 - U_2 = 15 - 6\tfrac{1}{2} = 8\tfrac{1}{2}$$

Para a *Célula (2,1)*

$$\begin{aligned} Ganho &= c_{21} - \lambda_{21} U_2 - V_1 \\ &= 12 - 18 * 6\tfrac{1}{2} - (-100\tfrac{2}{3}) = -13/3 \end{aligned}$$

Para a *Célula (3,2)*

$$\begin{aligned} Ganho &= c_{32} - \lambda_{32} U_3 - V_2 \\ &= 11 - 14 * 8 - (-71\tfrac{1}{2}) = -59/2 \end{aligned}$$

O quadro seguinte mostra os valores dos *Ganhos Potenciais* inscritos no canto superior esquerdo das *células não-básicas*.

U_i	V_j	$-100\frac{2}{3}$	$-71\frac{1}{2}$	-50		
		B_1	B_2	B_3	Y	
$5\frac{19}{30}$	**1**	20 15 12	15 $1\frac{1}{3}$ 13		$\boxed{9\frac{11}{30}}$ 1 15	**320**
$6\frac{1}{2}$	**2**	$\boxed{-\frac{13}{3}}$ 18 12	13 $12\frac{2}{3}$ 13	10 $\frac{1}{30}$ 15	$\boxed{8\frac{1}{2}}$ 1 15	**165**
8	**3**		$\boxed{-\frac{59}{2}}$ 14 11	8 $17\frac{29}{30}$ 14	1 $46\frac{4}{15}$ 8	**190**
		15	**14**	**18**		

A *célula* que oferece o maior *Ganho Potencial* é a ***Célula (3,2)***, que deverá, portanto passar a *célula básica*.

A construção do *circuito básico* para este problema oferece alguma dificuldade adicional, que deriva do facto de as equações segundo as linhas do quadro serem afectadas pelas capacidades λ_{ij}.

Começando na ***Célula (3,2)***, somamos, nessa *célula* $+\theta$.
A *coluna* 2 ficou, assim, desequilibrada em $+\theta$ aviões.
Vamos subtrair nessa coluna, na ***Célula (2,2)***, esses θ aviões.

A *linha* 2 do quadro ficou, assim, desequilibrada. De facto, ao subtrair θ aviões na ***Célula (2,2)***, o número de passageiros transportados na *rota 2* foi reduzido de $\lambda_{22} * \theta$, ou seja, foi reduzido de 13θ. Este número de passageiros deve ser compensado, adicionando a uma *célula básica* na mesma linha um número de aviões que transporte esse número de passageiros. Terá que ser na ***Célula (2,3)***, que tem uma *capacidade* igual a ***10***. Há, portanto, que adicionar $\frac{13}{10}\theta$ aviões na ***Célula (2,3)***.

Fica, assim, desequilibrada a *coluna 3* em $+\frac{13}{10}\theta$ aviões .

O equilíbrio na *coluna 3* é reposto subtraindo $\frac{13}{10}\theta$ aviões na ***Célula (3,3)***.

Para concluir o *circuito*, é necessário acertar a *rota 3*, determinando a alteração do valor da *folga* que deve ser colocada em *(3,4)*.

A alteração na *rota 3* tem o valor

$$14*(+\theta)+8*(-\tfrac{13}{10}\theta)=+\tfrac{36}{10}\theta$$

É este valor que deve ser subtraído à ***Célula (3,4)***. Desta forma, o problema continua equilibrado.

	B_1	B_2	B_3	Y	
1	20 15 12	15 $1\frac{1}{3}$ 13		1 15	**320**
2	18 12	13 $12\frac{2}{3}-\theta$ 13	10 $\frac{1}{30}+\frac{13}{10}\theta$ 15	1 15	**165**
3		14 $+\theta$ 11	8 $17\frac{29}{30}-\frac{13}{10}\theta$ 14	1 $46\frac{4}{15}-\frac{36}{10}\theta$ 8	**190**
	15	**14**	**18**		

Para o cálculo de θ_{max} devemos atender a que

$$\begin{cases} 12\frac{2}{3}-\theta & \geq 0 \\ 17\frac{29}{30}\theta & \geq 0 \\ 46\frac{4}{15}-\frac{36}{10}\theta & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_{max}=12\tfrac{2}{3}$$

Substituindo θ por $12\frac{2}{3}$ obtemos o *Quadro Válido de Base* seguinte.

	B_1	B_2	B_3	Y	
1	20 15 12	15 $1\frac{1}{3}$ 13		1 15	**320**
2	18 12	13 13	10 $16\frac{1}{2}$ 15	1 15	**165**
3		14 $12\frac{2}{3}$ 11	8 $1\frac{1}{2}$ 14	1 $\frac{2}{3}$ 8	**190**
	15	**14**	**18**		

A resolução progredia, calculando, novamente, os *multiplicadores*, os *Ganhos Potenciais*, o *circuito básico* e o valor de θ_{max}.

2.7 Programação Paramétrica

2.7.1 Introdução

O valor dos *coeficientes de custo unitário* da *Função Objectivo* ou o *nível dos recursos disponíveis* num *Problema de Programação Linear* podem estar sujeitos a alguma incerteza. Adicionalmente, pode acontecer que a antecedência com que os valores *exactos* são conhecidos seja insuficiente face ao tempo necessário para a obtenção de uma solução para o problema.

Nestas condições, torna-se vantajoso resolver o problema na forma ***parametrizada***, determinando previamente as diferentes *soluções* para o domínio possível de variação do ***parâmetro*** em consideração.

A título de exemplo, a **Figura-2.11** mostra uma situação em que o *nível dos recursos* varia linearmente no tempo, e em que um *plano óptimo de produção* dependeria do instante de tempo em que a produção tivesse início.

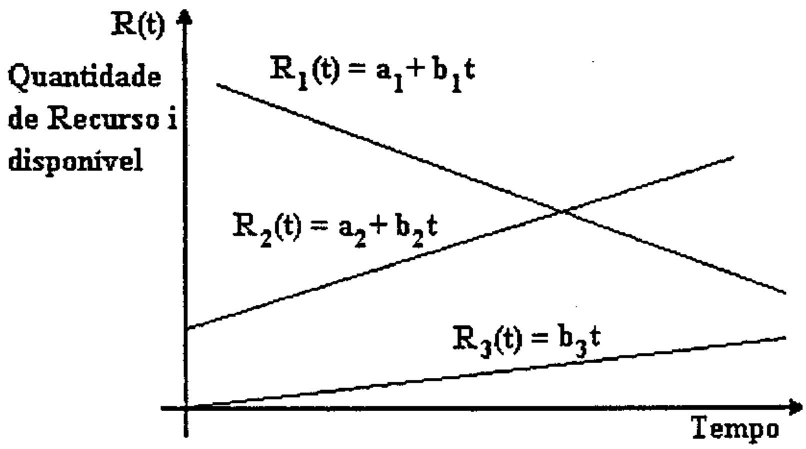


Figura-2.11

2.7.2 Parametrização da Função Objectivo

Vamos apresentar o tratamento deste tipo de problema com base num *enunciado-exemplo.*

Consideremos uma fábrica que produz um mesmo artigo em três máquinas diferentes. Os custos de produção para o artigo variam com a máquina em que é produzido. Admitimos que esses *custos de produção* são, respectivamente *3*, *6* e *2* *U.M.*

Independentemente da máquina onde é produzido, o artigo é vendido ao mesmo preço.

Admitimos que o *preço de venda* não é conhecido com antecedência, pelo que as diferentes *soluções* devem ser determinadas em função desse *valor de venda parametrizado t.*

A *Função Objectivo* será, para este problema, representada por

$$\max\ t*(x_1+x_2+x_3)-(3x_1+6x_2+2x_3)$$

com

$$\begin{cases} t-\text{Preço Unitário de Venda} \\ x_1-\text{N° de unidades produzidas na máquina 1} \\ x_2-\text{N° de unidades produzidas na máquina 2} \\ x_3-\text{N° de unidades produzidas na máquina 3} \end{cases}$$

Adicionalmente, vamos admitir que o problema está sujeito às seguintes condições:

$$\begin{aligned} &3x_1+4x_2+1x_3\le 2 \\ &1x_1+3x_2+2x_3\le 1 \\ &x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

O quadro inicial para este enunciado tem a forma

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
S_1	3	4	1	1	0	2
S_2	1	3	2	0	1	1
	$3-t$	$6-t$	$2-t$	0	0	0

Este quadro constitui *solução óptima* desde que

$$\begin{cases} 3-t\ge 0 \\ 6-t\ge 0 \\ 2-t\ge 0 \end{cases} \Rightarrow t\le 2$$

Para $t\le 2$ a ***Solução Óptima*** é

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \text{A solução significa não produzir}$$

Se $t\ge 2$, o *coeficiente* mais negativo na *Função Objectivo* é o correspondente a $(2-t)$, *i.e.* a *coluna pivot* deve ser a *coluna* de x_3. O quadro transforma-se, então, em

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
S_1	5/2	5/2	0	1	$-1/2$	3/2
x_3	1/2	3/2	1	0	1/2	1/2
	$2-\frac{t}{2}$	$3+\frac{t}{2}$	0	0	$\frac{t}{2}-1$	$\frac{t}{2}-1$

Este quadro constitui *solução óptima* desde que

$$\begin{cases} 2-\dfrac{t}{2}\geq 0 \\ 3+\dfrac{t}{2}\geq 0 \\ \dfrac{t}{2}-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow t\leq 4$$

Para $2\leq t\leq 4$ a ***Solução Óptima*** é

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=\dfrac{1}{2} \\ x_0=\dfrac{t}{2}-1 \end{cases} \Rightarrow \text{A solução significa produzir } 1/2 \text{ de } x_3$$

Se $t\geq 4$, o *coeficiente* mais negativo na *Função Objectivo* é o correspondente a $(2-\frac{t}{2})$, *i.e.* a *coluna pivot* deve ser a *coluna* de x_1. O quadro transforma-se, então, em

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
x_1	1	1	0	2/5	$-1/5$	3/5
x_3	0	1	1	$-1/5$	2	1/5
	0	$1+t$	0	$\frac{t}{5}-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}t-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}t-\frac{11}{5}$

Para $t\geq 4$ a ***Solução Óptima*** é

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{5} \\ x_2=0 \\ x_3=\dfrac{1}{5} \\ x_0=\dfrac{4}{5}t-\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

Resumindo:

	$t \leq 2$	$2 \leq t \leq 4$	$t \geq 4$
x_1	0	0	3/5
x_2	0	0	0
x_3	0	1/2	1/5
x_0	*0*	$\frac{t}{2}-1$	$\frac{4}{5}t-\frac{11}{5}$

Assim, podemos não conhecer exactamente o valor de t, mas se soubermos que é maior que ***10***, sabemos, imediatamente, qual a *solução óptima.*

2.7.3 Outras Situações de Parametrização

Desenvolvendo um raciocínio adequado (seguindo a lógica de solução do *Simplex*), podem-se analisar situações de *parametrização* dos *recursos disponíveis.*

Assim, por exemplo, para um quadro que apresente em determinada iteração, a forma

		P_j
		$3/5-2\lambda$ $1/5+\lambda$

uma vez seleccionada a *coluna pivôt* correspondente à entrada mais negativa na *Linha da Função Objectivo*, a selecção da *linha pivôt* vai depender do valor de λ. É, assim, possível definir valores do domínio de λ para os quais os quadros obtidos serão *Quadros Válidos de Base*, podendo determinar-se *Soluções Óptimas.*

Problemas de *parametrização dos custos* podem surgir, também, em *formulações de transportes.* Neste caso, a determinação dos *multiplicadores* e dos *Ganhos Potenciais* vai depender do valor do *parâmetro em consideração*, surgindo diferentes *quadros óptimos* consoante o valor do *parâmetro.*

	5	**3**	**5**	
0	$\boxed{-3}$ 2	**2** 3	**8** 5	**10**
$c_{22}-3$	$\boxed{3-c_{22}}$ 5	**9** c_{22}	$\boxed{7-c_{22}}$ 9	**9**
2	**5** 7	**1** 1	$\boxed{-1}$ 6	**6**
	5	**12**	**8**	

2.8 Programação Inteira

2.8.1 Introdução

A maior parte dos problemas que se traduzem por uma formulação de ***Programação Matemática*** incluem *variáveis* intrinsecamente *inteiras*.

Determinados problemas, embora não sejam de natureza *inteira*, exigem a introdução de *variáveis inteiras* quando se pretende que sejam expressos por um modelo de ***Programação Matemática***.

Como é evidente, em problemas em os recursos sejam, por exemplo, do tipo mão-de-obra (expressa em número de homens) ou máquinas, faz sentido falar na necessidade de obter uma ***Solução Inteira***.

O arredondamento de ***Soluções Contínuas*** não garante a obtenção de uma ***Solução Inteira Óptima***. De facto, o arredondamento pode produzir um ***Valor de Função Objectivo*** muito afastado do de uma ***Solução Inteira Óptima***.

2.8.2 Um Exemplo Gráfico

Consideremos um *espaço de soluções* definido pelas *condições*

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ &3x_1 + 3x_2 \leq 10\tfrac{1}{2} \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Adicionalmente, considere-se as variáveis x_1 e x_2 devam obedecer à condição de serem inteiras, *i.e.*

$$x_1, x_2 \text{ inteiros}$$

Note-se que, para as inequações acima indicadas, as correspondentes *variáveis de folga* podem não ser inteiras.

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 + S_1 = 9 \\ &3x_1 + 3x_2 + S_2 = 10\tfrac{1}{2} \\ &x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A **Figura-2.12** ilustra o *espaço de soluções contínuas*, com os possíveis *soluções inteiras* assinaladas.

As *Soluções Inteiras* têm as coordenadas

(0,0) (0,1) (0,2)
(1,0) (1,1)
(2,0) (2,1)
(3,0)

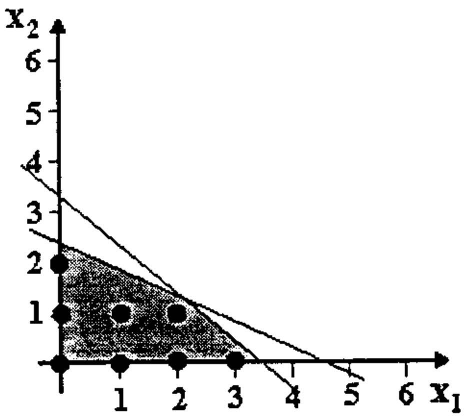


Figura-2.12

Consoante a expressão para a *Função Objectivo*, assim teremos diferentes *Soluções Inteiras Óptimas*.

Se for

$$x_0 = 4x_1 + 3x_2$$

então

$$\left.\begin{array}{lcr} (0,2) & \rightarrow & 6 \\ (0,1) & \rightarrow & 3 \\ (1,1) & \rightarrow & 7 \\ (2,1) & \rightarrow & 11 \\ (3,0) & \rightarrow & 15 \end{array}\right\} \text{máximo em } (3,0)$$

Se for

$$x_0 = 3x_1 + 4x_2$$

então

$$\left.\begin{array}{lcr} (0,2) & \rightarrow & 8 \\ (0,1) & \rightarrow & 4 \\ (1,1) & \rightarrow & 7 \\ (2,1) & \rightarrow & 10 \\ (3,0) & \rightarrow & 9 \end{array}\right\} \text{máximo em } (2,1)$$

Se for

$$x_0 = 2x_1 + 5x_2$$

então

$$\left.\begin{array}{lcr} (0,2) & \rightarrow & 10 \\ (0,1) & \rightarrow & 5 \\ (1,1) & \rightarrow & 7 \\ (2,1) & \rightarrow & 9 \\ (3,0) & \rightarrow & 6 \end{array}\right\} \text{máximo em } (0,2)$$

2.8.3 Metodologias para a Solução de Problemas de Programação Inteira

2.8.3.1 Introdução

As *Metodologias* que iremos utilizar passam por, em primeiro lugar, *relaxar a condição inteira* e resolver o problema como um *Problema de Programação Linear*. Pode acontecer que a solução do *problema relaxado* seja já uma *Solução Inteira* e, então, obteve-se a solução pretendida para o *Problema de Programação Inteira*.

Se a solução obtida não obedecer à *condição inteira*, procura-se reduzir (*cortar*) a *região de soluções válidas* da *formulação relaxada*, eliminando desse espaço zonas que não incluem nenhuma *solução inteira*. Ao novo *problema relaxado* é aplicada a metodologia usual para problemas de *Programação Linear*.

Vamos referir dois Métodos para redução (corte) da região de soluções válidas do problema relaxado. São, respectivamente, a ***Técnica do Branch & Bound*** (*Separação e Avaliação Progressiva*) e a ***Técnica dos Planos de Corte***.

2.8.3.2 Técnica do Branch & Bound

Esta *técnica* procura definir uma estratégia que evite ter que prosseguir exaustivamente todos os problemas que vão sendo gerados quando da adição de *restrições* que eliminam zonas do *espaço de soluções* do *problema relaxado* onde não existem *soluções inteiras*.

Suponhamos que o *Óptimo* para o *problema relaxado* era obtido para a *Solução*

$$\begin{cases} x_1 = 2\frac{1}{4} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

O problema original pode, então, ser dividido em dois problemas distintos que resultam da consideração das condições originais do problema e, adicionalmente, para um dos problemas a *condição* $x_1 \leq 2$ e, para o outro, $x_1 \geq 3$. Este procedimento consiste em usar para as *condições adicionais* os inteiros mais próximos de $x_1 = 2\frac{1}{4}$.

O espaço eliminado nunca poderia conter qualquer solução com x_1 inteiro.

A **Figura-2.13** ilustra a técnica.

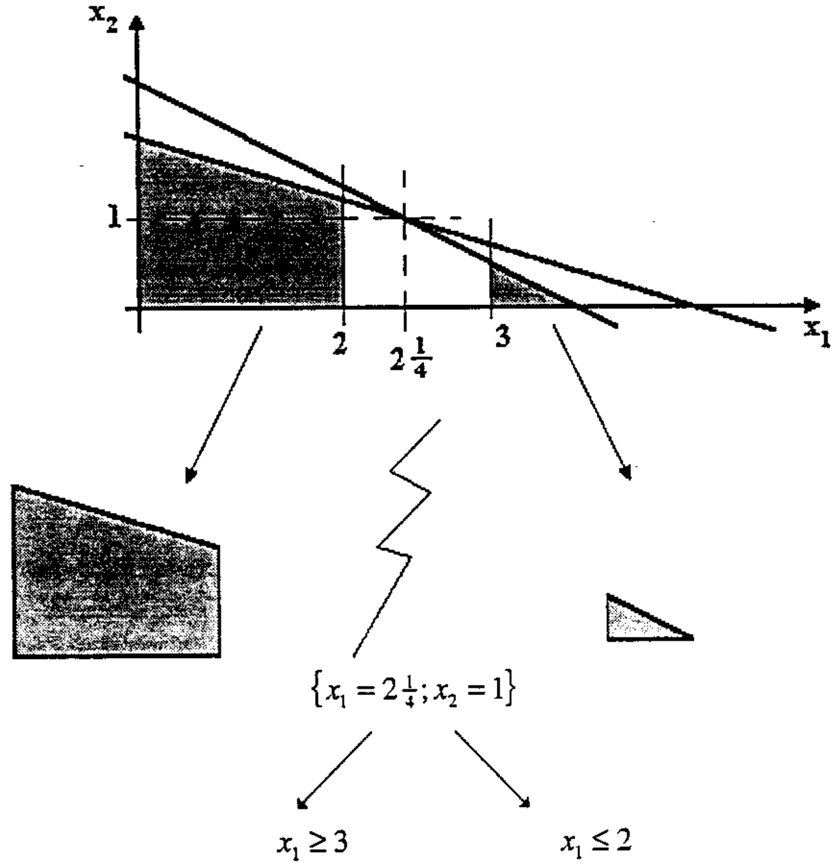


Figura-2.13

Exemplo Numérico

Para exemplificar a metodologia do ***Branch & Bound***, vamos considerar um problema de ***Programação Inteira*** com o seguinte enunciado:

$$x_0 = 3x_1 + 4x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 9$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 10\tfrac{1}{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

A solução do problema relaxado conduz aos seguintes quadros

	x_1	x_2	S_1	S_2	
S_1	2	4	1	0	9
S_2	3	3	0	1	$10\frac{1}{2}$
	−3	−4	0	0	0

	x_1	x_2	S_1	S_2	
x_2	1/2	1	1/4	0	9/4
S_2	3/2	0	−3/4	1	15/4
	−1	0	1	0	9

	x_1	x_2	S_1	S_2	
x_2	0	1	1/2	−1/3	1
x_1	1	0	−1/2	2/3	$2\frac{1}{2}$
	0	0	1/2	2/3	$11\frac{1}{2}$

Portanto,

$$x_1 = 2\tfrac{1}{2}$$
$$x_2 = 1$$
$$x_0 = 11\tfrac{1}{2}$$

Um dos novos problemas a resolver tem, adicionalmente, a condição $x_1 \leq 2$.

$$x_0 = 3x_1 + 4x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 9$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 10\tfrac{1}{2}$$
$$x_1 \leq 2$$

para o qual

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 5/4$$
$$x_0 = 11$$

O outro problema a resolver, tem a condição adicional $x_1 \geq 3$.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3x_1 + 4x_2 \\
2x_1 + 4x_2 &\le 9 \\
3x_1 + 3x_2 &\le 10\tfrac{1}{2} \\
x_1 &\ge 3
\end{aligned}
$$

para o qual

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 1/2 \\
x_0 &= 11
\end{aligned}
$$

Nesta fase, temos a porção da *árvore de busca*

$\{x_1 = 2\tfrac{1}{2}; x_2 = 1; x_0 = 11\tfrac{1}{2}\}$ $\leftarrow$ Problema relaxado

$x_1 \le 2$ ↙ ↘ $x_1 \ge 3$

1º $\{x_1 = 2; x_2 = 1\tfrac{1}{4}; x_0 = 11\}$ **2º** $\{x_1 = 3; x_2 = 1/2; x_0 = 11\}$

Deve notar-se que o *Valor da Função Objecivo* de qualquer *ramo* pode, quando muito, ser igual ao *Valor da Função Objecivo* na *raiz* de onde derivam. A imposição da *restrição adicional* não poderia resultar numa melhoria desse valor. Também, tem que se atender a que, mesmo que um ramo produzisse uma *solução inteira*, seria necessário explorar o outro ramo (pois, potencialmente, ele pode produzir uma *solução inteira* de *valor de função objectivo* igual ao da *raiz*).

Nenhum dos *ramos* analisados produziu uma *solução inteira*. Ambos conduziram a soluções de *valor de função objectivo* iguais a ***11***. Portanto, há que explorar um total de novos quatro *ramos* (dois a partir de cada uma das anteriores ramificações).

$\{x_1 = 2\tfrac{1}{2}; x_2 = 1; x_0 = 11\tfrac{1}{2}\}$ $\leftarrow$ Problema relaxado

$x_1 \le 2$ ↙ ↘ $x_1 \ge 3$

1º $\{x_1 = 2; x_2 = 1\tfrac{1}{4}; x_0 = 11\}$ 2º $\{x_1 = 3; x_2 = 1/2; x_0 = 11\}$

$x_2 \le 1$ ↙ ↘ $x_2 \ge 2$ $x_2 \le 0$ ↙ ↘ $x_2 \ge 1$

3º $\{x_1 = 2; x_2 = 1; x_0 = 10\}$ **(Solução Inteira)**

4º $\{x_1 = 1/2; x_2 = 2; x_0 = 9\tfrac{1}{2}\}$

5º $\{x_1 = 3\tfrac{1}{2}; x_2 = 0; x_0 = 10\tfrac{1}{2}\}$

6º **(Não tem Solução)**

O ***4º ramo*** não merece mais exploração, pois o limite para o valor de qualquer ***solução inteira*** que dele possa ocorrer é $x_0 = 9\tfrac{1}{2}$, e o ***3º ramo*** já produziu uma ***solução inteira*** de valor $x_0 = 10$. Contudo, o ***5º ramo*** tem que ser explorado, pois pode, eventualmente, produzir uma ***solução inteira*** de valor $x_0 = 10\frac{1}{2}$.

$\{x_1 = 2\frac{1}{2}; x_2 = 1; x_0 = 11\frac{1}{2}\}$ $\leftarrow$ Problema relaxado

$x_1 \leq 2$ $\quad$ $x_1 \geq 3$

1º $\{x_1 = 2; x_2 = 1\frac{1}{4}; x_0 = 11\}$ $\qquad$ 2º $\{x_1 = 3; x_2 = 1/2; x_0 = 11\}$

$x_2 \leq 1$ $\quad$ $x_2 \geq 2$ $\qquad$ $x_2 \leq 0$ $\quad$ $x_2 \geq 1$

3º (Solução Inteira) $\{x_1 = 2; x_2 = 1; x_0 = 10\}$ $\qquad$ 4º$\{x_1 = 1/2; x_2 = 2; x_0 = 9\frac{1}{2}\}$ $\qquad$ 5º$\{x_1 = 3\frac{1}{2}; x_2 = 0; x_0 = 10\frac{1}{2}\}$ $\qquad$ **6º (Não tem Solução)**

$x_1 \leq 3$ $\quad$ $x_1 \geq 4$

7º$\{x_1 = 3; x_2 = 0; x_0 = 9\}$ **(Solução Inteira)** $\qquad$ **8º (Não tem Solução)**

Assim, podemos concluir que a ***Solução Inteira Óptima*** ocorre no ***3º ramo***.

$\{x_1 = 2\frac{1}{2}; x_2 = 1; x_0 = 11\frac{1}{2}\}$ $\leftarrow$ Problema relaxado

$x_1 \leq 2$ $\quad$ $x_1 \geq 3$

1º $\{x_1 = 2; x_2 = 1\frac{1}{4}; x_0 = 11\}$ $\qquad$ 2º $\{x_1 = 3; x_2 = 1/2; x_0 = 11\}$

$x_2 \leq 1$ $\quad$ $x_2 \geq 2$ $\qquad$ $x_2 \leq 0$ $\quad$ $x_2 \geq 1$

3º (Solução Óptima) $\{x_1 = 2; x_2 = 1; x_0 = 10\}$ $\qquad$ 4º$\{x_1 = 1/2; x_2 = 2; x_0 = 9\frac{1}{2}\}$ $\qquad$ 5º$\{x_1 = 3\frac{1}{2}; x_2 = 0; x_0 = 10\frac{1}{2}\}$ $\qquad$ **6º (Não tem Solução)**

$x_1 \leq 3$ $\quad$ $x_1 \geq 4$

7º$\{x_1 = 3; x_2 = 0; x_0 = 9\}$ $\qquad$ **8º (Não tem Solução)**

Essa *Solução Óptima* é

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_0 = 10 \end{cases}$$

2.8.3.3 Método da Geração de Planos de Corte

2.8.3.3.1 Método do Corte Fraccional Inteiro Puro

2.8.3.3.1.1 O Método

O método que vamos passar a justificar considera que todas as variáveis (*variáveis de decisão* e *variáveis de folga*) devem ser inteiras.

Tomemos como exemplo o seguinte enunciado

$$
\begin{aligned}
&\max\ x_0 = 1x_1 + 2x_2 \\
&s.a \\
&\qquad -5x_1 + 3x_2 \le 3 \\
&\qquad 3x_1 - 5x_2 \le 3 \\
&\qquad 1x_1 + 1x_2 \le 5 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

Para solução do *Problema Relaxado* temos os quadros

<u>Quadro Inicial</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	−5	3	1	0	0	3
x_4	3	−5	0	1	0	3
x_5	1	1	0	0	1	5
	−1	−2	0	0	0	0

<u>Quadro Final</u>

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	1/8	0	5/8	$3\frac{1}{2}$
x_4	0	0	1	1	2	16
x_1	1	0	−1/8	0	3/8	$1\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{8}$	$8\frac{1}{2}$

A ***Solução Óptima*** do ***Problema Relaxado*** ($x_1 = 1\frac{1}{2}; x_2 = 3\frac{1}{2}$) não produz a desejada *solução inteira.*

Consideremos uma linha do quadro relativa a uma variável que não obedece à *condição inteira*. Por exemplo, tomemos a linha correspondente a x_1.

$$x_1 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_5 = 1\frac{1}{2}$$

A equação é da forma genérica

(1) $$x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$$

Cada coeficiente na expressão do lado esquerdo da equação pode ser composto numa parte inteira e numa parte fraccionária tal que a parte fraccionária obedeça às condições

$$0 \leq f_{1j} < 1$$

Nestas condições, *(1)* transforma-se em

$$x_1 + \left(\left[a_{1,m+1}\right] + f_{1,m+1}\right)x_{m+1} + \ldots + \left(\left[a_{1,n}\right] + f_{1,n}\right)x_n = \left[b_1\right] + F_1$$

com

$$0 < F_1 < 1$$

Note-se que F_1 deve ser estritamente menor que *1* e estritamente maior que *0*, pois a equação foi escolhida do quadro pelo facto de representar um valor fraccionário para a variável que representava.

Para o exemplo em causa, podemos escrever

$$x_1 + \left([-1] + \frac{7}{8}\right)x_3 + \left([0] + \frac{3}{8}\right)x_5 = [1] + \frac{1}{2}$$

Seja

(2) $$k = f_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + f_{1,n}x_n$$

sendo, para todos os *j*

$$\left.\begin{array}{l} f_{1j} \geq 0 \\ x_j \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ teremos } k \geq 0$$

Podemos subtrair a equação *(2)* da equação *(1)*, para obter

(3) $$\underbrace{x_1 + \left[a_{1,m+1}\right]x_{m+1} + \ldots\left[a_{1,n}\right]x_{1,n} - \left[b_1\right]}_{\text{Todos os factores são inteiros e, portanto, também a expressão é inteira}} = \underbrace{F_1 - k}_{\text{Tem que ser inteiro, pois o lado esquerdo também o é}}$$

Portanto,

$$F_1 - k \rightarrow \text{ Tem que ser inteiro}$$

Mais, ainda,

F_1 é tal que $0 < F_1 < 1$
$k \geq 0$

logo, $F_1 - k < 1$

O maior inteiro menor que *1* é *0*.

Assim,

$$F_1 - k \leq 0 \;\Rightarrow\; F_1 \leq k$$

Atendendo a *(2)*, podemos escrever a ***Condição de Corte***

$$f_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + f_{1,n}x_n \geq F_1$$

Para o caso do exemplo em consideração, esta ***Condição de Corte*** vem

$$\frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

Acrescentando esta condição ao problema, obtemos

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	
x_2	0	1	1/8	0	5/8	0	$3\frac{1}{2}$
x_4	0	0	1	1	2	0	16
x_1	1	0	−1/8	0	3/8	0	$1\frac{1}{2}$
S_1	0	0	−1/8	0	−5/8	1	−1/2
	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{8}$	0	$8\frac{1}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	
x_2	0	1	0	0	0	1	3
x_4	0	0	0	1	−3	8	12
x_1	1	0	0	0	1	−1	2
x_3	0	0	1	0	5	−8	4
	0	0	0	0	1	1	8

Obtém-se, assim a ***Solução Inteira Óptima***

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

2.8.3.3.1.2 Representação Gráfica do Método de Geração de Planos de Corte

Vamos passar a representar graficamente o *problema-exemplo* que utilizámos, bem como o plano de corte gerado expresso em função de x_1 e x_2.

Para as condições do problema, tínhamos

$$\begin{aligned}
-5x_1+3x_2+1x_3&=3\\
3x_1-5x_2+1x_4&=3\\
1x_1+1x_2+1x_5&=5
\end{aligned}$$

sendo x_3, x_4 e x_5 as *variáveis de folga* associadas a cada uma das *condições*.

Então,

$$\begin{aligned}
x_3&=3+5x_1-3x_2\\
x_5&=5-x_1-x_2
\end{aligned}$$

e a *condição* introduzida como *plano de corte*

$$\frac{1}{8}x_3+\frac{5}{8}x_5\geq\frac{1}{2}$$

é equivalente a

$$\frac{1}{8}*(3+5x_1-3x_2)+\frac{5}{8}*(5-x_1-x_2)\geq\frac{1}{2}$$

ou seja, $x_2\leq 3$. A **Figura-2.14** ilustra a utilização do ***plano de corte***.

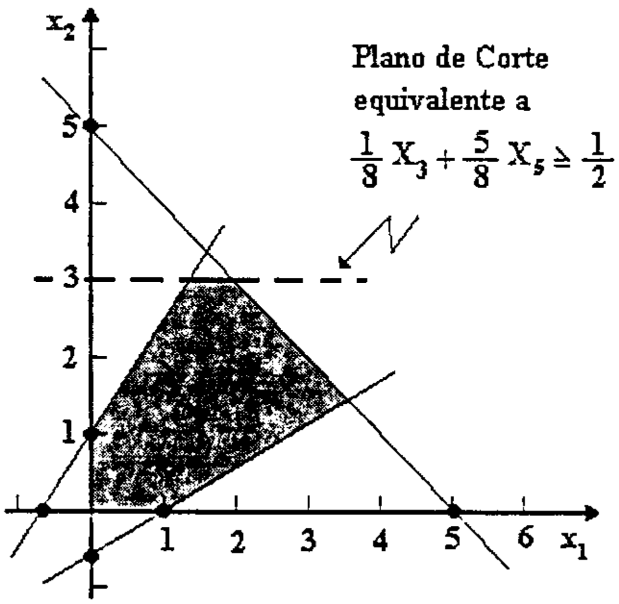


Figura-2.14

2.8.3.3.1.3 Selecção do Plano de Corte

No exemplo que utilizámos, seleccionámos a linha correspondente à variável x_2 para gerar o ***plano de corte***. Poderíamos ter optado por x_1 para forçar o problema a gerar uma *solução inteira*.

Vejamos o que aconteceria se, sistematicamente, se escolhesse a linha correspondente a x_1 para gerar o ***plano de corte***.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	1/8	0	5/8	$3\frac{1}{2}$
x_4	0	0	1	1	2	16
x_1	1	0	−1/8	0	3/8	$1\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{8}$	$8\frac{1}{2}$

Tomando a equação do quadro

$$x_1 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_5 = 1\frac{1}{2}$$

geramos o ***plano de corte***

$$\frac{7}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

Adicionando a condição ao quadro, obtemos

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	
x_2	0	1	1/8	0	5/8	0	$3\frac{1}{2}$
x_4	0	0	1	1	2	0	16
x_1	1	0	−1/8	0	3/8	0	$1\frac{1}{2}$
S_1	0	0	−7/8	0	−3/8	1	−1/2
	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{8}$	0	$8\frac{1}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	
x_2	0	1	0	0	4/7	1/7	$3\frac{3}{7}$
x_4	0	0	0	1	11/7	8/7	$15\frac{3}{7}$
x_1	1	0	0	0	3/7	−1/7	$1\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	0	3/7	−8/7	4/7
	0	0	0	0	11/7	1/7	$8\frac{3}{7}$

e não se obteve, ainda, uma *solução inteira*.

Progredindo, tomamos a equação do quadro

$$x_1 + \frac{3}{7}x_5 - \frac{1}{7}S_1 = 1\frac{4}{7}$$

O *plano de corte* será

$$\frac{3}{7}x_5 + \frac{6}{7}S_1 \geq \frac{4}{7}$$

Adicionando a condição ao quadro, obteríamos, após validação do quadro,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	
x_2	0	1	0	0	1/2	0	1/6	$3\frac{1}{3}$
x_4	0	0	0	1	1	0	4/3	$14\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	0	1/2	0	−1/6	$1\frac{2}{3}$
x_3	0	0	1	0	1	0	−4/3	$1\frac{1}{3}$
S_1	0	0	0	0	1/2	1	−7/6	2/3
	0	0	0	0	3/2	0	1/6	$8\frac{1}{3}$

Mais uma vez, ainda não se obteve a desejada *solução inteira.*

Prosseguindo, temos o *plano de corte*

$$\frac{1}{2}x_5 + \frac{5}{6}S_2 \geq \frac{2}{3}$$

e o correspondente quadro óptimo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	
x_2	0	1	0	0	2/5	0	0	1/5	$3\frac{1}{5}$
x_4	0	0	0	1	1/5	0	0	8/5	$13\frac{3}{5}$
x_1	1	0	0	0	3/5	0	0	−1/5	$1\frac{4}{5}$
x_3	0	0	1	0	9/5	0	0	−8/5	$2\frac{2}{5}$
S_1	0	0	0	0	6/5	1	0	−7/5	$1\frac{3}{5}$
S_2	0	0	0	0	3/5	0	1	−6/5	4/5
	0	0	0	0	7/5	0	0	1/5	$8\frac{1}{5}$

Seria necessário adicionar, ainda, o *plano de corte*

$$\frac{3}{5}x_5 + \frac{4}{5}S_3 \geq \frac{4}{5}$$

para se obter, finalmente, uma ***Solução Óptima Inteira***

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_0 = 8 \end{cases}$$

Como pudemos verificar, a escolha da linha a utilizar para gerar o ***plano de corte*** não foi indiferente e, na segunda resolução, o esforço computacional envolvido foi muito maior.

Podemos exprimir qualquer uma das condições adicionais geradas em função de x_1 e de x_2 para efectuarmos uma representação gráfica dos sucessivos ***planos de corte***. A **Figura-2.15** ilustra este ponto.

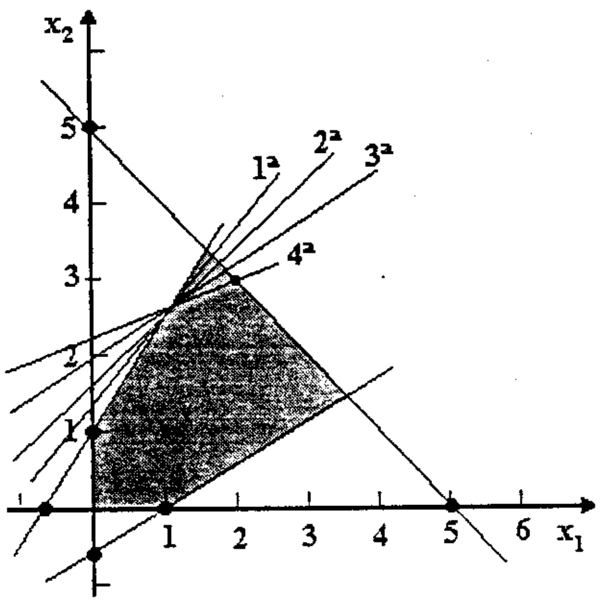


Figura-2.15

Veremos, adiante, uma regra de selecção da linha que deve gerar o ***plano de corte***.

2.8.3.3.1.4 Regra de Selecção da Equação Geradora do Plano de Corte

Vimos, anteriormente, que a rapidez com que se obtinha a *Solução Inteira Óptima* dependia da equação seleccionada do quadro para gerar o *plano de corte*.

Do conjunto das equações do quadro correspondentes a variáveis que não obedecem à condição de serem inteiras, deve seleccionar-se a que possui o maior coeficiente fraccionário f_i.

Portanto, a regra corresponde a encontrar a ***linha k*** tal que

$$f_k = \max_i \{f_i\}$$

Esta regra não é suficiente para o processo de selecção quando mais do que uma linha do quadro possui o mesmo coeficiente fraccionário (f_k).

Por exemplo, para o problema com o enunciado

$$\max\ x_0 = 7x_1 + 9x_2$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + 1x_2 \leq 35$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

obtém-se, o *quadro óptimo* para o *problema relaxado*

	x_1	x_2	x_3	x_4			f_i
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2	$\to 3\frac{1}{2}$	1/2
x_1	1	0	−1/22	3/22	9/2	$\to 4\frac{1}{2}$	1/2
	0	0	28/11	15/11	63		

e ambas as linhas apresentam $f_i = 1/2$.

A regra alternativa consiste em seleccionar a ***linha k*** tal que

$$\alpha_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{n} f_{ij}}$$

$$\left(\frac{f_k}{\sum_{j=1}^{n} f_{kj}} \right) = \max_i \{\alpha_i\}$$

Para o exemplo seleccionado, os dois ***planos de corte*** seriam, respectivamenete,

$$linha\, x_1:\ \frac{21}{22}x_3+\frac{3}{22}x_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{21}{22}+\frac{3}{22}} = \frac{11}{24}$$

$$linha\, x_2:\ \frac{7}{22}x_3+\frac{1}{22}x_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{22}+\frac{1}{22}} = \frac{11}{8}$$

Sendo $\alpha_1 > \alpha_2$, deveríamos escolher a linha de x_2 para gerar o *plano de corte*.

2.8.3.3.1.5 Dimensão do Quadro e Introdução de Planos de Corte

Deve notar-se que, quando a *variável de folga* correspondente a uma equação adicional entra na base (após se completar o processo de optimização do quadro que resultou da sua adição), a equação pode ser completamente removida do quadro. Isto significa que os novos ***planos de corte*** introduzidos são mais restritivos e, portanto, que o plano com *folga* já não é efectivo.

Esta observação é importante na redução da *carga computacional* envolvida, e é garante de que o quadro para um problema de *Programação Inteira* tem uma dimensão (número de linhas) limitada.

Considere-se um *Quadro Inicial* com ***m condições*** e ***m+n variáveis***, conforme representa a **Figura-2.16**.

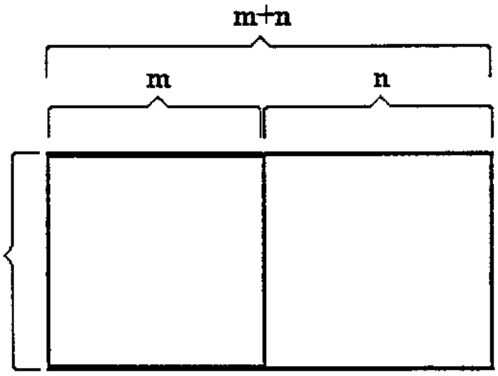


Figura-2.16

A introdução de um ***plano de corte*** requer (seguindo a metodologia do *simplex dual*) a introdução de uma *variável de folga* adicional. O *quadro*, tornado *inválido* pela adição do *plano de corte*, deve ser validado, o que vai requerer a entrada de uma variável na base na linha correspondente ao *plano de corte*. Neste primeiro quadro, deveremos passar a *básica* uma das suas ***n variáveis não-básicas***.

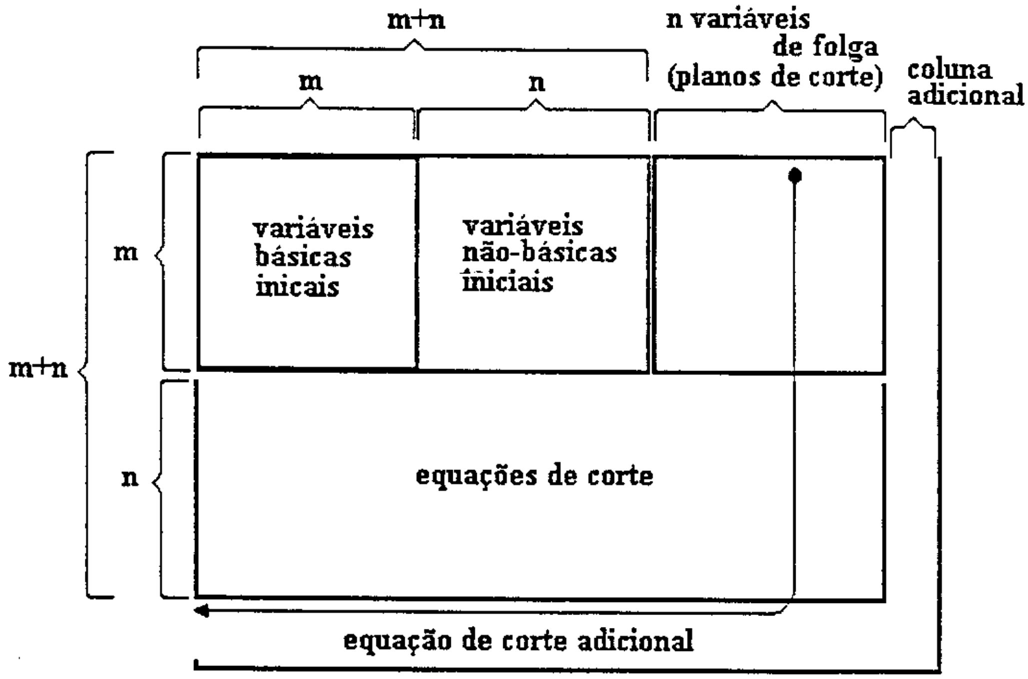


Figura-2.17

Quando novos planos de corte vierem a ser adicionados, podemos vir a ter, na *validação do quadro*, variáveis a entrar na *base* que tanto podem provir do *conjunto da variáveis não-básicas do quadro inicial*, como serem *variáveis de folga* introduzidas com os *planos de corte* gerados anteriormente.

Na *pior* das hipóteses, a selecção seria feita, sistematicamente, a partir do *conjunto da variáveis não-básicas do quadro inicial*. Isto pode ocorrer para n *planos de corte*. Após esta situação, um *plano de corte adicional*, implicaria a entrada na *base* de uma das *variáveis de folga* correspondentes a um dos anteriores *planos de corte*. Isto significaria que a *condição* que traduz o *plano de corte* correspondente à *variável de folga* deixa de ser efectivo, e que a correspondente linha pode ser totalmente removida do quadro. Assim, a dimensão máxima do quadro será de $m+n$ linhas.

A **Figura-2.17** ilustra esta situação.

2.8.3.3.2 Método do Corte Misto

Os ***Métodos de Corte Misto*** têm em consideração o facto de, em determinados problemas, nem todas as variáveis terem que obedecer à condição de serem inteiras. O fundamento da *geração dos planos de corte* segue os mesmos princípios que utilizámos quando introduzimos o *Método do Corte Inteiro Puro*.

Vamos enunciar o método que se designa por ***Corte Forte***. Os *planos de corte* gerados têm a mesma forma que a utilizada no *Corte Fraccional Puro*, diferindo na definição dos *coeficientes da condição de corte* (d_{ij}).

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \; se \; a_{ij} \geq 0 \text{ e } x_j \text{ não tem que ser inteiro} \\ \dfrac{f}{1-f}(-a_{ij}) \; se \; a_{ij} < 0 \text{ e } x_j \text{ não tem que ser inteiro} \\ f_{ij} \text{ se } f_{ij} \leq f \text{ e } x_j \text{ tiver que ser inteiro} \\ \dfrac{f}{1-f}(1-f_{ij}) \text{ se } f_{ij} > f \text{ e } x_j \text{ tiver que ser inteiro} \end{cases}$$

Para o exemplo que referimos anteriormente,

	x_1	x_2	x_3	x_4			f_i
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2	$\rightarrow 3\frac{1}{2}$	1/2
x_1	1	0	−1/22	3/22	9/2	$\rightarrow 4\frac{1}{2}$	1/2
	0	0	28/11	15/11	63		

vamos admitir que só a variável x_1 deve obedecer à condição de ser inteira.

Então,

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\frac{1}{2}$$
$$f_{13} = \frac{21}{22}; f_{14} = \frac{3}{22}; f = \frac{1}{2}$$
$$a_{13} = -\frac{1}{22}; a_{14} = \frac{3}{22}$$

e teremos os coeficientes

$$d_{13} = \frac{(f)}{(1-f)}(-a_{13}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{22}\right) = \frac{1}{22}$$
$$d_{14} = a_{14} = \frac{3}{22}$$

O *Plano de Corte* tem, então, a forma

$$\frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

2.8.4 Modelos de Programação Inteira

2.8.4.1 Introdução

As *Funções Objectivo* de problemas com formulações que requerem valores inteiros para algumas ou todas as variáveis só são definidas nos pontos que obedecem à condição inteira. As *formulações* de *Programação Inteira* correspondem, como se disse, a *formulações não-lineares*.

Vamos apresentar, agora, alguns modelos de *Programação Inteira.*

2.8.4.2 Modelo do Custo Fixo

O ***Modelo do Custo Fixo*** considera uma *função objectivo* que incorpora um custo fixo k_j, sempre que pelo menos uma unidade do ***artigo j*** seja produzida, independente do número de ***artigos j*** produzidos e um custo por unidade de ***artigo j*** produzido, c_j. Considera-se uma gama de *N* artigos. A **Figura-2.18** ilustra esta situação.

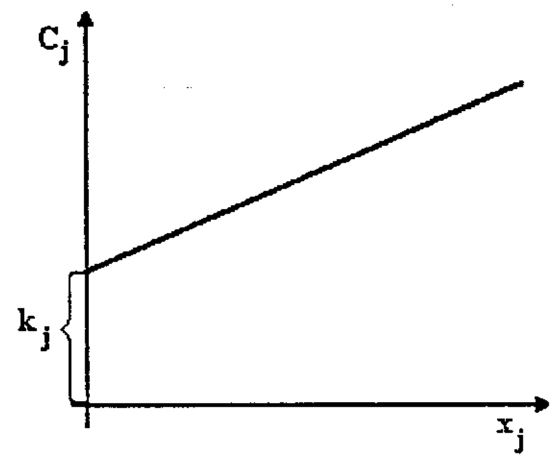


Figura-2.18

Assim, se tivermos

$$C_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & ; x_j > 0 \\ 0 & ; x_j = 0 \end{cases}$$

a *Função Objectivo* pode ser expressa por

$$\min\ x_0 = \sum_{j=1}^{N} C_j(x_j)$$

Esta *Função Objectivo* não é linear, e a solução do problema passa por encontrar uma ***formulação linear equivalente*** que produza a solução para o problema original.

Consideremos as *Variáveis Binárias* y_j tais que

$$y_j = \begin{cases} 0 & ; x_j = 0 \\ 1 & ; x_j > 0 \end{cases}$$

Isto significa que se alguma unidade de um ***artigo j*** for produzida, então a correspondente ***variável binária*** y_j é igual a ***1***. Se nenhuma unidade do ***artigo j*** for produzida, então a correspondente ***variável binária*** y_j é igual a ***0***.

O problema pode ser, então, expresso na forma

$$\begin{aligned} &\min\ x_0 = \sum_{j=1}^{N} (c_j x_j + k_j y_j) \\ &s.a \quad 0 \leq x_j \leq M y_j ; (j = 1, \ldots, N) \\ &\qquad\quad y_j = 0 \text{ ou } 1; (j = 1, \ldots, N) \end{aligned}$$

em que ***M*** representa um valor numérico suficientemente grande para constituir limite superior a qualquer valor que x_j possa tomar.

É fácil mostrar que a condição $x_j \leq M y_j$ traduz adequadamente o enunciado do problema.

Assim,

se $x_j > 0$, terá que ser, necessariamente, $y_j = 1$.

se $x_j = 0$, poderá ser $y_j = 0$ ou $y_j = 1$. Como $k_j > 0$ e a função objectivo deve ser minimizada, deverá ser $y_j = 0$.

Inversamente,

se $y_j = 0$, terá que ser, necessariamente, $x_j = 0$.

se $y_j = 1$, x_j poderá tomar qualquer valor.

O processo de exprimir uma ***variável binária*** y_j consiste em impôr que

$$y_j \leq 1 \text{ e inteiro}$$

Dada a ***condição de não-negatividade*** $y_j \geq 0$, as variáveis y_j só poderão assumir os valores ***0*** ou ***1***.

Embora o problema original não fosse de *Programação Inteira*, para a sua reformulação foi necessário introduzir ***variáveis binárias***, e o problema reformulado passou a ter uma formulação de *Programação Inteira*, solúvel por uma das técnicas anteriormente apresentadas.

2.8.4.3 Problema do Planeamento da Produção

Considere-se um *Problema de Produção* em que as diferentes operações a executar numa gama de artigos deve ser executada numa única máquina. Para cada artigo existe uma *sequência das operações* que deve ser preservada (*sequência tecnológica*). Cada artigo possui uma *data de entrega* que deve ser cumprida. Pelo facto de existir uma única máquina em que todas as operações são executadas, torna-se necessário garantir que a formulação a adoptar não gere soluções em que a máquina possa estar simultaneamente ocupada em duas operações (*não-interferência*).

Em síntese, temos os três tipos de condições

1- Sequenciação
2- Não-interferência
3- Data-de-entrega

Condições de Sequenciação

Uma operação não pode iniciar-se sem que as operações precedentes tenham sido completadas.

Sejam

x_j - instante de tempo em que se inicia a ***operação j***
a_j - intervalo de tempo necessário para completar a ***operação j***

Assim, se a ***operação i*** deve preceder a ***operação j***, deve verificar-se

$$x_i + a_i \leq x_j$$

Condições de Não-Interferência

Não pode haver mais do que uma operação em execução na máquina em qualquer período de tempo.

Para quaisquer duas operações, ***operação i*** e ***operação j***, a *condição de não-interferência* implica que uma delas deve preceder a outra.

$$\underbrace{x_i - x_j \geq a_j}_{\text{se } j \text{ precede } i} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x_j - x_i \geq a_i}_{\text{se } i \text{ precede } j}$$

O problema definido com estas ***condições "ou"*** não é linear, e para transformar a formulação vamos introduzir variáveis binárias y_{ij} tais que

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a operação } i \text{ precede a operação } j \\ 0 & \text{, se a operação } j \text{ precede a operação } i \end{cases}$$

introduzindo as seguintes condições

$$\begin{cases} i \text{ antes de } j & \rightarrow & M(1-y_{ij})+(x_j-x_i)\geq a_i \\ j \text{ antes de } i & \rightarrow & My_{ij}+(x_i-x_j)\geq a_j \end{cases}$$

M representa, nestas *condições*, um valor numérico muito elevado.

Esta formulação garante que, ~~na~~ *solução óptima*, apenas uma das *condições* será activa. Note-se, contudo, que é deixada ao algoritmo a decisão de qual a operação que deve ser executada em primeiro lugar.

Analisando as *condições*, podemos ver que

se $y_{ij}=0$, elas equivalem a

$$\begin{cases} M+(x_j-x_i)\geq a_i & \rightarrow & \text{condição não activa} \\ (x_i-x_j)\geq a_j & \rightarrow & j \text{ antes de } i \end{cases}$$

se $y_{ij}=1$, elas equivalem a

$$\begin{cases} (x_j-x_i)\geq a_i & \rightarrow & i \text{ antes de } j \\ M+(x_i-x_j)\geq a_j & \rightarrow & \text{condição não activa} \end{cases}$$

Condições de Data-de-entrega

*Cada **artigo** j deve estar completado antes de uma determinada data d_j designada **data-de-entrega**.*

Portanto, nenhuma operação num artigo deve ser concluída depois da *data-de-entrega*.

Estas condições podem ser expressas por

$$x_j+a_j\leq d_j$$

Função Objectivo

Nada foi referido sobre a *Função Objectivo* a considerar para este problema. Deve notar-se que, para o conjunto de condições enunciadas, se nada mais for dito, e se as folgas relativamente às *datas-de-entrega* forem grandes, podem ocorrer soluções que implicam períodos de inactividade da máquina, e artigos completados exactamente nas suas *datas-de-entrega.*

É razoável pensar que o objectivo deste problema seria completar todas as operações de todos os artigos na máquina, no menor período de tempo possível.

Seja t o tempo total de produção correspondente a uma solução genérica do problema.

Pretende-se, portanto, encontrar

$$\min\ x_0 = t$$

garantindo que

$$x_j + a_j \leq t \ ;(j = 1,\ldots,N)$$

2.8.4.4 Dicotomias

Vamos analisar processos de transformação de *formulações não-lineares* em que ocorrem ***dicotomias*** em formulações equivalentes de *programação inteira.*

Subconjunto de Condições Activas

Considere-se um problema em que k de m *condições* são *activas* (efectivas), mas em que se desconhece *à priori* quais as *condições* nesta situação.

Sejam as m *condições* da forma

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i \ ;(i = 1,\ldots,m)$$

Definam-se

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{se a condição } i \text{ fôr activa} \\ 1 & \text{se a condição } i \text{ fôr não-activa} \end{cases}$$

Seja M um valor numérico suficientemente elevado.

O *sistema dicotómico* de *condições* pode ser expresso na forma alternativa

$$\begin{aligned} & g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i + My_i \ ;(i = 1,\ldots,m) \\ & y_1 + y_2 + \ldots + y_m = m - k \\ & y_i = 0 \text{ ou } y_i = 1 \ ;(i = 1,\ldots,m) \end{aligned}$$

É fácil ver que qualquer *condição* com $y_i = 1$ é não activa. A *condição* $y_1 + y_2 + \ldots + y_m = m - k$ garante que há $m - k$ condições nesta situação, *i.e. não--activas*. Portanto, teremos $m - (m - k) = k$ *condições activas.*

2.8.4.5 Níveis de Disponibilidades de Recursos

Considere-se um problema em que os recursos podem assumir diferentes níveis de disponibilidade alternativos. Este enunciado corresponde a uma situação de fornecimento de recursos por escalões.

Uma *formulação de programação linear* para este problema é

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \sum_{k=1}^{r} b_k y_k$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r = 1$$

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se } b_k \text{ fôr a disponibilidade} \\ 0 & \text{se } b_k \text{ não fôr a disponibilidade} \end{cases}$$

A *condição* $y_1 + y_2 + \dots + y_r = 1$ garante que apenas um dos valores das *disponibilidades alternativas* no lado direito de $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \sum_{k=1}^{r} b_k y_k$ é efectiva.

2.8.4.6 Dimensão de Lote Mínimo

Considere-se um problema de produção que impõe uma ***dimensão de lote mínimo*** (L_j); *i.e.*, se x_j representar a quantidade a produzir do ***artigo j***, $x_j \ge L_j$ ou $x_j = 0$.

Admitamos que é possível determinar um valor numérico U_j suficientemente elevado, por forma a que a condição $x_j \le U_j$ seja satisfeita para a *solução óptima*.

Adicione-se ao problema a ***variável binária*** V_j tal que

$$V_j = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j = 0 \\ 1 & \text{se } x_j \ge L_j \end{cases}$$

Então, as condições

$$\begin{cases} x_j - U_j V_j \le 0 \\ x_j - L_j V_j \ge 0 \end{cases}$$

traduzem a *dicotomia* do enunciado original.

Note-se que quando $V_j = 0$, aquelas condições equivalem a

$$\begin{cases} x_j \le 0 \\ x_j \ge 0 \end{cases} \rightarrow x_j = 0$$

Para $V_j = 1$, as condições equivalem a

$$\begin{cases} x_j - U_j \le 0 \rightarrow x_j \le U_j \text{ o que não restringe } x_j \\ x_j - L_j \ge 0 \rightarrow x_j \ge L_j \text{ o que garante o lote mínimo} \end{cases}$$

<u>Exemplo</u>

Considere-se que para um determinado problema se tem um *Lote Mínimo* para o *artigo 1* igual a *2* unidades, *i.e.* $x_1 \ge 2$ ou $x_1 = 0$.

Considere-se, também, que da inspecção das condições que determinam o problema se conclui que o nível máximo de produção do *artigo 1* nunca excede as *7* unidades. Será, portanto, $U_1 = 7$.

As condições que devem ser adicionadas a este problema tomam a forma

$$\begin{aligned} & x_1 - 7V_1 \le 0 \\ & x_1 - 2V_1 \ge 0 \\ & V_1 = 0 \text{ ou } V_1 = 1 \end{aligned}$$

Para $V_j = 1$, as condições equivalem a

$$\begin{cases} x_j - U_j \leq 0 \rightarrow x_j \leq U_j \text{ o que não restringe } x_j \\ x_j - L_j \geq 0 \rightarrow x_j \geq L_j \text{ o que garante o lote mínimo} \end{cases}$$

Exemplo

Considere-se que para um determinado problema se tem um *Lote Mínimo* para o *artigo 1* igual a *2* unidades, *i.e.* $x_1 \geq 2$ ou $x_1 = 0$.

Considere-se, também, que da inspecção das condições que determinam o problema se conclui que o nível máximo de produção do *artigo 1* nunca excede as *7* unidades. Será, portanto, $U_1 = 7$.

As condições que devem ser adicionadas a este problema tomam a forma

$$\begin{aligned} &x_1 - 7V_1 \leq 0 \\ &x_1 - 2V_1 \geq 0 \\ &V_1 = 0 \text{ ou } V_1 = 1 \end{aligned}$$

2.9 Tipos Especiais de Função Objectivo

2.9.1 Introdução

Determinados problemas não são lineares pela forma da sua *Função Objectivo*. Vamos ver exemplos de transformações que permitem a solução de alguns destes problemas.

2.9.2 Função Objectivo MiniMax

Considere-se que se pretende ***Minimizar*** uma *Função Objectivo* definida por

$$C(x) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j - f_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{pj}x_j - f_p\right)$$

i.e. pretendemos minimizar o máximo valor de um conjunto de expressões que são função das variáveis x_j.

Considere-se que y corresponde ao valor máximo das várias expressões.

Então, o problema pode ser reformulado para

$$\min y$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j - f_k \leq y \ ,(k = 1, \ldots, p)$$

O facto de as expressões na função objectivo original poderem tomar valores negativos implica que a nova formulação deve garantir que a variável y não é limitada em sinal.

2.9.3 Função Objectivo Tipo Razão

Considere-se o problema com a *Função Objectivo*

$$\max C(x) = \frac{c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{f_0 + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j}$$

e condições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ ,(i = 1, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0$$

Vamos assumir que os x_j são de tal forma condicionados, que o denominador da *função objectivo* é estritamente positivo.

Podemos, nestas condições definir

$$r = \frac{1}{f_0 + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j}$$

e escrever a *função objectivo* como

$$\max C(x) = c_0 r + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j r$$

Efectuando a mudança de variáveis (por hipótese $r > 0$)

$$y_j = r x_j$$

temos para a *função objectivo*

$$\max C(x) = c_0 r + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$$

e, para condições adicionais

$$f_0 r + \sum_{j=1}^{n} f_i y_j = 1$$
$$r > 0$$

As restrições originais do problema devem, também, ser expressas em função das novas variáveis y_j.

Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ ,(i = 1,\ldots,m)$$
$$x_j \geq 0$$

passa a exprimir-se como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i r = 0 \ ,(i = 1,\ldots,m)$$
$$y_j \geq 0$$

Este tipo de *função objectivo* aparece em alguns problemas de produção em que se pretende optimizar determinados índices (*ratios*), cumprindo um conjunto de *condições*. Por exemplo, o denominador da *função objectivo* pode representar o total da matéria prima dispendida num determinado período de planeamento, e o numerador a matéria prima efectivamente utilizada no mesmo período de planeamento. Então, a maximização da *função objectivo* corresponderia a uma procura de uma maior eficiência de utilização da matéria prima.

A natureza das situações em que este tipo de *função objectivo* tem aplicação faz com que a hipótese de o denominador ser estritamente positivo corresponda à realidade.

2.10 Programação Quadrática

2.10.1 Introdução

Tivemos oportunidade de referir a forma genérica de uma *Função Objectivo Quadrática*, e o tipo de situação em que ela ocorre.

Em particular, referimos a forma quadrática

$$F = C_{11}x_1^2 + C_{22}x_2^2 + 2C_{12}x_1x_2$$

Genericamente, uma ***Função Objectivo Quadrática*** pode ser definida por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{\sum_j p_j x_j}_{\text{Termos do 1º grau}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_j \sum_k c_{jk} x_j x_k}_{\text{Termos do 2º grau}}$$

em que c_{jk} representa o termo genérico de uma matriz simétrica $\underset{\sim}{C}$.

Uma forma equivalente de representar a mesma *Função Objectivo* é

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{\underset{-}{p}\underset{-}{X}}_{\text{Termos do 1º grau}} + \underbrace{\frac{1}{2}\underset{-}{X}'\underset{-}{C}\underset{-}{X}}_{\text{Termos do 2º grau}}$$

Suponhamos, por exemplo, que a *Função Objectivo* tem a expressão

$$x_0 = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

Igualando coeficientes, podemos escrever

$$4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 = (p_1, p_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e, então

$$4x_1 + 6x_2 = p_1x_1 + p_2x_2 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = 6 \end{cases}$$

Também, fazendo $c_{12} = c_{21}$, temos

$$-2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 = \frac{1}{2}\left[c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2\right]$$

ou seja

$$c_{11} = -4$$
$$c_{12} = -2$$
$$c_{21} = c_{12} = -2$$
$$c_{22} = -4$$

Portanto,

$$\underline{p} = [4 \quad 6] \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

2.10.2 O Óptimo de uma Função Quadrática

Considere-se a *Função Objectivo Quadrática*

$$C(x) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 5 =$$
$$= 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

e um conjunto de *restrições lineares* definindo um *poliedro convexo.*

Em função das *condições*, podemos ter o *Óptimo* num *vértice*, numa *aresta* ou no *interior* do *espaço de soluções válidas*, conforme ilustra a **Figura-2.19**.

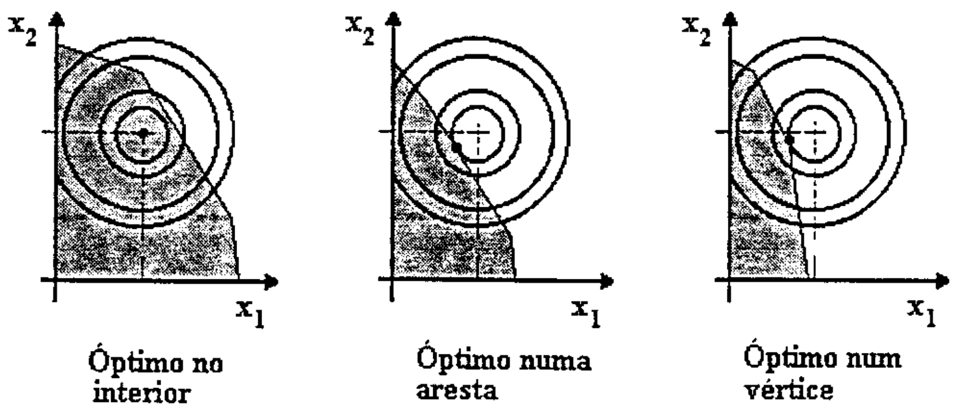


Figura-2.19

2.10.3 Condições de Kuhn-Tucker

As ***Condições de Kuhn-Tucker*** são condições necessárias para a existência de *pontos estacionários* de uma *Função Não-Linear* sujeita a um conjunto de *restrições lineares.* As ***Condições de Kuhn-Tucker*** são suficientes em condições particulares.

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} &\max x_0 = f(x) \\ &s.a \quad g_i(x) \leq 0 \ ,(i = 1,\dots,m) \end{aligned}$$

As *inequações* que constituem as *restrições do problema* podem ser convertidas em *equações* pela introdução de *variáveis de folga* não-negativas.

Seja S_i^2 a *folga não-negativa* adicionada à *condição* de ordem ***i***.

Portanto,

$$\underset{-}{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)'$$

$$\underset{-}{S}^2 = (S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2)'$$

com ***m*** a representar o número de *condições*.

A ***Função de Lagrange*** correspondente a este *problema condicionado* é

$$L(X,S,\lambda) = f(X) - \lambda\left[g(X) + S^2\right]$$

em que λ representa os ***multiplicadores de Lagrange***.

Considerando que $g(x) \leq 0$, uma ***condição necessária*** para a existência de um ***ponto estacionário*** é que λ seja *não-negativo* (não-positivo) para um *problema de maximização* (minimização).

Note-se que

$$\frac{\partial L}{\partial g} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial g} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\partial f}{\partial g}$$

i.e. λ mede a *taxa de variação* da *função* em relação ao *espaço de soluções*.

Num *problema de maximização*, um maior constrangimento do *espaço de soluções* resulta num *valor de função objectivo* menor ou, quando muito, igual. Portanto, para um *problema de maximização*, λ deve assumir valores não-negativos.

Tomando as derivadas da ***Função de Lagrange*** relativamente a *X*, *S* e λ, temos

$$a) \quad \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \rightarrow \frac{\partial f(X)}{\partial X} - \lambda \frac{\partial g(X)}{\partial X} = 0$$

$$b) \quad \frac{\partial L}{\partial S_i} = 0 \rightarrow -2\lambda_i S_i = 0 \ ; (i = 1, \ldots, m)$$

$$c) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow -(g(X) + S^2) = 0$$

O conjunto de *condições b)* deve ser interpretado da seguinte forma:

- Se $\lambda_i > 0$, então $S_i^2 = 0$. Ou seja, se o ***recurso i*** é *escasso* (não há *folga*), o correspondente ***Multiplicador de Lagrange*** é positivo.

- Se $S_i^2 > 0$, então $\lambda_i = 0$. Ou seja, Se o ***recurso i*** não é *escasso* (há *folga*), o correspondente ***Multiplicador de Lagrange*** é nulo.

O conjunto de *condições c)* significa que qualquer *ponto estacionário* deve obedecer ao conjunto original de *restrições lineares.*

Os conjuntos de condições b) e c) também permitem escrever

$$\lambda_i g_i(X) = 0 \ ; (i = 1, \ldots, m)$$

Sumarizando, as ***condições necessárias*** para que um ponto X seja um ***ponto estacionário*** para um *problema de maximização* são:

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \nabla f(X) - \lambda \nabla g(X) = 0 \\ \lambda_i g_i(X) = 0 \ ; (i = 1, \ldots, m) \\ g(X) \leq 0 \end{cases}$$

Estas condições são ***condições suficientes*** se $f(X)$ for uma ***função côncava*** e o ***espaço de soluções*** $g(X)$ for ***convexo***.

Note-se que, nestas condições, a ***Função de Lagrange***

$$L(X, S, \lambda) = f(X) - \lambda\left[g(X) + S^2\right]$$

é *côncava* (possuindo um *máximo*), pois

$\lambda S^2 = 0$
$\lambda g(X)$ é *convexo*, pois g(X) é *convexo* e $\lambda \geq 0$
$-\lambda g(X)$ é *côncavo*, pois $\lambda g(X)$ é *convexo*
$f(X) - \lambda\left[g(X) + S^2\right]$ é *côncavo* em *X*, por ser a diferença entre duas *funções côncavas* em *X*.

2.10.4 Os Conceitos de Concavidade e de Convexidade

2.10.4.1 Função de uma Variável

Uma *Função de uma Variável* diz-se ***Convexa*** se, para cada par de valores x' e x'' se verificar.

$$f\left[\theta x'' + (1-\theta)x'\right] \leq \theta f(x'') + (1-\theta) f(x')$$
$$\text{para } 0 \leq \theta \leq 1$$

A *Função* diz-se ***Estritamente Convexa*** se se tiver uma *inequação estrita* de "menor que", *i.e.*

$$f\left[\theta x'' + (1-\theta)x'\right] < \theta f(x'') + (1-\theta) f(x')$$
$$\text{para } 0 \leq \theta \leq 1$$

Analogamente, uma *Função de uma Variável* diz-se ***Côncava*** se, para cada par de valores x' e x'' se verificar.

$$f\left[\theta x'' + (1-\theta)x'\right] \geq \theta f(x'') + (1-\theta) f(x')$$
$$\text{para } 0 \leq \theta \leq 1$$

A *Função* diz-se ***Estritamente Côncava*** se se tiver uma *inequação estrita* de "maior que", *i.e.*

$$f\left[\theta x'' + (1-\theta)x'\right] > \theta f(x'') + (1-\theta) f(x')$$
$$\text{para } 0 \leq \theta \leq 1$$

A **Figura-2.20** ilustra estas definições.

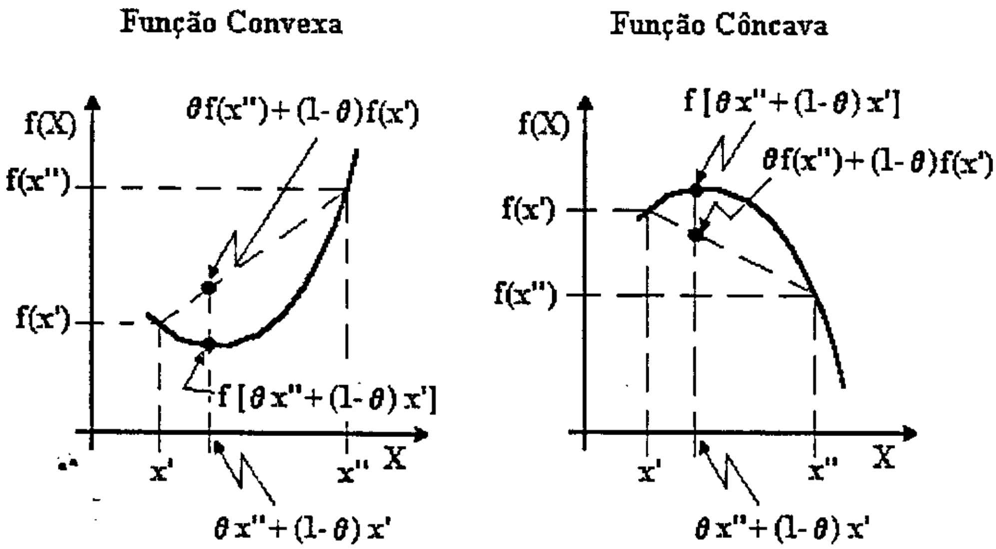


Figura-2.20

Para ***Funções de uma Variável***, a *Concavidade* e a *Convexidade* determinam-se em função da segunda derivada, de acordo com:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0 & \rightarrow \quad \text{Função Convexa} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 & \rightarrow \quad \text{Função Estritamente Convexa} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0 & \rightarrow \quad \text{Função Côncava} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 & \rightarrow \quad \text{Função Estritamente Côncava} \end{cases}$$

2.10.4.2 Função de mais do que uma Variável

O conceito de *Concavidade* e de *Convexidade* pode ser estendido a *Funções com mais do que uma Variável.*

Assim, para um *espaço* a ***n*** *dimensões*, para

$$x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$$
$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left[\theta x_1^* + (1-\theta)x_1', \ldots, \theta x_n^* + (1-\theta)x_n'\right]$$
$$\text{com } 0 \leq \theta \leq 1$$

se

$$f(x) \leq \theta f(x^*) + (1-\theta) f(x')$$

a *Função* é dita *Convexa*, e se

$$f(x) \geq \theta f(x^*) + (1-\theta) f(x')$$

a *Função* é dita *Côncava.*

Para uma *Função de Duas Variáveis*, $f(x_1, x_2)$, as ***Condições de Convexidade*** traduzem-se por:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} * \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 \geq 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \geq 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \geq 0$$

o que é equivalente a exigir que a ***Matriz Hessiano***

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

seja ***semi definida positiva***, *i.e.* que tanto a ***Matriz Hessiano*** como os seus *menores principais* tenham determinantes positivos.

2.10.5 Solução de Problemas de Programação Quadrática

Vamos considerar problemas com ***Função Objectivo Quadrática*** *côncava*, sujeitos a um *conjunto de condições* que definem um *espaço de soluções convexo.*

Temos, portanto

$$\max f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;;(i=1,\ldots,m)$$

$$-x_j \le 0 \;;(j=1,\ldots,n)$$

As *restrições* do problemas podem ser escritas como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \;;(x_{n+i} \ge 0)$$

$$-x_j + k_j = 0 \;;(k_j \ge 0)$$

A *Função de Lagrange* pode, então, ser expressa por

$$\begin{aligned} L = &\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k \right) \\ &- \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n+i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} - b_i \right) \\ &- \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(-x_j + k_j \right) \end{aligned}$$

As *Condições de Estacionaridade* podem ser, assim, derivadas

$$\begin{cases} a) & \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \rightarrow p_j + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{jk} x_k - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{n+i} a_{ij} + \lambda_j = 0 \\ b) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_{n+i}} = 0 \rightarrow -\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} - b_i \right) = 0 \\ c) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \rightarrow -x_j + k_j = 0 \rightarrow x_j \geq 0 \end{cases}$$

e deverá ser, também

$$d)\ \lambda_{n+i} \geq 0\ ;(i = 1,\ldots,m)$$
$$e)\ \lambda_j \geq 0\ ;(j = 1,\ldots,n)$$

além de que

$$f)\ \lambda_{n+i} x_{n+i} = 0\ ;(i = 1,\ldots,m)$$
$$g)\ \lambda_j x_j = 0\ ;(j = 1,\ldots,n)$$

As ***condições c), d)*** e ***e)*** são *condições de não-negatividade.*

As ***condições b)*** representam as *restrições* do problema original, representando os x_{n+i} as respectivas *variáveis de folga.*

Para o conjunto de ***condições a)***, podemos introduzir *variáveis artificiais* z_j (tantas quantas as *variáveis* x_j, *i.e.* ***n*** *variáveis).*

Assim, o *quadro do simplex* a seguir apresentado permite determinar o *ponto estacionário* que constitui o *óptimo* para a *função objectivo* a maximimizar. Apenas as ***condições f)*** e *g)* não são garantidas pelo quadro, pelo que devem ser controladas nas várias iterações. O que se procura é uma *solução* para as ***condições a)*** (que constituem a parte inferior do quadro), que existem se for possível encontrar uma *base* sem recurso às *variáveis artificiais* z_j , cumprindo o conjunto de ***condições b)*** (que constituem a parte superior do quadro). O método garante, naturalmente, as *condições de não-negatividade.* A *Função Objectivo* é, evidentemente, igual à soma das *variáveis artificiais,* e deve ser minimizada (o valor mínimo deve ser igual a zero).

	x_1	.	x_n	x_{n+1}	.	x_{n+m}	λ_1	.	λ_n	λ_{n+1}	.	λ_{n+m}	z_1	.	z_n	
x_{n+1}	a_{11}	.	a_{1n}	1	.	0	0	.	0	0	.	0	0	.	0	b_1
.....	.....	.	.....	.....	.	.....	...	.	...	......	.	......	...	.	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	..	a_{mn}	0	.	1	0	.	0	0	.	0	0	.	0	b_m
z_1	$-c_{11}$	..	$-c_{1n}$	0	.	0	-1	.	0	a_{11}	.	a_{m1}	1	.	0	p_1
.....	.....	.	.....	.....	.	.....	...	.	...	......	.	......	...	.	...	...
z_n	$-c_{n1}$	.	$-c_{nn}$	0	.	0	0	.	-1	a_{1n}	.	a_{mn}	0	.	1	p_n
	0	.	0	0	.	0	0	.	0	0	.	0	1	.	1	0

Este quadro não é um *quadro válido de base*, pelo facto de os coeficientes na *linha da função objectivo* nas colunas correspondentes às *variáveis artificiais* z_j que se encontram na *base* não serem nulos.

Multiplicando cada uma das linhas na parte inferior do quadro por *-1* e somando à *linha da função objectivo* obtém-se o *quadro válido de base* pretendido.

Como se disse, o *valor óptimo* deverá ser nulo, e o *máximo da função objectivo quadrática* obtém-se substituindo na sua expressão o valor das coordenadas do *ponto estacionário* encontrado.

Uma forma condensada de representar o quadro anterior é, na forma matricial

	$x_1 \ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots x_{n+m}$	$\lambda_1 \ldots \lambda_n$	$\lambda_{n+1} \ldots \lambda_{n+m}$	$z_1 \; \ldots \; z_n$	
x_{n+1} … x_{n+m}	A	I	0	0	0	b
z_1 … z_n	$-C$	0	$-I$	A'	I	p'
	0…0	0…0	0…0	0…0	1 … 1	0

2.10.6 Exemplo Numérico de um Problema de Programação Quadrática

Considere-se o seguinte problema de *Programação Quadrática*:

$$\max x_0 = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para esta *Função Objectivo*, já tínhamos determinado anteriormente que

$$p = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Para as *restrições* do problema, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

O quadro que traduz as condições a que deve obedecer um *ponto estacionário* é

	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	λ_3	z_1	z_2	
x_3	1	2	1	0	0	0	0	0	2
z_1	4	2	0	−1	0	1	1	0	4
z_2	2	4	0	0	−1	2	0	1	6
	0	0	0	0	0	0	1	1	0

O quadro tem que ser transformado num *quadro válido de base*, e obtém--se

	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	λ_3	z_1	z_2		
x_3	1	2	1	0	0	0	0	0	2	
z_1	4	2	0	−1	0	1	1	0	4	⇐
z_2	2	4	0	0	−1	2	0	1	6	
	−6	−6	0	1	1	−3	0	0	−10	
	⇑									

para as sucessivas iterações, obtemos

	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	λ_3	z_1	z_2		
x_3	0	3/2	1	1/4	0	−1/4	−1/4	0	1	⇐
x_1	1	1/2	0	−1/4	0	1/4	1/4	0	1	
z_2	0	3	0	1/2	−1	3/2	−1/2	1	4	
	0	−3	0	−1/2	1	−3/2	3/2	0	−4	
		⇑								

	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	λ_3	z_1	z_2		
x_2	0	1	2/3	1/6	0	−1/6	−1/6	0	2/3	⇐
x_1	1	0	−1/3	−1/3	0	1/3	1/3	0	2/3	
z_2	0	0	−2	0	−1	2	0	1	2	
	0	0	2	0	1	−2	1	0	−2	
						⇑				

	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	λ_3	z_1	z_2	
x_2	0	1	1/2	1/6	−1/12	0	−1/6	1/12	5/6
x_1	1	0	0	−1/3	1/6	0	1/3	1/6	1/3
λ_3	0	0	−1	0	−1/2	1	0	1/2	1
	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Existe, portanto, um *ponto estacionário*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

O correspondente valor máximo da *Função Objectivo* é, então

$$\begin{aligned} x_0 &= 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 = \\ &= 4*(1/3) + 6*(5/6) - 2*(1/3)^2 - 2*(1/3)*(5/6) - 2*(5/6)^2 = \\ &= \frac{25}{6} \end{aligned}$$

Podemos verificar a *condição* do problema para a solução

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & (1/3) + 2*(5/6) = 2 \leq 2 \end{aligned}$$

Deve notar-se que em todas as *iterações* da resolução foi cumprida a condição de um *multiplicador* λ_k e a correspondente *variável* x_k nunca se encontrarem simultaneamente na base. Qualquer passo que violasse esta *condição* não poderia ser executado.

2.11 Exercícios Propostos

<u>Exercícios Propostos</u> I

1-

Resolva os problemas de *Programação Linear* para o conjunto de *restrições*

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 \quad &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

e *Funções Objectivo*

a) $x_0 = 3x_1 + 2x_2$
b) $x_0 = x_1 + x_2$

2-

Resolva

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$s.a$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

com cada uma das restrições adicionais

a) $x_1 \leq 2$
b) $x_1 \geq 1$
c) $x_1 \geq 3$

3-

Dois compostos químicos são utilizados num aparelho de mistura que requer o enchimento com um total combinado de, exactamente, ***100*** barris.

Dispõe-se de um máximo de ***55*** barris do composto ***B***.

Cada barril do composto ***A*** requer ***2 Kg*** de um determinado *ingrediente*, enquanto que cada barril do composto ***B*** requer ***1 Kg*** desse *ingrediente*.

Dispõe-se de um total de ***180 Kg*** do *ingrediente* referido.

Determine qual a mistura óptima do composto ***A*** e ***B***, atendendo a que, em cada caso:

a)As contribuições são de ***700 UM*** por barril do composto ***A*** e de ***200 UM*** por barril do composto ***B***.

b)As contribuições são de ***300 UM*** por barril do composto ***A*** e de ***800 UM*** por barril do composto ***B***.

c)À limitação na produção é alterada, de modo que um máximo de ***100*** barris de ***A*** e ***B*** podem ser produzidos. As contribuições são de ***700 UM*** por barril do composto ***A*** e de ***200 UM*** por barril do composto ***B***.

Exercícios Propostos II

1-

Um fabricante possui centros de distribuição para o seu produto localizados em Atlanta, Chicago e New York. Estes centros de distribuição dispõem de ***40***, ***20*** e ***40*** unidades, respectivamente, do produto.

Os locais de venda, e o número de unidades que requerem é

		Unidades
Cleveland	-	25
Louiseville	-	10
Memphis	-	20
Pithsburgh	-	30
Richmond	-	15

O custo de transporte por unidade, em *Unidades Monetárias*, entre cada centro de distribuição e cada local de venda é indicado na tabela. Determine a solução de custo mínimo para este problema de distribuição

	Cleveland	Louiseville	Memphis	Pithsburg	Richmond
Atlanta	55	30	40	50	40
Chicago	35	30	100	45	60
New York	40	60	95	35	30

2-

Determine a solução de custo mínimo para o seguinte problema de transportes

				Disponibilidade
5	4	3	2	5
10	8	4	7	5
9	9	8	4	5
1	6	2	6	
Procura				

3-

Para a *Questão 2* determine a solução de custo máximo.

4-

Resolva o problema de transportes

6	1	1	2	
5	2	7	2	Disponibilidade
9	7	8	9	
3	5	5		
	Procura			

<u>Exercícios Propostos</u> III

1-

Uma fábrica produz automóveis e tractores.
A fábrica está organizada em quatro departamentos

(1)-Estampagem de chapa
(2)-Montagem de motores
(3)-Montagem final de automóveis
(4)-Montagem final de tractores

Os materiais, a mão de obra e outros recursos estão disponíveis, a preços constantes, e nas quantidades que a fábrica necessitar.

As limitações de capacidade dos departamentos são indicadas na tabela.

Estampagem de chapa	25000 automóveis	ou 35000	tractores/mês
Montagem de motores	33333 automóveis	ou 16667	tractores/mês
Montagem de automóveis	22500 automóveis/ mês		
Montagem de tractores	15000 tractores/mês		

O valor de venda de um automóvel excede em ***300 UM*** o custo total de materiais adquiridos, mão de obra e outros custos directos associados. Este valor, para um tractor é de ***250 UM***.

a)Determine o *Programa de Produção* a adoptar.

b)Reveja a solução da alínea anterior, se a contribuição por automóvel for de ***500 UM***.

2-

Maximize $5x-y+z-10u+7v$

sujeito a

$$\begin{aligned} 3x-y-z \quad &=4 \\ x-y+z+u \quad &=1 \\ 2x+y+2z+v &=7 \\ x,y,z,u,v \geq 0 & \end{aligned}$$

3-

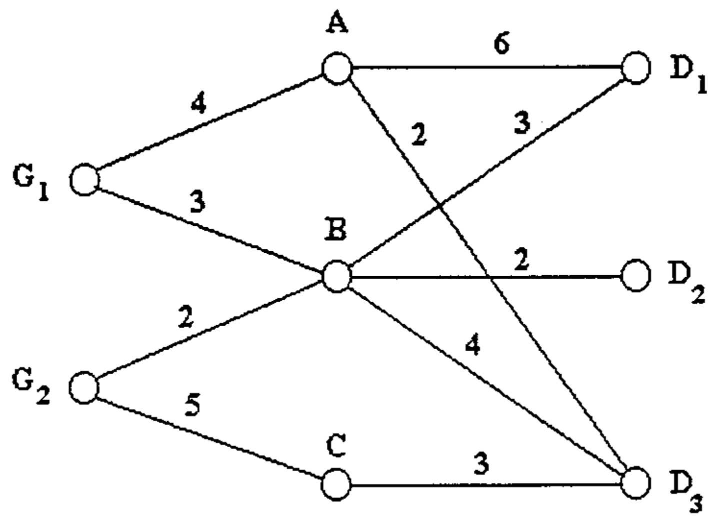
Minimize $-x+2y$
sujeito a

$$\begin{aligned} 5x-2y &\le 3 \\ x+\ \ y &\le 1 \\ -3x+\ \ y &\le 3 \\ -3x-3y &\le 2 \\ x,y &\ge 0 \end{aligned}$$

4-

Duas garagens G_1 e G_2 dispõem de *6* e *8* autocarros, respectivamente, que devem ser enviados para três destinos, D_1, D_2 e D_3, que requerem, respectivamente, *2*, *3* e *7* autocarros.

O mapa da área, de que constam as distâncias em quilómetros, mostra que todas as estradas passam por três intersecções, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$.



Calcule o valor mínimo de autocarros x quilómetros necessário para cada uma das alíneas

a)Calcule previamente as distâncias mínimas do mapa.
b)Resolva sem calcular previamente as distâncias mínimas.

Exercícios Propostos IV

1-

Um fabricante de ligas metálicas pretende maximizar a sua receita bruta.

A tabela indica a composição das ligas, o preço dos componentes, o lucro associado a cada liga e a disponibilidade de matéria prima.

Recomende uma solução.

Componentes	Tipo de Produção Liga do Tipo A	Liga do Tipo B	Matéria Prima disponível
Cobre	2	1	16
Zinco	1	2	11
Chumbo	1	3	15
Preço unitário de venda	30\$00	50\$00	

2-

Um fazendeiro deve decidir que quantidades de milho e de alfafa deve plantar.

Os lucros associados a cada alqueire de milho e de alfafa são, respectivamente, iguais a ***20000\$00*** e ***10000\$00***.

Considere que existe uma limitação associada ao terreno disponível que limita o total de plantação a *8* alqueires. Existe, também, uma disponibilidade máxima de água para irrigação igual a **80000** litros.

O fazendeiro pretende plantar um máximo de ***4*** alqueires de milho.

Cada alqueire de milho requer ***10000*** litros de água de irrigação, enquanto que cada alqueire de alfafa requer ***20000*** litros.

Como se altera a sua solução se o fazendeiro pretender que pelo menos *30%* da sua plantação seja constituída por alfafa?

3-

Uma refinaria produz dois tipos de gasolina (*1* e *2*) a partir de duas qualidades de petróleo bruto (*A* e *B*).

Os custos, preços de venda e necessidades para a produção das gasolinas são indicados nas tabelas. Determine qual o plano de produção a adoptar.

Petróleo	Quantidade disponível	Custo
A	100	6
B	200	3

Gasolina	% A necessária	Preço de venda
1	60	8
2	30	5

Exercícios Propostos V

1-

Resolva o dual do problema

$$\max 5x - y + z - 10u + 7v$$

$$s.a$$

$$\begin{aligned} 3x - y - \; z \quad\quad\; &= 4 \\ x - y + \; z + u \quad &= 1 \\ 2x + y + 2z + \quad v &= 7 \end{aligned}$$

$$x, y, z, u, v \geq 0$$

2-

Resolva o dual do problema

$$\begin{aligned}
&\min(-x+2y)\\
&s.a\\
&\quad 5x-2y\geq 3\\
&\quad x+\ \ y\geq 1\\
&\quad -3x+3y\leq 3\\
&\quad -3x-3y\leq 2\\
&x,y\geq 0
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos VI

1-

Uma companhia de aluguer de viaturas deve assegurar transporte a três escritórios, A, B e C. A companhia possui três tipos de carrinhas, de acordo com a tabela.

Tipo de carrinha	Capacidade (pessoas)	Número de carrinhas
Pequena	11	4
Média	33	8
Grande	44	3

Os escritórios A, B e C necessitam, respectivamente, de transporte para *77*, *132* e *165* pessoas. O custo para a companhia de aluguer de viaturas varia com o tipo de carrinha e com o escritório servido, de acordo com a tabela.

	Tipo de carrinha		
Escritório	Pequena	Média	Grande
A	77	264	396
B	77	231	352
C	121	363	396

Que carrinhas devem ser fornecidas para minimizar o custo total.

2-

Uma companhia possui duas fábricas, e deve servir dois clientes.

Os produtos fabricados podem ser enviados por três meios de transporte, respectivamente, *transporte rodoviário*, *transporte aéreo* e *transporte marítimo*.

Há limites de carga nas fábricas e limites de descarga nos clientes, para cada um dos meios de transporte.

A companhia pretende enviar todos os seus produtos tão economicamente quanto possível, considerando os custos, disponibilidades, procuras e limites indicados nos quadros.

Estrada

	C_1	C_2
F_1	7	5
F_2	4	8

Ar

	C_1	C_2
F_1	5	7
F_2	6	3

Mar

	C_1	C_2
F_1	9	3
F_2	5	6

Disponível: $F_1 = 20; F_2 = 30$
Procura: $C_1 = 15; C_2 = 35$

Capacidades:

	Estrada	Ar	Mar
F_1	8	14	7
F_2	16	11	15
C_1	6	4	10
C_2	12	15	18

Exercícios Propostos VII

1-

Três produtos I_1, I_2 e I_3 devem ser armazenados nos armazéns A_1, A_2 e A_3.

Existem ***70*** unidades de I_1, ***50*** unidades de I_2 e ***40*** unidades de I_3.

Há limitações às quantidades que podem ser armazenadas em cada armazém. Os factores críticos são a área em A_1, limitada a ***120*** metros quadrados; o peso em A_2, que não deve exceder as ***200*** toneladas e o volume em A_3, limitado a ***150*** metros cúbicos.

Cada unidade, de cada produto, apresenta as seguintes características:

	Produto I_1	I_2	I_3
Área (m^2)	1	2	3
Peso (*tons*)	2	4	2
Volume (m^3)	3	2	1

Se os custos de movimentação e armazenagem variarem com o tipo de produto e com o armazém de acordo com a tabela, determine o plano de armazenagem que deve ser adoptado.

	Custo por unidade *(UM)*		
	I_1	I_2	I_3
A_1	19	11	5
A_2	12	6	2
A_3	7	3	1

Exercícios Propostos VIII

1-

Sabe-se que o leite, a carne e os ovos fornecem as quantidades de vitaminas indicadas.

Vitaminas	Leite (Litro)	Carne (Kg)	Ovos (dúzia)	Quantidade mínima/dia
A	0.25 mg	2 mg	10 mg	1 mg
C	25 mg	20 mg	10 mg	50 mg
D	2.5 mg	200 mg	10 mg	10 mg
Custo unitário (UM)	22	170	42	

Que quantidades de leite, carne e ovos devem ser consumidas diariamente, para satisfazer as quantidades mínimas requeridas, a um custo mínimo?

Exercícios Propostos IX

1-

Maximize $3x_1 + 2x_2 - 1$

s.a

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 5x_2 + 6 &= \lambda \\
5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2\tfrac{1}{2} \\
2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2-

Maximize $5x - 3y$

s.a

$$
\begin{aligned}
3x - 2y &\leq \lambda \\
x + y &\geq 1 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

3-

Minimize $\lambda x - y$

s.a

$$
\begin{aligned}
3x - y &\geq 5 \\
2x + y &\leq 3 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

4-

O chá vendido comercialmente é obtido misturando uma folha de qualidade comum com uma folha de melhor qualidade, de que se dispõe de uma quantidade limitada.

Consoante a quantidade de folha de qualidade incluída na mistura, obtém-se um de dois tipos de mistura.

Pretende-se produzir uma quantidade mínima do conjunto das misturas.

A disponibilidade da folha comum não é limitada, e dispõe-se de *100* toneladas de folha de qualidade.

A mistura do ***tipo 1*** requer ***25%*** de folha de qualidade.

A mistura do ***tipo 2*** requer ***50%*** de folha de qualidade.

Pretende-se produzir pelo menos ***250*** toneladas para o conjunto das misturas.

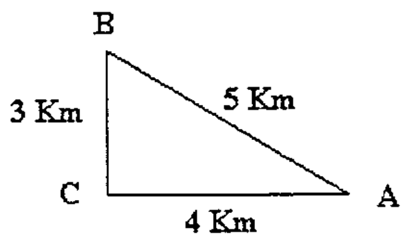
O lucro obtido de cada tonelada de mistura do ***tipo 1*** é de ***(50-x) UM***, enquanto que para a mistura do ***tipo 2*** é de ***(55-2x) UM***.

Determine, para diferentes valores de x, que quantidades de cada tipo de mistura devem ser produzidas.

5-

É necessário lançar condutas de água entre os lugares ***A***, ***B*** e ***C*** localizados como se indica no esquema.

O custo das condutas é proporcional ao seu comprimento.



Determine o plano a adoptar quando:

a)Pelo menos três condutas devem partir de ***A***.

b)Duas ou três condutas devem ligar tanto com ***B*** como com ***C***.

c)Não deve haver mais do que duas condutas a ligar quaisquer dois lugares.

Exercícios Propostos X

1-

Considere um problema de planeamento da produção em que ***200*** unidades de um artigo são produzidas em ***3*** máquinas.

Os custos de montagem (preparação), os custos unitários de produção e a capacidade máxima de produção para cada máquina são os indicados na tabela.

Máquina	Custo de Montagem *(UM)*	Custo de Produção *(UM)*	Capacidade *(Nº de unidades)*
1	100	10	600
2	300	2	800
3	200	5	1200

Pretende-se minimizar o custo total de produção do lote.

2-

Converta o seguinte problema num problema de programação linear, e resolva-o.

$$\max \frac{-3+2x_1+4x_2-5x_3}{6+3x_1-x_2}$$

s.a

$$x_1 - x_2 \geq 0$$
$$7x_1+9x_2+10x_3 \leq 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3-

Calcule $\min\left[\max\left(x-2, -x, -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)\right]$

Exercícios Propostos XI

1-

Calcule $\min Q = -x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

s.a

$$2x_1+3x_2 \leq 6$$
$$x_1+4x_2 \leq 5$$

2-

Calcule $\min Q = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

3-

Calcule $\min Q = 183 - 44x_1 - 42x_2 + 8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

2.11 Exercícios Propostos

<u>Exercícios Propostos</u> I

1-

Resolva os problemas de *Programação Linear* para o conjunto de *restrições*

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 \quad &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

e *Funções Objectivo*

a) $x_0 = 3x_1 + 2x_2$
b) $x_0 = x_1 + x_2$

2-

Resolva

$$\max 3x_1 + 2x_2$$
$$s.a$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

com cada uma das restrições adicionais

a) $x_1 \leq 2$
b) $x_1 \geq 1$
c) $x_1 \geq 3$

3-

Dois compostos químicos são utilizados num aparelho de mistura que requer o enchimento com um total combinado de, exactamente, ***100*** barris.

Dispõe-se de um máximo de ***55*** barris do composto ***B***.

Cada barril do composto ***A*** requer ***2 Kg*** de um determinado *ingrediente*, enquanto que cada barril do composto ***B*** requer ***1 Kg*** desse *ingrediente*.

Dispõe-se de um total de ***180 Kg*** do *ingrediente* referido.

Determine qual a mistura óptima do composto ***A*** e ***B***, atendendo a que, em cada caso:

a)As contribuições são de ***700 UM*** por barril do composto ***A*** e de ***200 UM*** por barril do composto ***B***.

b)As contribuições são de ***300 UM*** por barril do composto ***A*** e de ***800 UM*** por barril do composto ***B***.

c)A limitação na produção é alterada, de modo que um máximo de ***100*** barris de ***A*** e ***B*** podem ser produzidos. As contribuições são de ***700 UM*** por barril do composto *A* e de ***200 UM*** por barril do composto ***B***.

Exercícios Propostos II

1-

Um fabricante possui centros de distribuição para o seu produto localizados em Atlanta, Chicago e New York. Estes centros de distribuição dispõem de ***40***, ***20*** e ***40*** unidades, respectivamente, do produto.

Os locais de venda, e o número de unidades que requerem é

		Unidades
Cleveland	-	25
Louiseville	-	10
Memphis	-	20
Pithsburgh	-	30
Richmond	-	15

O custo de transporte por unidade, em *Unidades Monetárias*, entre cada centro de distribuição e cada local de venda é indicado na tabela. Determine a solução de custo mínimo para este problema de distribuição

	Cleveland	Louiseville	Memphis	Pithsburg	Richmond
Atlanta	55	30	40	50	40
Chicago	35	30	100	45	60
New York	40	60	95	35	30

2-

Determine a solução de custo mínimo para o seguinte problema de transportes

				Disponibilidade
5	4	3	2	5
10	8	4	7	5
9	9	8	4	5
1	6	2	6	Procura

3-

Para a *Questão 2* determine a solução de custo máximo.

4-

Resolva o problema de transportes

6	1	1	2	
5	2	7	2	Disponibilidade
9	7	8	9	
3	5	5		
	Procura			

Exercícios Propostos III

1-

Uma fábrica produz automóveis e tractores.
A fábrica está organizada em quatro departamentos

(1)-Estampagem de chapa
(2)-Montagem de motores
(3)-Montagem final de automóveis
(4)-Montagem final de tractores

Os materiais, a mão de obra e outros recursos estão disponíveis, a preços constantes, e nas quantidades que a fábrica necessitar.

As limitações de capacidade dos departamentos são indicadas na tabela.

Estampagem de chapa	25000 automóveis	ou 35000	tractores/mês
Montagem de motores	33333 automóveis	ou 16667	tractores/mês
Montagem de automóveis	22500 automóveis/ mês		
Montagem de tractores	15000 tractores/mês		

O valor de venda de um automóvel excede em ***300 UM*** o custo total de materiais adquiridos, mão de obra e outros custos directos associados. Este valor, para um tractor é de ***250 UM***.

a)Determine o *Programa de Produção* a adoptar.

b)Reveja a solução da alínea anterior, se a contribuição por automóvel for de ***500 UM***.

2-

Maximize $5x-y+z-10u+7v$

sujeito a

$$\begin{aligned} 3x-y-\ z\qquad &= 4 \\ x-y+\ z+u\quad &= 1 \\ 2x+y+2z+\quad v &= 7 \\ x,y,z,u,v &\geq 0 \end{aligned}$$

3-

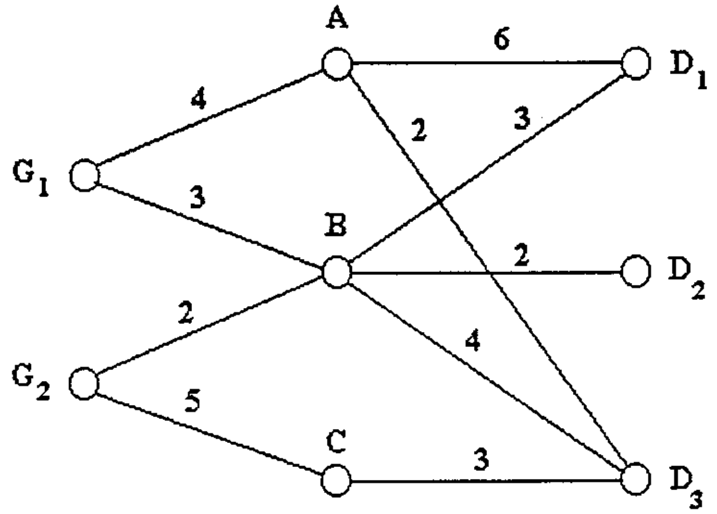
Minimize $-x+2y$
sujeito a

$$\begin{aligned} 5x-2y &\le 3 \\ x+\ \ y &\le 1 \\ -3x+\ \ y &\le 3 \\ -3x-3y &\le 2 \\ x,y &\ge 0 \end{aligned}$$

4-

Duas garagens G_1 e G_2 dispõem de *6* e *8* autocarros, respectivamente, que devem ser enviados para três destinos, D_1, D_2 e D_3, que requerem, respectivamente, *2*, *3* e *7* autocarros.

O mapa da área, de que constam as distâncias em quilómetros, mostra que todas as estradas passam por três intersecções, ***A***, ***B*** e ***C***.



Calcule o valor mínimo de autocarros x quilómetros necessário para cada uma das alíneas

a)Calcule previamente as distâncias mínimas do mapa.
b)Resolva sem calcular previamente as distâncias mínimas.

Exercícios Propostos IV

1-

Um fabricante de ligas metálicas pretende maximizar a sua receita bruta.

A tabela indica a composição das ligas, o preço dos componentes, o lucro associado a cada liga e a disponibilidade de matéria prima.

Recomende uma solução.

Componentes	Tipo de Produção Liga do Tipo A	Liga do Tipo B	Matéria Prima disponível
Cobre	2	1	16
Zinco	1	2	11
Chumbo	1	3	15
Preço unitário de venda	30$00	50$00	

2-

Um fazendeiro deve decidir que quantidades de milho e de alfafa deve plantar.

Os lucros associados a cada alqueire de milho e de alfafa são, respectivamente, iguais a ***20000$00*** e ***10000$00***.

Considere que existe uma limitação associada ao terreno disponível que limita o total de plantação a *8* alqueires. Existe, também, uma disponibilidade máxima de água para irrigação igual a **80000** litros.

O fazendeiro pretende plantar um máximo de ***4*** alqueires de milho.

Cada alqueire de milho requer ***10000*** litros de água de irrigação, enquanto que cada alqueire de alfafa requer ***20000*** litros.

Como se altera a sua solução se o fazendeiro pretender que pelo menos *30%* da sua plantação seja constituída por alfafa?

3-

Uma refinaria produz dois tipos de gasolina (*1* e *2*) a partir de duas qualidades de petróleo bruto (*A* e *B*).

Os custos, preços de venda e necessidades para a produção das gasolinas são indicados nas tabelas. Determine qual o plano de produção a adoptar.

Petróleo	Quantidade disponível	Custo
A	100	6
B	200	3

Gasolina	% A necessária	Preço de venda
1	60	8
2	30	5

Exercícios Propostos V

1-

Resolva o dual do problema

$$\max 5x - y + z - 10u + 7v$$

$$s.a$$

$$\begin{aligned} 3x - y - z \quad &= 4 \\ x - y + z + u \quad &= 1 \\ 2x + y + 2z + v &= 7 \end{aligned}$$

$$x, y, z, u, v \geq 0$$

2-

Resolva o dual do problema

$$\begin{aligned}
&\min(-x+2y)\\
&s.a\\
&\quad 5x-2y\geq 3\\
&\quad x+\ \ y\geq 1\\
&\quad -3x+3y\leq 3\\
&\quad -3x-3y\leq 2\\
&x,y\geq 0
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos VI

1-

Uma companhia de aluguer de viaturas deve assegurar transporte a três escritórios, A, B e C. A companhia possui três tipos de carrinhas, de acordo com a tabela.

Tipo de carrinha	Capacidade (pessoas)	Número de carrinhas
Pequena	11	4
Média	33	8
Grande	44	3

Os escritórios A, B e C necessitam, respectivamente, de transporte para *77*, *132* e *165* pessoas. O custo para a companhia de aluguer de viaturas varia com o tipo de carrinha e com o escritório servido, de acordo com a tabela.

	Tipo de carrinha		
Escritório	Pequena	Média	Grande
A	77	264	396
B	77	231	352
C	121	363	396

Que carrinhas devem ser fornecidas para minimizar o custo total.

2-

Uma companhia possui duas fábricas, e deve servir dois clientes.

Os produtos fabricados podem ser enviados por três meios de transporte, respectivamente, *transporte rodoviário*, *transporte aéreo* e *transporte marítimo*.

Há limites de carga nas fábricas e limites de descarga nos clientes, para cada um dos meios de transporte.

A companhia pretende enviar todos os seus produtos tão economicamente quanto possível, considerando os custos, disponibilidades, procuras e limites indicados nos quadros.

Estrada

	C_1	C_2
F_1	7	5
F_2	4	8

Ar

	C_1	C_2
F_1	5	7
F_2	6	3

Mar

	C_1	C_2
F_1	9	3
F_2	5	6

Disponível: $F_1 = 20; F_2 = 30$
Procura: $C_1 = 15; C_2 = 35$

Capacidades:

	Estrada	Ar	Mar
F_1	8	14	7
F_2	16	11	15
C_1	6	4	10
C_2	12	15	18

Exercícios Propostos VII

1-

Três produtos I_1, I_2 e I_3 devem ser armazenados nos armazéns A_1, A_2 e A_3.

Existem ***70*** unidades de I_1, ***50*** unidades de I_2 e ***40*** unidades de I_3.

Há limitações às quantidades que podem ser armazenadas em cada armazém. Os factores críticos são a área em A_1, limitada a ***120*** metros quadrados; o peso em A_2, que não deve exceder as ***200*** toneladas e o volume em A_3, limitado a ***150*** metros cúbicos.

Cada unidade, de cada produto, apresenta as seguintes características:

	Produto		
	I_1	I_2	I_3
Área (m^2)	1	2	3
Peso (*tons*)	2	4	2
Volume (m^3)	3	2	1

Se os custos de movimentação e armazenagem variarem com o tipo de produto e com o armazém de acordo com a tabela, determine o plano de armazenagem que deve ser adoptado.

	Custo por unidade *(UM)*		
	I_1	I_2	I_3
A_1	19	11	5
A_2	12	6	2
A_3	7	3	1

Exercícios Propostos VIII

1-

Sabe-se que o leite, a carne e os ovos fornecem as quantidades de vitaminas indicadas.

Vitaminas	Leite (Litro)	Carne (Kg)	Ovos (dúzia)	Quantidade mínima/dia
A	0.25 mg	2 mg	10 mg	1 mg
C	25 mg	20 mg	10 mg	50 mg
D	2.5 mg	200 mg	10 mg	10 mg
Custo unitário (UM)	22	170	42	

Que quantidades de leite, carne e ovos devem ser consumidas diariamente, para satisfazer as quantidades mínimas requeridas, a um custo mínimo?

Exercícios Propostos IX

1-

Maximize $3x_1 + 2x_2 - 1$

s.a

$$\begin{aligned} -2x_1 - 5x_2 + 6 &= \lambda \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2\tfrac{1}{2} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2-

Maximize $5x - 3y$

s.a

$$\begin{aligned} 3x - 2y &\leq \lambda \\ x + y &\geq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

3-

Minimize $\lambda x - y$

s.a

$$\begin{aligned} 3x - y &\geq 5 \\ 2x + y &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

4-

O chá vendido comercialmente é obtido misturando uma folha de qualidade comum com uma folha de melhor qualidade, de que se dispõe de uma quantidade limitada.

Consoante a quantidade de folha de qualidade incluída na mistura, obtém-se um de dois tipos de mistura.

Pretende-se produzir uma quantidade mínima do conjunto das misturas.

A disponibilidade da folha comum não é limitada, e dispõe-se de *100* toneladas de folha de qualidade.

A mistura do ***tipo 1*** requer ***25%*** de folha de qualidade.

A mistura do ***tipo 2*** requer ***50%*** de folha de qualidade.

Pretende-se produzir pelo menos ***250*** toneladas para o conjunto das misturas.

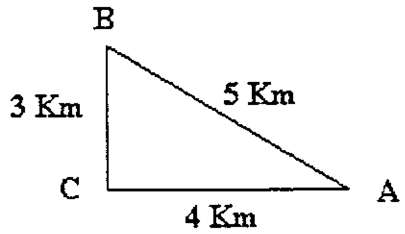
O lucro obtido de cada tonelada de mistura do ***tipo 1*** é de ***(50-x) UM***, enquanto que para a mistura do ***tipo 2*** é de ***(55-2x) UM***.

Determine, para diferentes valores de ***x***, que quantidades de cada tipo de mistura devem ser produzidas.

5-

É necessário lançar condutas de água entre os lugares ***A***, ***B*** e ***C*** localizados como se indica no esquema.

O custo das condutas é proporcional ao seu comprimento.



Determine o plano a adoptar quando:

a)Pelo menos três condutas devem partir de ***A***.

b)Duas ou três condutas devem ligar tanto com ***B*** como com ***C***.

c)Não deve haver mais do que duas condutas a ligar quaisquer dois lugares.

Exercícios Propostos X

1-

Considere um problema de planeamento da produção em que *200* unidades de um artigo são produzidas em *3* máquinas.

Os custos de montagem (preparação), os custos unitários de produção e a capacidade máxima de produção para cada máquina são os indicados na tabela.

Máquina	Custo de Montagem *(UM)*	Custo de Produção *(UM)*	Capacidade *(Nº de unidades)*
1	100	10	600
2	300	2	800
3	200	5	1200

Pretende-se minimizar o custo total de produção do lote.

2-

Converta o seguinte problema num problema de programação linear, e resolva-o.

$$\max \frac{-3+2x_1+4x_2-5x_3}{6+3x_1-x_2}$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 - \ x_2 \qquad & \geq 0 \\ 7x_1+9x_2+10x_3 & \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

3-

Calcule $\min\left[\max\left(x-2, -x, -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)\right]$

<u>Exercícios Propostos</u> XI

1-

Calcule $\min Q = -x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

s.a

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2 & \leq 6 \\ x_1+4x_2 & \leq 5 \end{aligned}$$

2-

Calcule $\min Q = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

3-

Calcule $\min Q = 183 - 44x_1 - 42x_2 + 8x_1^2 - 12x_1x_2 + 17x_2^2$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

Exercícios de Avaliação

(Exame de Setembro de 1989)

Pretende-se construir duas centrais eléctricas, *A* e *B*, utilizando, respectivamente, combustível fóssil e combustível nuclear.

O lucro para as centrais *A* e *B* é de *8%* e *10%* dos valores dos respectivos investimentos.

A utilidade social dos dois investimentos é calculada pela expressão:

$$U(X,Y) = 1 - 0.005X^2 - 0.01Y^2$$

em que X e Y representam os valores dos investimentos expressos em unidades de 10^8 *UM*.

Que política de investimento garante um lucro mínimo de 2×10^8 *UM* e maximiza a utilidade social?

(Exame de Setembro de 1989)

Um fabricante de máquinas-ferramenta dispõe de ***200*** m^3 no 1° andar de um armazém capazes de suportar um peso máximo de ***100*** toneladas.

O fabricante armazena a sua produção em três tipos de caixotes, ***A***, ***B*** e ***C***, que vende com lucros de, respectivamente, ***300***, ***600*** e ***200 UM***.

O volume e peso dos caixotes é indicado na tabela.

	Caixote		
	A	B	C
Peso (ton.)	1	3	2
Volume (m^3)	3	4	1

O proprietário do armazém cobra uma taxa fixa por caixote, por mês.

Admitindo que é possível o fabricante modificar o seu plano de armazenagem após conhecer o valor da taxa de armazenagem, determine o plano óptimo de armazenagem, *i.e.* o número e tipo de caixotes a armazenar.

(Exame de Setembro de 1986)

Uma paleta que mede 1 metro x 1 metro pode ser armazenada com dois tipos de caixas, ambas com uma base de 1 m x 1 m.

Um dos tipos de caixa tem ***0.3*** metros de altura e pesa *7* Kg, produzindo uma contribuição de ***30 UM***.

Determine quantas caixas de cada tipo devem ser colocadas numa paleta, por forma a maximizar a contribuição, sabendo que o peso máximo que a paleta pode suportar é de *67* Kg, e que a altura máxima de uma pilha é de ***4.2*** m.

(Teste 1984/85)

Uma fábrica de mobiliário produz quatro tipos de moveis em três secções (Polimento, Montagem e Corte).

A actual capacidade dessa secções é de ***480***, ***800*** e ***900*** horas-máquina, respectivamente.

As margens unitárias para cada tipo de móvel são de ***90***, ***160***, ***40*** e ***100*** UM.

Tendo como objectivo a maximização do lucro, a solução da formulação de programação linear associada a este problema conduziu ao quadro óptimo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	1/8	0	5/32	−1/16	0	25
x_4	1	0	3/2	1	−1/8	1/4	0	140
x_7	2	0	−11/2	0	−5/8	−3/4	1	0
	10	0	130	0	25/2	15	0	

a)Determine os intervalos de sensibilidade para as margens unitárias de cada móvel.

b)Determine os intervalos de sensibilidade para as capacidades de cada secção.

c)Determine as implicações na solução de um aumento de capacidade na secção de montagem para ***200*** horas-máquina.

d)Estude o comportamento do plano óptimo de produção quando a margem unitária para o móvel do tipo ***1*** varia entre ***90*** e ***150*** UM.

(Exame de Setembro de 1982)

Para poder satisfazer os pedidos dos seus clientes, um armazenista de equipamento eléctrico mantém um inventário limitado de motores de pequena e média potência.

Atendendo a que, no passado, ***80%*** das suas vendas foram de motores de potência igual a ***2***, ***3***, ***5***, ***7½*** e ***10 HP***, o armazenista decide que necessita manter um inventário de ***75***, ***200***, ***150***, ***75*** e ***100*** unidades de cada um desses tipos de motores.

Há quatro fabricantes que se propõem fornecer os motores, mas a sua capacidade é limitada pelas quantidades indicadas na tabela, independentemente do tipo de motor.

Fornecedor:

F_1 - 125
F_2 - 250
F_3 - 170
F_4 - 125

A tabela seguinte indica o preço de venda proposto por cada fabricante.

	Fabricante			
Potência do Motor (HP)	F_1	F_2	F_3	F_4
2	*93*	*92*	*89*	*91*
3	*76*	*72*	*73*	*77*
5	*90*	*87*	*88*	*85*
7½	*98*	*95*	*94*	*100*
10	*101*	*103*	*107*	*106*

a)Que encomendas devem ser efectuadas?

b)Calcule o investimento mínimo que o armazenista deve fazer para reunir o inventário.

c)Existe alguma capacidade dos fornecedores em excesso?

(Teste 1990/1991)

Na Guerra do Golfo, as forças multinacionais têm que efectuar voos entre o território dos Estados Unidos (bases em Pensacola, Pittsburg e Norfolk) e a zona do Golfo (bases na Arábia Saudita, Barhain e Turquia).

Os voos podem ser efectuados com aterragem na base das Lages, nos Açores, ou com reabastecimento em voo sobre essa região.

Considere os custos associados às diferentes viagens:

	Aterragem nos Açores	Reabastecimento em voo
Pensacola	150	100
Pittsburg	200	270
Norfolk	220	200

	Arábia Saudita	Barhain	Turquia
Açores	300	320	270
Reabastecimento	270	300	260

Suponha que, no período de planeamento considerado, a base das Lages, nos Açores, tem uma capacidade para assistir a ***80*** aviões, e que a capacidade de reabastecimento aéreo é limitada a ***60*** aviões.

Considere, ainda, que uma aterragem e descolagem implica um custo de ***20 UM***, enquanto que um reabastecimento aéreo implica um custo de ***10 UM***.

Adicionalmente, tem-se:

Aviões nas Bases dos EUA			Aviões a colocar no Golfo		
Pensacola	----	30	Turquia	----	45
Pittsburg	----	35	Arábia Saudita	----	40
Norfolk	----	45	Barhain	----	25

a)Qual a solução óptima para este problema logístico?

b)Qual o valor de uma unidade extra de capacidade de reabastecimento em voo?

c)Qual o valor de uma unidade extra de capacidade de aterragem nos Açores?

III - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

III - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

18

32

3 Programação Dinâmica

3.1 Introdução

A ***Programação Dinâmica*** debruça-se sobre a solução de problemas de optimização que podem ser formulados como uma sequência de decisões. Os *Modelos de Programação Dinâmica* têm aplicação em diversos domínios, *e.g.* *Planeamento da Produção, Gestão de Inventários, Planeamento de Investimentos, Atribuição de Recursos, Manutenção e Substituição de Equipamento,* etc.

3.2 Rede de Políticas - Política Óptima

No sentido de introduzirmos alguns dos conceitos utilizados em Programação Dinâmica, vamos considerar o enunciado de um particular problema.

Enunciado

Um produto tem um *volume de vendas* igual a *2* unidades por semana.
O *nível máximo de inventário*, em qualquer ocasião, é de *2* unidades.
O *nível máximo de produção* é de *4* unidades por semana.
Os *níveis de inventário* no início e no fim do *horizonte de planeamento* são nulos.
Não é permitida *ruptura de inventário* em qualquer período de tempo.
O *custo de armazenagem* é de *1 U.M.* por artigo por unidade de tempo, e é considerado em função do número de unidades armazenadas no início de cada semana.

Os *custos de produção* são indicados na tabela

Nº de unidades	0	1	2	3	4
Custo de Produção	0	4	7	9	10

Pretende-se traçar a *Rede* que representa este problema, mostrando todas as *Políticas de Produção* possíveis para um *horizonte de planeamento* de *3* semanas.

Pretende-se determinar o *Custo Total Mínimo* para o *horizonte de planeamento*, e identificar a *Política de Produção* correspondente.

Da análise do enunciado deste problema, podemos concluir que, no início de cada semana, os possíveis *níveis de inventário* são:

- Não haver inventário
- Haver *1* artigo em inventário
- Haver *2* artigos em inventário

Aspectos relevantes para o traçado desta rede são:

-O inventário inicial e o inventário final devem ser nulos.

-É possível passar de uma situação de inventário nulo para uma situação de inventário igual a *1* unidade produzindo *3* unidades (*2* são vendidas).

-É possível passar de uma situação de inventário nulo para uma situação de inventário igual a *2* unidades, produzindo *4* unidades.

-É possível passar de uma situação de inventário igual a *1* unidade para uma situação de inventário nulo, produzindo *1* unidade.

-etc.

Genericamente, temos, para cada semana,

Inventário final = Inventário inicial + Produção - Procura

com

$0 \leq \text{Inventário final} \leq 2$

$0 \leq \text{Inventário inicial} \leq 2$

$0 \leq \text{Produção} \leq 4$

Procura = 2

A evolução, ao longo das *3* semanas pode ser traduzido pela *rede* da **Figura-3.1**.

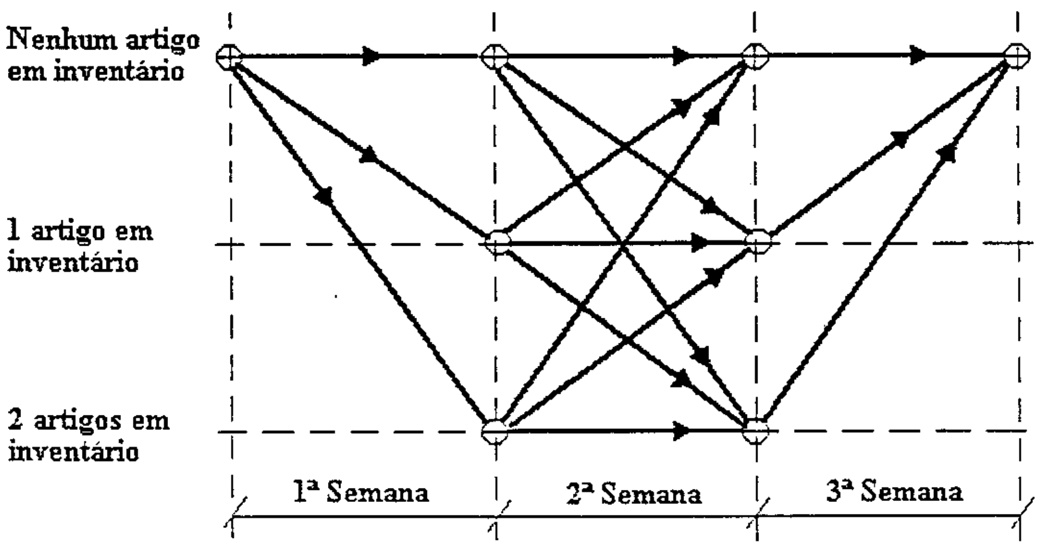


Figura-3.1

Passamos a determinar os *custos* associados a cada uma das *transições* indicadas na rede começando do fim para o início do *período de planeamento*.

A **Figura-3.2** ilustra os *custos* envolvidos nas transições do último *estágio* do problema e as parcelas que os compõem.

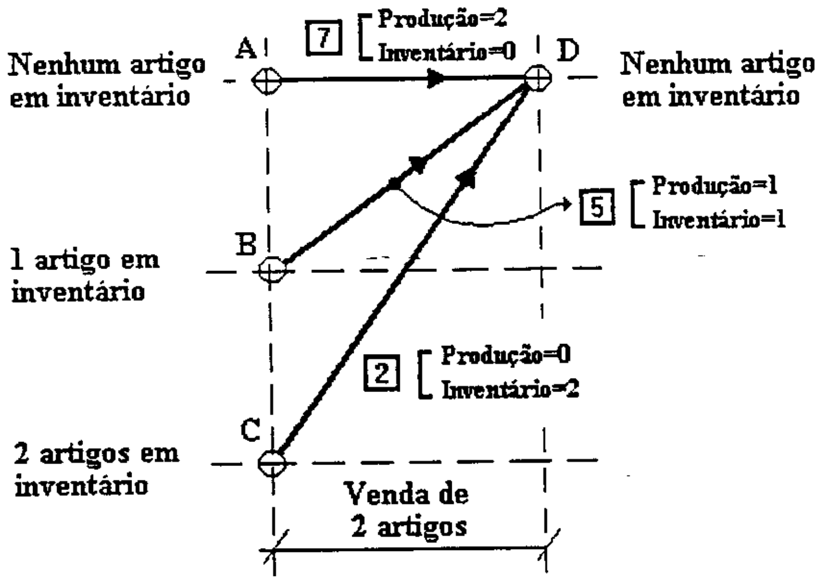


Figura-3.2

Seguindo o mesmo raciocínio para o penúltimo *estágio* do problema (2ª *semana*), temos, considerando os *nodos* ***E***, ***F*** e ***G***, do início da 2ª *semana*, as *transições* e *custos* indicados nas **Figuras-3.3, 3.4** e **3.5** para os *nodos* ***A***, ***B*** e ***C***.

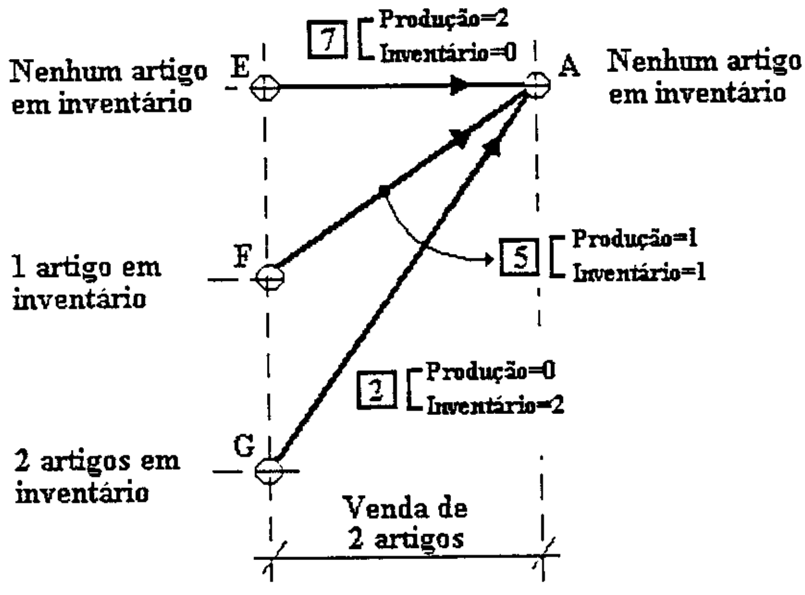


Figura-3.3

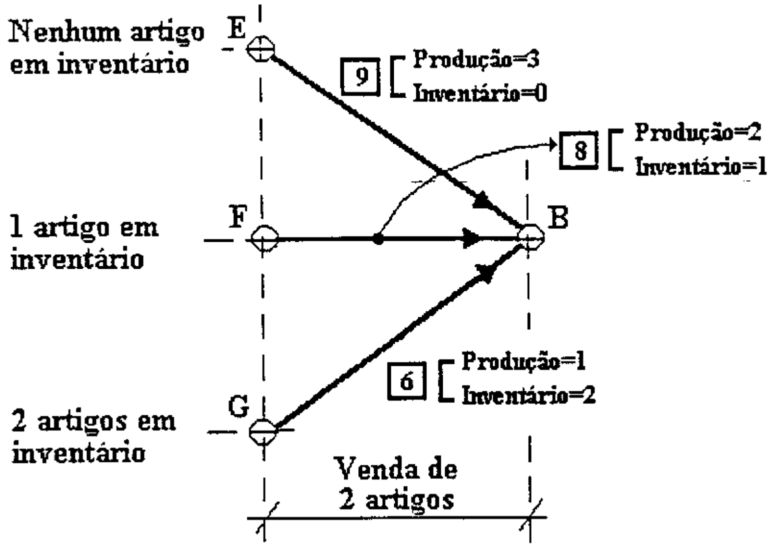


Figura-3.4

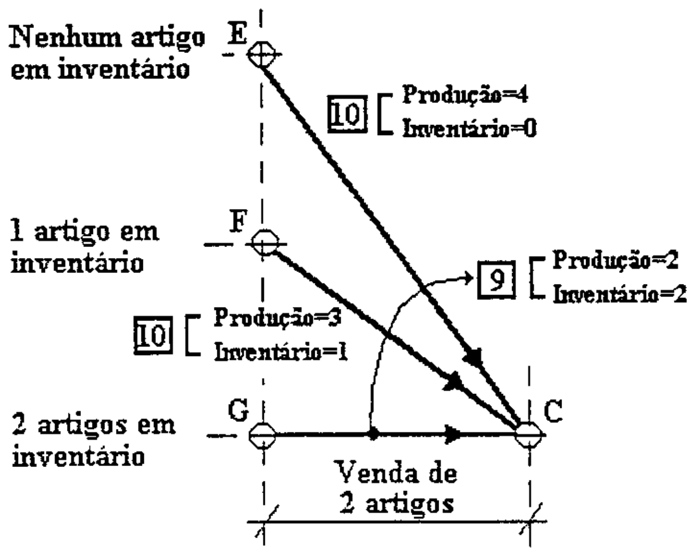


Figura-3.5

Caminhando, agora, para o *1º estágio*, temos a considerar as *transições* entre o *nodo H* e os *nodos E*, *F* e *G*. As **Figuras-3.6**, **3.7** e **3.8** ilustram a atribuição de *custos*.

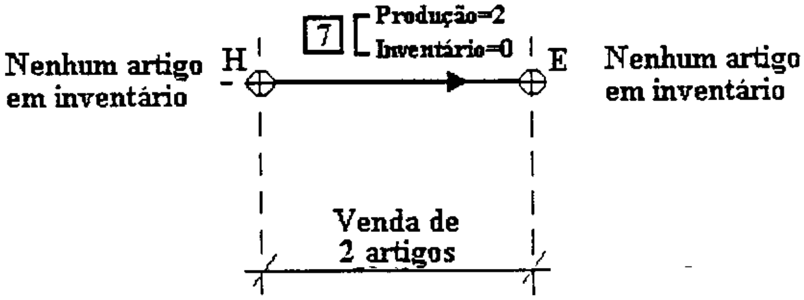


Figura-3.6

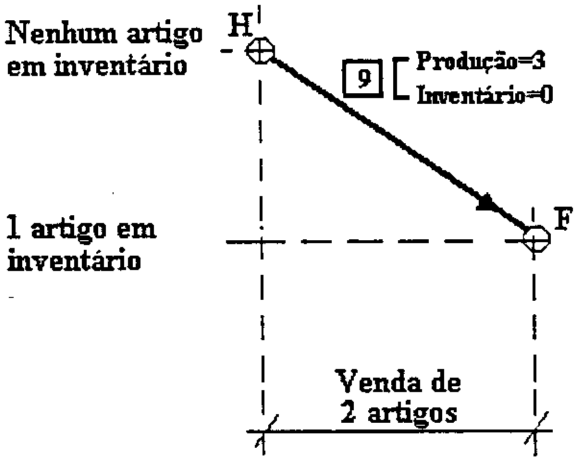


Figura-3.7

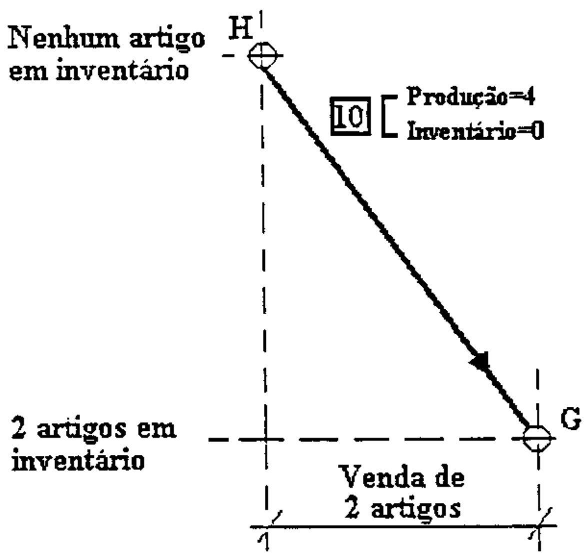


Figura-3.8

A *Rede*, com os *custos* inscritos e com os *nodos* identificados está representada na **Figura-3.9**.

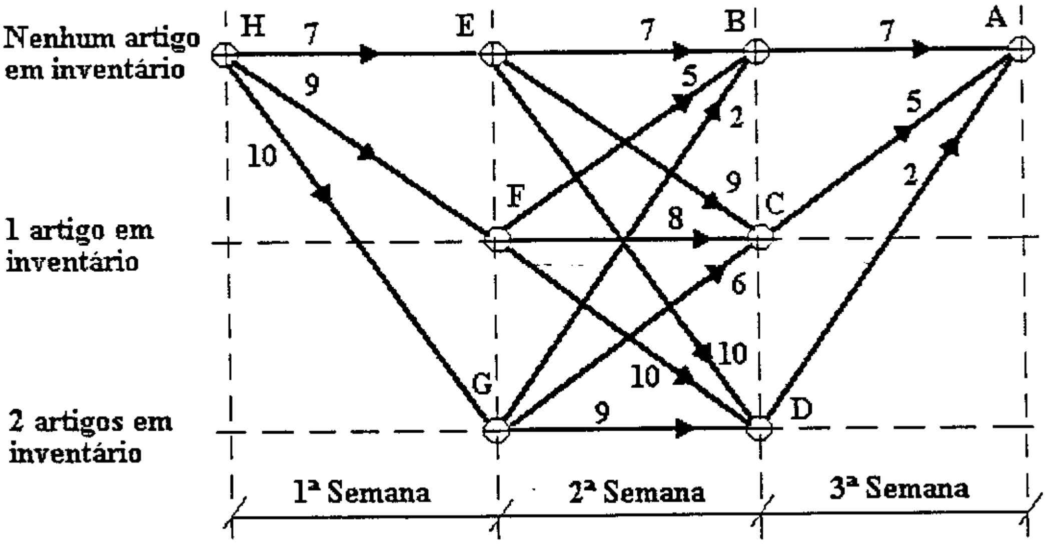


Figura-3.9

Podemos determinar, *exaustivamente*, todos os *caminhos possíveis*, e os respectivos *custos totais*.

	Custo Total
HEBA	7+7+7=21
HECA	7+9+5=21
HEDA	7+10+2=19

	Custo Total
HFBA	9+5+7=21
HFCA	9+8+5=22
HFDA	9+10+2=21

	Custo Total
HGBA	10+2+7=19
HGCA	10+6+5=21
HGDA	10+9+2=21

Os ***Caminhos Óptimos*** (***Políticas Óptimas***) são:

HEDA
HGBA

a que corresponde um *Custo Mínimo* igual a *19 U.M.*

Aos *Caminhos Óptimos* correspondem as seguintes ***Políticas Óptimas de Produção***:

<u>HEDA</u>:

1ª Semana - Produzir 2 unidades
2ª Semana - Produzir 4 unidades
3ª Semana - Não produzir

<u>HGBA</u>:

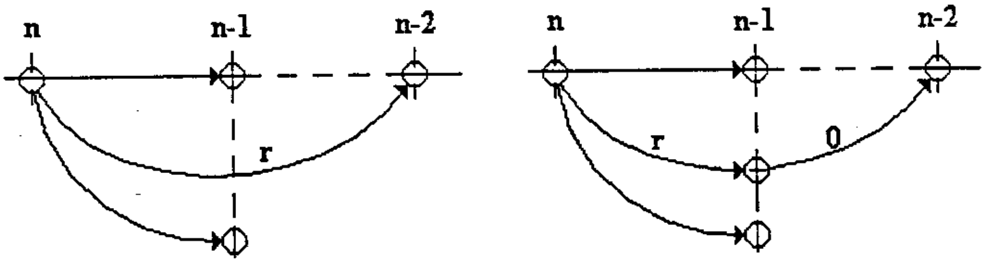
1ª Semana - Produzir 4 unidades
2ª Semana - Não produzir
3ª Semana - Produzir 4 unidades

O exemplo utilizado era de pequena *dimensão* (reduzido número de semanas e reduzido número de possíveis *níveis de inventário*). Se o número de variáveis num problema de *Programação Dinâmica* for muito grande, a *enumeração exaustiva* de todas as *políticas* e o cálculo do seu *custo total* é inexequível. Para problemas de dimensão real, desenvolveremos uma metodologia apropriada.

3.3 Redes em Série e Redes Progressivas

Uma *Rede* que apresenta todas as *transições* entre *estágios* consecutivos (sem saltos por cima de *estágios*) designa-se por ***Rede em Série***.

Uma *Rede* que não cumpra a condição anterior, mas em que as *transições* são feitas sempre para um *estágio* mais à direita no processo designa-se por ***Rede Progressiva***. Uma *rede* deste tipo pode ser transformada numa *rede em série*, através da introdução de *estados artificiais*, como ilustra a **Figura-3.10**.



Rede Progressiva **Rede em Série**

Figura-3.10

3.4 Aspectos de Manipulação de Matrizes em Programação Dinâmica

Quando mais adiante desenvolvermos um *Algoritmo de Programação Dinâmica*, teremos necessidade de utilizar uma determinada metodologia e nomenclatura na manipulação de matrizes, que passamos a introduzir.

Seja $\underset{\sim}{H}$ uma matriz de *M linhas* e *1 coluna* constituída por elementos iguais a *1*.

Seja $\underset{\sim}{F}$ uma matriz de *N linhas* e *1 coluna*, de elemento genérico $f(j)$.

Então, a matriz

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}'$$

é uma matriz de *M linhas* por *N colunas* com o elemento genérico $a(ij)$:

$$a(ij) = h(i) f(j) = f(j)$$
$$i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, N$$

Também, se tivermos uma matriz $\underset{\sim}{R}$ de *M linhas* por *N colunas*, o elemento genérico da matriz $\underset{\sim}{V}$ definida como

$$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}'$$

é

$$v(ij) = r(ij) + f(j)$$

<u>**Definições**</u>

Para qualquer matriz $\underset{\sim}{B}$ de *M linhas* por *N colunas*, define-se a matriz $\underset{\sim}{C}$ de *M linhas* por *1 coluna*

$$\underset{\sim}{C} = \max \underset{\sim}{B}$$

como sendo a matriz de elemento genérico

$$c(i) = \max[b(i1), b(i2), \ldots, b(iN)]$$

i.e. o elemento na *linha i* da matriz $\underset{\sim}{C}$ é o maior dos elementos da *linha i* da matriz $\underset{\sim}{B}$.

De uma forma compacta

$$c(i) = \max_j [b(ij)]; i = 1, \ldots, N$$

Para uma matriz $\underset{\sim}{B}$ definida como $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}'$ teremos

$$\underset{\sim}{C} = \max \underset{\sim}{B} = \max\left[\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}'\right]$$

e o elemento genérico

$$c(i) = \max_j [r(ij) + f(j)]$$

Analogamente, define-se uma função $\min \underset{\sim}{B}$

$$\underset{\sim}{D}_{Mx1} = \min \underset{\sim}{B}$$
$$d(i) = \min_j [b(ij)]; i = 1, \ldots, M$$

então, para $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}'$, temos

$$\underset{\sim}{D} = \min\left[\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}'\right]$$

$$d(i) = \min_j\left[r(ij) + f(j)\right]$$

Exemplo

Seja

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

então,

$$\underset{\sim}{F}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{F}' = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

e será

$$\underbrace{\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\text{para o Máximo}} \qquad \underbrace{\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{para o Mínimo}}$$

3.5 Terminologia em Programação Dinâmica

3.5.1 Definições

Vamos, agora, introduzir a terminologia utilizada em *Programação Dinâmica*, e que implicitamente já foi utilizada, parcialmente, no exemplo utilizado na avaliação explícita de uma *rede de políticas*.

<u>Estágio</u>-*Estágio* é instante do processo em que uma *decisão* é tomada, e em que todos os aspectos relacionados com *decisões* anteriores são avaliados. Um *estágio* corresponde a uma *coluna de nodos* numa *rede* que representa o processo.

Um *estágio* designa-se, genericamente, pela letra ***n*** (assumindo valores numéricos).

Normalmente (*recorrência para trás*), ***n*** representa o número de estágios que ainda faltam até ao fim do processo.

<u>Estado</u>-*Estado* é uma variável que descreve a *condição do processo* em qualquer *estágio*. Um *estado* corresponde a uma *linha de nodos* numa *rede* que representa o processo.

Um *estado* designa-se, genericamente, pela letra ***i*** ou ***j***.

Referenciação de Nodos-A *referenciação dos nodos* de uma *rede* pode ser feita pela identificação do *estágio* e *estado* a que pertencem.

Contribuição Imediata de Estágio-É a *contribuição* produzida quando o sistema transita do *nodo (n,i)* para o *nodo (n-1,j)*.

Função de Contribuição de Estágio-Para cada *nodo*, de cada *estágio*, podemos considerar as *contribuições imediatas de estágio*, para definir a *Função de Contribuição de Estágio* $\underset{\sim}{R}_n$.

$$\underset{\sim}{R}_n = \left[r_n(ij) \right]$$

Para o exemplo ilustrativo que utilizámos inicialmente, as *Funções de Contribuição de Estágio* têm os valores:

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{r} \\ i=0 \\ =1 \\ =2 \end{array} \begin{array}{c} j=0 \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{r} \\ i=0 \\ =1 \\ =2 \end{array} \begin{array}{c} j=0 \quad =1 \quad =2 \\ \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 10 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{r} \\ i=0 \end{array} \begin{array}{c} j=0 \quad =1 \quad =2 \\ \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

As matrizes das *Funções de Contribuição de Estágio* contêm toda a informação da rede que representa o processo, e que constitui toda a informação necessária à resolução do problema.

Acção-Em cada *nodo* o conjunto de *decisões* possíveis designam-se por *Acções*.

Política-Uma *Política* é uma sequência de *acções* que constituem uma *solução válida* para o problema. Em termos de *rede*, uma *política* corresponde a um trajecto ao longo da *rede*, de um *nodo* no *estágio* inicial até um *nodo* no *estágio* final.

3.5.2 Formulação Admissível

Uma *Formulação Admissível* cumpre a condição de não contemplar transições que correspondam a *soluções inválidas* (*impossíveis*). Uma formulação que não satisfaça esta condição designa-se por *Formulação Inadmissível*.

Exemplo de uma Formulação Inadmissível

O exemplo que a seguir se descreve é um exemplo clássico, designado por *Exemplo de Hastings*.

Um indivíduo vive numa vivenda no campo, e possui uma bicicleta. Da vivenda até ao portão da propriedade existe um caminho pelo qual não é possível andar de bicicleta (mas é possível levar a bicicleta pela mão). Do portão da propriedade até à vila próxima existe uma estrada onde é possível andar de bicicleta. O indivíduo pretende viajar da vivenda até à vila no intervalo de tempo mais curto possível. As durações dos vários trajectos são:

Trajecto Vivenda-Portão

Caminhando com a bicicleta pela mão ⇒ 4 minutos
Caminhando sem bicicleta ⇒ 1 minuto

Trajecto Portão-Vila

Andar de bicicleta até à vila ⇒ 1 minuto
Andar a pé até à vila ⇒ 3 minutos

A **Figura-3.11** pretende representar os trajectos indicados no enunciado.

Da observação da **Figura-3.11**, seríamos levados a concluir que a *Solução Óptima*, correspondente a um percurso com a duração total de 2 minutos, se traduziria em *Caminhar sem a bicicleta* até ao portão e, de seguida, *Andar de Bicicleta* até à vila.

É evidente que esta solução é *inválida*, pois a *decisão* tomada na segunda fase não é compatível com a *decisão* tomada na primeira fase.

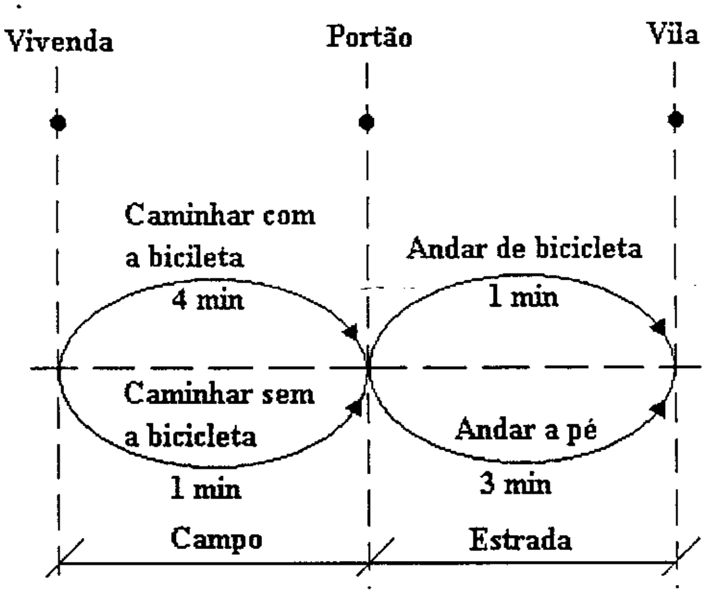


Figura-3.11

É fácil ver que a *variável* que define o *estado* do sistema corresponde à disponibilidade da bicicleta. A disponibibilidade da bicicleta determina a *validade* da *opção* correspondente a *andar de bicicleta* no trajecto entre o portão e a vila.

Devemos, portanto, definir dois *estados* possíveis para o problema:

Estado 0 - Bicicleta não-disponível
Estado 1 - Bicicleta disponível

Considerando os dois *estágios* correspondentes aos percursos *Vivenda-Portão* e *Portão-Vila*, temos a *rede* correspondente a uma *Formulação Válida* representada na **Figura-3.12**.

Para esta definição, temos:

Valor-Designa a *Função das Contribuições de Estágio* geradas quando o sistema parte do *nodo (n,i)* e segue uma *Polítíca K*. Representa-se por $V_n^k(i)$.

Valor Óptimo-*Valor* obtido quando o sistema parte do *nodo (n,i)* e segue uma *Política Óptima*. Representa-se por $f_n(i)$.

Função de Valor Óptimo de Estágio-Obtém-se considerando o *Valor Óptimo* para todos os *estados* no *estágio n*. Assim, $F_n = [f_n(i)]$.

Podemos verificar que o ***Valor Óptimo*** a partir do *nodo* ***(3,0)***, que é o *nodo* inicial do problema, é igual a ***19***.

Estágio Nº	Contribuição de Estágio R_n	$R_n + HF_{n-1}^T$	F_n
0	———	———	$i=0 \; \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$
1	$\begin{array}{cc} & j=0 \\ \begin{array}{c} i=0\\ =1\\ =2 \end{array} & \begin{bmatrix}7\\5\\2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & j=0 \\ \begin{array}{c} i=0\\ =1\\ =2 \end{array} & \begin{bmatrix}7\\5\\2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} i=0\\ =1\\ =2 \end{array} & \begin{bmatrix}7\\5\\2\end{bmatrix}\end{array}$
2	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=0 & =1 & =2 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=0\\ =1\\ =2 \end{array} & \begin{bmatrix}7 & 9 & 10\\5 & 8 & 10\\2 & 6 & 9\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=0 & =1 & =2 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=0\\ =1\\ =2 \end{array} & \begin{bmatrix}14 & 14 & 12\\12 & 13 & 12\\9 & 11 & 11\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} i=0\\ =1\\ =2 \end{array} & \begin{bmatrix}12\\12\\9\end{bmatrix}\end{array}$
3	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=0 & =1 & =2 \end{array} \\ i=0 & \begin{bmatrix}7 & 9 & 10\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=0 & =1 & =2 \end{array} \\ i=0 & \begin{bmatrix}7 & 9 & 10\end{bmatrix}\end{array}$	$i=0 \; \begin{bmatrix}19\end{bmatrix}$

Figura-3.13

Torna-se necessário identificar a *Política* que corresponde a esse *Valor Óptimo* (***Política Óptima***). Para este efeito faz-se o que se designa por ***backtracking***, *i.e.* começando do *estágio* mais à esquerda (*estágio 3*, na parte inferior do quadro), verificamos que *transição* produz o *Valor Óptimo* seleccionado para o *estágio*.

A **Figura-3.14** ilustra este procedimento.

Para o *estágio 3*, temos a *transição **(0,2)***.

Prosseguindo, para o *estágio 2*, e entrando nesse *estágio* no *estado 2* (*estado* de saída do *estágio* anterior), temos a *transição **(2,0)***.

Continuando, para o *estágio 1*, e entrando no *estado 0*, temos a *transição* ***(0,0)***.

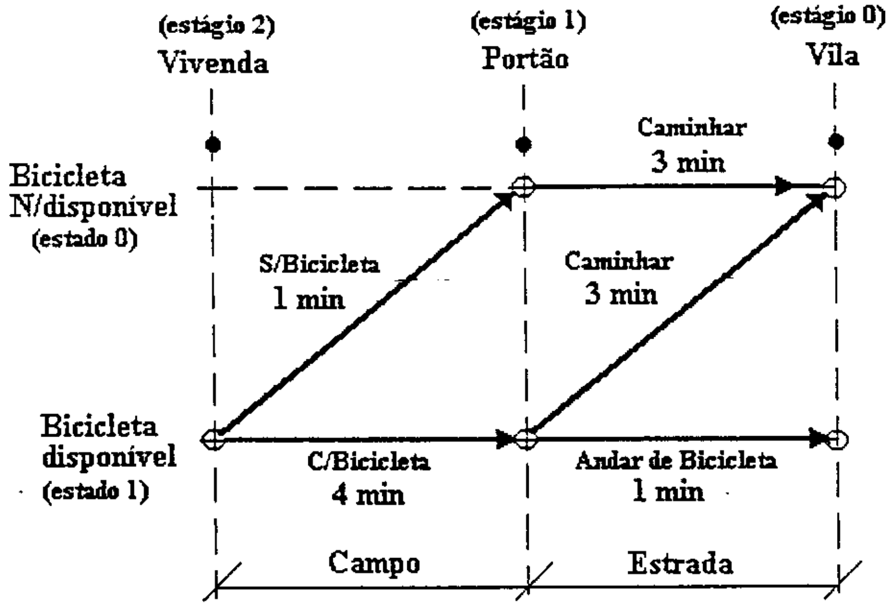


Figura-3.12

3.5.3 Relação de Recorrência Aditiva

A *Relação de Recorrência* para um *Problema de Programação Dinâmica* exprime o *Valor Óptimo* para o *estágio **n*** em função da *Função de Contribuição de Estágio* e da *Função de Valor Óptimo* para o *estágio **n-1***.

A *Relação de Recorrência* aplicável ao *problema-exemplo* que temos utilizado tem a forma:

$$F_n = \min\left[R_n + HF_{n-1}^T\right]$$

A expressão traduz, de facto, uma *Relação de Recorrência.*

Temos, para ***n=1***

$$F_1 = \min\left[R_1 + HF_0^T\right]$$

Para ***n=2***

$$F_2 = \min\left[R_2 + HF_1^T\right]$$

etc.

Os R_i representam as matrizes de *Contribuição de Estágio*, e são dados do problema.

A solução numérica utilizando a *Relação de Recorrência* proposta pode ser apresentada na forma tabular representada na **Figura-3.13**:

Estágio Nº	Contribuição de Estágio R_n	$R_n + HF_{n-1}^T$	F_n
0	———	———	$i=0 \; \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
1	$\begin{array}{cc} & j=0 \\ i=0 & \\ =1 & \\ =2 & \end{array} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{cc} & j=0 \\ i=0 & \\ =1 & \\ =2 & \end{array} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} i=0 \\ =1 \\ =2 \end{array} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
2	$\begin{array}{cccc} & j=0 & =1 & =2 \\ i=0 & 7 & 9 & 10 \\ =1 & 5 & 8 & 10 \\ =2 & 2 & 6 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} & j=0 & =1 & =2 \\ i=0 & 14 & 14 & 12 \\ =1 & 12 & 13 & 12 \\ =2 & 9 & 11 & 11 \end{array}$	$\begin{array}{c} i=0 \\ =1 \\ =2 \end{array} \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$
3	$\begin{array}{cccc} & j=0 & =1 & =2 \\ i=0 & [7 & 9 & 10] \end{array}$	$\begin{array}{cccc} & j=0 & =1 & =2 \\ i=0 & [7 & 9 & 10] \end{array}$	$i=0 \; \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}$

Figura-3.14

Este conjunto de transições representa uma *Política Óptima*, que é interpretada da seguinte forma:

Estágio	i	j	Interpretação
3	0	2	Produzir 4 unidades
2	2	0	Não produzir
1	0	0	Produzir 2 unidades

Da **Figura-3.14** é possível verificar que existe um outro conjunto de *transições* que produzem o mesmo *Valor Óptimo*, constituindo uma ***Solução Óptima Alternativa***.

O *Quadro de Interpretação* para essa outra *Política Óptima* é:

Estágio	i	j	Interpretação
3	0	0	Produzir 2 unidades
2	0	2	Produzir 4 unidades
1	2	0	Não produzir

A validade da metodologia que utilizámos na resolução numérica do *problema-exemplo* requer que se verifiquem as ***Condições de Validade*** para *Problemas de Programação Dinâmica*.

As *Condições de Validade* incluem:

Condição de Separabilidade

Implica a necessidade da validade da aplicação de uma *relação de recorrência*. Isto é, que o *valor* em cada *estágio* possa ser calculado em função do *valor* no *estágio* consequente e da *função de contribuição de estágio*.

Condição de Optimabilidade

Implica a validade da hipótese de o processo de optimização passar pela optimização em cada *estágio* do problema. Quer isto dizer, que não seja possível obter o *óptimo* sem que se tenha seleccionado em cada *estágio* do processo iterativo a *política óptima* a partir de cada *nodo* até ao fim da *rede*.

3.6 Aplicação do Algoritmo de Programação Dinâmica para Contribuições Aditivas

Consideremos um problema em que se pretende determinar a distância mais curta entre dois pontos (*A* e *H*) através de uma *rede* com a topologia indicada na **Figura-3.15**.

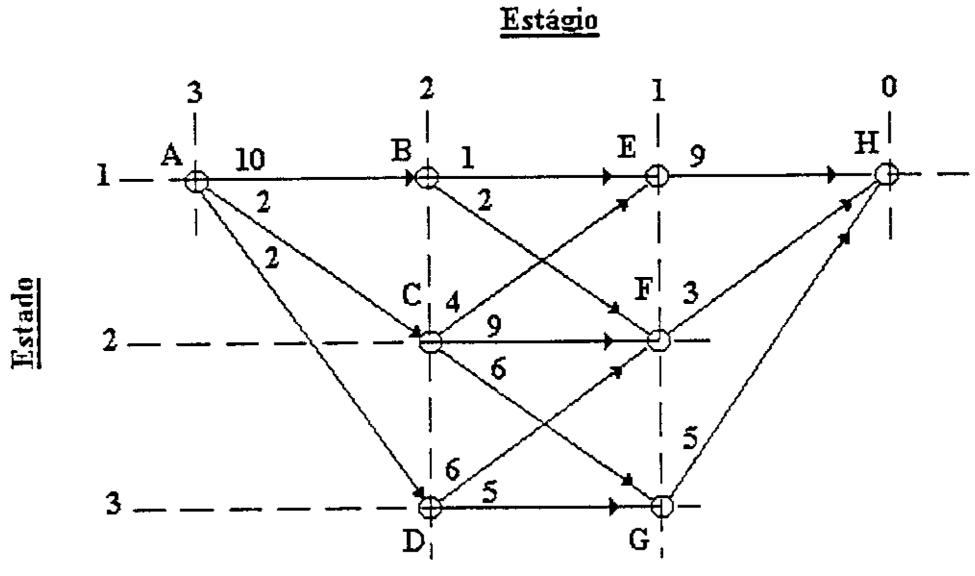


Figura-3.15

Para o problema vamos adoptar a *Relação de Recorrência*

$$F_n = \min\left[R_n + HF_{n-1}^T\right]$$

A organização tabular dos cálculos necessários está representada na **Figura-3.16**.

Estágio Nº	**Contribuição de Estágio** R_n	$R_n + HF_{n-1}^T$	F_n
0	———	———	$i=1 \; \left[0 \right]$
1	$\begin{array}{r c} & j=1 \\ \begin{array}{r} i=1 \\ =2 \\ =3 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{r c} & j=1 \\ \begin{array}{r} i=1 \\ =2 \\ =3 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{r c} \begin{array}{r} i=1 \\ =2 \\ =3 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$
2	$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} j=1 & =2 & =3 \end{array} \\ \begin{array}{r} i=1 \\ =2 \\ =3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & \times \\ 4 & 9 & 6 \\ \times & 6 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} j=1 & =2 & =3 \end{array} \\ \begin{array}{r} i=1 \\ =2 \\ =3 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 5 & \times \\ 13 & 12 & 11 \\ \times & 9 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{r c} \begin{array}{r} i=1 \\ =2 \\ =3 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$
3	$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} j=1 & =2 & =3 \end{array} \\ i=1 & \begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$	$\rightarrow \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} j=1 & =2 & =3 \end{array} \\ i=1 & \begin{bmatrix} 15 & 13 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$	$i=1 \; \left[11 \right]$

× - Representa um caminho impossível

Figura-3.16

A *Solução Óptima* traduz uma *distância mínima* igual a *11*.

A interpretação da *solução óptima* é:

Estágio	**i**	**j**	**Interpretação**
3	1	3	Ir de **A** para **D**
2	3	2	Ir de **D** para **F**
1	2	1	Ir de **F** para **H**

3.7 Visualização do Algoritmo de Programação Dinâmica

A **Figura-3.17** representa a essência da metodologia que empregámos na solução dos anteriores problemas de *Programação Dinâmica*.

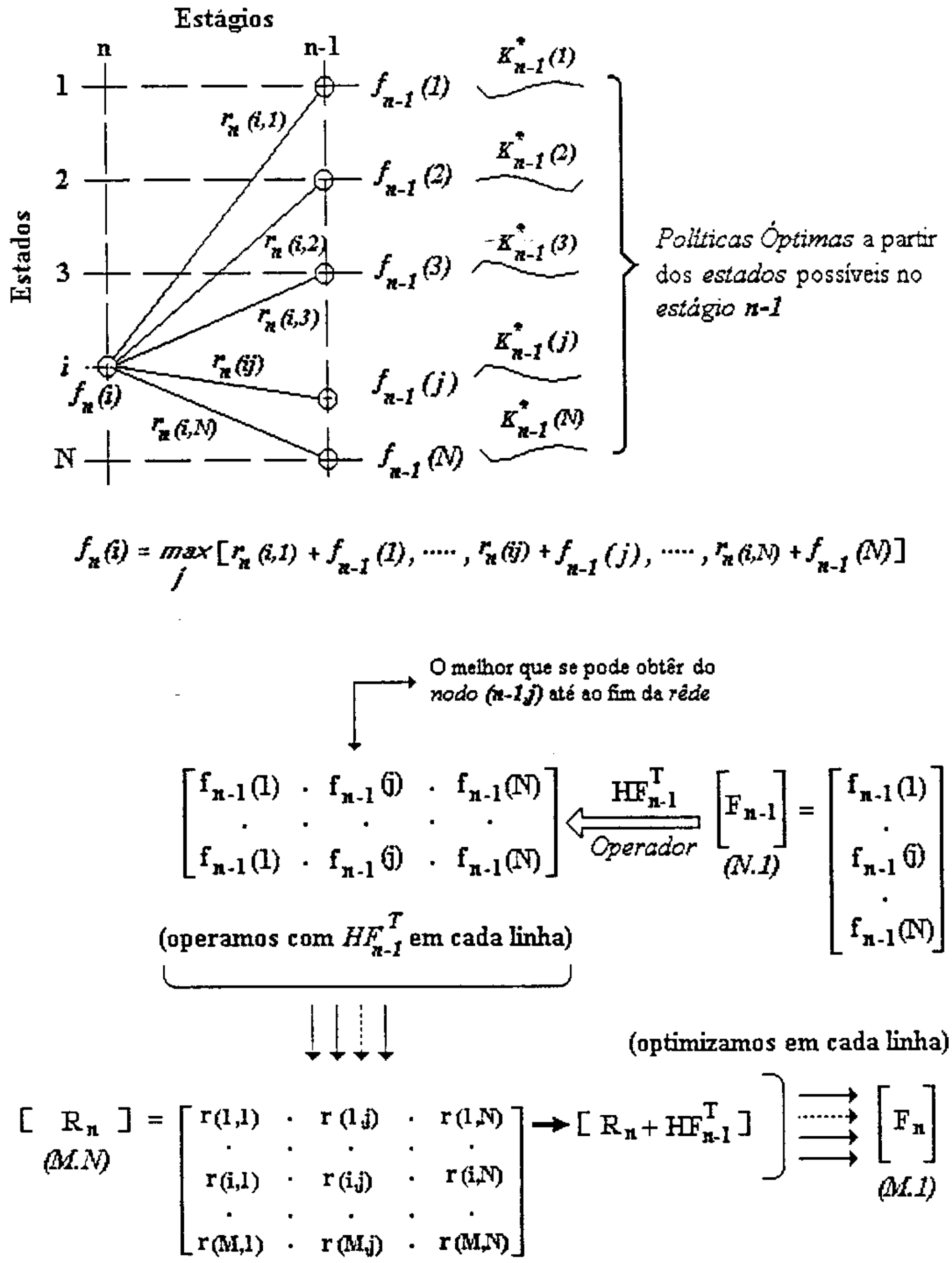


Figura-3.17

3.8 Formalização das Condições de Validade em Programação Dinâmica

3.8.1 Introdução

Seja K qualquer *Política* com início no *nodo* $(n\text{-}1,j)$.

Seja jK uma *Política* que começa em (n,i), transita para $(n\text{-}1,j)$, e segue depois a *Política* K.

Sejam $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1$ as *Contribuições Imediatas de Estágio* ao longo de *jK*, e V_0 o ***Valor Terminal***.

A **Figura-3.18** ilustra esta esta *política* genérica *jK*.

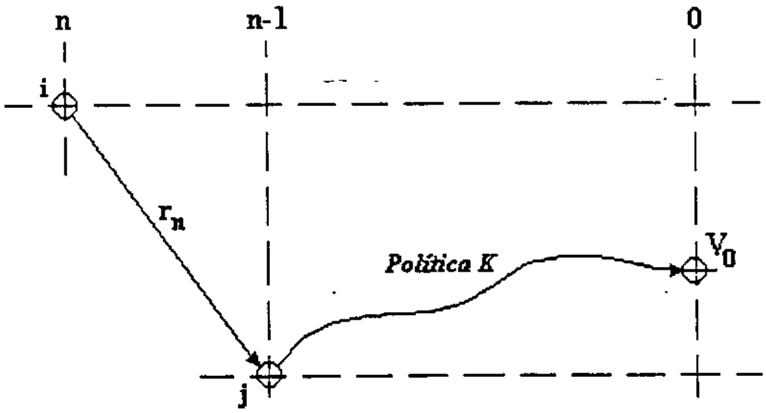


Figura-3.18

Observe-se que ***K*** constitui uma *política* genérica que parte do *estado* ***j***, no *estágio* ***n-1***, e segue até ao *estágio* final do processo.

Considerando todos os possíveis *estados* ***j*** do *estágio* ***n-1*** e todas as possíveis *políticas* ***K*** a partir de cada um destes *estados*, pode-se gerar todas as *políticas* possíveis de ***n*** *estágios* a partir do *nodo* ***(n,i)***.

3.8.2 Condição de Separabilidade

Para qualquer *política*, o valor de qualquer *nodo* deve poder ser expresso em função das *Contribuições de Estágio* e do *Valor* do *nodo* seguinte.

Assim, para qualquer *estágio* ***n > 0,*** se $V_n^{jK}(i)$ representar o *Valor* que se obtém no *nodo* ***(n,i)***, quando se transita para o *nodo* ***(n-1,j)*** e se segue, depois, uma *política* ***K***, tem-se:

$$V_n^{jK}(i) = \theta_n(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1, V_0)$$

A ***Condição de Separabilidade*** exige que

$$V_n^{jK} = \phi_n\left[r_n, V_{n-1}^{K}(j)\right]$$

em que

$$V_{n-1}^{K}(j) = \theta_{n-1}(r_{n-1}, \ldots, r_1, V_0)$$

i.e. V_{n-1}^{K} exprime-se pelo mesmo tipo de função que V_n^{jK}.

Problemas com ***Contribuições Aditivas***, com ***Contribuições Multiplicativas*** e com ***Contribuições Descontadas*** verificam a *Condição de Separabilidade*.

Passamos a analisar a *Condição de Separabilidade* para estes tipos de *Contribuições*.

Contribuições Aditivas

Para este tipo de *Contribuição*, a *Função de Valor* para o *estágio* ***n*** tem a expressão:

$$V_n = \sum_{s=1}^{n} r_s + V_0 = r_n + \left(\sum_{s=1}^{n-1} r_s + V_0 \right) = r_n + V_{n-1}$$

Contribuições Multiplicativas

Para este tipo de *Contribuição*, a *Função de Valor* para o *estágio* ***n*** tem a expressão:

$$V_n = \left(\prod_{s=1}^{n} r_s \right) V_0 = r_n \left[\left(\prod_{s=1}^{n-1} r_s \right) V_0 \right] = r_n V_{n-1}$$

Contribuições Descontadas

Para este tipo de *Contribuição*, a *Função de Valor* para o *estágio* ***n*** tem a expressão:

$$V_n = \sum_{s=1}^{n} b^{n-s} r_s + V_0 = r_n + b \left(\sum_{s=1}^{n-1} b^{n-1-s} r_s + b^{n-1} V_0 \right) = r_n + b V_{n-1}$$

com $0 < b < 1$

Um exemplo de um tipo de *Contribuição* que não obedece à *Condição de Separabilidade* é, por exemplo, a que tem (para um *estágio 4*)

$$V_4 = r_4 + r_3 r_2 + r_1 + V_0$$

3.8.3 Condição de Optimabilidade

Para todo o ***nodo (n,i)*** e ***nodo (n-1,j)***, se K^* é uma *Política Óptima* a partir de ***(n-1,j)***, então, para qualquer *política* $K \neq K^*$, a partir do ***nodo (n-1,j)***, deve ter-se

$$V_n^{jK}(i) \leq V_n^{jK^*}(i)$$

A **Figura-3.19** ilustra esta condição.

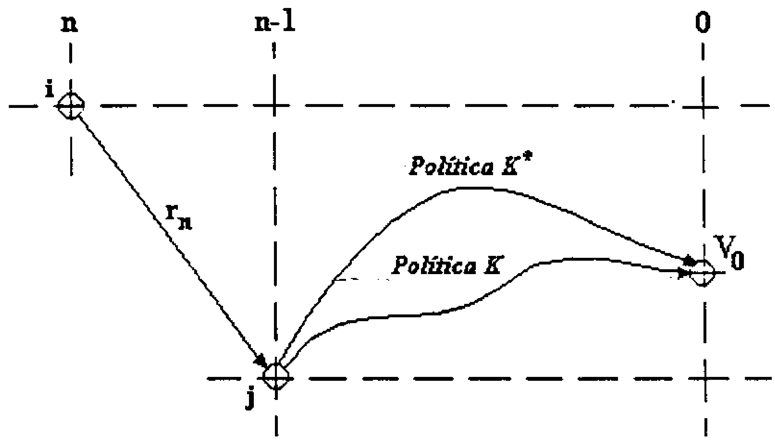


Figura-3.19

Não deve, portanto, ser possível fazer melhor no *estágio* ***n*** sem optimizar no *estágio* ***n-1***.

A *Condição de Optimabilidade* requer que

$$V_n^{jK^*}(i) = \max_K\left[V_n^{jK}(i)\right]$$

A *Condição de Optimabilidade* verifica-se para *Contribuições Aditivas* e *Contribuições Descontadas*. Verifica-se, também, para *Contribuições Multiplicativas* se as *Contribuições de Estágio* forem não-negativas.

<u>**Exemplo em que a Condição de Optimabilidade não se verifica**</u>

Considere-se um problema de *Programação Dinâmica* para o qual se verifique a *Relação de Recorrência*

$$F_n = \max\left[R_n + HG_{n-1}^T\right]$$

onde

$$G_{n-1} = \left[f_{n-1}(j) - 0.1f_{n-1}^2(j)\right]$$

ou seja,

$$F_n = \left[f_n(i)\right] = \max_j\left[r_n(ij) + f_{n-1}(j) - 0.1f_{n-1}^2(j)\right]$$

e com a rede representada na **Figura-3.20**.

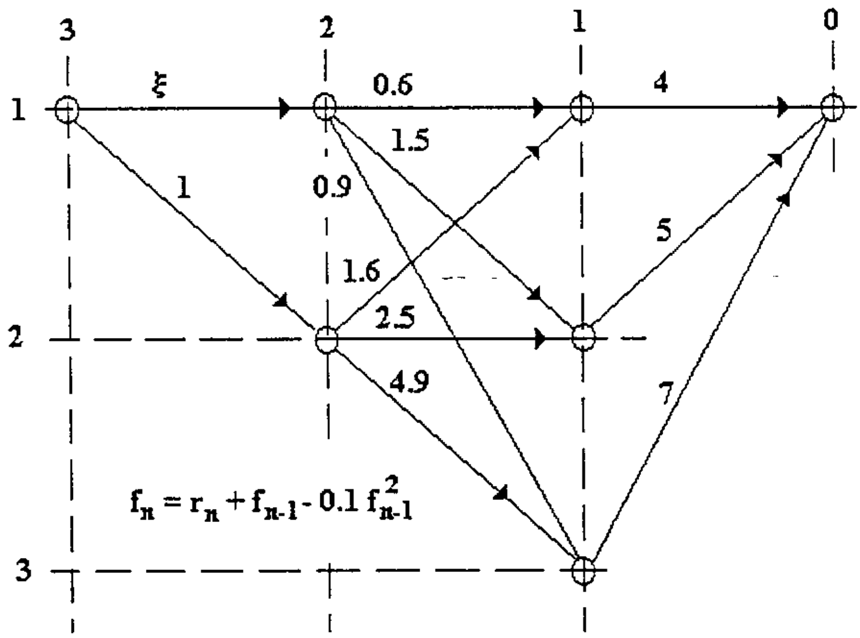


Figura-3.20

Para o *estágio 1*, temos

$$f_1(1) = r_1(1,1) + f_0(1) - 0.1 f_0^2(1) = 4 + 0 - 0 = 4$$
$$f_1(2) = r_1(2,1) + f_0(1) - 0.1 f_0^2(1) = 5 + 0 - 0 = 5$$
$$f_1(3) = r_1(3,1) + f_0(1) - 0.1 f_0^2(1) = 7 + 0 - 0 = 7$$

Para o *estágio 2*, temos

$$f_2(1) = \begin{Bmatrix} r_2(1,1) + f_1(1) - 0.1 f_0^2(1) = 0.6 + 4 - 0.1*4^2 = 4.6 - 1.6 = 3 \\ r_2(1,2) + f_1(2) - 0.1 f_0^2(2) = 1.5 + 5 - 0.1*5^2 = 6.5 - 2.5 = 4 \\ r_2(1,3) + f_1(3) - 0.1 f_0^2(3) = 0.9 + 7 - 0.1*7^2 = 7.9 - 4.9 = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow = 4$$

$$f_2(2) = \begin{Bmatrix} r_2(2,1) + f_1(1) - 0.1 f_0^2(1) = 1.6 + 4 - 0.1*4^2 = 5.6 - 1.6 = 4 \\ r_2(2,2) + f_1(2) - 0.1 f_0^2(2) = 2.5 + 5 - 0.1*5^2 = 7.5 - 2.5 = 5 \\ r_2(2,3) + f_1(3) - 0.1 f_0^2(3) = 4.9 + 7 - 0.1*7^2 = 11.9 - 4.9 = 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow = 7$$

Para o *estágio 1*, considerando apenas a transição entre os *nodos (1,3)* e *(2,2)*, temos

$$f_3(1) = r_3(1,2) + f_2(2) - 0.1 f_2^2(2) = 1 + 7 - 0.1*7^2 = 8 - 4.9 = 3.1$$

Teremos, portanto, a *Política Óptima*

(1,3),(2,2),(3,1),(1,0)

Esta *política óptima* corresponde ao *caminho* marcado na *rede* na **Figura-3.21**.

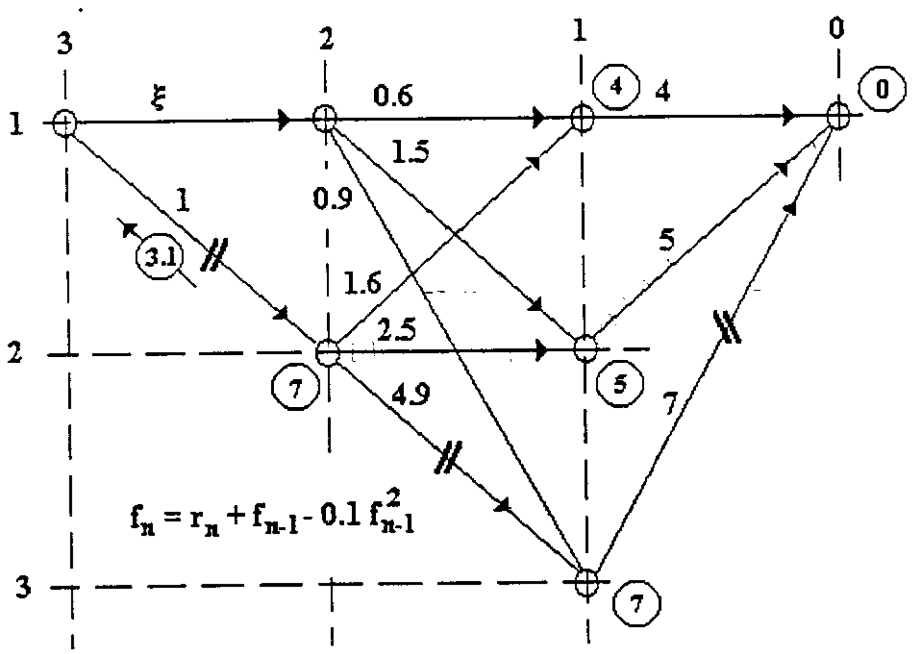


Figura-3.21

Porém, se para o cálculo do *Valor* associado ao *nodo (2,2)*, tivéssemos optado pela *transição* entre este nodo e o *nodo (1,2)* do *estágio 1* (o que corresponde a não utilizar uma *política óptima* a partir do *nodo (1,2)*), obteríamos

$$V_2(2,2) = r_2(2,2) + f_1(2) - 0.1 * f_1^2(2) = 2.5 + 5 - 2.5 = 5$$

e para $V_3(1)$

$$V_2(2,2) = r_3(1,2) + V_2(2) - 0.1 * V_2^2(2) = 1 + 5 - 2.5 = 3.5$$

e, então

$$V_3^{2K^*}(1) \neq \max_K \left[V_3^{2K}(i) \right]$$

podendo afirmar-se que a *Condição de Optimabilidade* não se verifica.

A *mecânica* do algoritmo de *Programação Dinâmica* pode ser executada normalmente, mas não há nenhuma garantia que se venha a obter o *óptimo* para o problema.

3.9 Existência de uma Relação de Recorrência

Vamos mostrar que para uma formulação de *Programação Dinâmica* que verifique as *Condições de Validade* (*Condição de Separabilidade* e *Condição de Optimabilidade*) existe uma *Relação de Recorrência* que permite determinar a *Solução Óptima*.

Teorema

Considere-se um problema de *maximização* de *Programação Dinâmica* com n *estágios*.

A *Função de Valor Óptimo* $F_n = [f_n(i)]$ pode ser determinada, para um *Valor Terminal* V_0, aplicando a *Relação de Recorrência*

$$F_n = \max[\mu_n(R_n, F_{n-1})]$$

aos *estágios* ***1,2,...,n***, se a *Condição de Separabilidade* $V_n^{jK}(i) = \phi_n[r_n, V_{n-1}^{K}(j)]$ e a *Condição de Optimabilidade* $V_n^{jK^*}(i) = \max_K[V_n^{jK}(i)]$ se verificarem, sendo

$$\mu_n[R_n, F_{n-1}] = \phi_n[r_n(ij), f_{n-1}(j)]$$

Prova

Tomemos para referência a **Figura-3.22**.

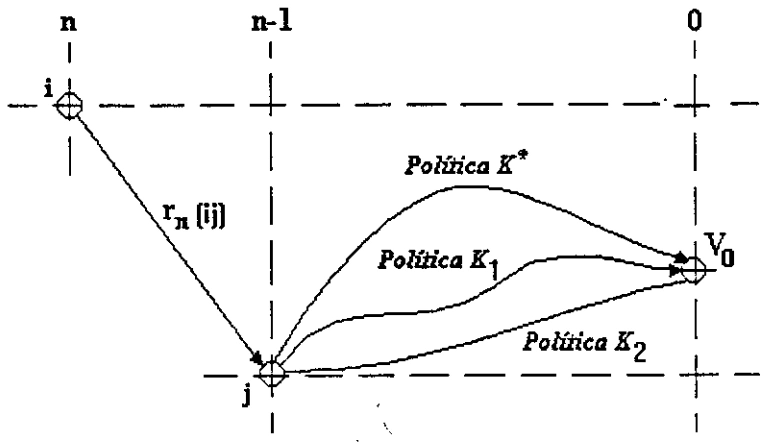


Figura-3.22

Então,

$$\begin{aligned} V_n^{jK^*}(i) &= \max_K[V_n^{jK}(i)] = \\ &= \max_K\{\phi_n[r_n, V_{n-1}^{K}(j)]\} = \\ &= \phi_n[r_n, f_{n-1}(j)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_n(i) &= \max_j\left[V_n^{jK^*}(i)\right] = \\
&= \max_j\left\{\max_K\left[V_n^{jK}(i)\right]\right\} = \\
&= \max_j\left\{\phi_n\left[r_n, f_{n-1}(j)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$F_n = \max\left[\mu_n\left(R_n, F_{n-1}\right)\right], \text{ válida para qualquer } \textit{estágio } \boldsymbol{n}$$

3.10 Importância da Formulação de um Problema

A complexidade da resolução de um problema de *Programação Dinâmica* depende, muitas vezes, da formulação adoptada.

Para demonstrar esta questão, vamos utilizar um exemplo-ilustrativo.

__Exemplo-Enunciado__

Um pomar produz ***20*** toneladas de maçãs em Setembro. as maçãs são separadas em lotes de ***10*** toneladas. Qualquer dos lotes pode ser vendido em Setembro, Outubro ou Novembro.

A contribuição líquida proveniente da venda das maçãs é indicada na tabela.

		Contribuição Líquida da Venda de	
Mês	**Inventário (inicio do mês)**	**10 toneladas**	**20 toneladas**
Setembro	20	400	800
Outubro	10	470	—
	20	400	800
Novembro	10	600	—
	20	—	1000

Decida qual a Política de Venda que maximiza a contribuição total, atendendo a que ***10%*** das maçãs ainda não vendidas se deterioram em cada mês.

__Resolução__

Consideremos, em primeiro lugar, a formulação do problema, estabelecendo algumas definições.

Estágio-Ponto de decisão mensal. Temos, portanto, *3 estágios*, cada um a representar um dos meses do *horizonte de planeamento*.

Estado-Quantidade de maçãs disponíveis para venda no início de cada mês. É a quantidade de maçãs disponíveis que determina as acções possíveis em cada mês.

Acção-Decisão de venda de *0*, *10* ou *20* toneladas.

Contribuição de Estágio-É uma função da contribuição líquida das vendas.

$r_n(ij)$ =contribuição obtida quando o inventário de maçãs passa de i no *estágio n* para j no *estágio n-1*.

$$R_n = [r_n(ij)]$$

Valor Óptimo-$f_n(i)$=máxima contribuição possível a partir do *estágio n*, quando existem i toneladas de maçãs em inventário.

Esta formulação garante que, em qualquer *nodo (n,i)*, o conhecimento de n e de i é suficiente para determinar o conjunto de *acções* possíveis.

Vamos analisar, em primeiro lugar, o problema sem considerar que há deterioração das maçãs não vendidas (*Problema sem desperdício*). Neste caso, a *rede* tem a representação indicada na **Figura-3.23**.

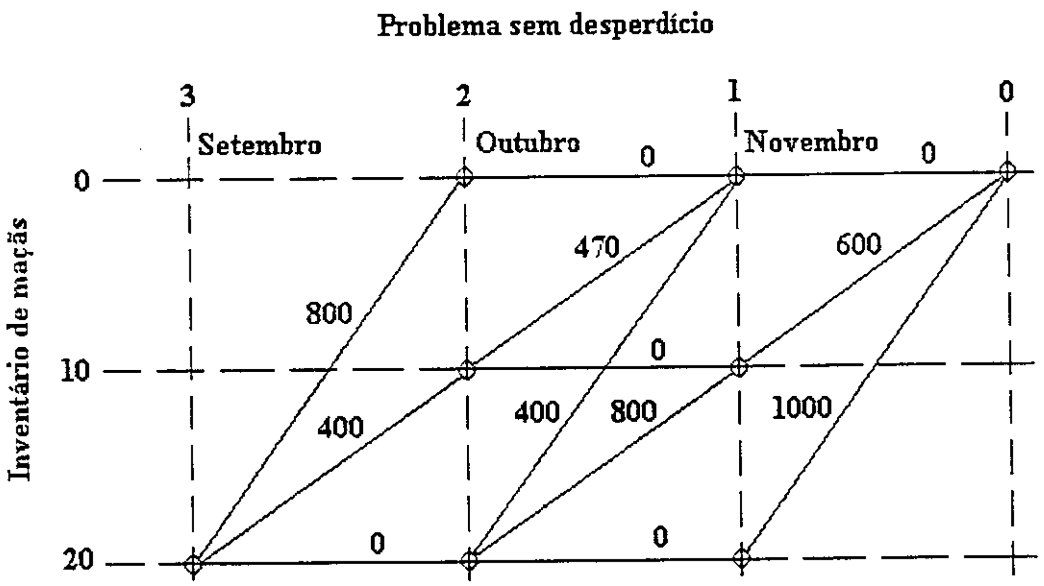


Figura-3.23

Note-se que o *Valor* de uma determinada *política* a partir do *estágio n* deve corresponder à soma das *contribuições imediatas de estágio* relativas às *transições* incluídas na *política*.

Ou seja, $V_n = r_n + r_{n-1} + ... + r_1$, assumido um *Valor Terminal* nulo. Assim, a *Função de Contribuição é aditiva.* O problema resolvia-se utilizando a *Relação de Recorrência para Contribuições Aditivas.*

Passemos, agora, a analisar o *Problema com Desperdício.*

Em Setembro, em que o inventário é de *20* toneladas de maçãs, temos as alternativas de venda de nenhuma maçã, de *10* toneladas ou de *20* toneladas. O inventário no fim de Setembro vem afectado do factor de deterioração. Assim, das maçãs não vendidas neste período de tempo apenas *90%* serão vendáveis em Outubro (observe-se a **Figura-3.24**).

Problema com desperdício

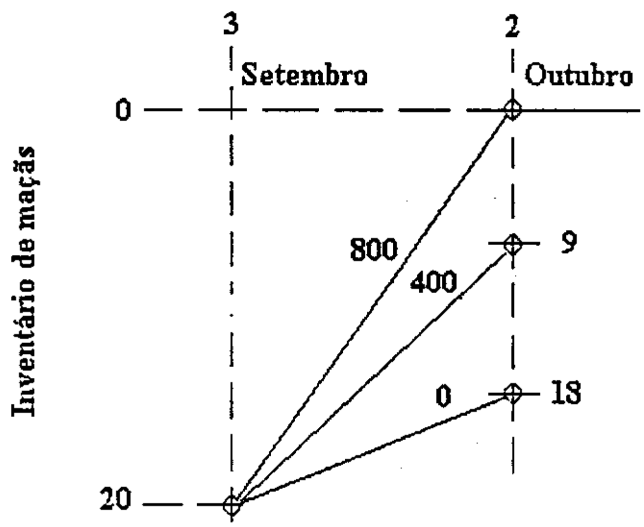


Figura-3.24

O mesmo tipo de consideração relativa à deterioração para os outros *estágios* do problema levaria à definição de um grande número de *estados* para a sua formulação.

Uma alternativa a esta abordagem consiste em considerar que o inventário de maçãs não sofre deterioração, mas que o rendimento líquido da venda de um volume de maçãs sofre uma depreciação com a mesma percentagem. Assim, por exemplo, quanto mais tarde é vendido um lote de *10* maçãs, maior é a depreciação do lucro quando convertido a valores actuais. TONELADAS de

Com esta abordagem, os *estados* necessários à formulação do *Problema com Desperdício* são os mesmos utilizados para a formulação do *Problema sem Desperdício.*

A *Função de Valor* tem a forma de uma *Função de Contribuição Descontada.*

$$V_n = r_n + br_{n-1} + b^2 r_{n-2} + \ldots + b^{n-1} r_1 =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} b^{n-s} r_s$$

Para este tipo de *Contribuição*, já provámos a *Condição de Separabilidade*

$$V_n = r_n + bV_{n-1}$$

Assim, começando no *nodo* ***(n,i)***, transitando para o *nodo* ***(n-1,j)*** e prosseguindo uma *política* ***K***, tem-se

$$V_n^{jK}(i) = r_n(ij) + bV_{n-1}^{K}(j)$$

A verificação das *Condições de Validade* permite-nos escrever para a *Função de Valor Óptimo*:

$$f_n(i) = \max_j \left[r_n(ij) + bf_{n-1}(j) \right]$$

e

$$F_n = \max\left[R_n + bHF_{n-1}^T \right]$$

com o escalar ***b*** a representar o ***Factor de Desconto***.

A resolução do problema usando esta *Relação de Recorrência* pode ser organizada na forma tabular, conforme se representa na **Figura-3.25**.

Como se pode observar, a *Contribuição Máxima* é de *886 U.M.*, e corresponde à seguinte *Política Óptima*

Estágio	**i**	**j**	**Interpretação**
3	20	10	Vender 10 toneladas em Setembro
2	10	10	Não vender em Outubro
1	10	0	Vender o resto do inventário em Novembro

Estágio Nº	Contribuição de Estágio R_n	$R_n + bHF^T_{n-1}$	F_n	bF_n
0	—	—	$0\ [0]$	
1	$\begin{array}{c c} & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 1000 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c c} & 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 1000 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 1000 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 540 \\ 900 \end{bmatrix}$
2	$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 0 & 10 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \times & \times \\ 470 & 0 & \times \\ 800 & 400 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 0 & 10 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \times & \times \\ 470 & 540 & \times \\ 800 & 940 & 900 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 540 \\ 940 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 486 \\ 846 \end{bmatrix}$
3	$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 0 & 10 & 20 \end{matrix} \\ 20 & \begin{bmatrix} 800 & 400 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 0 & 10 & 20 \end{matrix} \\ 20 & \begin{bmatrix} 800 & 886 & 846 \end{bmatrix} \end{array}$	$20\ [886]$	

Factor de Desconto b=0.9

Figura-3.25

3.11 Tipos de Problemas com Contribuições Descontadas

Os problemas que envolvem investimentos ou receitas a realizar em diferentes períodos de tempo, e em que seja relevante considerar o valor do dinheiro no tempo, traduzem-se por modelos com *Contribuições Descontadas*. Desta forma, o algoritmo de *Programação Dinâmica* converte as receitas e despesas a *valores presentes*.

Para um problema deste tipo com uma taxa de juro por período de tempo igual a $\boldsymbol{a}$, tem-se

$$\underbrace{1\ \text{U.M.}}_{\substack{\text{recebida}\\ \text{no presente}}} \xrightarrow[\text{de tempo a um juro } a]{\text{investida durante 1 período}} \underbrace{(1+a)\ \text{U.M.}}_{\text{valor ao fim de 1 período}}$$

$$\underbrace{1\ \text{U.M.}}_{\substack{\text{recebida daqui a}\\ \text{1 período de tempo}}} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{(1+a)}\ \text{U.M.}}_{\text{valor presente}}$$

o que equivale a um *Factor de Desconto* dado por

$$\text{Factor de Desconto } = \frac{1}{(1 + \text{Taxa de Juro})} < 1$$

3.12 Modelo MaxiMin

Vamos apresentar a metodologia para a resolução deste tipo de *Contribuição* com base num *Enunciado-Exemplo.*

<u>Enunciado-Exemplo</u>

Pretende-se reduzir a espessura de chapas metálicas de espessura inicial igual a *4* mm para uma espessura final de *1* mm dispondo-se para o efeito de *3* laminadoras.

O fluxo obtido em cada posto é função da espessura à entrada e da espessura à saída desse posto, de acordo com os valores apresentados na tabela.

<u>Tabela de Fluxos em Tons/Unidade de Tempo</u>

		Espessura Final j		
		1	**2**	**3**
Espessura Inicial i	**1**	100	×	×
	2	75	100	×
	3	60	76	100
	4	50	72	87

Este problema constitui um exemplo típico de um *gargalo de produção.* Observe-se a **Figura-3.26**.

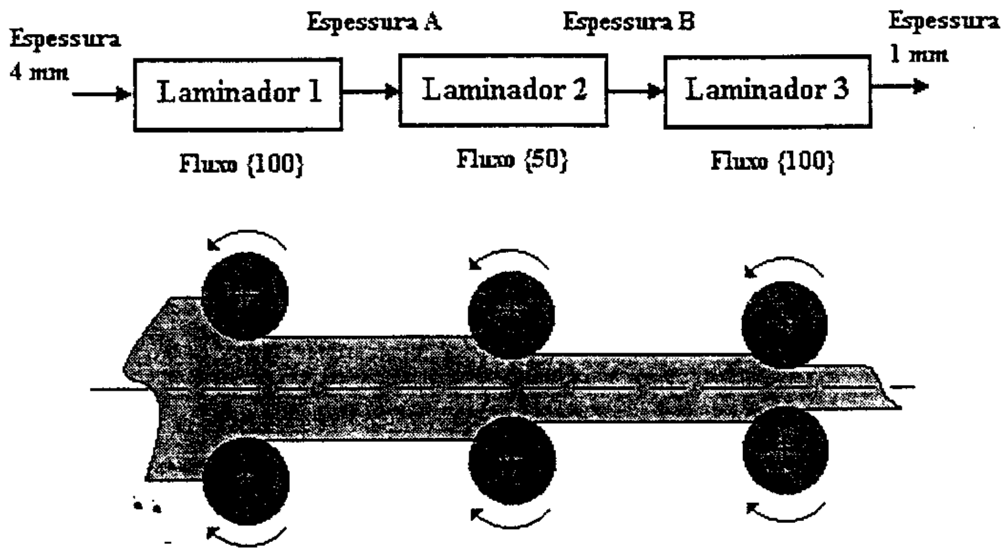


Figura-3.26

Para a solução indicada na **Figura-3.26**, o primeiro *estágio* efectua uma redução de ***4 mm*** para ***A mm***, o segundo *estágio* uma redução de ***A mm*** para ***B mm*** e, finalmente, o terceiro *estágio* uma redução de ***B mm*** para ***1 mm***. Admitindo que os *fluxos* obtidos em cada posto são os indicados na figura, teremos o *fluxo* de *{50}* no segundo posto a limitar o *fluxo global* do processo. É o menor dos *fluxos individuais* que determina o *fluxo do processo*. É esse valor que se pretende *maximizar*.

Portanto,

$$\text{Fluxo Global} = \min(\text{ Fluxos Individuais })$$

e

$$\max(\text{ Fluxo Global }) = \max[\min(\text{ Fluxos Individuais })]$$

Definição de uma Relação de Recorrência

Para um *estágio n*, seguindo uma política arbitrária, seja V_n o *fluxo* obtido a partir desse *estágio*, e sejam os *fluxos individuais* ao longo da *política* representados por $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1$.

Então, tem-se

$$\begin{aligned} V_n &= \min(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1) = \\ &= \min[r_n, \min(r_{n-1}, \ldots, r_1)] = \\ &= \min(r_n, V_{n-1}) \end{aligned}$$

Para uma *política jK* a partir do *nodo (n,i)*, tem-se

$$V_n^{jK}(i) = \min[r_n(ij), V_{n-1}^{K}(j)]$$

Se as *Condições de Separabilidade* e *Optimabilidade* se verificarem, temos para a *Função de Valor Óptimo*

$$F_n(i) = [f(i)] = \max_j \{\min[r_n(ij), f_{n-1}(j)]\}$$

Definição de Operadores

Se $\underset{\sim}{R_n}$ e $\underset{\sim}{A}$ são matrizes de ***m*** *linhas* e ***n*** *colunas*, define-se a matriz de ***m*** *linhas* e ***n*** *colunas* $\underset{\sim}{E} = (\underset{\sim}{R_n} \overset{\vee}{O} \underset{\sim}{A})$ como a matriz cujos elementos são calculados da seguinte forma

$$e(ij) = \min[r_n(ij), a(ij)]; (i = 1, \ldots, M), (j = 1, \ldots, N)$$

Assim, se $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{F}^{T}_{n-1}$, tem-se

$$e(ij) = \min\left[r_n(ij), f_{n-1}(j)\right]; (i = 1,\dots, M), (j = 1,\dots, N)$$

e, portanto,

$$f_{n-1} = \max_j\left[\left(e(ij)\right)\right]$$

e

$$\underset{\sim}{F}_n = \max(\underset{\sim}{R}_n \ \ \check{O} \ \ \underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{F}^{T}_{n-1})$$

Designamos o operador $\check{O}$ como *operador **Mínimo entre Duas Matrizes***.

Analogamente poderíamos definir um *operador **Máximo entre Duas Matrizes***, representado por $\hat{O}$.

Neste caso, obteríamos a *Relação de Recorrência* aplicável a problemas de *MiniMax*

$$\underset{\sim}{F}_n = \min(\underset{\sim}{R}_n \ \ \hat{O} \ \ \underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{F}^{T}_{n-1})$$

Definição do Modelo para o Problema de Laminagem

Para o exemplo em estudo, temos

Estágio-Cada uma das operações de laminagem, sendo ***n*** o número de operações que ainda falta executar.

Estado-Espessura da chapa metálica. Será designada por ***i***. É a espessura da chapa, em cada laminador, que determina as alternativas possíveis de redução.

Acção-Executar uma operação de laminagem com uma redução de espessura de 3,2,1 ou 0 mm. Evidentemente, que a redução num posto de laminagem só pode resultar numa espessura no máximo igual à espessura inicial à entrada do posto.

Contribuição Imediata de Estágio-A *Contribuição Imediata de Estágio* $r_n(ij)$ representa o *fluxo* que se obtém quando a chapa metálica é laminada de uma espessura ***i*** no *estágio **n*** para uma espessura ***j*** no *estágio **n-1***.

$$\underset{\sim}{R}_n = \left[r_n(ij)\right]$$

Valor Óptimo-Corresponde ao ***fluxo máximo*** que se pode obter a partir de um *nodo **(n,i)***.

A *rede* que representa este problema está ilustrada na **Figura-3.27**.

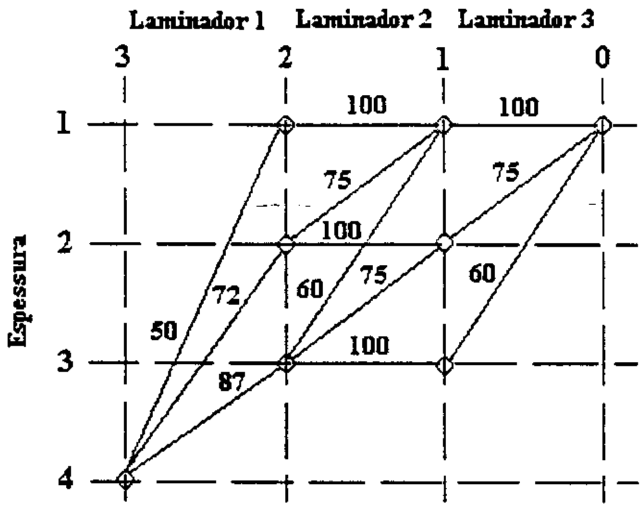


Figura-3.27

A **Figura-3.28** ilustra a aplicação do algoritmo ao *Problema de Laminagem.*

O *Fluxo Máximo* que se pode obter é de *75* toneladas na unidade de tempo.

Estágio Nº	**Contribuição de Estágio R_n**	$R_n \check{O} bHF^T_{n-1}$	F_n
0	———————	———————	$\begin{array}{cc} 1 & \left[\infty\right] \end{array}$
1	$\begin{array}{cc} & 1 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100\\75\\60\end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & 1 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100\\75\\60\end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100\\75\\60\end{bmatrix} \end{array}$
2	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100 & \times & \times\\75 & 100 & \times\\60 & 76 & 100\end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100 & \times & \times\\75 & 75 & \times\\60 & 75 & 60\end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100\\75\\75\end{bmatrix} \end{array}$
3	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ 4 & \begin{bmatrix}50 & 72 & 87\end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ 4 & \begin{bmatrix}50 & 72 & 75\end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} 4 & \begin{bmatrix}75\end{bmatrix} \end{array}$

Figura-3.28

Para interpretação da *Política Óptima*, temos

Estágio	i	j	Interpretação
3	4	3	Reduzir a espessura de 4 para 3 mm
2	3	2	Reduzir a espessura de 3 para 2 mm
1	2	1	Reduzir a espessura de 2 para 1 mm

O *Valor Terminal,* F_0, utilizado requer alguma justificação.
A escolha do *Valor Terminal* depende da forma da *Função de Valor* V_n.

Por definição, temos

$$V_n = \theta_n(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1, V_0)$$

A Função de Valor que se pretende para o problema em questão tem a forma

$$V_n = \theta_n(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1)$$

não incluindo, portanto, o termo V_0.

Sendo a função θ_n uma função que procura o menor de um conjunto de termos, devemos escolher para V_0 o *elemento neutro* ∞.

Assim,

$$V_n = \min(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1) = \min(r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1, \infty)$$

3.13 Carga Computacional em Programação Dinâmica

3.13.1 Introdução

Pretende-se nesta secção comparar a *Carga Computacional* envolvida na solução de um problema utilizando o *Algoritmo de Programação Dinâmica*, em contraposição com uma solução por *Enumeração Completa* de todas as *Políticas*.

Considere-se um problema com *Contribuições Aditivas*, com ***n*** ***estágios***, ***N*** *estados* por *estágio* e *S acções* por *nodo*.

A **Figura-3.29** mostra a *rede* correspondente a este problema genérico.

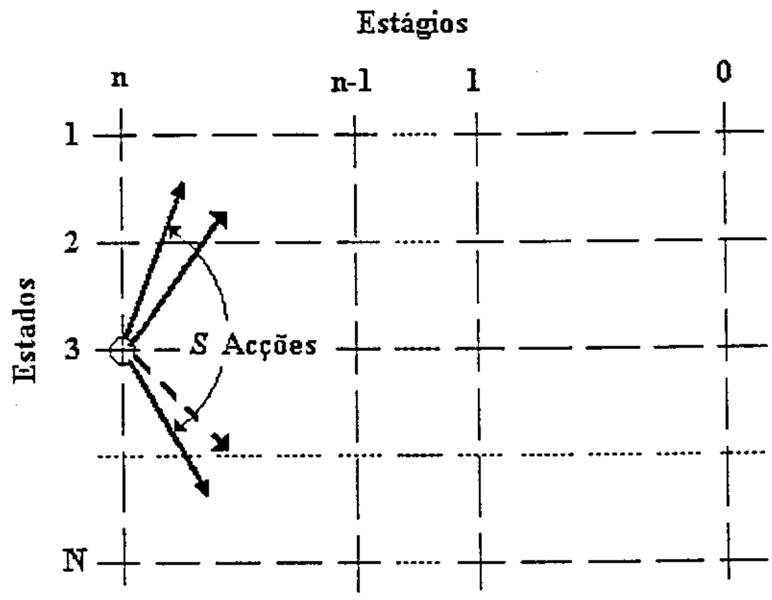


Figura-3.29

3.13.2 Enumeração Completa

A *enumeração completa* de todas as *políticas*, exige que, para cada *política* se somem os valores das *Contribuições Imediatas de Estágio* (em número de ***n***) que nela estão incluídas, e que se compare o *valor total* assim obtido com anteriores valores obtidos noutras *políticas*, por forma a poder seleccionar a *política* de *Valor Óptimo*.

A partir de cada *nodo* no *estágio* ***n***, temos S^n *políticas* e, atendendo a que se têm N *estados* no *estágio* ***n***, ter-se-á um *número total de políticas* da ordem de

$$\text{Número Total de Políticas} = NS^n$$

Cada *política* requer ***n*** adições e ***1*** comparação, à excepção da primeira. Temos, portanto, ***n+1*** operações por *política*.

O *Número Total de Operações* é, na *Enumeração Completa* da ordem de

$$\text{Número de Operações} = (n+1)NS^n - 1$$

3.13.3 Algoritmo de Programação Dinâmica

Observe-se a **Figura-3.30**.

Ao todo, a *rede* tem ***nN*** *nodos*.

Para cada *nodo* no *estágio* ***n***, a metodologia de *Programação Dinâmica* requer S adições $(r_n(ij) + f_{n-1}(j))$ e S comparações no sentido de se poder determinar a soma óptima.

Assim, cada *nodo* requer um número total de *2S* operações. O primeiro cálculo não requer comparação. Temos, assim, o *Número Total de Operações* para o *Algoritmo de Programação Dinâmica* da ordem de

$$\text{Número de Operações} = nN(2S-1)$$

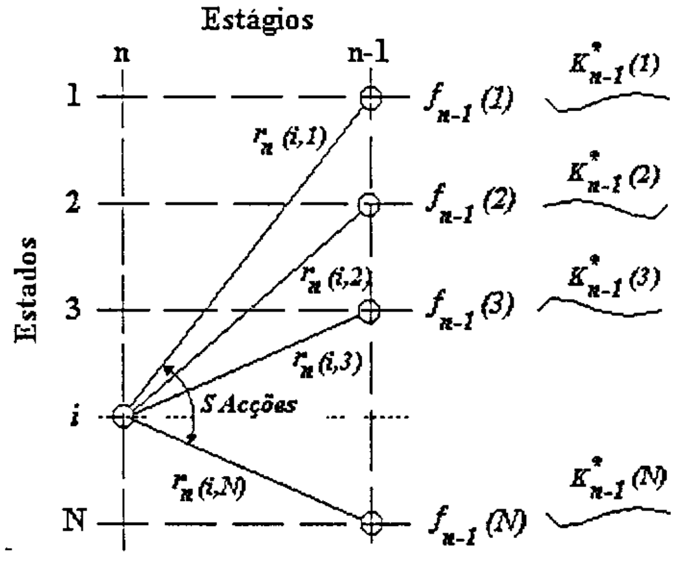


Figura-3.30

Para termos uma ideia da ordem de grandeza dos valores envolvidos nestes cálculos, vamos considerar uma *rede* de *pequena dimensão*, com $n=N=S=10$.

Para este problema:

Cálculos por *Enumeração Completa* →1.099.999.999.999
Cálculos por *Programação Dinâmica* →1.900

3.13.4 Métodos para Redução do Volume de Cálculo

3.13.4.1 Introdução

A complexidade de uma formulação de *Programação Dinâmica* está directamente relacionada com o número de *estados* considerados.

A dimensão do problema pode ter uma ordem de grandeza que inviabilize a sua resolução com o suporte de programas instalados em algum tipo de equipamento informático.

Alguns métodos têm sido desenvolvidos para reduzir a dimensão dos problemas executados em cada passo, traduzindo-se pela aplicação sucessiva de uma técnica a problemas de menor dimensão.

Faremos referência a alguns destes métodos, e examinaremos em detalhe um deles.

3.13.4.2 Pesquisa de Fibonacci

O método é aplicável para uma *Função de Contribuição unimodal.*

Para cada *política*, o correspondente *caminho* passa por um conjunto de estados.

O Valor da política considerada pode, assim, ser considerado como uma função do *estado* em cada *estágio* por onde a *política* passa.

A **Figura-3.31** representa uma política na *rede*, mostrando os estados considerados e as Contribuições imediatas associadas à política.

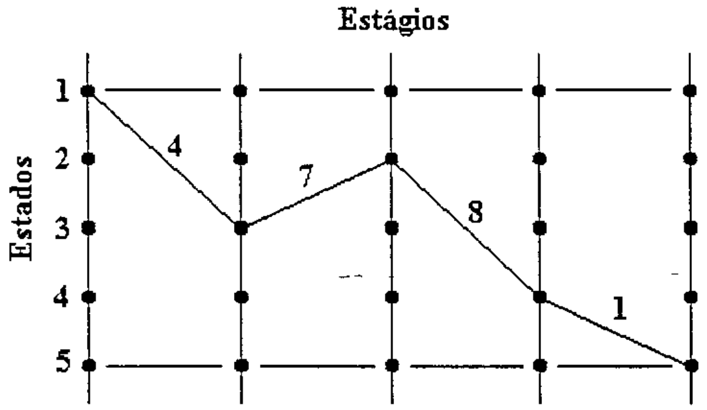


Figura-3.31

Valor da Política $= f(i_n, i_{n-1}, \ldots, i_0)$
com i_h no domínio $[1, N]$

Em particular, para uma função aditiva, e para o exemplo na figura

Valor da Política $= f(1,3,2,4,5) = 20$

O método de *Pesquisa de Fibonacci* define uma estratégia para determinação do valor que cada i_h deve assumir para optimizar a *Função de Valor*. Ou seja, determina em que *estado* de cada *estágio* uma política deve passar para se obter o *óptimo*.

Este tipo de estratégia designa-se por *Pesquisa de Fibonacci* por se basear numa *Sequência de Fibonacci* para divisão do domínio do *estado* em cada *estágio*.

Uma *Sequência de Fibonacci* segue a regra

$$n_1 = 0$$
$$n_2 = 1$$
$$n_{i+2} = n_{i+1} + n_i ; (i = 1, 2, \ldots)$$

e gera os valores

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

3.13.4.3 Método de Grelha

O método consiste em considerar, em cada *estágio*, um subconjunto dos *estados* possíveis com base numa *grelha grosseira*. Determinada a região em cada *estágio* por onde passa a *política óptima*, o problema é resolvido novamente, agora com uma *grelha fina*.

Assim, se os *estados* possíveis em cada estágio forem

$$I_1 = \{i_1^1, i_1^2, \ldots, i_1^{N_1}\}$$
$$I_2 = \{i_2^1, i_2^2, \ldots, i_2^{N_2}\}$$
etc.

uma possível *grelha grosseira* poderia ser constituída pelos *estados*, em cada *estágio*

$$I_1^{'} = \{i_1^1, i_1^5, i_1^9, \ldots, i_1^{N_1}\}$$
$$I_2^{'} = \{i_2^1, i_2^4, i_2^7, \ldots, i_2^{N_2}\}$$
etc.

Suponhamos que a *política óptima* para esta *grelha* é $\{i_1^{13}, i_2^{19}, \ldots\}$. Seria, então, necessário resolver novamente o problema com uma *grelha*

$$I_1 = \{i_1^9, i_1^{10}, i_1^{11}, i_1^{12}, i_1^{13}, i_1^{14}, i_1^{15}, i_1^{16}, i_1^{17}\}$$
$$I_2 = \{i_2^6, i_2^7, i_2^8, i_2^9, i_2^{10}, i_2^{11}, i_2^{12}, i_2^{13}\}$$
etc.

O número de *estados* envolvidos em cada uma destas fases é, desta forma, mais reduzido.

3.13.4.4 Método dos Multiplicadores de Lagrange

As *Condições* num problema de *Programação Dinâmica* traduzem-se em *estados.*

Um processo de reduzir o número de *estados* consiste em incluir as restrições na *Função de Contribuição* associadas a *Multiplicadores de Lagrange.*

Não sendo a *Função de Contribuição* diferenciável, o valor destes *Multiplicadores de Lagrange* tem que ser advinhado, não havendo mesmo garantia que eles existam para a *Solução Óptima.*

A nova formulação do problema é resolvida, e é efectuado um teste para verificar se a *solução óptima* foi obtida. Não sendo este o caso, novos valores são seleccionados para os *Multiplicadores de Lagrange*, e o algoritmo prossegue iterativamente.

3.13.4.5 Método da Vizinhança

3.13.4.5.1 O Algoritmo

O algoritmo do *Método da Vizinhança* tem a seguinte descrição:

(1) Faz-se $h = 0$. Escolhe-se uma *política inicial* K^0.
(2) Procura-se o *estado* i_n^h pelo qual passa a *política* K^h em cada *estágio* **n**.

(3) Define-se uma *vizinhança* Ω^h em cada *estágio* como o conjunto de *estados* que contêm i_n^h (por exemplo, *s estados* para cada lado de i_n^h). Esta *vizinhança* não tem que ser igual para todos os *estágios*, nem tem que ser *equidistante* (simétrica) em relação a i_n^h.

(4) Resolve-se o problema considerando apenas os *estados* contidos na *vizinhança* Ω^h, obtendo-se uma nova *política* K^{h+1}.

(5) Se $K^{h+1} = K^h$, o algoritmo terminou, caso contrário, $h = h + 1$ e volta--se ao passo (2) do algoritmo.

A **Figura-3.32** representa a definição de uma *vizinhança* para uma *política.*

O algoritmo é iterativo, resolvendo vários problemas de menor dimensão que o problema inicial. É importante que se utilize uma boa *política inicial.*

O volume de cálculo é afectado pelas *vizinhanças* definidas. Assim, para *vizinhanças* mais alargadas ter-se-á um menor número de problemas de maior dimensão para resolver (e vice-versa).

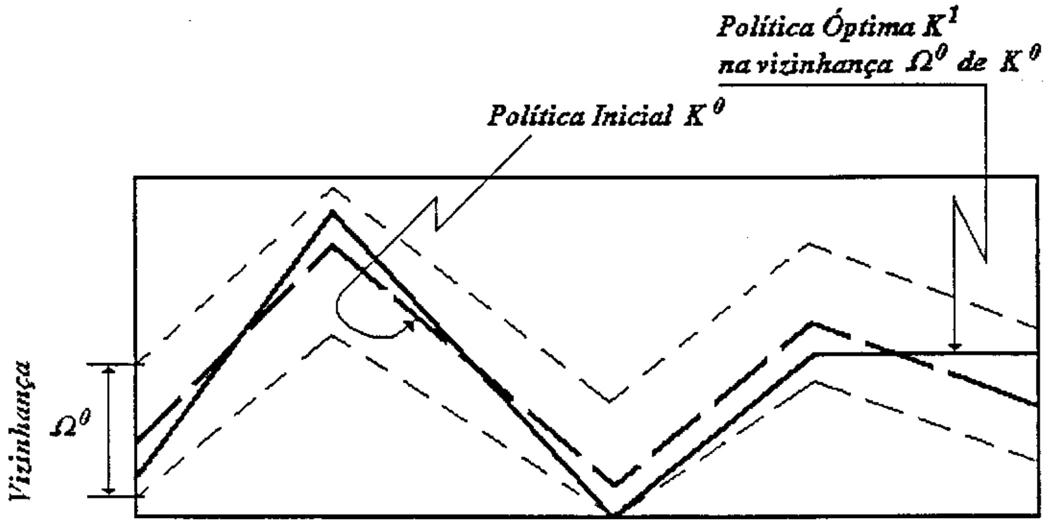


Figura-3.32

O método não garante a obtenção de um *Óptimo Global.* A **Figura-3.33** mostra a evolução da *Função de Valor* no *estágio n* em função do *estado* por onde passa a *política K* nesse *estágio.*

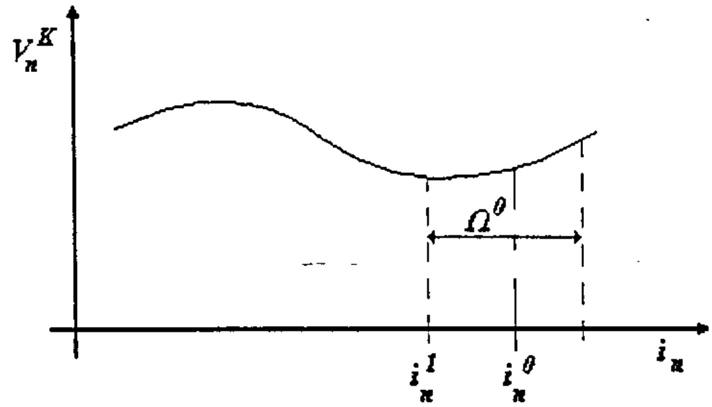


Figura-3.33

Pode-se provar que, se as *Contribuições de Estágio* $r_n(ij)$ forem *côncavas* (*convexas*) em todos os estados, o método produz o *Máximo* (*Mínimo*) *Global*.

A *política óptima* em cada iteração só não passa na *fronteira da vizinhança* definida na iteração anterior, para um *estágio*, se a *vizinhança* incluir o *estado* por onde deve passar a *política óptima* para o *problema global*. A **Figura-3.34** ilustra este aspecto. Desta forma, sempre que a nova *política* tocar a *fronteira* da anterior *vizinhança*, o algoritmo vai forçar a inclusão de *estados* adicionais para lá dessa *vizinhança*.

Este aspecto constitui a justificação para o *critério de paragem* definido para o algoritmo.

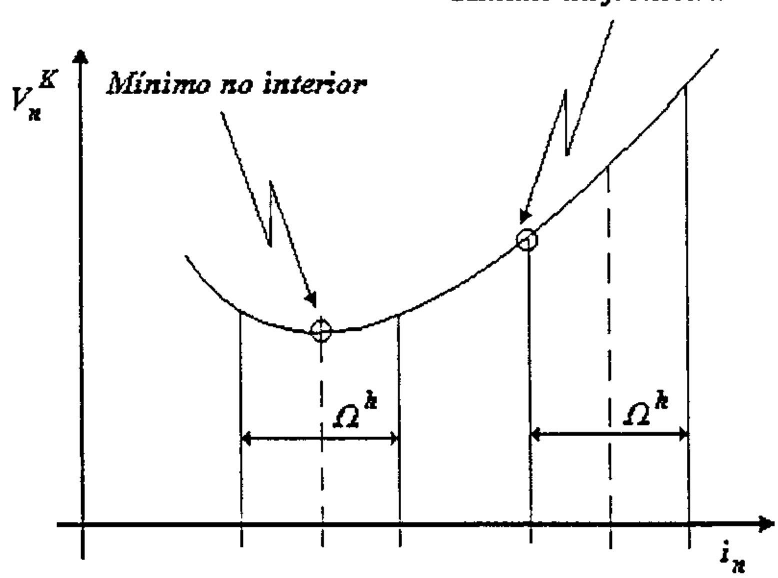


Figura-3.34

A **Figura-3.35** representa geometricamente a aplicação do método.

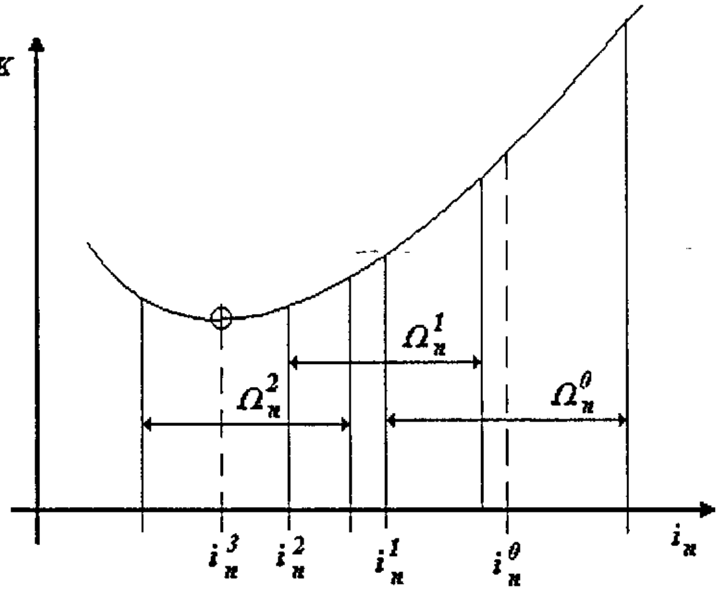


Figura-3.35

3.13.4.5.2 Exemplo de Aplicação do Método da Vizinhança

Considere-se um problema de *Programação Dinâmica* com *4 estágios*, com *Contribuições Aditivas* e com as *Funções de Contribuição de Estágio* definidas por

$$\underset{\sim}{R_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R_2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 19 & 17 & 16 & 15 & 17 & 20 \\ 14 & 10 & 10 & 10 & 11 & 15 \\ 13 & 10 & 8 & 6 & 8 & 14 \\ 14 & 10 & 9 & 8 & 9 & 14 \\ 17 & 14 & 12 & 11 & 13 & 16 \\ 20 & 18 & 16 & 14 & 18 & 23 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{R_3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 23 & 16 & 19 & 26 & 34 & 42 \\ 14 & 10 & 13 & 17 & 21 & 26 \\ 8 & 5 & 7 & 10 & 13 & 18 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 6 & 10 \\ 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 12 \\ 8 & 4 & 6 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R_4} = \begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 11 & 11 & 12 & 14 & 18 \end{bmatrix} \end{array}$$

Seja a *política inicial* K_0 e a *vizinhança inicial* Ω^0 definidos por

Estágio	4	3	2	1	0
$K^0 : i_n$	1	2	2	2	1
$\Omega^0 : \{i_n\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$

A solução do problema considerando apenas a *vizinhança* Ω^0 é representada na **Figura-3.36**.

As *Matrizes de Contribuição de Estágio* consideradas para a *vizinhança* são:

$$\underline{R}_1 = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 10 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{array} \qquad \underline{R}_2 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 19 & 17 & 16 \\ 2 & 14 & 10 & 10 \\ 3 & 13 & 10 & 8 \end{array}$$

$$\underline{R}_3 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 23 & 16 & 19 \\ 2 & 14 & 10 & 13 \\ 3 & 8 & 5 & 7 \end{array} \qquad \underline{R}_4 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 20 & 11 & 11 \end{array}$$

Estágio Nº	Contribuição de Estágio R_n	$R_n + bHF_{n-1}^T$	F_n
0	————	————	$1\ [0]$
1	$\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 10 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 10 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{c|c} 1 & 10 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{array}$
2	$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 19 & 17 & 16 \\ 2 & 14 & 10 & 10 \\ 3 & 13 & 10 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 29 & 25 & 23 \\ 2 & 24 & 18 & 17 \\ 3 & 23 & 18 & 15 \end{array}$	$\begin{array}{c|c} 1 & 23 \\ 2 & 17 \\ 3 & 15 \end{array}$
3	$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 23 & 16 & 19 \\ 2 & 14 & 10 & 13 \\ 3 & 8 & 5 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 46 & 33 & 34 \\ 2 & 37 & 27 & 28 \\ 3 & 31 & 22 & 22 \end{array}$	$\begin{array}{c|c} 1 & 33 \\ 2 & 27 \\ 3 & 22 \end{array}$
4	$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 20 & 11 & 11 \end{array}$	$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 53 & 38 & 33 \end{array}$	$1\ [33]$

Figura-3.36

A próxima iteração deve, então, considerar a *vizinhança* Ω^1 definida da seguinte forma

Estágio	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
$K^1:i_n$	1	2	2	2	1
$\Omega^1:\{i_n\}$	$\{1\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1\}$

Para essa iteração, as *Matrizes de Contribuição* seriam

$$\underset{\sim}{R_1} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R_2} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 8 & 6 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{R_3} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 13 & 17 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R_4} = \begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 11 & 11 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

O algoritmo progredia até que, em duas iterações consecutivas, se obtivesse a mesma *política óptima*.

3.14 Algoritmo de Recorrência para Diante

3.14.1 Introdução

Até agora, na solução dos problemas de *Programação Dinâmica* temos utilizado o que se designa por ***Algoritmo de Recorrência para Trás***. Essencialmente, este algoritmo evoluía do fim para o princípio da *rede*, determinando qual a melhor *política* possível a partir de qualquer *nodo* ***(n,i)*** até ao fim da *rede*.

Os *modelos determinísticos* de *Programação Dinâmica* também podem ser resolvidos utilizando um ***Algoritmo de Recorrência para Diante***. Este algoritmo evolui a partir do início da *rede*, determinando qual a melhor *política* que termina em qualquer *nodo* genérico ***(n,i)***.

Tradicionalmente o ***Algoritmo de Recorrência para Trás*** é mais utilizado, mas ambos os algoritmos se baseiam nos mesmos conceitos e *Condições de Validade*, produzindo os mesmos resultados.

A utilização do ***Algoritmo de Recorrência para Diante*** é importante quando se desconhece, à partida, qual o *horizonte de planeamento* a considerar.

No ***Algoritmo de Recorrência para Diante*** os *estágios* são numerados do início para o fim da *rede* como ***0,1,2,...,n***. O *estágio* ***n*** corresponde ao período de decisão ***n+1***. Esquematicamente, a filosofia do ***Algoritmo de Recorrência para Diante*** é ilustrada na **Figura-3.37**.

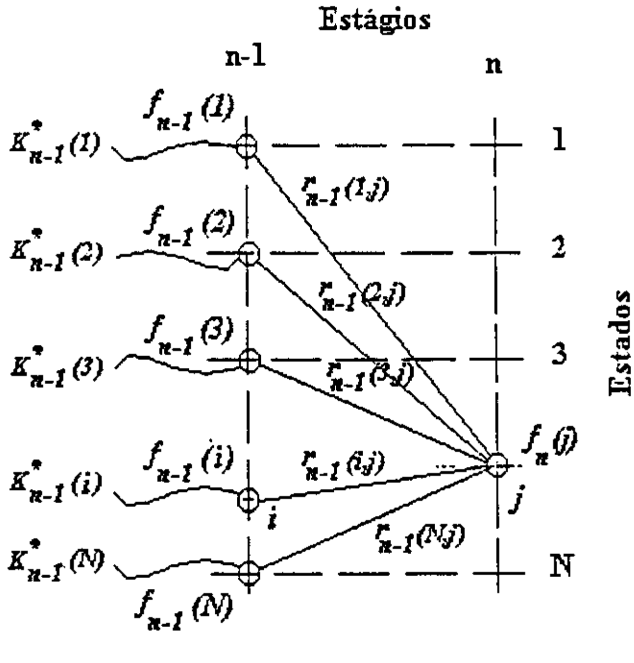


Figura-3.37

O *Algoritmo de Recorrência para Trás* traduz-se pelo esquema correspondente representado na **Figura-3.38**.

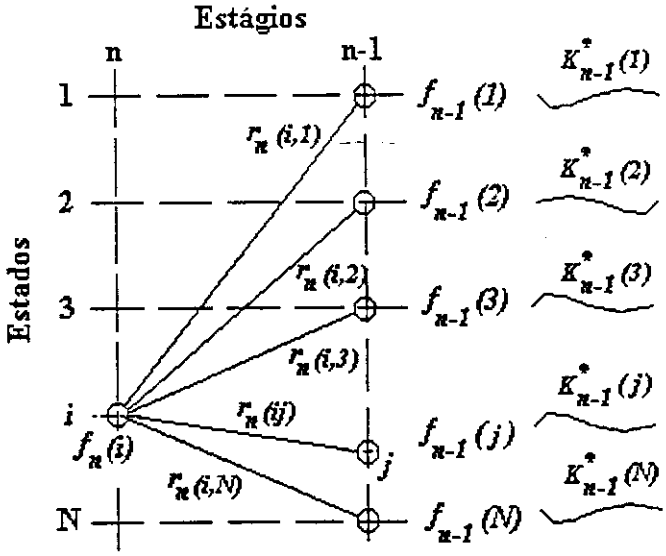


Figura-3.38

Em termos de cálculo, o procedimento algorítmico que utilizámos no *Algoritmo de Recorrência para Trás* corresponde à **Figura-3.39**.

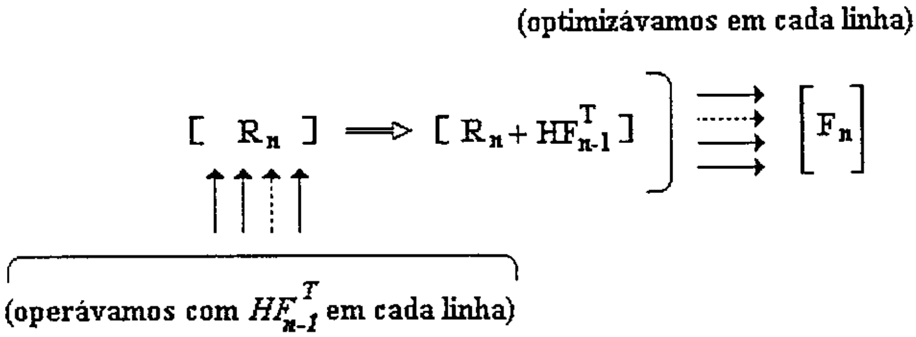


Figura-3.39

Para a o *Algoritmo de Recorrência para Diante*, o procedimento é representado na **Figura-3.40**.

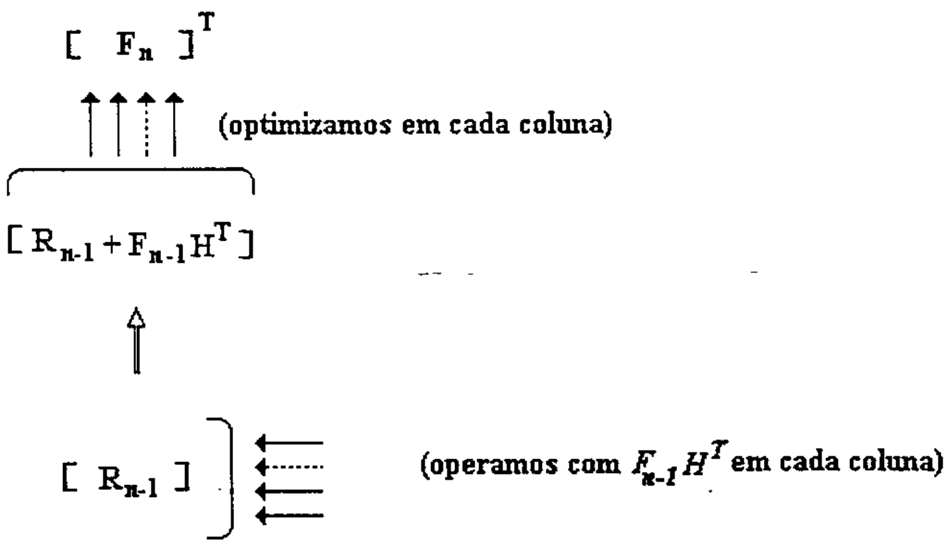


Figura-3.40

3.14.2 Definições para o Algoritmo de Recorrência para Diante

O estabelecimento da *Relação de Recorrência* para o *Algoritmo de Recorrência para Diante* requer a introdução de algumas definições equivalentes às estabelecidas para o *Algoritmo de Recorrência para Trás.*

Assim, se $\underset{\sim}{B} = [b(i,j)]$ for uma matriz de *M linhas* por *N colunas*, podemos definir a *matriz linha* $\underset{\sim}{A} = \min\left[\underset{\sim}{B}\right]$ como sendo a matriz de elemento genérico

$$a(j) = \min_i [b(i,j)];\ (j = 1,2,\ldots,N)$$

Do mesmo modo se pode definir $\max\left[\underset{\sim}{B}\right]$, com $\max_i[\ ]$ a substituir $\max_i[\ ]$ na definição anterior.

Desta forma, a *Relação de Recorrência* para um *problema de maximização* com *Contribuições Aditivas* pode ser expressa por

$$\underset{\sim}{F}_n^T = \max\left(\underset{\sim}{R}_{n-1} + \underset{\sim}{F}_{n-1}\, H^T\right)$$

3.14.3 Exemplo de Aplicação do Algoritmo de Recorrência para Diante

Vamos utilizar um exemplo para demonstrar a utilização da filosofia da *Recorrência para Diante*.

Enunciado-Exemplo

A procura de um produto em cada período de quatro meses de cada ano é dado por:

Janeiro a Abril	**2**
Maio a Agosto...............	**3**
Setembro a Dezembro...	**4**

O *Custo de Produção* de ***K*** unidades do produto é, em cada período, dado por:

$$\begin{array}{lcl} 8+2K & ; & K>0 \\ 0 & ; & K=0 \end{array}$$

Em qualquer período de ***4*** meses a ***produção máxima*** é de ***5*** unidades, *i.e.* $K \leq 5$.

O *inventário máximo* é igual a *3* unidades. O *Custo de Existência* de *inventário* é de *1 U.M.* por unidade por periodo, atribuído ao número de unidades em *inventário* no início de um período.

O *inventário inicial* é nulo. Todas a procura deve ser totalmente satisfeita no período tempo em que ocorre.

Determine as *políticas de custo mínimo* para sucessivos *horizontes de planeamento* de *1,2,...,5* períodos, admitindo que o *inventário final,* para o *horizonte de planeamento* considerado, deve ser nulo.

Resolução

Dado que o problema deve ser executado para sucessivos *horizontes de planeamento*, devemos adoptar o *Algoritmo de Recorrência para Diante.*

Começando por definir o modelo, temos:

Estágio-Instante de decisão de quatro em quatro meses. Assim, ***n*** designará o período de decisão ***n+1***.

Estado-Nível de *inventário* ***i*** no *estágio* ***n***.

Contribuição de Estágio-A *Contribuição de Estágio* $r_{n-1}(i,j)$ corresponde ao custo que se obtém quando o sistema transita do *nodo* ***(n-1,i)*** para o *nodo* ***(n,j)***.

$$R_{n-1} = \left[r_{n-1}(ij) \right]$$

Valor Óptimo-Corresponde ao *custo mínimo* que se consegue obter do início da *rede* que representa o problema até ao *nodo* ***(n,j)***, e representa-se por $f_n(j)$.

Relação de Recorrência-Sendo as contribuições *aditivas*, e a *recorrência para diante*, deve adoptar-se a *Relação de Recorrência*

$$F_n^T = \min\left[R_{n-1} + F_{n-1}H^T\right]$$

Para um *horizonte de planeamento* igual a *2* períodos de tempo (Janeiro a Abril e Maio a Agosto), temos uma procura igual a *2* unidades no primeiro período e *3* unidades no segundo período.

Face às restrições do problema, é fácil verificar que se tem

$$\underset{\sim}{R_1} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ 0 & \begin{bmatrix}12 & 14 & 16 & 18\end{bmatrix}\end{array} \qquad \underset{\sim}{R_2} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}14 & 16 & 18 & \times \\ 13 & 15 & 17 & 19 \\ 12 & 14 & 16 & 18 \\ 3 & 13 & 15 & 17\end{bmatrix}\end{array}$$

e a aplicação do algoritmo decorre como se descreve na **Figura-3.41**.

Estágio Nº	**Contribuição de Estágio** R_{n-1}	$R_{n-1} + F_{n-1}H^T$	F_n^T
0	———	———	$\begin{array}{c}0\\ \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\end{array}$
1 {Procura=2} Jan a Abr	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ 0 & \begin{bmatrix}12 & 14 & 16 & 18\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ 0 & \begin{bmatrix}12 & 14 & 16 & 18\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}12 & 14 & 16 & 18\end{bmatrix}\end{array}$
2 {Procura=3} Mai a Ago	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}14 & 16 & 18 & \times \\ 13 & 15 & 17 & 19 \\ 12 & 14 & 16 & 18 \\ 3 & 13 & 15 & 17\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}26 & 28 & 30 & \times \\ 27 & 29 & 31 & 33 \\ 28 & 30 & 32 & 34 \\ 21 & 31 & 33 & 35\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}\underline{21} & 28 & 30 & 33\end{bmatrix}\end{array}$

Figura-3.41

Assim, a *política óptima* para **2** períodos de tempo é:

Estágio	Procura	i	j	Interpretação
1	2	0	3	Produzir 5 unidades
2	3	3	0	Não Produzir

Também, para esta solução temos um ***Custo Mínimo por unidade*** igual a

$$\text{Custo / Unidade} = \frac{21}{5} = 4.2 \text{ U.M.}$$

A extensão do *horizonte de planeamento* produz as *políticas óptimas* e os *Custos por Unidade* indicados na tabela .

Horizonte de Planeamento (nº de períodos)	**Política Óptima** (Artigos produzidos no estágio)									**Custo por unidade**
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
1	2									**6.0**
2	5	0								**4.2**
3	5	0	3							**4.375**
4	5	0	5	0						**4.1**
5	5	0	5	0	3					**4.23**
6	5	0	5	0	3	3				**4.31**
7	5	0	5	0	3	5	0			**4.16**
8	5	0	5	0	3	5	0	3		**4.24**
9	5	0	5	0	3	5	0	3	3	**4.29**

Observe-se que a *política* determinada para um *horizonte de planeamento* coincide, inicialmente, com a *política* determinada para o *horizonte de planeamento* anterior. Isto significa que, desenvolvendo a solução com o *Algoritmo de Recorrência* para diante, a *política* a adoptar pode ir sendo actualizada à medida que o *horizonte de planeamento* for sendo mais bem definido.

3.15 Problemas com Redes Não-Progressivas

As *redes* que representam os *Problemas de Programação Dinâmica* que temos vindo a tratar não contemplam *transições* de *estados* num *estágio* para *estados* num *estágio* mais à esquerda no processo.

Problemas que não apresentem esta característica devem ser reformulados, antes de se poder aplicar a metodologia de *Programação Dinâmica*.

Este tipo de situação ocorre, por exemplo, em algumas situações na indústria química com compostos catalisadores de um processo que são regenerados pelo mesmo processo.

A título de exemplo, consideremos um processo com *Contribuições Aditivas* em que $r(i,i) = 0$, *i.e.* as *transições* de um *nodo* para o mesmo *nodo* têm *contribuição* nula.

Considere-se, também, que a *rede* que representa o processo é representada pela **Figura-3.41**.

Observe-se que o *custo* associado aos sentidos de uma mesma direcção podem ser diferentes.

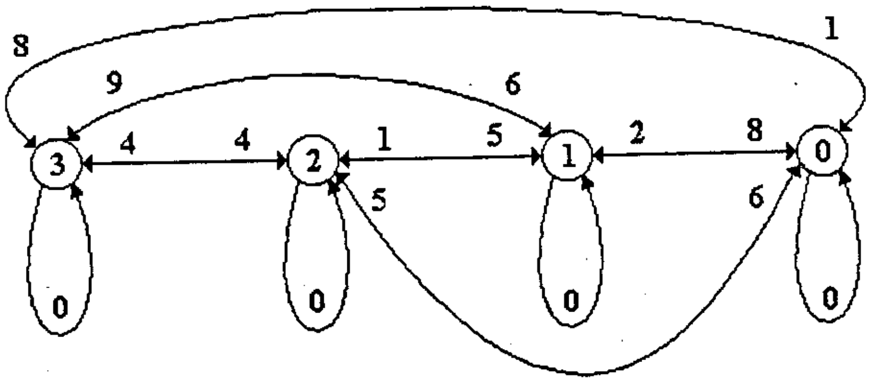


Figura-3.41

Qualquer *política* que inclua menos do que três *transições* pode ser tornada equivalente a uma *política* com três *transições* pela adição de um número adequado de *transições* de custo nulo, *i.e.* de um *nodo* para ele próprio.

Deste modo, o problema pode ser enunciado como equivalente a procurar a *política de custo mínimo* que permite partir de qualquer *nodo* ***i*** para o *nodo* ***0*** em três *fases*.

Temos, portanto, a definição:

Estágio-Um *estágio* corresponde a uma das *fases*, representando ***n*** o número de *fases* por executar.

Estado-Os *estados* ***i*** representam os nodos ***i*** do diagrama inicial.

Contribuição de Estágio-*Custo* $r_n(i,j)$ relativo ao *caminho* de um nodo ***i*** para um nodo ***j*** numa única *fase*.

$$\underset{-}{R}_n = \left[r_n(i,j) \right]$$

Valor Óptimo-Representa o *Custo Mínimo*, $f_n(i)$, para ir do nodo ***i*** ao nodo ***0*** em ***n*** *fases*.

Relação de Recorrência-Sendo as *Contribuições* aditivas, temos

$$\underset{-}{F}_n = \min\left[\underset{-}{R}_n + \underset{-}{H}\, \underset{-}{F}^T_{n-1} \right]$$

A *rede* do problema reformulado está representada na **Figura-3.42**. O objectivo consiste em determinar $F_3(j)$.

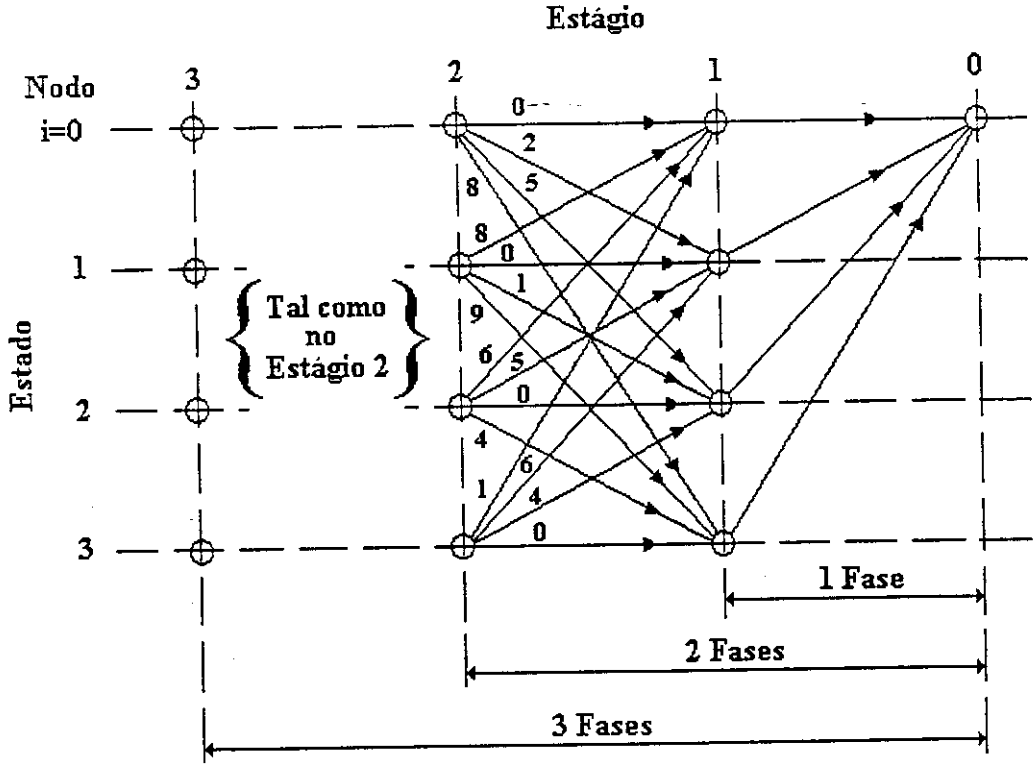


Figura-3.42

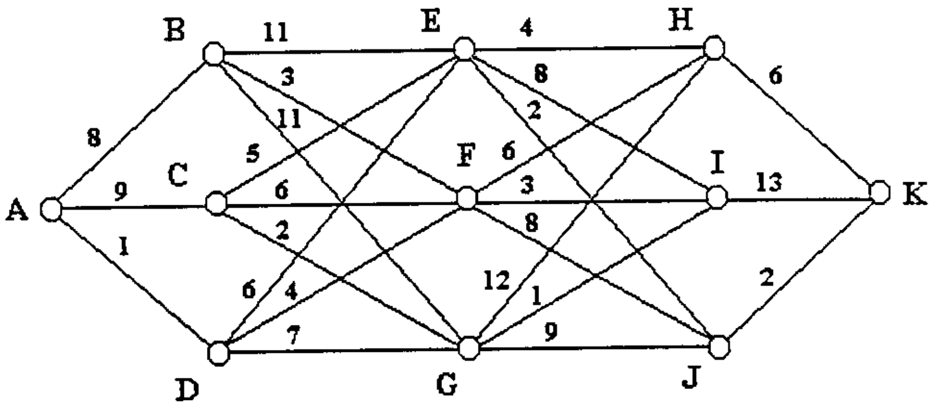
A solução do problema decorria, agora, da aplicação normal do *Algoritmo de Programação Dinâmica.*

3.16 Exercícios Propostos

Exercícios Propostos I

1-

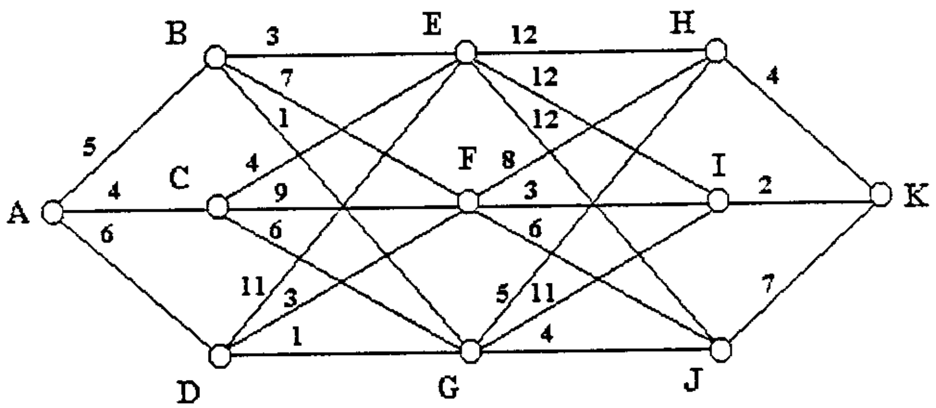
Com base numa formulação adequada de Programação Dinâmica, determine o caminho mais curto de *A* a *K* através da rede da figura.



2-

Um avião deve voar de *A* para *L* através das rotas indicadas na rede da figura.

Os valores numéricos inscritos nos arcos representam o consumo de combustível em cada troço de viagem.



Utilizando uma formulação de Programação Dinâmica,

a)Determine a rota que o avião deve seguir para minimizar o consumo total de combustível. Que quantidade total de combustível é necessária?

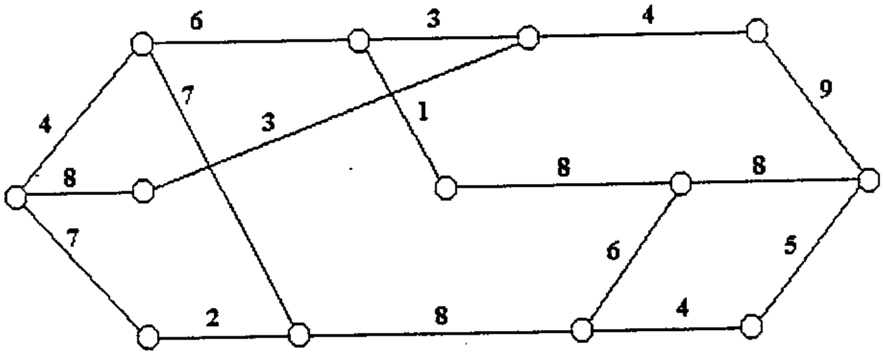
b)Considere que a capacidade de carga do avião é limitada pela quantidade de combustível de que é abastecido em cada viagem. Determine que rota permite maximizar a carga útil transportada de *A* para *L*. Qual é o consumo de combustível?

3-

A figura mostra uma rede de caminho crítico para um projecto de construção.

A duração do projecto é dada pelo caminho mais longo através da rede (caminho crítico).

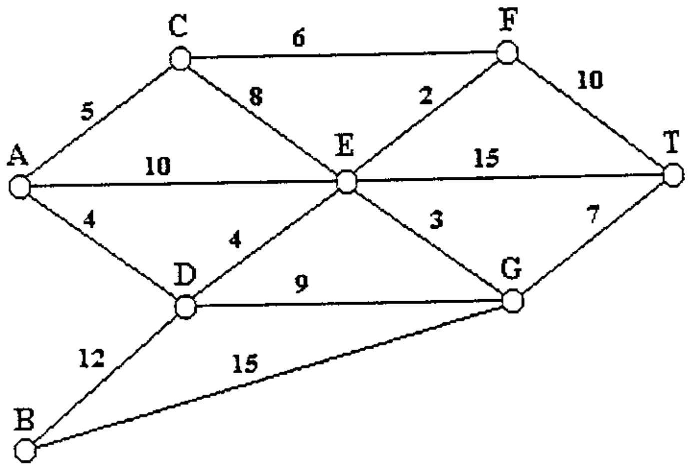
Determine a duração do projecto utilizando uma formulação de Programação Dinâmica.



4-

A água deve ser fornecida a uma cidade T a partir de dois reservatórios A e B.

As condutas necessárias ao abastecimento de água podem seguir os trajectos representados no mapa. Os valores numéricos inscritos representam os custos associados ao lançamento das condutas em cada troço.



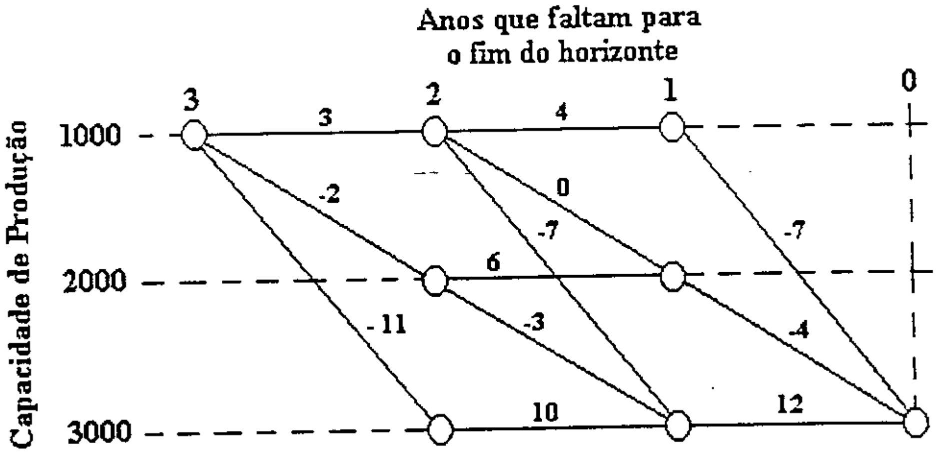
Que condutas devem ser lançadas, por forma a minimizar o custo total da instalação?

5-

Uma companhia possui uma fábrica com uma capacidade de produção de *1000* unidades por semana.

Durante os próximos três anos a capacidade deverá ser aumentada para *3000* unidades por semana. Este valor tanto pode ser obtido num único ano, como distribuindo a expansão por duas fases.

A expansão de capacidade pode ocorrer em qualquer dos três anos do horizonte de planeamento.



A rede representa as políticas possíveis e as contribuições associadas.

Exercícios Propostos II

1-

Uma companhia planeia uma expansão em três fases.

Durante o primeiro ano, podem ser encomendadas uma, duas ou três fases.

Pelo menos duas fases devem estar concluídas no fim do segundo ano.

As três fases devem estar concluídas num horizonte de três anos.

O trabalho de construção só pode ser encomendado no início de cada ano, e termina no fim desse ano, altura em que é pago, independentemente do número de fases envolvidas.

	Custo (Milhões de $)		
Nº de Fases iniciadas	Ano 1	Ano 2	Ano 3
1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$
2	4	5	—
3	6	—	—

Determine a política de construção de custo mínimo, atendendo a que os custos envolvidos são os indicados na tabela, e que os custos futuros devem ser descontados com ***b=0.75***.

2-

Uma companhia possui um armazém que no início de cada ano pode estar cheio ou vazio.

Se o armazém estiver cheio no início do ano, a companhia vende os produtos armazenados, mas pode ou não decidir reaprovisionar o armazém com novo inventário.

Se o armazém estiver vazio no início do ano, a companhia pode mantê-lo vazio ou adquirir novo inventário, por forma a ter o armazém cheio no final do ano.

A previsão dos custos de compra e preços de venda para os próximos cinco anos é dada pela tabela.

	Ano				
	1	2	3	4	5
Preço de Compra	10	13	18	14	11
Preço de Venda	11	13	15	15	11

Determine o plano óptimo de compras e vendas para a companhia nos próximos cinco anos, atendendo a que o armazém está cheio no início do período de planeamento e que deverá estar cheio no fim deste período.

3-

Uma barcaça pode transportar até quatro contentores.

Cada contentor pode ser carregado com um de três tipos de carga, ***A***, ***B*** ou *C*.

As contribuições que se obtêm quando se transportam ***K*** cargas de contentores com determinado tipo de carga são indicadas na tabela.

Como devem ser carregados os contentores por forma a maximizar a contribuição total?

Tabela de Contribuições

	Carga		
K	A	B	C
0	0	0	0
1	5	6	4
2	10	9	7
3	—	—	12

4-

Uma companhia ganhou um concurso de cinco anos para a exploração de uma mina de carvão.

No início do contrato a companhia compra uma escavadora. No princípio de cada ano subsequente a companhia pode decidir manter a escavadora ou substituí-la por uma nova.

A depreciação anual e os custos de reparação das máquinas para diferentes idades são as indicadas na tabela.

	Idade da máquina no início do ano				
	0	1	2	3	4
Custo durante o ano	31	25	28	32	35

Que política de substituições deve ser adoptada pela companhia por forma a minimizar os custos totais para o período de duração do contrato:

a)Se os custos não forem descontados?

b)Se os custos forem descontados com $b=0.8$?

Exercícios Propostos III

1-

Um satélite de comunicações é constituído por quatro subsistemas electrónicos ligados em série.

A probabilidade de o satélite continuar a funcionar adequadamente pelo menos 10 anos pode ser aumentada ligando um ou dois subsistemas redundantes em paralelo com os subsistemas básicos. Assim, quando um subsistema básico falha, o correspondente subsistema redundante é introduzido substituindo a unidade em falha.

A confiança, para o período de 10 anos, para cada subsistema, para cada nível de redundância, e o custo correspondente por unidade são indicados na tabela.

		Subsistema nº			
Confiança para um horizonte de 10 anos quando o nº de redundâncias é:		1	2	3	4
	0	0.4	0.3	0.6	0.5
	1	0.7	0.5	0.7	0.7
	2	0.9	0.6	0.8	0.8
Custo por unidade		6	6	3	2

Se o custo total dos componentes do satélite não puderem exceder as *35 UM*, e as probabilidades de falha dos subsistemas puderem ser consideradas independentes, que redundâncias devem ser incluídas para maximizar a confiança no satélite?

2-

Uma companhia fabrica três artigos, *A*, *B* e *C*. Estes artigos requerem para o seu fabrico as matérias primas *X* e *Y* nas quantidades indicadas na tabela.

Quantidade de matéria prima / unidade de produto *(tons)*

		Produto		
		A	B	C
Matéria	X	3	4	1
Prima	Y	2	4	2

A contribuição obtida da produção de K de cada tipo de produto é indicada na tabela.

Tabela de Contribuições *(UM)*

		Produto		
		A	B	C
Contribuição	0	0	0	0
obtida para	1	2	$2\frac{1}{2}$	2
K unidades	2	2	6	4
	3	×	×	$5\frac{3}{2}$

Considerando que os únicos valores válidos de K são os que constam da tabela anterior e sabendo que se dispõe de *8* toneladas de cada matéria prima, quantas unidades de cada produto devem ser fabricadas por forma a maximizar a contribuição total.

3-

A procura de um artigo é de ***4*** unidades por período.

O custo de fabrico de x unidades do artigo é dada por $10+3x$ quando $x>0$ e é 0 quando $x=0$.

Sendo S_1 o inventário no início de um período e S_2 o inventário no fim do período, o custo de existência de inventário é dado por $\max(S_1, S_2)$.

A produção máxima é de *7* artigos por período, e o nível máximo de inventário é de ***5*** unidades.

As unidades produzidas num período de tempo e vendidas no mesmo período de tempo não chegam a entrar em inventário.

Toda a procura deve ser satisfeita no período em que ocorre.

O inventário inicial e o inventário final são nulos.

Determine que política de fabrico deve ser seguida por forma a minimizar os custos totais envolvidos para os horizontes de planeamento de *1*, *2*,...,*6* períodos de tempo, e calcule o custo associado a cada período de tempo para cada um destes horizontes de planeamento.

4-

Uma aciaria produz quatro qualidades de vigas de aço, numeradas *1*, *2*, *3* e *4*, de determinada dimensão. A qualidade está associada à resistência das vigas.

O custo de produção de x lotes de qualidade g é $(x+\frac{1}{2})g$.

A aciaria pode fornecer a um cliente uma viga de melhor qualidade que a encomendada sem aumento de preço.

Sendo a procura de cada qualidade igual a *1* lote, determine que qualidades devem ser produzidas para minimizar o custo total de produção.

5-

Uma companhia possui dois depósitos, ***A*** e ***B***, com, respectivamente, *5* e *4* lotes de artigos disponíveis.

Cada um dos três clientes, x, y e z, necessita de *3* lotes de artigos.

Os custos de transporte para um lote de qualquer artigo entre os depósitos e os clientes é indicado na tabela.

	x	y	z
A	3	5	4
B	2	3	3

O custo associado ao transporte de *2* ou *3* lotes em qualquer trajecto é, respectivamente, $1\frac{1}{2}$ e *3* vezes o custo de transporte de um único lote.

Que política de transporte deve ser seleccionada pela companhia por forma a minimizar o custo total de transporte.

Exercícios de Avaliação

(Exame de Setembro de 1989)
[Programação Dinâmica Determinística]

Um retalhista vende os produtos ***A, B*** e ***C***.

A procura de cada um destes artigos é de ***20*** unidades por mês.

A percentagem da procura satisfeita, para cada um dos artigos, é função do nível máximo de inventário ***S***, mantido para esse artigo, de acordo com a tabela.

Nível máximo de inventário	Percentagem de procura satisfeita
0	0
1	30
2	60
3	85
4	95

Não é económico manter mais do que ***4*** unidades em inventário.

O retalhista dispõe de um armazém com uma capacidade de $7\ m^3$, e o volume necessário à armazenagem de ***S*** unidades de um artigo é indicada na tabela.

	Volume (m^3)		
Nível máximo	A	B	C
0	0	0	0
1	1	3	2
2	2	3	2
3	3	3	2
4	4	3	4

Que valores de ***S*** devem ser adoptados para maximizar o nível de satisfação da procura ?