Diseño de Bloques Completamente al Azar (DBCA) con arreglo factorial

Luis Fernando Delgado Muñoz - Ing. Agroindustrial, M.Sc

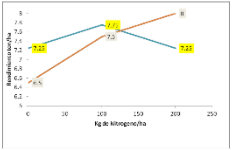
lfdelgadom@unal.edu.co

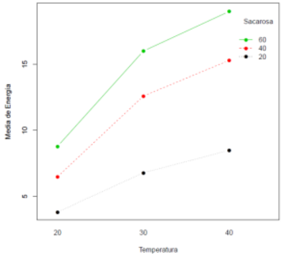
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Administración
Departamento de Ingenieria

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Diseño de Bloques Completamente al Azar (DBCA) con arreglo factorial

Se llaman así aquellos experimentos en los cuales se estudian en forma simultánea dos o más factores, esto permite obtener información sobre la respuesta de la planta a cada uno de los factores, y al conjunto de ellos.





Estos experimentos son muy útiles en la investigación biológica, porque, en la práctica los cultivos y los animales se ven afectados por varios factores que influyen simultáneamente sobre ellos y que de acuerdo a la forma como se presentan afectan en forma diferente al organismo animal o vegetal, es decir, los cambios en un factor pueden influir sobre los efectos del otro factor.

El modelo

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + (\tau\alpha)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$i = 1, 2, \cdots, a \quad j = 1, 2, \cdots, b \quad k = 1, 2, \cdots, r$$

Y_{ijk} Es la observación de la variable de respuesta debida al $i-esimo$ nivel del factor A y el $j-esimo$ nivel del factor B en la $k-esima$ réplica.

μ Es la *media global*.

τ_i Es el efecto del $i-esimo$ nivel del factor A **sobre** la variable de respuesta.

α_j Es el efecto del $j-esimo$ nivel del factor B **sobre** la variable de respuesta.

$(\tau\alpha)_{ij}$ Es el efecto de la interacción entre el $i-esimo$ nivel del factor A con el $j-esimo$ nivel del factor B **sobre** la variable de respuesta.

ε_{ijk} Es el error aleatorio debido al $i-esimo$ nivel del factor A y el $j-esimo$ nivel del factor B en la $k-esima$

Hipótesis

1. Hipótesis de Interacción

$$H_o : (\tau\alpha)_{ij} = 0 \qquad \forall ij$$
$$H_a : \text{Al menos una } (\tau\alpha)_{ij} \neq 0.$$

2. Hipótesis de efectos principales

$$H_o : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$
$$H_a : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i = 1, 2, \cdots, a.$$

$$H_o : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_b = 0$$
$$H_a : \alpha_j \neq 0 \text{ para algún } j = 1, 2, \cdots, b.$$

Análisis de Varianza

En este caso,

$$SC_T = SC_\tau + SC_\alpha + SC_{\tau\alpha} + SC_\varepsilon$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Variabilidad} & = & \text{Variabilidad} & + & \text{Variabilidad} & + & \text{Variabilidad} & + & \text{Variabilidad} \\ \text{Total} & & \text{del factor A} & & \text{del factor B} & & \text{de la Interacción} & & \text{del error aleatorio} \end{array}$$

Análisis de Varianza

Fuente de Variabilidad	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F_c	Valor p
Factor A	$a-1$	$br\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2$	$CM_\tau = \frac{SC_\tau}{a-1}$	$\frac{CM_\tau}{CM_\varepsilon}$	$\Pr(F > F_c)$
Factor B	$b-1$	$ar\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2$	$CM_\alpha = \frac{SC_\alpha}{b-1}$	$\frac{CM_\alpha}{CM_\varepsilon}$	$\Pr(F > F_c)$
Interacción	$(a-1)(b-1)$	$r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.j.}+\bar{Y}_{...})^2$	$CM_{\tau\alpha} = \frac{SC_{\tau\alpha}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{CM_{\tau\alpha}}{CM_\varepsilon}$	$\Pr(F > F_c)$
Error	$ab(r-1)$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.})^2$	$CM_\varepsilon = \frac{SC_\varepsilon}{ab(r-1)}$		
Total	$abr-1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(Y_{ijk}-\bar{Y}_{...})^2$			

Diseños factoriales: 3 factores

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \gamma_k + (\tau\alpha)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\alpha\gamma)_{jk} + (\tau\alpha\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

Hipótesis para el ANOVA

$$H_o : (\tau\alpha\gamma)_{ijk} = 0 \quad \forall ijk$$
$$H_a : \text{Al menos una } (\tau\alpha\gamma)_{ijk} \neq 0.$$

Grados de libertad

$$\begin{aligned}
\tau &= a-1 \\
\alpha &= b-1 \\
\gamma &= c-1 \\
\tau\alpha &= (a-1)(b-1) \\
\tau\gamma &= (a-1)(c-1) \\
\alpha\gamma &= (b-1)(c-1) \\
\tau\alpha\gamma &= (a-1)(b-1)(c-1) \\
\varepsilon &= abc(r-1)
\end{aligned}$$

Suma de cuadrados (efectos principales)

$a-1$

$$bcr\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i...}-\bar{Y}_{....})^2$$

$b-1$

$$acr\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{.j..}-\bar{Y}_{....})^2$$

$c-1$

$$abr\sum^{c}(\bar{Y}_{..k.}-\bar{Y}_{....})^2$$

Suma de Cuadrados (interacciones de primer nivel)

$$(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1$$

$$cr\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{ij..} - \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{.j..} + \bar{Y}_{....})^2$$

$$(a-1)(c-1) = ac - a - c + 1$$

$$br\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{..k.} + \bar{Y}_{....})^2$$

$$(b-1)(c-1) = bc - b - c + 1$$

$$ar\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\bar{Y}_{.jk.} - \bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{..k.} + \bar{Y}_{....})^2$$

Suma de Cuadrados (interacciones de segundo nivel)

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1$$

$$r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\bar{Y}_{ijk\cdot} - \bar{Y}_{ij\cdot\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot k\cdot} - \bar{Y}_{\cdot jk\cdot} + \bar{Y}_{i\cdots} + \bar{Y}_{\cdot j\cdot\cdot} + \bar{Y}_{\cdot\cdot k\cdot} - \bar{Y}_{\cdots\cdot})^2$$

$$\text{Error} = abc(r-1) = abcr - abc$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}(\bar{Y}_{ijkl} - \bar{Y}_{ijk\cdot})^2$$

Ejemplo : experimento factorial, conducido bajo un diseño de bloques al azar:

Se presentan los datos de Rendimiento de arroz en ton/ha, de dos variedades; una de porte alto y la otra de porte bajo, expuestas a tres niveles de fertilización con nitrógeno (0, 100. 200 kg/ha).

Rendimiento en Ton/ha de dos variedades de arroz, bajo tres niveles de Nitrogeno.

Tratamientos	Descripcion		BLOQUE					
			1	2	3	4	$Y_{i.*}$	$\overline{Y}_{i\bullet}$
1	VAR ALTA	N 0	7.5	6	7	8.5	29	7.25
2		N 100	8.5	6.8	7.3	8.4	31	7.75
3		N 200	7.6	5.9	7.3	8.2	29	7.25
							89	
4	VAR BAJA	N 0	7	5.5	6	7.5	26	6.5
5		N 100	7.9	6.1	7.5	8.5	30	7.5
6		N 200	8.5	6.3	7.9	9.3	32	8
							88	
Total bloque $Y_{\bullet j}$			47	36.6	43	50.4	177	
Promedio $\overline{Y}_{\bullet j}$			7.83	6.1	7.16	8.4		

Se tienen 6 tratamientos, los cuales surgen de todas las combinaciones posibles de Variedad x Nitrógeno. Este experimento es una factorial Variedad x Nitrógeno 2 x 3, es decir, 2 modalidades en el factor variedad y 3 niveles en el factor Nitrógeno.

$$FC = \frac{(Y..)^2}{r \text{ x t}} \qquad FC = \frac{(177)^2}{4x6} \qquad \boxed{FC = 1305.375}$$

$$SCTotal(c) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} Y_{ij}^2 - FC$$

$$SCT(c) = (7.5^2 + 6^2 + 7^2 .... 6.3^2 + 7.9^2 + 9.3^2) - 1305.375$$

$$SCT(c) = 24.025$$

$$SCB = \frac{\sum Y_{\bullet J}^2}{t} - FC$$

$$SCB = \frac{47^2 + 36.6^2 + 43^2 + 50.4^2}{6} - 1305.375$$

$$SCB = 17.578$$

$$\boxed{\begin{aligned} SCTR &= \frac{\sum Y_{i\bullet}^2}{b} - FC \\ SCTR &= \frac{29^2+31^2+29^2+26^2+30^2+32^2}{4} - 1305.375 \\ SCTR &= 5.375 \end{aligned}}$$

$$SCEE = SCT(c) - SCTR - SCB$$

$$SCEE = 24.025 - 5.375 - 17.578$$

$$SCEE = 1.072$$

Para descomponer la suma de cuadrados

de los tratamientos se procede así:

SCTR = SCV + SCN + SCV*N

	VARIEDAD DE PORTE		
	ALTA	BAJA	
NITROGENO			
0	**29**	**26**	**55**
100	**31**	**30**	**61**
200	**29**	**32**	**61**
	89	**88**	177

$$SCV = \frac{\sum_{Vi=1}^{2} V^2}{b * N} - FC$$

$$SCV = \frac{89^2 + 88^2}{(4)(3)} - 1305.375$$

$$SCV = 0.042$$

$$SCN = \frac{\sum_{Ni=1}^{3} N^2}{b * V} - FC$$

$$SCN = \frac{55^2 + 61^2 + 61^2}{(4)(2)} - 1305.375$$

$$SCN = 3$$

$$SC\ V{*}N = SCTR - SCV - SCN$$

$$SC\ V{*}N = 5.375 - 0.0416 - 3$$

$$SC\ V{*}N = 2.333$$

Análisis de varianza para la variable rendimiento de arroz en Ton/ha.

F d V	GL	SC	CM	Fc	Ft
Bloques	3	17.578	5.86	82.53*	3.29
Tratamientos	5	5.375	1.075	15.14*	2.9
Variedad	1	0.0416	0.0416	0.586 NS	4.54
Nitrogeno	2	3	1.5	21.12*	3.68
Variedad x Nitrogeno	2	2.37	1.18	16.69*	3.68
Error	15	1.072	0.071		
Total (c)	23	24.025			

Ejercicio

Una empresa encargada en la comercialización de productos apícolas, esta interesada en determinar el efecto de la temperatura ambiente y la viscosidad del liquido sobre la energía consumida por las abejas al beber.

Los niveles de temperatura (T) fueron 20, 30 y 40 ºC. La viscosidad del líquido se controló por la concentración de sacarosa (S) que eran 20, 40 y 60% del total de solidos disueltos en el liquido que beben las abejas.

Los investigadores registraron la energía gastada por las abejas en joules/segundo.

Datos

Temperatura ($^\circ C$)	Sacarosa (%)		
	20	40	60
20	3.1	5.5	7.9
	3.7	6.7	9.2
	4.7	7.3	9.3
30	6.0	11.5	17.5
	6.9	12.9	15.8
	7.5	13.4	14.7
40	7.7	15.7	19.1
	8.3	14.3	18.0
	9.5	15.9	19.9

MUCHAS GRACIAS