Problema de Seleção de Portfólio com Restrições de Diversificação, Custos Operacionais e Múltiplos Investidores

Introdução

A seleção de portfólio é um problema clássico em finanças, que visa construir uma combinação de ativos para maximizar o retorno esperado enquanto controla o risco. Neste problema, expandimos a abordagem para incluir múltiplos investidores, cada um com suas próprias restrições de volatilidade máxima e diversificação mínima. O eu lírico do problema é o gestor responsável pela alocação de recursos em nome de vários investidores, otimizando carteiras personalizadas para cada perfil de risco.

Descrição do Problema

O objetivo principal é construir carteiras personalizadas para m investidores, maximizando o retorno esperado para cada um, enquanto respeitamos as restrições de volatilidade máxima, diversificação mínima (número mínimo de ativos) e outras limitações operacionais.

Modelagem Matemática

Decisões

- $w_{i,k}$: Proporção do capital investido no ativo i pelo investidor k (variável contínua).
- $x_{i,k}$: Variável binária que indica se o ativo i é incluído na carteira do investidor k ($x_{i,k} = 1$) ou não ($x_{i,k} = 0$).

Objetivo

Maximizar o retorno esperado ajustado para custos fixos de transação para cada investidor k:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_{i,k} - \sum_{i=1}^{n} C_i x_{i,k}, \quad \forall k$$

Onde:

- μ_i: Retorno esperado do ativo i.

- C_i: Custo fixo associado à transação do ativo i.

O objetivo global é maximizar o retorno total esperado de todas as carteiras:

$$\text{Maximizar: } Z = \sum_{k=1}^{m} Z_k$$

Restrições

1. **Orçamento Total por Investidor:** O total investido pelos investidores deve ser igual ao capital disponível:
$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,k} = 1, \quad \forall k$$

2. **Número Mínimo de Investimentos:** Cada investidor deve incluir no mínimo 4 ativos diferentes:
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} \geq 4, \quad \forall k$$

3. **Número Máximo de Ativos por Investidor:** O número total de ativos selecionados por investidor deve ser menor ou igual a um limite pré-definido:
$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} \leq N_{\text{máximo}}, \quad \forall k$$

4. **Limites de Alocação por Ativo:** A proporção investida em um ativo i não pode exceder seu limite de liquidez L_i:
$$w_{i,k} \leq L_i \cdot x_{i,k}, \quad \forall i, \forall k$$

5. **Custos de Transação:** O custo total de transação deve ser menor ou igual a um limite pré-definido $B_{\text{máximo}}$:
$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_{i,k} \leq B_{\text{máximo}}, \quad \forall k$$

6. **Alocação Mínima por Ativo Selecionado:** Se um ativo for selecionado ($x_{i,k} = 1$), ele deve receber no mínimo uma proporção de $W_{\text{mín}}$:
$$w_{i,k} \geq W_{\text{mín}} \cdot x_{i,k}, \quad \forall i, \forall k$$

7. **Volatilidade Máxima por Investidor:** A volatilidade é aproximada linearmente como a soma ponderada dos desvios padrão (σ_i) de cada ativo:
$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i w_{i,k} \leq \sigma_{k,\text{máx}}, \quad \forall k$$

   Onde:

   - σ_i: Desvio padrão (volatilidade individual) do ativo i.
   - $\sigma_{k,\text{máx}}$: Limite máximo de volatilidade para o investidor k.

Algoritmos Utilizáveis

1. Solvers de Programação Linear Inteira Mista (PLIM)

- **Gurobi:** Reconhecido pela alta eficiência em problemas de otimização.
- **CPLEX:** Amplamente utilizado em indústrias e pesquisas.
- **CBC (Coin-or):** Open-source, adequado para problemas pequenos e médios.

2. Métodos de Divisão e Conquista

- **Branch-and-Bound:** Estratégia exata para explorar o espaço de soluções e encontrar o ótimo.
- **Branch-and-Cut:** Variante do Branch-and-Bound que utiliza cortes lineares para reduzir o espaço de busca.

3. Metaheurísticas (em casos mais complexos)

Embora o problema seja linear, métodos aproximados podem ser usados para acelerar a solução em instâncias muito grandes:

- **Algoritmo Genético:** Explora combinações de soluções baseadas em princípios evolutivos.
- **Simulated Annealing:** Busca soluções próximas ao ótimo ao longo de iterações.

Desafios e Aplicações

Este modelo reflete desafios reais enfrentados por gestores de portfólios, como:

- Necessidade de personalização para perfis de risco variados.
- Limitações operacionais relacionadas a liquidez e custos.
- Impacto de critérios de sustentabilidade ou setoriais.

A complexidade do problema o torna adequado para estudos avançados em otimização, finanças quantitativas e ciência de dados aplicada. Ele pode ser adaptado para diferentes cenários, incluindo otimização estocástica (sob incerteza) ou alocação de capital em múltiplos períodos.