Estimación de la Probabilidad de Ruina de una Compañía Aseguradora

Mariana Rizo[1], Iván Álvarez[1], Luis Felipe Villaseñor[1], Rodrigo Nishizawa[1]

***Resumen*—En este trabajo se re-visita la tesis de maestría de la Doctora Brenda Ivette García Maya, en donde se plantean diferentes métodos para el análisis de riesgo financiero basados en el modelo de Cramer-Lundberg. El modelo para el cálculo de la probabilidad exacta y las aproximaciones por el método Montecarlo y su variante para la reducción de varianza fueron usados para hacer un análisis de riesgo financiero de una aseguradora de automóviles anónima. Al complementar los datos de los reclamos a la aseguradora en el 2020 con estadísticos de otras bases de datos, se logra estimar los diferentes parámetros del modelo para así calcular la probabilidad de que la aseguradora se vaya a la ruina. Por otra parte, los resultados dejan ver que el método de reducción de varianza efectivamente reduce la longitud del intervalo de confianza para valores de probabilidad de ruina cercanos a cero. Con base en los parámetros estimados, se determina que la aseguradora debe cobrar en promedio más de $4,194.99 al año por cliente para no tener una ruina asegurada. De manera que, si aumenta la prima anual promedio por cliente a $5,500 y se tiene un capital de $1,000,000, la probabilidad de ruina se reduce a 0.03 %.**

I. Introducción

El análisis del riesgo financiero es la evaluación de la probabilidad de que se concrete una amenaza y de su posible impacto. Por eso es crucial su estimación en la gestión de riesgos. La estimación más fácil para realizar el análisis del riesgo financiero en una empresa es combinar la probabilidad de que un riesgo ocurra y las posibles pérdidas económicas que se puedan ocasionar.

En esta ocasión, se calculará la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora de autos, en donde las pérdidas económicas son los montos de reclamación a la compañía en caso de un siniestro los cuáles no deben superar el capital inicial y las primas cobradas para no caer en la ruina.

Las decisiones que la empresa puede tomar son el capital inicial, u, y la prima, c, que pagarán los asegurados. El número total de reclamos es un proceso estocástico $N(t)$, donde cada vez que ocurre un evento se debe de pagar una cantidad X la cual tiene una función de distribución F. Esto se conoce como un proceso de renovación con recompensa. Se trabajó en este proyecto en el desarrollo de una simulación de riesgo para una compañía de seguros, con el objetivo de determinar el efecto de los reclamos de los asegurados, la prima, y el capital inicial de la compañía.

Primeramente se tiene que hablar acerca de qué es una compañía de seguros y cómo funciona. Los factores que influyen en el precio de un seguro de auto son los siguientes:

- Modelo de vehículo: la factibilidad de reparación, entre menor complejidad para la reparación y mayor oferta de las piezas, el costo disminuirá. Si el modelo cuenta con un alto índice de robo el costo aumentará. Factores como la antigüedad pueden afectar el costo, ya que entre más tiempo haya estado fuera del mercado la oferta de las piezas tiende a disminuir y por ende el costo del seguro aumentará.
- Uso del vehículo: dado que los vehículos pueden ser de uso privado o de público, como taxi u otros servicios, el costo del seguro es distinto. Ya que el desgaste es mayor y existe mayor posibilidad de un siniestro, el costo para vehículos públicos tiende a ser mayor.
- Perfil del conductor: algunos factores que aumentan el costo del seguro son el rango de edad (entre 18 y 30 años), un historial de manejo con faltas, y una alta tasa de criminalidad en la zona de residencia. De igual manera, el estado civil y el sexo del conductor también pueden tener repercusiones en el costo del seguro.
- Tipo de coberturas: el último factor para determinar el precio de un seguro de auto es el tipo de coberturas deseadas.

(1)

I-A. *Descripción de la problemática*

Definiremos a una compañía de seguros con capital inicial u, como una entidad que se compromete con otra entidad, llamada asegurado, a pagar una cantidad X si sucede un evento E con un costo asociado X. Esto por un contrato que ata al asegurado a cumplir con una cuota fija c^* llamada prima, por unidad de tiempo Δt.

A una compañía de seguros le corresponden múltiples asegurados, por lo que existe un proceso de conteo $N(t)$ que representa el número de eventos E que han sucedido hasta el tiempo t. Asumiendo una distribución exponencial en los tiempos interarribo de cada suceso, entonces $N(t)$ es un proceso de Poisson con media λt donde λ es el esperado de veces que ocurra E en un periodo Δt. Dejemos ahora que el costo X sea una variable aleatoria de distribución f_X, entonces el capital $U(t)$ de la aseguradora en el tiempo t está dado por un proceso de Poisson compuesto (2).

Nos centraremos entonces en buscar la probabilidad de que una compañía llegue al punto de ruina $U(t) < 0$ para algún tiempo t. Una condición a considerar para que la probabilidad de ruina sea distinta de 1 es la condición de ganancia neta, la cual establece que para tener $E[U(t)] > 0$ para todo $t \geq 0$, se debe cumplir que $c > \lambda E[X]$. Sea $E[X] = \mu$ la esperanza de los montos de reclamación, entonces:

*This work was not supported by any organization

[1]Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Campus Guadalajara, Ave. General Ramón Corona 2514, 45138 Zapopan, Jal., México

$$\frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0 \tag{1}$$

La probabilidad de ruina se puede calcular de varias maneras, la ideal es de manera analítica, llegando así a una solución exacta. Sin embargo, son muy pocas las veces en las que las condiciones se dan para que esto sea posible. Por lo cual se recurre a métodos numéricos, como lo es el método de simulación de Montecarlo, que consiste en la generación de datos aleatorios para estimar una expresión más compleja.

Al método de Montecarlo se le pueden dar dos acercamientos, el método Montecarlo crudo y el método Montecarlo condicionado, donde el último tiene el objetivo de reducir la varianza de los resultados. Se busca reducir la varianza debido a que la desviación estándar es directamente proporcional al error de la estimación (3). Ambos algoritmos se encuentran en la sección IV-A.

El método de Montecarlo condicionado se trabaja sobre el espacio muestral determinado por una condición, dado que esta condición la estipula una variable aleatoria que no es independiente del estimador, el espacio muestral se ve reducido, y las probabilidades con las que se trabajan son mayores, por lo que la varianza se reduce y la estimación del error es más precisa.

En este caso particular, se cuenta con un conjunto de datos brindados por una compañía aseguradora de autos, por lo que es necesario encontrar la distribución f_X mediante un ajuste para convenir los parámetros de X.

Con base en la descripción anterior, surge entonces, un modelo de la forma

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{2}$$

donde toda X_i es independiente e idénticamente distribuida con distribución f_X y c corresponde a la suma de todas las primas c^* recibidas por cada cliente por unidad de tiempo. Este proceso es llamado modelo de Cramer-Lundberg. Fue introducido con el mismo propósito que se explicó, y sobre él están asentadas las bases de la teoría de ruina.

II. Metodología

Antes de determinar la probabilidad de ruina de la compañía aseguradora, se realizaron pruebas con parámetros arbitrarios, en donde los montos de reclamación siguen una distribución exponencial con $E[X] = \mu = 1$ y el proceso de Poisson tiene una intensidad $\lambda = 2$, por lo que se asume que los tiempos interreclamo siguen una distribución exponencial con media de $\frac{1}{2}$.

Para una prima $c = 3$ y diferentes capitales iniciales u (1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 y 30) se calculó la probabilidad exacta de ruina utilizando la solución analítica de la expresión de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución exponencial (Ec. 3) en donde se cumple la condición de ganancia neta (Ec. 1).

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{\frac{-\theta u}{(1+\theta)E[X]}} \tag{3}$$

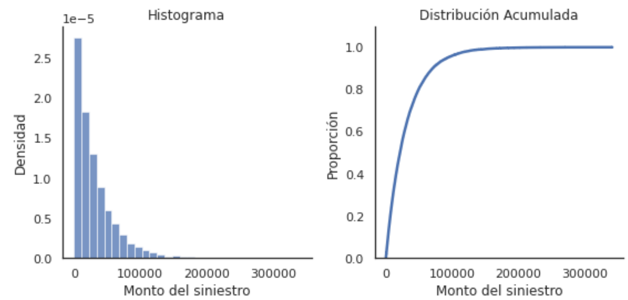

Figura 1. Histograma y distribución acumulada de Montos de siniestro

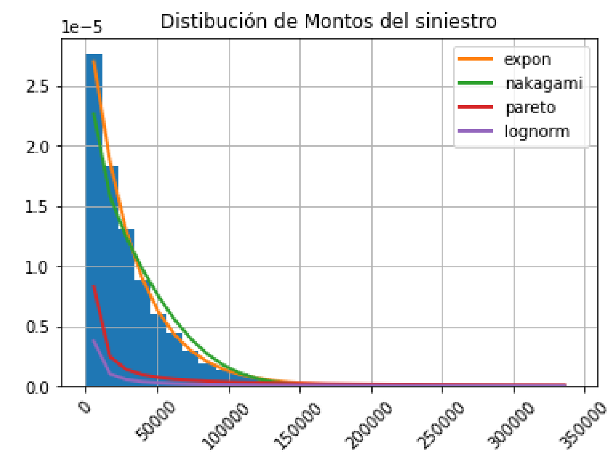

Figura 2. Comparación de distribuciones para Montos de siniestro

Donde:

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

X: Monto de un reclamo

Adicionalmente se aplicaron los métodos de Montecarlo crudo y Montecarlo condicionado para estimar la probabilidad de ruina y evaluar la precisión de estos métodos utilizando 10,000 trayectorias y una ventana de tiempo de 5000.

II-A. *Estimación de parámetros*

Una vez realizadas las pruebas con parámetros arbitrarios, se utilizaron datos reales para estimar el valor real de los parámetros. Los datos que fueron proporcionados para realizar el análisis del riesgo financiero contienen 8 variables. Estas explican la fecha del siniestro, el monto del siniestro, el tipo de auto, el modelo del auto, el deducible, si aplica o no la cobertura, si hubo o no reclamo de la cobertura y si fue o no una pérdida total. El primer y único paso en el preprocesamiento de los datos fue ordenarlos de manera cronológica.

En primer lugar, se obtuvo la media de siniestros por día que resultó 74.3041. Es decir, el proceso de Poisson tiene intensidad $\lambda = 74.3041$ y se asume que los tiempos interreclamo siguen una distribución exponencial con media de $\frac{1}{74.3041}$ (4).

Posteriormente se calculó el valor del parámetro μ. Se analizaron los montos de reclamación (Figura 1 y Figura 2) y realizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov, una prueba de bondad de ajuste, con la cual se verificó que los montos del siniestro siguieran una distribución exponencial (5). El resultado de la prueba de bondad de ajuste fue de $p > 0.3$, por lo cual no se rechaza la hipótesis nula y se puede decir que los montos de reclamación siguen una distribución exponencial con $\mu = 30,771.38$. En la Figura 2 se pueden ver distintas distribuciones a las que los montos de siniestro se pueden ajustar. Sin embargo, se determinó que se trabajaría con una distribución exponencial, ya que está es una distribución de cola ligera y es factible calcular la probabilidad exacta (6).

Finalmente, se deben definir los capitales iniciales u y las primas c para determinar las probabilidades de ruina. Dado que no se puede estimar el capital inicial con los datos proporcionados, se procede a estimar un valor de c realista. Esto se obtiene estimando el número de clientes de la aseguradora y multiplicando por la prima promedio.

Para estimar el total de clientes de la aseguradora n_c, tomamos en cuenta que, de acuerdo con los últimos datos del iii (7), en promedio para cada cliente se espera una reclamación por colisión cada $\frac{100}{6.13} \approx 16.31$ años, una por robo o daños en un accidente que no fue colisión cada $\frac{100}{3.25} \approx 30.77$ años, una por daño a propiedad cada $\frac{100}{3.18} \approx 31.45$ años y por daños corporales cada $\frac{100}{1.07} \approx 93.46$ años. En total, se espera una reclamación cada 7.337 años. Por lo tanto podemos estimar el número de clientes de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\frac{n_c}{27,121 \;\; reclamaciones/año} &= \frac{1 \;\; cliente}{\frac{1}{7.337} \;\; reclamaciones/año} \\
n_c &= \frac{1 \; cl. \times 27,121 \;\; rec./año}{\frac{1}{7.337} \;\; rec./año} \\
n_c &= \frac{27,121}{\frac{1}{7.337}} \\
n_c &= 27,121 \times 7.337 \\
n_c &= 198,987 \;\; clientes
\end{aligned}
$$

Considerando que cada unidad de t corresponde a un día en el modelo, las c se calculan de la siguiente manera:

$$c = \frac{c_{pa} \times n_c}{365}$$

Donde c_{pa} es el costo promedio de la prima por un año.

Se usa la condición de ganancia neta (Ec. 1) para obtener el c_{pa} mínimo. De esta manera, se asegurá que no habrá una probabilidad de 1 de caer en la ruina:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{c_{pa} \times n_c}{365}}{\lambda\mu} - 1 &> 0 \\
c_{pa} &> \frac{365\lambda\mu}{n_c} \\
c_{pa} &> \$4,194.99
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que, en promedio, la aseguradora debe cobrar más de $\$4,194.99$ anuales a sus clientes para no tener una ruina asegurada. Dada la gran cantidad de factores que influyen en el costo de una prima, se asumen primas anuales promedio de \$4,500, \$5,000 y \$5,500. Considerando que cada unidad de t corresponde a un día en el modelo, se obtienen las siguientes c:

$$c_1 = \frac{\$4,500 \times 198,987}{365} = \$2,453,264.38$$

$$c_2 = \frac{\$5,000 \times 198,987}{365} = \$2,725,849.31$$

$$c_3 = \frac{\$5,500 \times 198,987}{365} = \$2,998,434.25$$

Con los parámetros estimados se puede determinar la probabilidad de ruina de la aseguradora del mismo modo que con los parámetros arbitrarios, ya que se cumple con la condición de ganancia neta.

II-B. Escalamiento de Datos

Para facilitar el cálculo de la probabilidad de ruina es recomendable escalar los datos. Esto debido a la complejidad de hacer cálculos con números grandes de manera iterativa. Sin embargo, para hacer esto es importante tomar en consideración cómo afecta la escalación a la distribución de los datos. Se sabe que la función generadora de momentos de $X \sim Exp(\lambda)$ es $M_X(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}$ (8). Por lo que se calcula la función generadora de momentos de kX, en donde k es una constante arbitraria mayor a 0, para compararla con la de X y observar cómo se modifican los parámetros:

$$
\begin{aligned}
M_{kX}(t) = E[e^{tkX}] &= \int_0^\infty e^{tkx} f(x) dx \\
&= \int_0^\infty e^{tkx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{x(tk-\lambda)} dx \\
&= \frac{\lambda}{tk-\lambda} \left[e^{x(tk-\lambda)} \right] \Big|_0^\infty \\
\text{Para } \lambda > kt : \\
&= \frac{\lambda}{tk-\lambda} [0-1] \\
&= -\frac{\lambda}{tk-\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - tk} = \frac{\lambda/\lambda}{\lambda/\lambda - tk/\lambda} \\
&= \frac{1}{1-\frac{tk}{\lambda}} \\
&= \frac{1}{1-k(\frac{t}{\lambda})}
\end{aligned}
$$

Es claro que kX también sigue una distribución exponencial con parámetro $k\lambda$, por lo que es posible escalar los parámetros sin afectar los resultados.

Utilizando una $k = \frac{1}{10,000}$, los parámetros quedan de la siguiente manera:

$$\lambda = 74.3041$$
$$\mu = 3.077$$
$$c_1 = 245.33$$
$$c_2 = 272.58$$
$$c_3 = 299.84$$

Y se establecen los siguientes capitales iniciales:

$$u_1 = 60$$
$$u_2 = 80$$
$$u_3 = 100$$

Que equivalen a $\$600,000$, $\$800,000$ y $\$1,000,000$, respectivamente.

Finalmente se modificó la ventana de tiempo del Montecarlo crudo y el Montecarlo condicionado de 5,000 a 365, dada la complejidad computacional de utilizar estos parámetros (a pesar de estar escalados). Por lo tanto las simulaciones consideran que una trayectoria se fue a la ruina si la reserva llega a cantidades negativas antes del primer año.

III. Resultados

III-A. *Parámetros arbitrarios*

La Tabla I muestra tanto los resultados para las probabilidades de ruina, como las probabilidades estimadas con Montecarlo crudo (MC) y Montecarlo condicionado (MCC). Se puede observar cómo ambos métodos de aproximación efectivamente se acercan a la probabilidad exacta, aunque el Montecarlo crudo logró mejores resultados en general.

Cabe destacar que para probabilidades muy bajas, como con $u = 30$, el Montecarlo crudo no registra ninguna trayectoria que se haya ido a la ruina, por lo que estima una probabilidad de ruina de 0. Para este tipo de casos es recomendable utilizar métodos como el Montecarlo condicionado, que estima la probabilidad de ruina utilizando los récords a la baja en lugar de las trayectorias que se fueron a la ruina.

u	**Probabilidad de ruina**		
	Exacta	**MC**	**MCC**
1	0.4777	0.4697	0.4775
2	0.3432	0.3499	0.3404
3	0.2453	0.2433	0.2283
4	0.1757	0.1825	0.1582
5	0.1259	0.1303	0.1137
10	0.0238	0.0266	0.0161
20	0.0008	0.0012	0.0002
30	3.0267e-5	0.000	1.9255e-5

Tabla I
Probabilidades de ruina con los parámetros de prueba

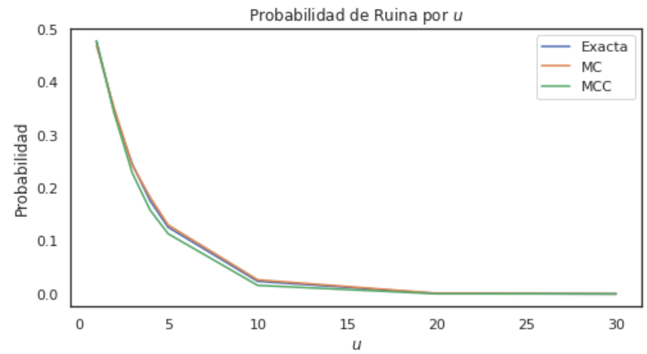

Figura 3. Probabilidad de ruina dependiendo del capital inicial (Exacta, MC, MCC)

u	**Intervalo Confianza**	
	MC	**MCC**
1	(0.4599 - 0.4794)	(0.4645 - 0.4856)
2	(0.3405 - 0.3592)	(0.3309 - 0.3500)
3	(0.2349 - 0.2517)	(0.2363 - 0.2404)
4	(0.1749 - 0.1900)	(0.1512 - 0.1651)
5	(0.1237 - 0.1369)	(0.1077 - 0.1197)
10	(0.0234 - 0.0297)	(0.0138 - 0.0184)
20	(0.0005 - 0.0019)	(4.6433e-5 - 0.0003)
30	(0.0 - 0.0)	(-1.7187e-5 - 5.5497e-5)

Tabla II
Intervalos de confianza del Montecarlo crudo y Montecarlo condicionado con los parámetros de prueba

u	**Varianza**	
	MC	**MCC**
1	0.5296	0.6097
2	0.6491	0.6971
3	0.7555	0.7183
4	0.8164	0.7922
5	0.8678	0.8290
10	0.9724	0.8763
20	0.998	0.2842
30	NaN	NaN

Tabla III
Varianzas del Montecarlo crudo y Montecarlo condicionado con los parámetros de prueba

El decaimiento de la probabilidad de ruina de la Tabla I se puede apreciar de mejor manera en la Figura 3. Conforme crece el capital inicial la probabilidad de llegar a la ruina tiende a cero. Se espera que los resultados con los datos reales sean similares a estos, dada la naturaleza del problema.

En las Tablas II y III se puede observar con mayor facilidad los beneficios de utilizar Montecarlo condicionado en lugar

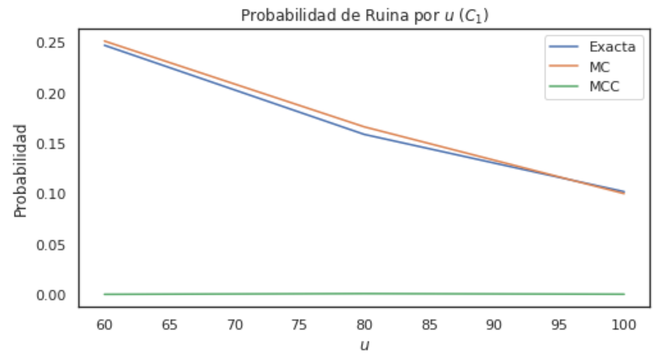

Figura 4. Probabilidad de ruina dependiendo del capital inicial (Exacta, MC, MCC) para C_1

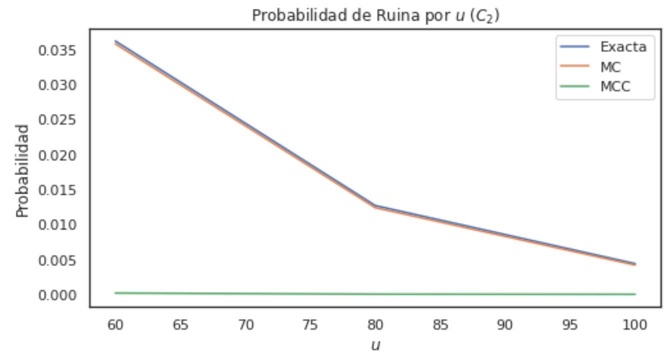

Figura 5. Probabilidad de ruina dependiendo del capital inicial (Exacta, MC, MCC) para C_2

de Montecarlo crudo. Si en ambos crece la varianza de la probabilidad de ruina estimada conforme crece el capital inicial, el Montecarlo condicionado mantiene una varianza más baja que el Montecarlo crudo para capitales iniciales altos, lo cual se ve reflejado en intervalos de confianza de la probabilidad de ruina más pequeños, y en consecuencia, se reduce la incertidumbre del resultado.

III-B. Parámetros reales estimados

c	c_{pa}*	u	Probabilidad de ruina		
			Exacta	**MC**	**MCC**
245.33	\$4,500	60	0.2472	0.2514	0.0022
		80	0.1588	0.1663	0.0009
		100	0.1020	0.1001	0.0003
272.58	\$5,000	60	0.0362	0.0358	0.0002
		80	0.0127	0.0124	4.8838e-5
		100	0.0044	0.0042	2.115e-5
299.84	\$5,500	60	0.0074	0.0071	2.2769e-5
		80	0.0016	0.0020	8.2856e-6
		100	0.0003	0.0004	1.6191e-6

*asumiendo $n_c = 198,987$

Tabla IV
PROBABILIDADES DE RUINA CON ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS REALES

Cómo se puede observar en la Tabla IV, la probabilidad de ruina para la aseguradora es baja. En general, se puede decir que a mayor capital inicial, menor es la probabilidad de llegar a la ruina. Esto puede ser apreciado en las Figuras 4,5 y 6, en donde a medida que incrementa el capital inicial u, la probabilidad disminuye considerablemente.

A pesar de los resultados obtenidos con los parámetros arbitrarios, en las Figuras 4, 5 y 6 es evidente que el método de Montecarlo obtuvo una aproximación más cercana a la exacta. Este resultado es lo opuesto de lo que se esperaba obtener (III-A), ya que, dados los parámetros reales establecidos en II-A las probabilidades de ruina para cada C son cercanas a 0. En general, cuando la probabilidad se acerca más a 0, el

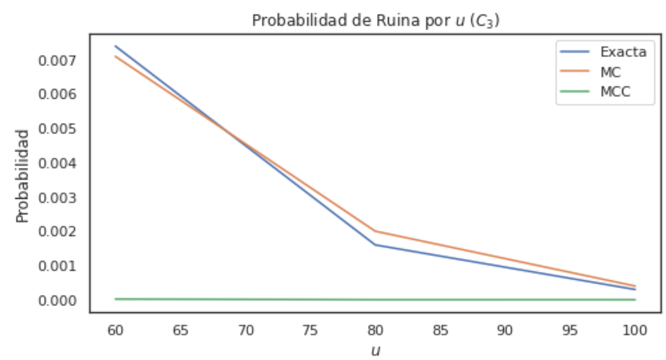

Figura 6. Probabilidad de ruina dependiendo del capital inicial (Exacta, MC, MCC) para C_3

c	u	Intervalo de confianza	
		MC	**MCC**
245.33	60	(0.2429 - 0.2599)	(0.0020 - 0.0025)
	80	(0.1590 - 0.1736)	(0.0007 - 0.0010)
	100	(0.0942 - 0.1060)	(0.0003 - 0.0004)
272.58	60	(0.0322 - 0.0394)	(0.0001 - 0.0002)
	80	(0.0102 - 0.0146)	(2.3252e-6 - 7.4423e-5)
	100	(0.0029 - 0.0055)	(4.9551e-6 - 3.7344e-5)
299.84	60	(0.0054 - 0.0087)	(6.3604e-6 - 3.9178e-5)
	80	(0.0011 - 0.0028)	(5.2931e-7 - 1.6042e-5)
	100	(8.0941e-6 - 0.0008)	(-1.0669e-6 - 4.3051e-6)

Tabla V
INTERVALOS DE CONFIANZA DEL MONTECARLO CRUDO Y MONTECARLO CONDICIONADO CON ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS REALES

método de Montecarlo condicionado tiende a ser más certero ya que cuenta con la reducción de varianza. Sin embargo, se considera que la reducción en la ventana de tiempo afecto el desempeño del método de Montecarlo condicionado. De igual manera, la falta de records a la baja también pudo haber afectado al método.

c	u	Varianza	
		MC	**MCC**
245.33	60	0.7476	0.0662
	80	0.8328	0.0473
	100	0.8987	0.0280
272.58	60	0.9632	0.0323
	80	0.9870	0.0349
	100	0.9950	0.0323
299.84	60	0.9916	0.0307
	80	0.9976	0.0189
	100	0.9994	0.0116

Tabla VI
VARIANZAS DEL MONTECARLO CRUDO Y MONTECARLO CONDICIONADO CON ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS REALES

IV. CONCLUSIÓN

A través de la recolección de datos y un análisis estadístico, fue posible estimar los parámetros del modelo de Cramer-Lundberg para la compañía aseguradora para así calcular y aproximar la probabilidad de ruina de la misma. Además de que se utilizaron los métodos de simulación de Montecarlo crudo y Montecarlo condicionado para llegar a resultados parecidos. Uno de los pasos claves en este análisis de riesgo fue el cálculo del número de clientes para así obtener un valor para la prima que recibe la aseguradora. Esto permitió el cálculo de una prima que cumpliera con la condición de ganancia neta y que no fuera demasiado elevada, proponiendo un costo anual por cliente razonable.

Es interesante ver el comportamiento de métodos numéricos en comparación de métodos exactos, ya que permiten una comparación directa que puede ser útil cuando no se tiene un método exacto o cuando el método exacto es demasiado complejo. En el caso de este análisis de riesgo, se descubrió que el método de Montecarlo crudo daba resultados acercados a la realidad, mientras que el método de Montecarlo condicionado tendía a subestimar la probabilidad de ruina. Esto es sumamente interesante, ya que con parámetros arbitrarios Montecarlo condicionado se acercaba más a la probabilidad de ruina exacta a medida que esta disminuye. Esto se debe a la reducción en la ventana de tiempo que se utilizó como parámetro en el modelaje de los datos reales, lo cual fue decididó dada la complejidad del cálculo de números grandes, a pesar de escalar los datos.

Por otra parte, resulta de sumo valor este análisis de riesgo, ya que se comprueba que con una prima mínima, la posibilidad de llegar a la ruina es baja. Si se toma por ejemplo el caso de prima de \$5,000, los tres capitales iniciales presentan una probabilidad de llegar a la ruina menor a 0.04. Esto indica que una aseguradora podría empezar con un capital inicial medio y una prima competitiva y aún así tener un bajo riesgo de llegar a la ruina.

Para trabajos futuros, se podrían plantear distintos tipos de distribuciones para los montos de reclamo. Estas distribuciones podrían ser de cola ligera, lo cual permitiría el cálculo de la probabilidad exacta, o de cola pesada, en cuyo caso únicamente se utilizarían métodos de aproximación. Por otra parte, trabajar con datos reales para las primas recibidas por día podría ayudar al modelo a reflejar lo que pasa en la realidad.

Limitaciones del modelo

Es importante notar que el análisis de riesgo realizado en esta ocasión tiene algunas limitaciones. Una de las más importantes es que, dado el carácter anónimo de la aseguradora, no se conoce el monto que recibe por las primas. Este problema fue abordado en la sección II-A, en donde se estimó el número de clientes de la aseguradora y se calculó la prima promedio anual mínima para cumplir con la condición de ganancia neta. Sin embargo, es importante mencionar que, para estimar el número de clientes de la compañía, se consideraron tasas de incidencia que no fueron tomadas en México.

Otra de las limitaciones del modelo es que se toman en cuenta todas las reclamaciones, sin importar si proceden o no, y que no se consideran los montos recibidos por concepto de deducible.

Finalmente cabe mencionar que, en la realidad, la ruina de una aseguradora no supone su quiebra necesariamente. Además, el modelo considera que los únicos gastos de la compañía son los montos de reclamación y deja fuera todos los gastos administrativos. En realidad existen operaciones financieras tales como los préstamos, que permiten a una aseguradora incrementar sus reservas y seguir operando.

APÉNDICES

IV-A. Algoritmos para la estimación de la probabilidad de ruina

Sea I_i una variable aleatoria que estima la probabilidad de ruina en la trayectoria i, denotaremos a Var_i como la varianza acumulada en la iteración i y a $\hat{I}_i$ como su media aritmética. Estos están dados por

$$\hat{I}_i = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} I_i \tag{4}$$

y

$$\text{Var}_i = (1 - \frac{1}{i-1})\text{Var}_{i-1} + i(\hat{I}_i - \hat{I}_{i-1})^2 \tag{5}$$

para todo entero $i > 1$. Si T es el tiempo de observación de cada proceso y n el número de trayectorias a replicar, estimamos la probabilidad de ruina con los siguientes algoritmos de Montecarlo.

IV-A1. Algoritmo Montecarlo Crudo:

1) Dejemos que $\hat{I}_1 = 0$ y $\text{Var}_1 = 0$.
2) Para $i = 1, 2, \ldots, n$
   I) Generar los tiempos interarribo $T_{i2}, T_{i3}, \ldots, T_{ik}$ donde para toda T_{ij} con $j = 1, 2, \ldots, k$ la distribución es $f_{T_{ij}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ y $\sum T_{ij} \leq T$.
   II) Generar montos de reclamación $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$ donde para toda X_{ij} con $j = 1, 2, \ldots, k$ la distribución $f_{X_{ij}}$ es la misma.
   III) Calcular $U(t)$.

IV) Si $U(t) < 0$ hacer $I_i = 1$, de lo contrario $I_i = 0$.
V) Calcular $\hat{I}_i$ y Var_i.

3) Obtener el intervalo

$$\hat{I} \in \left[\hat{I}_n - 1.96\sqrt{\frac{Var_n}{n}}, \hat{I}_n + 1.96\sqrt{\frac{Var_n}{n}}\right]$$

IV-A2. Algoritmo Montecarlo Condicionado:

1) Dejemos que $\hat{I}_1 = 0$ y $\text{Var}_1 = 0$.
2) Para $i = 1, 2, \ldots, n$
   I) Generar los tiempos interarribo $T_{i2}, T_{i3}, \ldots, T_{ik}$ donde para toda T_{ij} con $j = 1, 2, \ldots, k$ la distribución es $f_{T_{ij}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ y $\sum T_{ij} \leq T$.
   II) Generar montos de reclamación $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$ donde para toda X_{ij} con $j = 1, 2, \ldots, k$ la distribución $f_{X_{ij}}$ es la misma.
   III) Obtener records a la baja; sea $a = u$, $L_0 = 0$ y $m = 1$, para $j = 1, 2, \ldots, k$
      1) Si $U(T_{ij}) < a$, hacer
         - $L_m = a - U(T_{ij})$, $a = U(T_{ij})$ y $m = m + 1$
   IV) Sea M_i la cantidad de records a la baja, asignamos el valor $\hat{I}_i = M_i \overline{f_{X_{ij}}}$, donde $\overline{f_{X_{ij}}}$ es el valor de la cola integrada de la variable aletoria X_{ij}
   V) Calcular $\hat{I}_i$ y Var_i.
3) Obtener el intervalo

$$\hat{I} \in \left[\hat{I}_n - 1.96\sqrt{\frac{Var_n}{n}}, \hat{I}_n + 1.96\sqrt{\frac{Var_n}{n}}\right]$$

Los dos algoritmos de Montecarlo y Montecarlo crudo fueron implementados de la tesis de la Dra. Brenda Ivette García Maya (2).

REFERENCIAS

[1] M. Stellantis, "¿de qué depende el precio de tu seguro de auto?" 01 2021.
[2] B. García, "Estimación numérica de la probabilidad de ruina: caso subexponencial," 02 2016.
[3] G. Manfred, M. Dietmar, and S. Enrico, *Numerical Methods and Optimization in Finance.* Academic Press, 2019. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128150658000170
[4] V. Alto, "The link between poisson and exponential distribution," 08 2019.
[5] *Kolmogorov–Smirnov Test*. New York, NY: Springer New York, 2008. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1_214
[6] Z. Amin, *Loss Data Analytics*, 08 2021. [Online]. Available: https://ewfrees.github.io/Loss-Data-Analytics-Spanish/
[7] L. Thomas, "Auto insurance statistics and facts," 05 2021.
[8] . T. W. Kobayashi H., Mark B., *Probability, Random Processes, and Statistical Analysis: Applications to Communications, Signal Processing, Queueing Theory and Mathematical Finance*. Cambridge University Press, 2011.