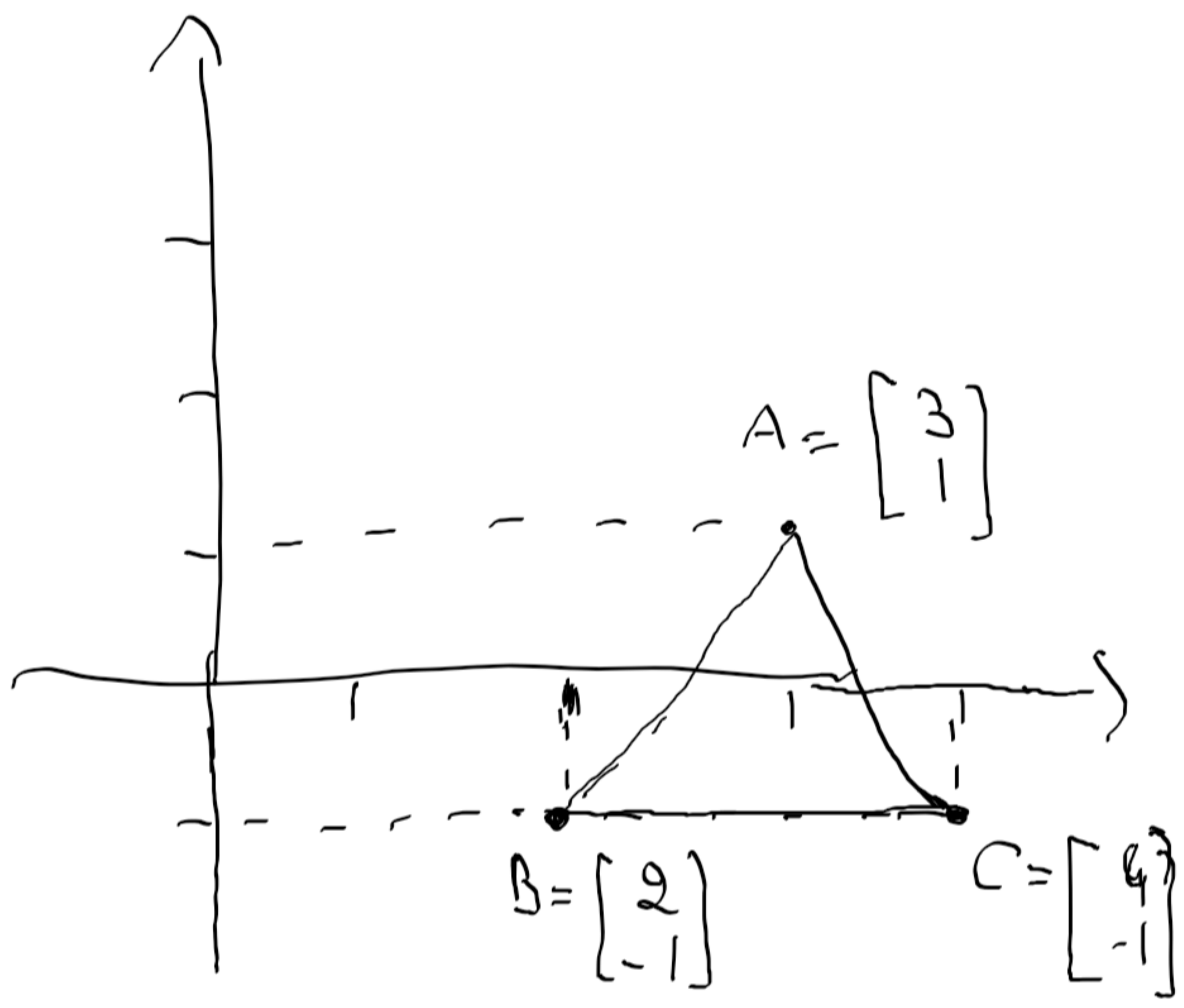
Casos particulares T e $\vec{P}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $q_1 = q_0$

• $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

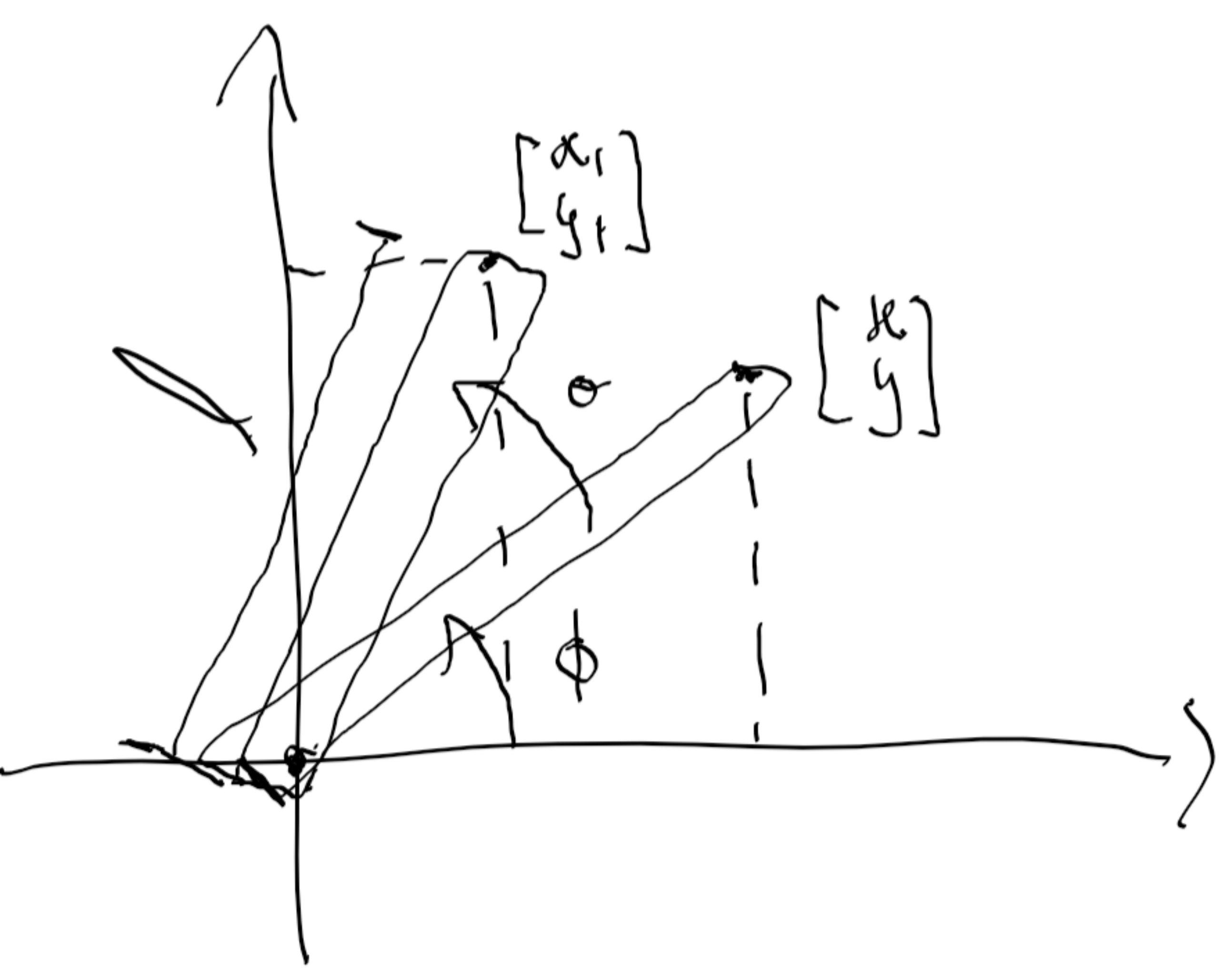
$A' = T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$



$$rot(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix}$$

$$x_1 = l\cos(\theta + \phi) = \overbrace{l\cos\phi}^{x}\cos\theta - \overbrace{l\,\text{sen}\,\phi}^{y}\,\text{sen}\,\theta$$

$$y_1 = l\,\text{sen}(\theta + \phi) = \underbrace{l\,\text{sen}\,\phi}_{y}\cos\theta - \underbrace{l\cos\phi}_{x}\,\text{sen}\,\theta$$



$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ y_1 = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$x = l\cos\phi$

$y = l\,\text{sen}\,\phi$

Coordenadas homogéneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow P_H = \begin{bmatrix} x \\ y \\ k \end{bmatrix}, \; k \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & P_x \\ c & d & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = ax + by + P_x \\ y_1 = cx + dy + P_y \\ 1 = 1 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & P_x \\ S\theta & C\theta & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

| Esta matriz compreende rotações puras, translações puras e ambas em simultâneo

Composição de transformações

- $$\underbrace{T_3(\underbrace{T_2(\underbrace{(T_1 P)}_{P_1})}_{P_2})}_{P_3} = T_3 T_2 T_1 \cdot P$$

| Em geral, a composição de transformações não é comutativa

Transformações a 3D

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & p_x \\ d & e & f & p_y \\ g & h & i & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

?

- Translação é imediata
- Rotação tem 3 eixos possíveis

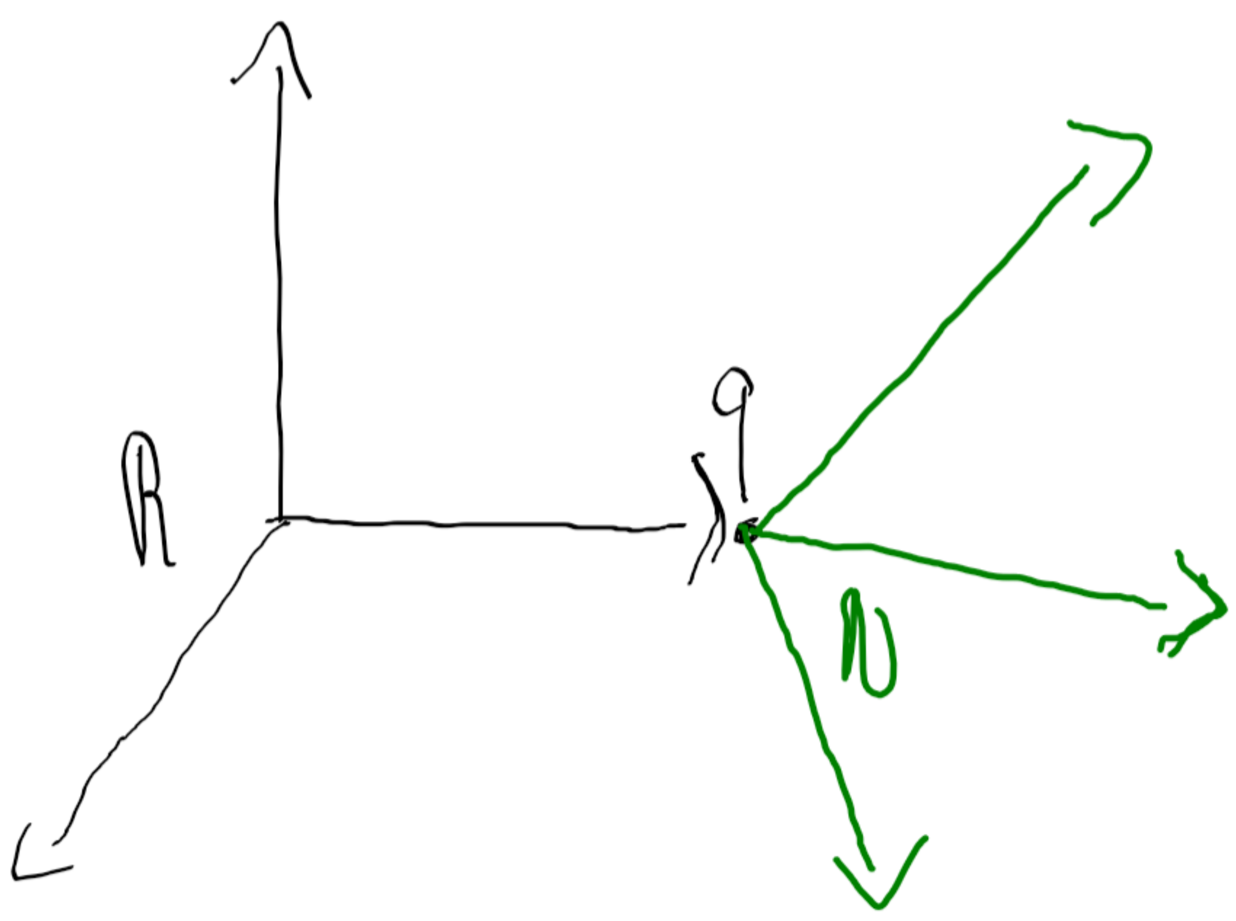
$$rotz(\theta) = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rotx(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ 0 & S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$roty(\theta) = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Significados/interpretações da T

- Movimentar pontos $q_1 = T \cdot q$
- Relação entre coordenadas vistas de referenciais diferentes

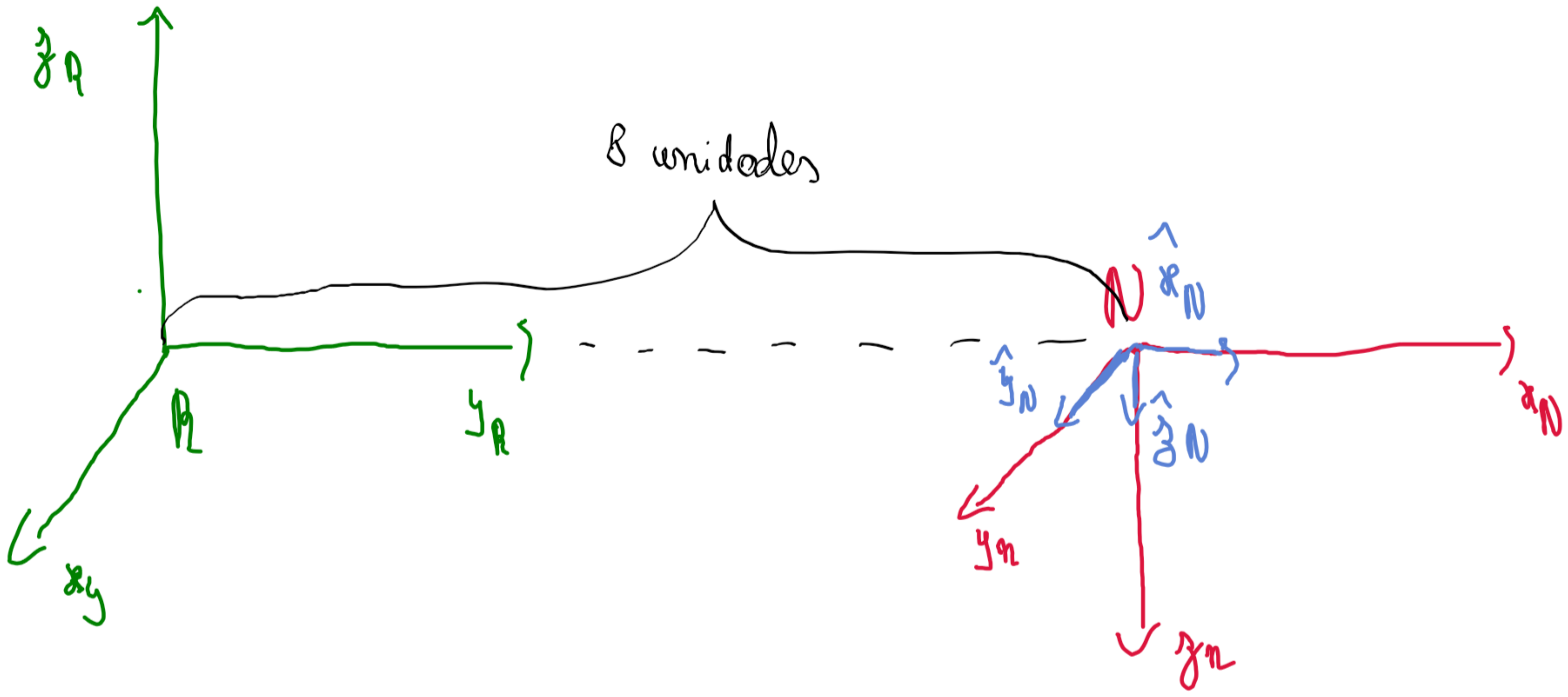


$$^{R}q = {}^{R}T_N \cdot {}^{N}q$$

$$^{N}q = {}^{N}T_R \cdot {}^{R}q$$

Transformações entre referenciais

Contempla a alteração de posição bem como de orientação



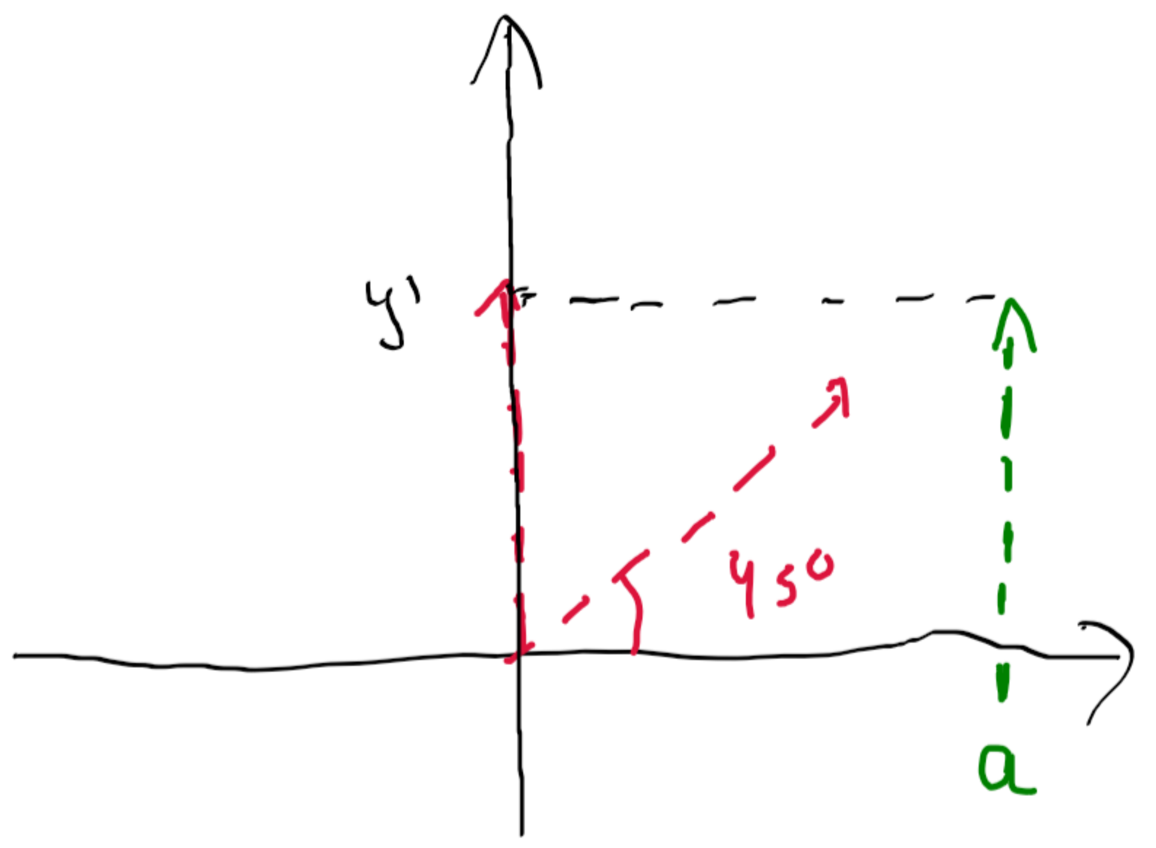
$$
{}^{R}T_{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Para chegar a ${}^{R}T_{N}$ "à mão" podemos imaginar que de R chegámos a T fazendo uma rotação de 180° sobre yy seguida de uma rotação de 90° sobre zz seguido finalmente de uma translação de 8 unidades segundo yy e concretizar o exemplo

Pré e pós - multiplicação

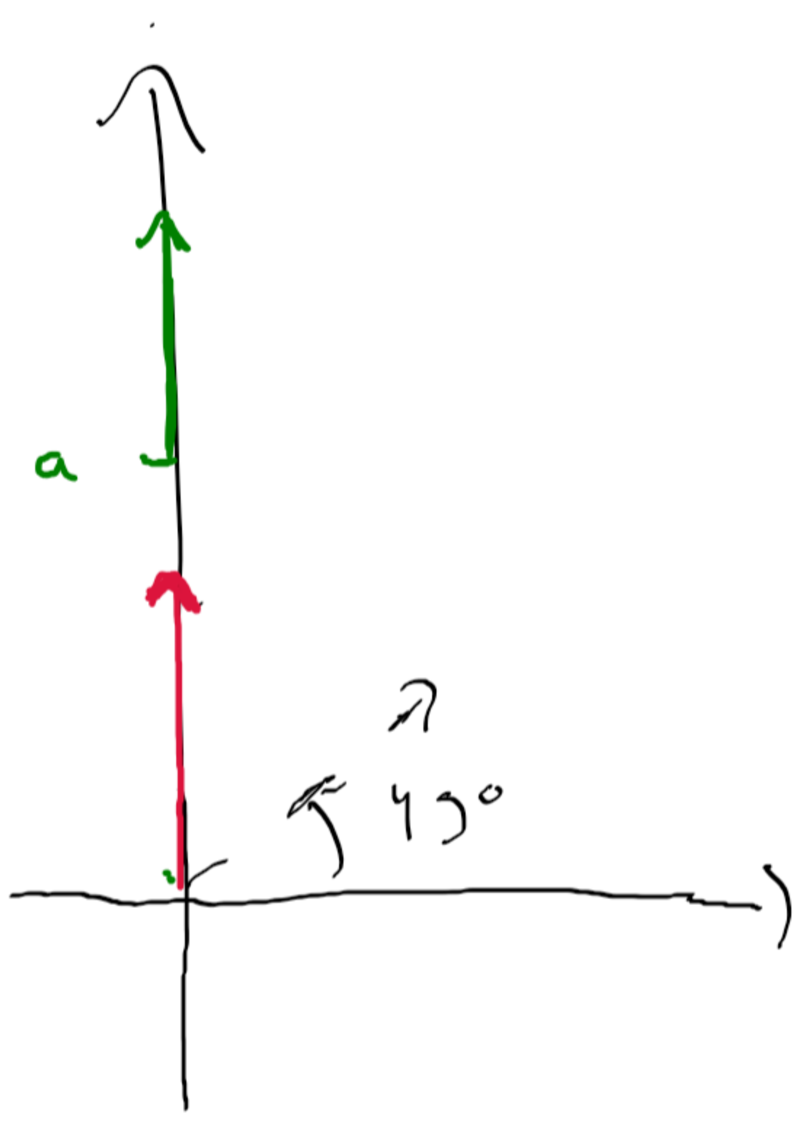
$T_1 = rot(45°)$ $T_2 = trans(a,0)$

$T_{A_1} = T_2 \cdot T_1$



T_{A1}

$T_{A_2} = T_1 \cdot T_2$



Pré-multiplicação - a transformação é em relação ao referencial global

Pós-multiplicação - a transformação é em relação ao referencial local

Exemplo

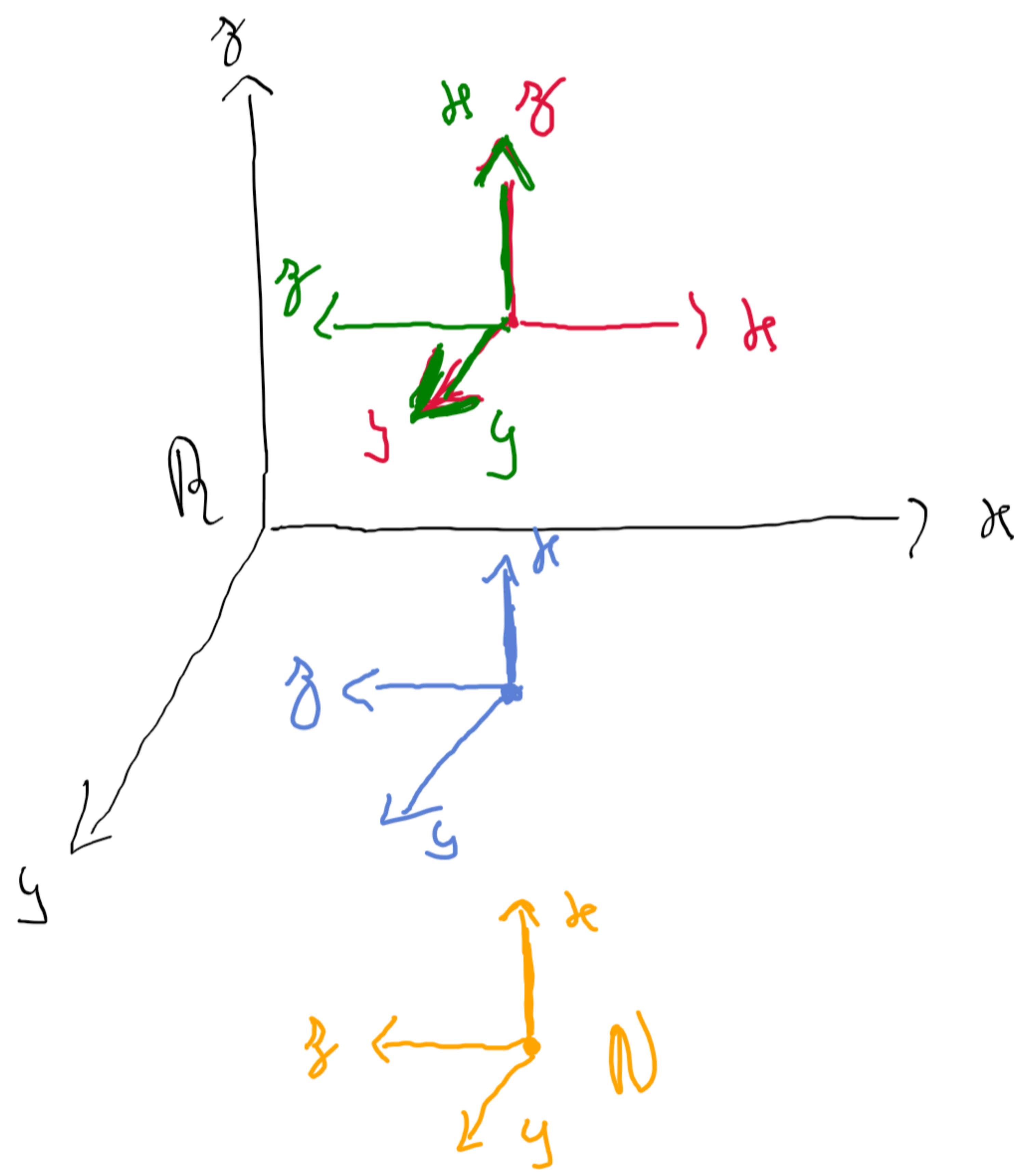
T_1 = trans(1,1,1)

T_2 = $rot_y(90°)$ no ref. local

T_3 = trans(-1,0,0) no ref. local

T_4 = trans(0,0,-1) no ref. global

$$
{}^{R}T_{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

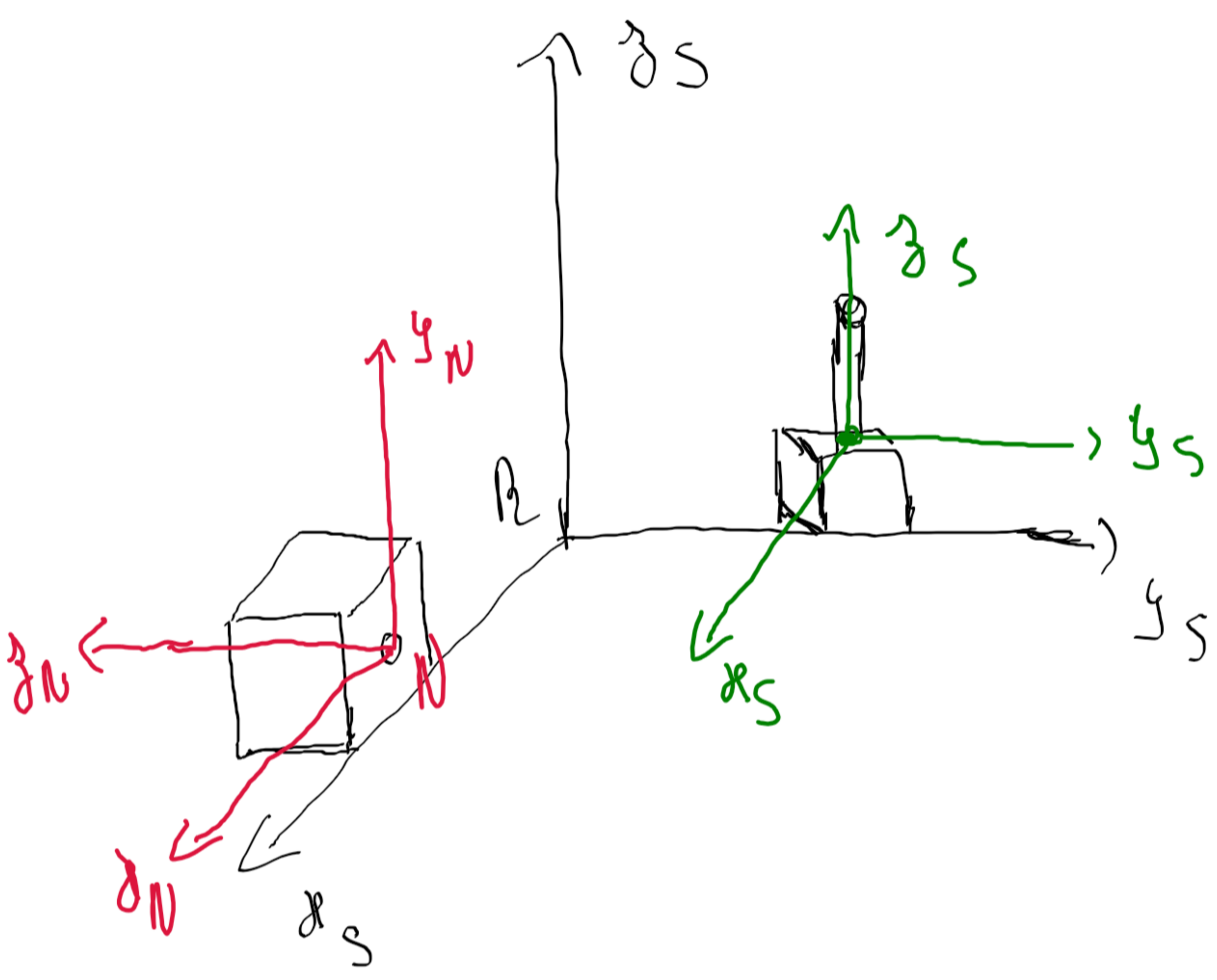


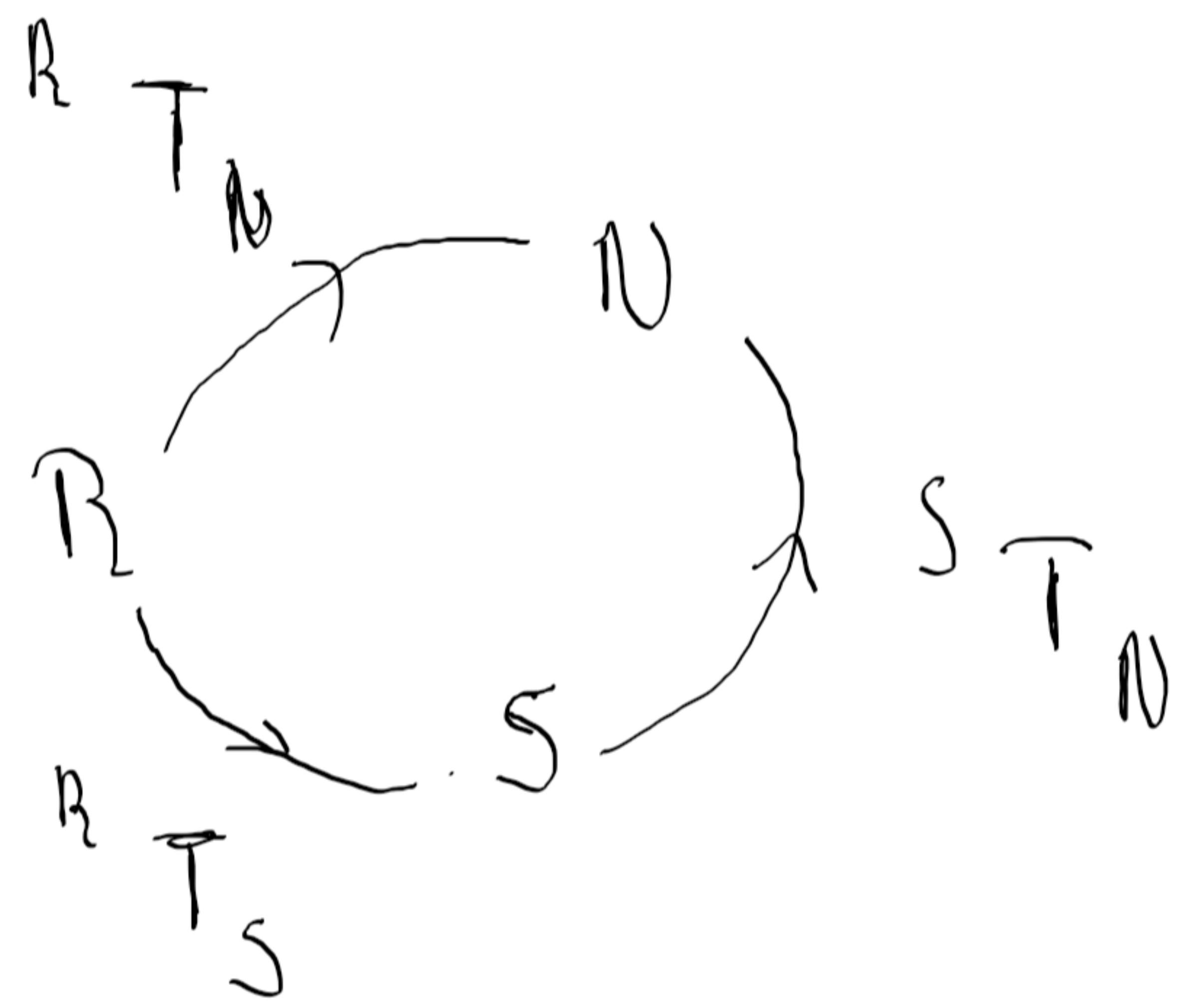
trans(0,0,-1) · trans(1,1,1) · rot(90) · trans(-1,0,0)

Transformação inversa

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} & \hat{t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; ; \; T^{-1} = \begin{bmatrix} ROT^T & \begin{matrix} \hat{x}\cdot\hat{t} \\ \hat{y}\cdot\hat{t} \\ \hat{z}\cdot\hat{t} \end{matrix} \\ 0 \; 0 \; 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafos e equações de transformações





$${}^R T_N = {}^R T_S \cdot {}^S T_N \;\; ? \;\; \Rightarrow \; {}^R T_S^{-1} \cdot {}^R T_N = \underbrace{{}^R T_S^{-1} \cdot {}^R T_S}_{I} \cdot {}^S T_N$$

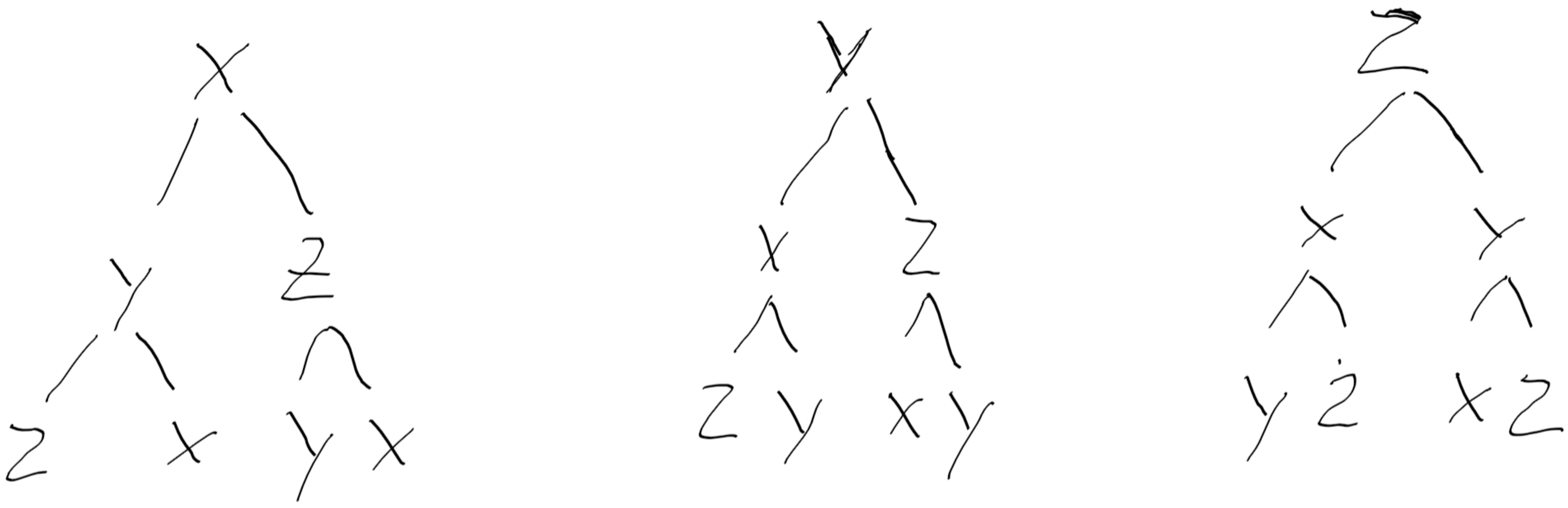
$$\Leftrightarrow \; {}^S T_N = {}^R T_S^{-1} \cdot {}^R T_N \;\Leftrightarrow\; {}^S T_N = {}^S T_R \cdot {}^R T_N$$

Calcula-se assim a transformação desejada ${}^S T_N$ que permite o encaixe das peças.

Orientações e ângulos de Euler

- Ângulos de Euler são os ângulos das rotações sobre os eixos para chegar à posição final

- Há 12 possibilidades



- RPY - roll, pitch e

$$RPY(\phi, \theta, \psi) = rot_z(\phi) \cdot rot_y(\theta) \cdot rot_x(\psi)$$

$$\begin{bmatrix} c\theta c\phi & c\phi s\psi - c\psi s\phi & s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta & 0 \\ c\theta s\phi & c\phi c\psi + s\phi s\psi s\theta & c\psi s\phi s\theta - c\phi s\psi & 0 \\ -s\theta & c\phi s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{r_{21}}{r_{11}} = tg\,\phi \quad ; \quad \frac{r_{32}}{r_{42}} = tg\,\psi$$