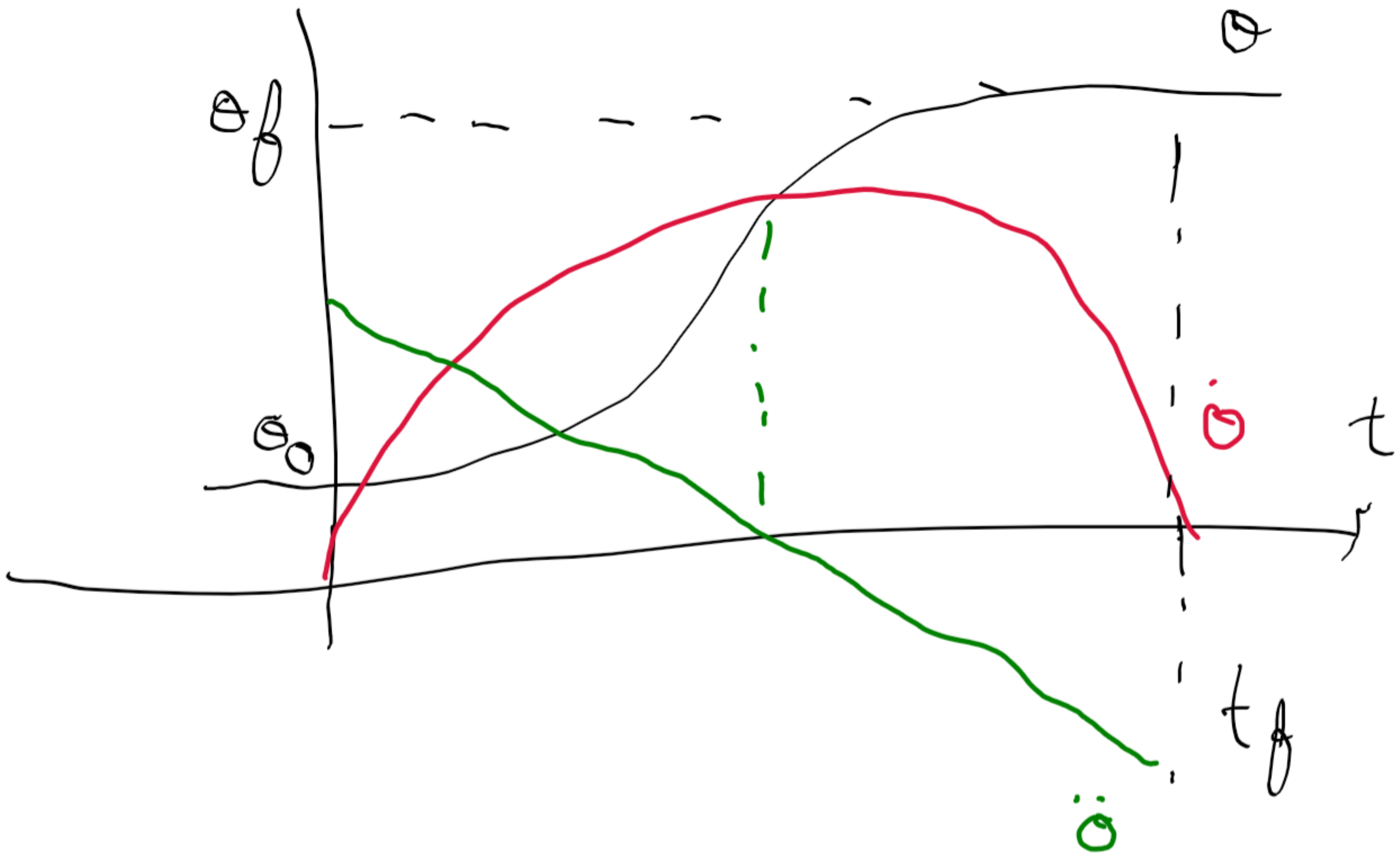
$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$\dot\theta(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$
$$\ddot\theta(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$



$$\begin{array}{l|l}
\theta(0) = \theta_0 & \theta(0) = \theta_0 = a_0 \\
\theta(f) = \theta_f & \theta(t_f) = \theta_f = \theta_0 + a_1 t_1 + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_0 + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\
\dot\theta(0) = \dot\theta_0 = 0 & \dot\theta(0) = 0 = a_1 \\
\dot\theta(t_f) = \dot\theta_f = 0 & \dot\theta(t_f) = 0 = 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2
\end{array}$$

$$\begin{cases} a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_f - \theta_0 \\ 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ a_2 = -\frac{3}{2} a_3 t_f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} a_3 t_f^3 + a_3 t_f^3 = \theta_f - \theta_0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} a_3 t_f^3 = \theta_f - \theta_0 \\ \text{———} \end{cases}$$

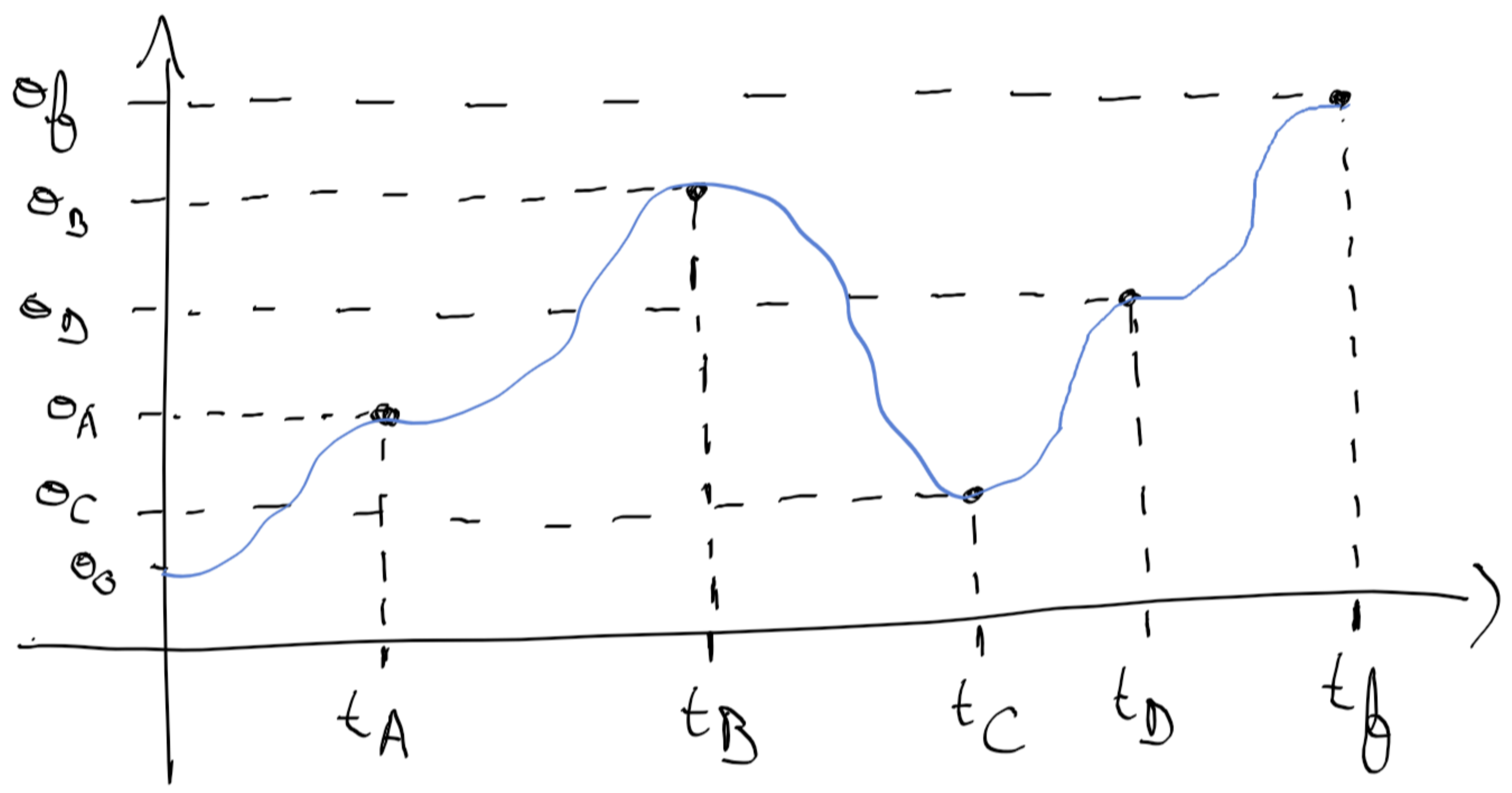
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) \\ a_2 = \frac{3}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) \end{cases}$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) t^2 - \frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) t^3}$$

Caso geral de $\dot{\theta}_0 \neq 0$ e $\dot{\theta}_f \neq 0$

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \left[\frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \right] t^2 + \left[-\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0) \right] t^3$$

Planeamento com pontos intermédios



Como definir a velocidade nos via points?

(1) x_x, θ_x - via point genérico

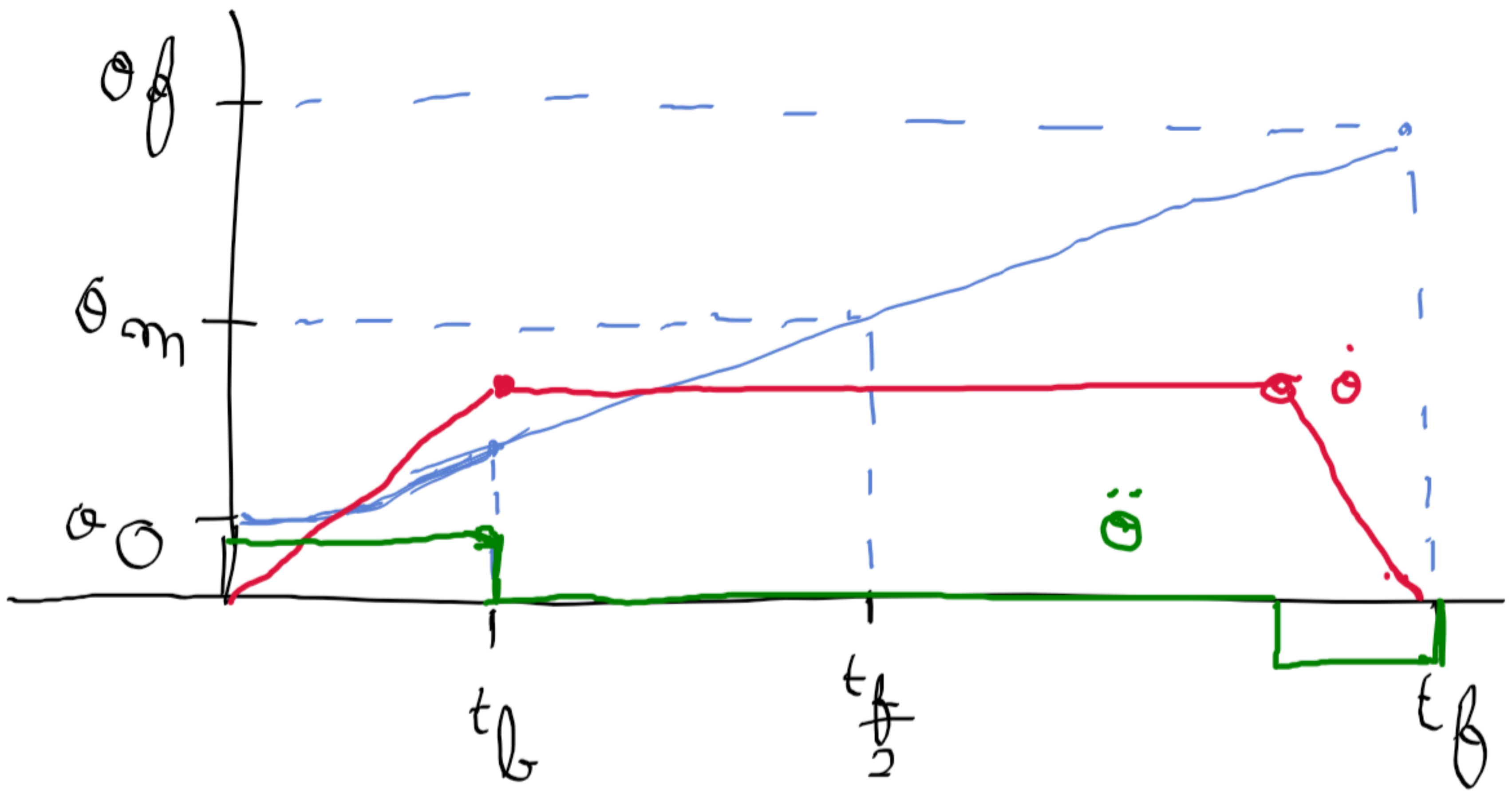
Sabendo $\dot{x}_x \Rightarrow \dot{\theta}_x$ $\quad (\dot{\theta}_x = J_I^{-1} \dot{x}_x)$

(2) Usar uma heurística (solução mais comum)

- Se houver inversão do sentido de evolução da junta $\Rightarrow \dot{\theta}_x = 0$
- $\dot{\theta}_x$ é a média das velocidades médias dos troços adjacentes

(3) forçar acelerações contínuas nos pontos de passagem $\Rightarrow$ usa polinómio de grau 5

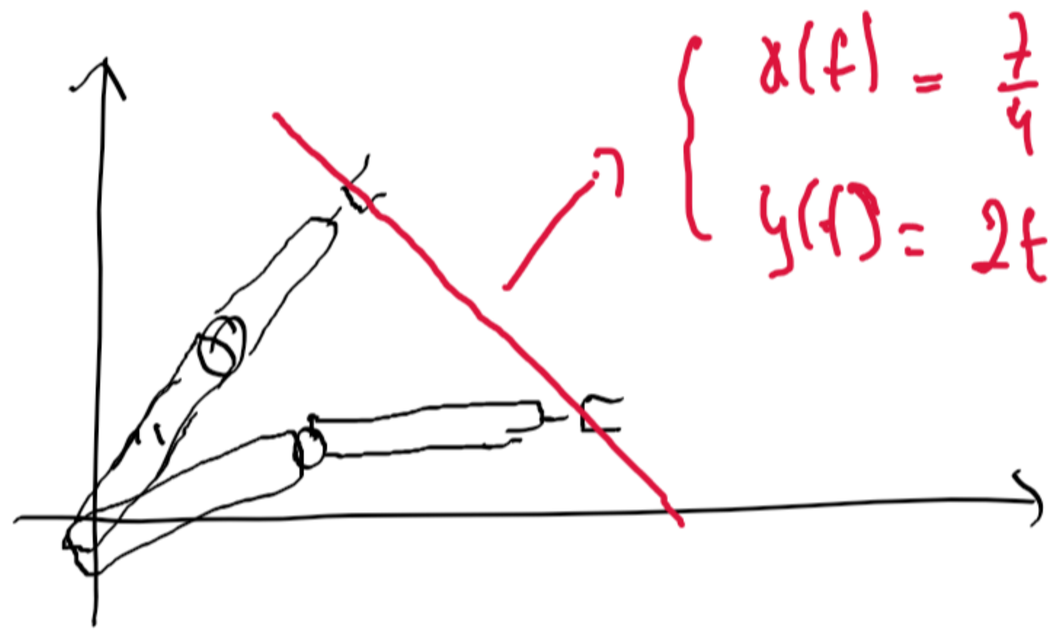
Alternativas práticas



$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t)$$

Planeamento no espaço operacional

$\vec{x}(t) \rightarrow$ percurso da ponta



$$\begin{cases} x(t) = \frac{7}{4} - t \\ y(t) = 2t \end{cases}$$

Usa-se o jacobiano inverso

$$\dot{\theta}(t) = J_I\, \dot{x}(t)$$

$$\boxed{\Delta\theta_n \approx J_{I_n} \Delta x_n}$$

$$\Delta x \approx dx$$

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Delta\theta_n \\ \end{cases}$$

Problemas / limitações

① Pontos inatingíveis da trajetória

② velocidades muito elevadas em alguns troços

③ chegada e partida atingíveis apenas em configurações diferentes