Robótica Industrial
Aula prática nº 10

Planeamento de trajetória
Planeamento nas juntas e com 'via points'
Planeamento avançado no espaço operacional

Vítor Santos

Universidade de Aveiro

28 Nov 2022

Sumário

1. Equação geral de trajetória polinomial de 3ª ordem
2. Cálculo de trajetória de 3ª ordem
3. Trajetória nas juntas de um RR planar
4. Trajetória Multiponto
5. Trajetória circular de um RR planar
6. Exercícios opcionais de planeamento no espaço operacional

Equação geral de trajetória polinomial de 3ª ordem

Valor da junta no instante t começando no instante t_0

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) +$$
$$+ \left[\frac{3}{(t_f - t_0)^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f - t_0}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f - t_0}\dot{\theta}_f\right](t - t_0)^2 +$$
$$+ \left[-\frac{2}{(t_f - t_0)^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{(t_f - t_0)^2}(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)\right](t - t_0)^3$$

Parâmetros

- θ_0 - Valor inicial da posição da junta
- θ_f - Valor final da posição da junta
- $\dot{\theta}_0$ - Valor inicial da velocidade da junta
- $\dot{\theta}_f$ - Valor final da velocidade da junta
- t_0 - Instante inicial da trajetória
- t_f - Instante final da trajetória

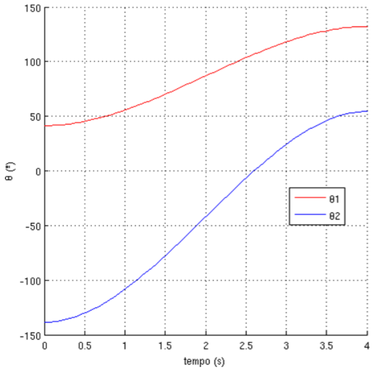
Exercício 1 - Cálculo de trajetória de 3ª ordem

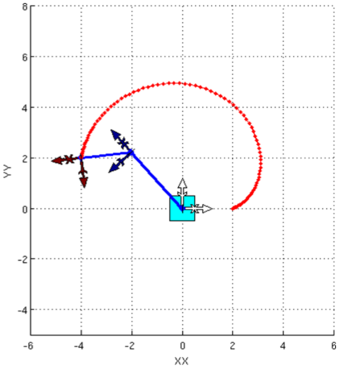
Criar a função `[QQ,t]= PolyTrajV(Q0,Qf,Qv0,Qvf,N,t0,tf)`

- Retorna trajetórias polinomiais de terceira ordem entre duas posturas com velocidades iniciais e finais distintas.
- `QQ` - matriz com `N` colunas onde cada coluna contém os valores das juntas nos instantes correspondentes.
- `t` - vetor com os tempos correspondentes aos `N` instantes de amostragem da trajetória entre o instante inicial (t0) e o final (tf).
- Os parâmetros da função são:
  - `Q0` - vetor da posição inicial das juntas (θ_0)
  - `Qf` - vetor da posição final das juntas (θ_f)
  - `Qv0` - vetor da velocidade inicial das juntas ($\dot{\theta}_0$)
  - `Qvf` - vetor da velocidade final das juntas ($\dot{\theta}_f$)
  - `t0` - instante inicial da trajetória (segundos)
  - `tf` - instante final da trajetória (segundos)
  - `N` - número de pontos a usar na definição da trajetória

Exercício 2 - Trajetória nas juntas de um RR planar

- Planear o movimento das juntas de um RR planar (L1=3, L2=2) quando se desloca da posição (2;0) com "cotovelo em cima" para a posição (-4;2) com "cotovelo em baixo" no intervalo de 0 a 4 s.
- Representar as curvas dos ângulos de junta.
- Fazer a animação do robô nesse trajeto.





Exercício 3 - Trajetória Multiponto

Criar a função `[QQ, t]= MultiPolyTrajV(Q,N,tt)`

- Retorna trajetória polinomial múltipla entre duas posturas com velocidades iniciais e finais nulas e passando por pontos intermédios (*via points*).
- QQ - matriz que, em cada coluna, tem os valores das juntas nos instantes correspondentes, incluindo os *via points*.
- t - vetor com os instantes de tempo correspondentes a todos os instantes de amostragem da trajetória do início ao fim.
- Parâmetros da função
  - Q - matriz com os vetores iniciais, finais e intermédios das posições a percorrer: [Qi QA QB ... Qf]
  - tt - vetor com os instantes finais de cada *via point* (espera-se que o instante inicial é 0, mas poderá não ser...)
  - N - vetor com os números de pontos a usar em cada sub-trajetória.

NB. Numa primeira fase pode-se admitir que as velocidades intermédias de passagem são nulas. Fica como desafio criar uma variante que defina as velocidades intermédias com uma heurística de interpolação das velocidades médias entre dois troços consecutivos em que a velocidade não muda de sinal.

Sobre a função `MultiPolyTrajV`

- A função `[QQ,t]=PolyTrajV(Q0,Qf,Qv0,Qvf,N,t0,tf)` calcula trajetórias entre duas posições (Q0 e Qf).
- A nova função `[QQ,t]=MultiPolyTrajV(Q,N,tt)`, prevê pontos intermédios, portanto, deve chamar a função `PolyTrajV` várias vezes e concatenar os resultados de cada chamada. Numa primeira fase considerar velocidades de passagem nulas. Completar os ??? abaixo:

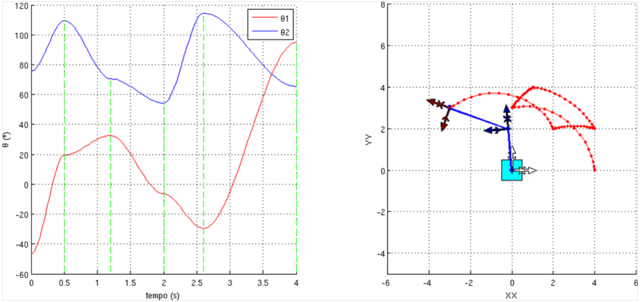
```
V=zeros( size(Q) ); %velocidades de passagem nulas
QQ=[]; t=[];   %matriz e vetor para ir concatenando...
for i=1:size(Q,2)-1  % porqueˆ ?
    Qi= ??? ;  Qf= ???;    % o que falta?
    Vi= ??? ;  Vf= ???;    % o que falta?
    t0= ??? ;  tf= ???; % o que falta?
    [q , ttt]=PolyTrajV(Qi,Qf,Vi,Vf,N,t0,tf);
    QQ=[QQ q];  %acumulacao dos ˆangulos
    t=[t ttt];  %acumulacao dos tempos
end
```

Exercício 4 - Trajetória Multiponto de um RR planar

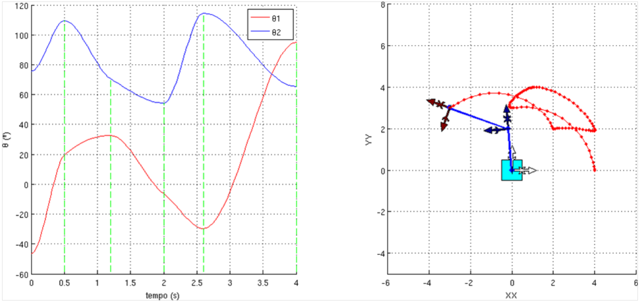
- Planear o movimento das juntas de um RR planar (L1=2, L2=3) quando se desloca da posição (4,0) para a posição (-3,3), mas passando pelas posições intermédias A=(0;3) , B=(1;4), C=(4;2) e D=(2;2).
  - Os instantes das passagens são:
    - t=[0 0.5 1.2 2.0 2.6 4.0] (s).
  - Manter o cotovelo sempre na mesma posição.
- Representar as curvas dos ângulos de junta
- Fazer a animação do robô nesse trajeto

- NB. As soluções são ligeiramente diferentes conforme se considerem as velocidades intermédias de passagem nulas ou não-nulas (interpoladas).
- Adiante ilustram-se as duas soluções.

Ilustração da solução do ex. 4 - cotovelo em baixo

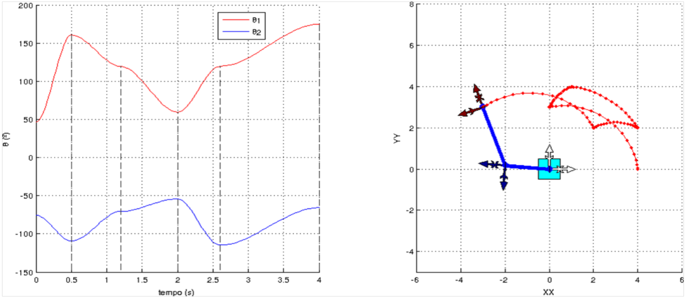


Com velocidades intermédias sempre nulas.

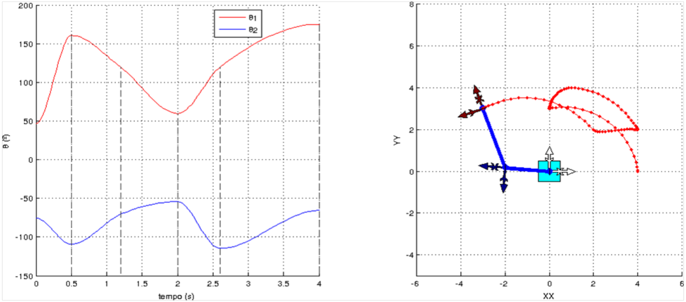


Com velocidades intermédias interpoladas

Ilustração da solução do ex. 4 - cotovelo em cima



Com velocidades intermédias sempre nulas.



Com velocidades intermédias interpoladas

Sugestão para velocidades não nulas em `MultiPolyTrajV`

- Para uma solução completa de `[QQ, t]=MultiPolyTrajV(Q,N,tt)`, é preciso usar as velocidades de passagem nos *via points*.
- O que se propõe é usar a heurística e calcular as velocidades médias em todos os troços que são num número total de `size(Q,2)-1` (porquê?).
- No fim de calcular as velocidades médias em cada troço, é preciso determinar a velocidade de passagem nos *vias points* em função dos sinais algébricos das velocidades nos troços adjacentes.
- Completar o código seguinte (???) relativamente ao cálculo das velocidades de passagem para cumprir a sugestão.

```
%...
V=zeros( size(Q) ); %vel. de passagem inicializadas a zero
for i=2:size(Q,2)-1 %calcular vel. intermedias
    dq_1=(Q(???)-Q(???))/(tt(???)-tt(???)); % vel. no anterior
    dq_2=(Q(???)-Q(???))/(tt(???)-tt(???)); % vel. no posterior
    %m=vetor logico indexador das vel. de passagem nao nulas
    m=(sign(dq_1)==sign(dq_2));
    %atribuicao das vel. medias nao nulas!Indexacao engenhosa :-)
    V(m,i)=( dq_1(m)+dq_2(m) )/2;
end
%...
```

Planeamento no espaço operacional

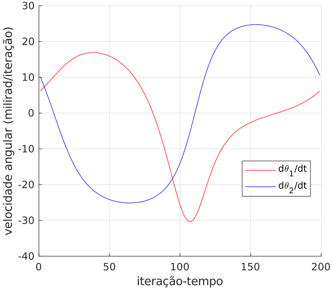
- O objetivo é calcular as velocidades nas juntas para cumprir as velocidades cartesianas: $dq = J_I dr$, onde dr representa as trajetórias no espaço operacional (ou cartesiano) ($dr = [dx\ dy\ dz\ d\phi\ d\theta\ d\psi]^T$).
- Assim, o mais imediato é especificar cada uma das posições cartesianas em função de um parâmetro (tempo), $x = x(t), y = y(t), \cdots$, e depois obter os incrementos.
- De seguida apresenta-se um excerto de uma implementação em MATLAB para uma trajetória ao longo de uma circunferência:

```
%...
t=linspace(0,2*pi,N);
x=x0+r*cos(t);
y=y0+r*sin(t);
dr=[diff(x) ; diff(y) ];
QA=invkinRR(x(1),y(1),L1,L2); Qi=QA(:,2); %starting point
%...
```

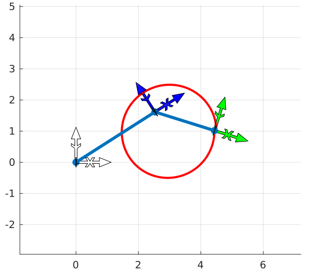
Exercício 5 - Trajetória circular de um RR planar

Simular trajetória circular de RR planar

- Com L1=3 e L2=2, obter o gráfico das velocidades nas juntas para que a ponta descreva uma circunferência centrada em $[2 \;\; 1]^T$ e raio r=1.5.
  - $dq = J^{-1}dr$
  - $dq = [dq_1; \; dq_2], dr = [dx; \; dy]$
- O movimento inicia-se com o cotovelo em cima desde o ponto $[4.5 \;\; 1]^T$
- O exemplo usou 200 pontos na circunferência.



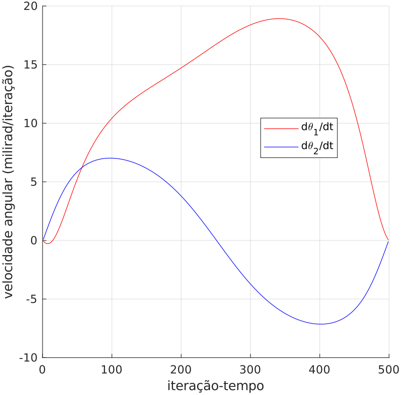
- Usar as equações paramétricas da circunferência para obter os diversos valores de $[dx; \; dy]$ correspondentes.
  - $x = x_0 + r\cos(t), (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$
  - $y = y_0 + r\sin(t), (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

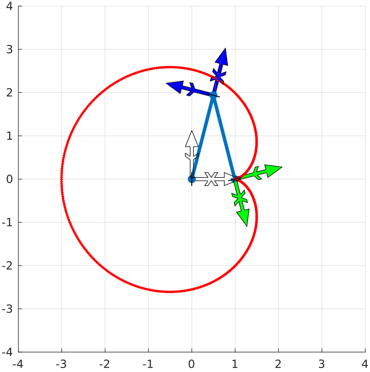


Ex. 6 (opc.)- Trajetória de RR planar em cardióide

Simular a trajetória de uma cardióide de um robô RR planar

- Com L1=2 e L2=2, simular o movimento em que a ponta descreve uma cardióide cujas equações são dadas por:
  - $x = a(2\cos t - \cos 2t)$ e $y = a(2\sin t - sin 2t)$
  - usando $a = 1$ e $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

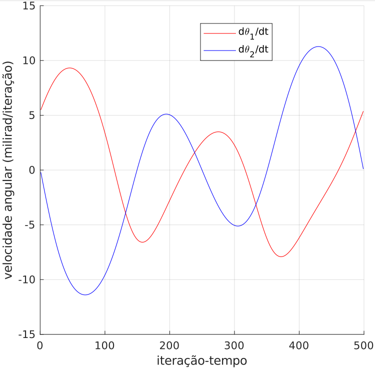


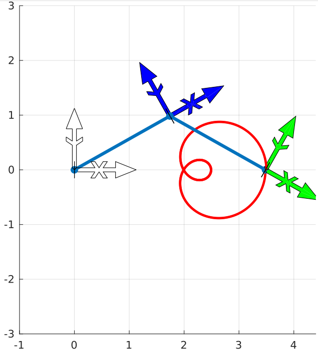


Ex. 7 (opc.) - Trajetória em "Limaçon de Pascal"

Simular a trajetória de "Limaçon de Pascal" com RR planar

- Com L1=3 e L2=2, simular a curva descrita pela equação polar:
  - $\rho = \frac{1}{2} + \cos\alpha$, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.
  - Sugestão: converter das coordenadas polares: $[x, y] = \mathit{pol2cart}(\alpha, \rho)$
  - Para evitar singularidades, realizar uma translação à direita da curva de 2 unidades: garra inicia em (3.5;0) em vez de (1.5;0).





Outras Curvas

- Existem muitas outras curvas com eventual utilidade em robótica. No seguinte endereço é possível encontrar algumas delas:
- `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Curves/Curves.html`
- Dois exemplos interessantes podem ser:
  - Epitrocóide
    $x = (a + b)\cos t - c\cos(\frac{a}{b} + 1)t$
    $y = (a + b)\sin t - c\sin(\frac{a}{b} + 1)t$
  - Hipotrocóide
    $x = (a - b)\cos t + c\cos(\frac{a}{b} - 1)t$
    $y = (a - b)\sin t - c\sin(\frac{a}{b} - 1)t$