

Chaotic Scattering

D. Florez Orjuela, L. F. Horta Camacho, S. Peña Martinez

Resumen

Se presenta la dinámica de una partícula que tiene como trayectoria un movimiento caótico, que en este trabajo se da a conocer detalladamente. Éste depende de un potencial dado donde la partícula va a interactuar y va a salir de ese potencial con una trayectoria y velocidad distinta a la que ingresó.

Calculando en todo momento su componente de velocidad y dirección se calculan los ángulos de dispersión. Se cambian algunas condiciones iniciales como velocidad y energía, y para cada una de éstas se calculan sus respectivos ángulos.

1. Introducción

El estudio de la dinámica de una partícula es uno de los más atareados para la física, donde la mayoría de estos sistemas tienen un movimiento de naturaleza muy compleja reflejado en su trayectoria y por ende resulta difícil percibir en todo momento el estado de dicha partícula. En la física computacional se trata de simular lo más exactamente posible problemas de la física teórica o convencional, en la cual para algunos sistemas dinámicos su extrema sensibilidad conllevada en pequeñas variaciones de sus condiciones iniciales nos lleva resultados muy distantes y diferentes entre sí.

El objetivo principal de este trabajo es el de simular la trayectoria que posee una partícula que es disparada desde cierto punto y con cierta dirección y velocidad hacia la zona de dispersión con la cual interactúa mediante un

potencial de energía y posteriormente se aleja de ella con dirección constante hacia el infinito.

2. Aspectos Teóricos

Dispersión es el fenómeno por el cual un conjunto de partículas que se mueve en una dirección determinada, rebota sucesivamente con las partículas por el que se mueve hasta perder una dirección privilegiada de movimiento. Se conoce como dispersión caótica al tipo de movimiento de una o varias partículas a las cuales no se les puedan calcular fácilmente en cada instante su velocidad y posición.

El problema consiste en desarrollar y estudiar la posición en dos dimensiones de una partícula puntual con ciertas condiciones iniciales dadas tales como su posición en los ejes coordenadas (x, y) , la magnitud de su velocidad y su dirección con ángulo θ respecto al eje x , a medida que se acerca, interactúa y se aleja de un lugar con diferencia de potencial V expresado por la ecuación

$$V(r) = x^2 y^2 e^{-(x^2 + y^2)} \quad (1)$$

la cual tiene 4 máximos en $(x, y) = (1, \mp 1)$ y $(-1, \pm 1)$ respectivamente y ésta es desarrollada mediante un sistema de ecuaciones,

$$M \frac{dv}{dt} = -\nabla V(r) \quad (2)$$

$$v = \frac{dr}{dt} \quad (3)$$

donde $r = (x, y)$ y $v = (v_x, v_y)$ en cualquier caso. Ya que la energía, denotada como

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + V(r) \quad (4)$$

se conserva, la magnitud de la velocidad de la partícula puede ser calculada mediante la fórmula

$$|v| = \sqrt{\frac{2(E - V(r))}{M}} \quad (5)$$

Tomando la masa de la partícula $M = 1$ y la energía E afectándola alrededor de la parte central del potencial desde largas distancias con un parámetro de impacto b (paralelo al eje x y a una distancia constante de él, anteriormente denotado como b en condiciones iniciales).[1]

2.1. Método Runge Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son una serie de métodos numéricos usados para encontrar aproximaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales, lineales y no lineales. Para la solución de este problema se usará el método conocido como Runge-Kutta estándar de orden cuatro o también conocido como RK4. Éste se utiliza para resolver ecuaciones en su forma explícita:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

O en su forma implícita:

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0$$

Éste es muy útil para casos en que la solución no puede hallarse por métodos convencionales. Hay variaciones en el método RK4, pero el utilizado es el método en el cual se elige un tamaño de paso H y un número máximo de iteraciones N .

El método RK4 está dado por la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4] \quad (6)$$

Para $i=0, \dots, n-1$. La solución se da a lo largo del intervalo $(x_0, x_0 + hn)$, donde:

$$k_1 = hf(x_1, y_1)$$

$$k_2 = hf[x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}]$$

$$k_3 = hf[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}]$$

$$k_4 = hf[x_i + h, y_i + k_3]$$

El tamaño de paso h se define como el incremento de tiempo entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1} . Así, el siguiente valor $y_i + 1$ es determinado por el presente valor y_i más el producto del tamaño del intervalo (h) por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes:

- k_1 es la pendiente al principio del intervalo
- k_2 es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando k_1 para determinar el valor de y en el punto $x_i + h/2$.
- k_3 es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando k_2 para determinar el valor de y
- k_4 es la pendiente al final del intervalo, con el valor de y determinado por k_3

Se promedian las cuatro pendientes y se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$m = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (7)$$

[2]

3. Desarrollo del problema

3.1. Descripción del movimiento

El problema indica que al introducir una posición en coordenadas cartesianas y una energía cinética a una partícula, ésta tiene que interactuar con un potencial de energía y al salir de éste tendrá una rapidez y dirección diferentes a las del inicio. Para poder obtener la posición es necesario utilizar un parámetro como el tiempo t , que nos ayude a seguir de cerca la posición de la partícula, de esta manera es necesario tomar unos δt muy pequeños. Luego es necesario resolver las ecuaciones 2 y 3 utilizando el método de Runge Kutta de cuarto orden para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales, para las ecuaciones de velocidad y posición, se procede a introducir la ecuación de potencial 1 que es la que aporta los parámetros del choque de la partícula. Para apreciar mejor éste se procede a graficar como se muestra a continuación. [3]

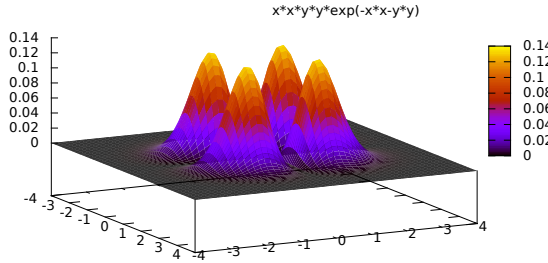


Figura 1: Dispersión para el potencial dado

3.2. Error en el problema

Al implementar el método en el código el problema nos propone una posición inicial cercana al eje x y no tan cercana al eje y que propone el problema pudimos darnos cuenta que el resultado obtenido no era el mismo que el

ejemplo propuesto. El caso base que se propone es dar energía cinética a la partícula en el eje y y ninguna en el eje x , con estos valores iniciales la partícula nunca llegará a acercarse al potencial, por el contrario se alejará de este potencial.

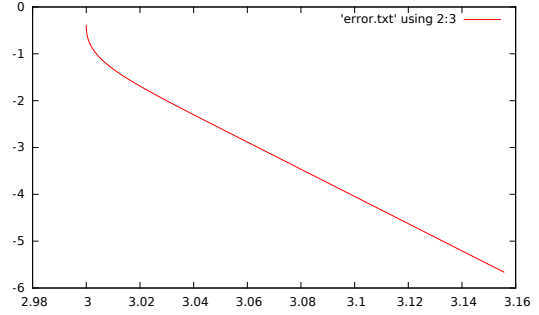


Figura 2: Trayectoria con condiciones iniciales erróneas en el plano x, y

Observando el fenómeno físicamente, ese potencial repele la partícula, entonces sin energía cinética que la acerque al potencial, ésta no va a interactuar lo suficiente con él. La solución que hallamos a este error fue ponerle energía cinética a la partícula en la dirección x y no ponerle en la dirección y para que se acercara al potencial e interactuara con éste.

Gracias a los errores planteados fue posible determinar el aspecto físico de cómo y por qué se planteaba la fuerza de tal manera como el gradiente negativo

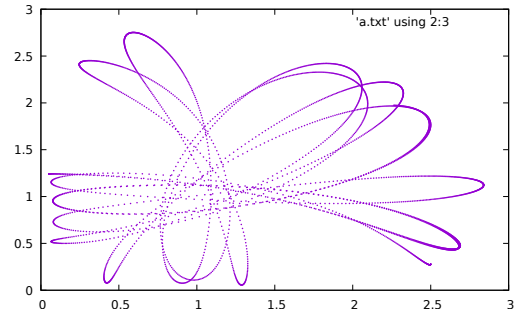


Figura 3: Trayectoria con fuerza atractiva

al evidenciar la trayectoria de la partícula en la gráfica anterior sobre el plano x, y y a su vez ayudó a identificar el error de la desviación sin interacción de la partícula con el potencial.

3.3. Cálculo de las trayectorias

Ya con los errores solucionados se procedió a graficar algunas trayectorias de la partícula variando el parámetro de impacto b obteniendo la siguiente gráfica:

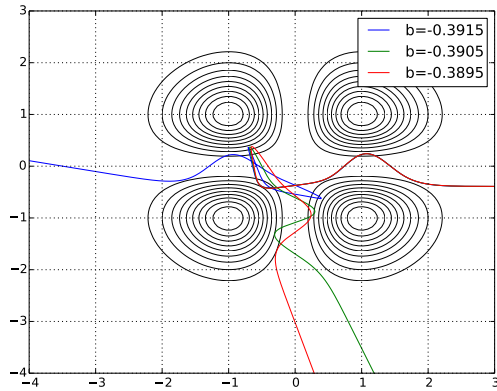


Figura 4: Trayectorias variando el parámetro b en el plano x, y

Se puede observar que si se varía un poco el parámetro de impacto, la trayectoria final cambia considerablemente. El estado de la partícula en cualquier momento está definido por la posición en x y y así como el ángulo θ definido por la dirección de la velocidad con el eje x .

3.4. Cálculo de los ángulos de dispersión

El cálculo de los ángulos de dispersión finales de la partícula se halla relacionando la velocidad que lleva esta en cada una de sus componentes, las condiciones que hace variar las velocidades son el parámetro de impacto b así como la energía cinética inicial que se le imprime a la

partícula, procedemos a hacer un análisis viendo lo que sucede variando estas condiciones.

Para empezar calculamos los ángulos de incidencia con una energía $E > E_m$ de la fórmula 5 dada por $E = 1,626E_m$ donde E_m es la energía en el pico más alto del potencial. El compor-

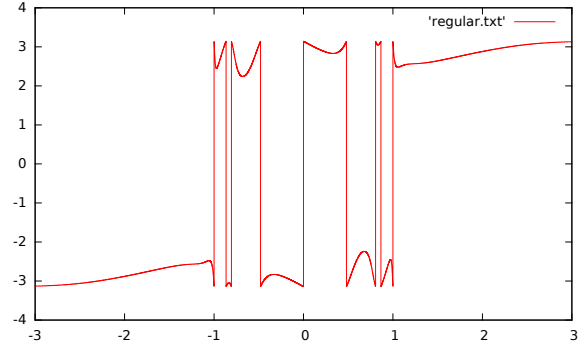


Figura 5: Ángulos de dispersión para $E = 1,626E_m$ con theta vs. parámetro b

tamiento de los ángulos para estos niveles de energía no alcanzan a ser caóticos.

Ahora bien, calculamos los ángulos de incidencia con una energía $E < E_m$ para $E = 0,260E_m$

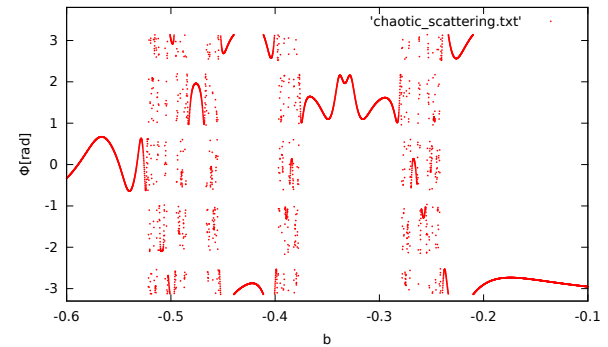


Figura 6: Ángulos de dispersión para $E = 0,260E_m$

En este resultado se evidencia el comportamiento caótico al variar el parámetro de impacto para las regiones $-0,6 < b < -0,1$.

A pesar que el parámetro de impacto cambia con un δb pequeño los ángulos resultantes tienden a ser caóticos. Para ver de una manera más detallada este comportamiento procedemos a variar b más lentamente dando como resultado la siguiente gráfica

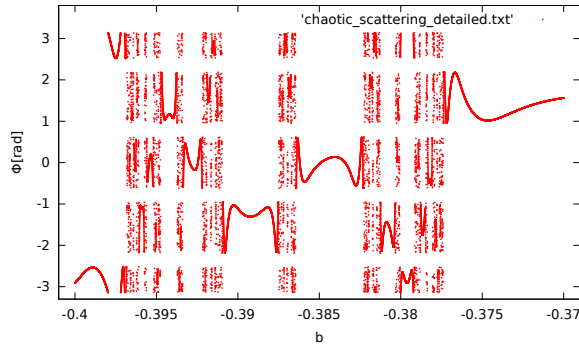


Figura 7: Ángulos de dispersión para $-0,4 < b < -0,27$

En la anterior gráfica se puede observar un poco mejor la dispersión cuando el parámetro de impacto está dado por $-0,4 < b < -0,27$. Para mostrar aún más este caos que ocurre variando mínimamente las condiciones iniciales se hace la siguiente gráfica:

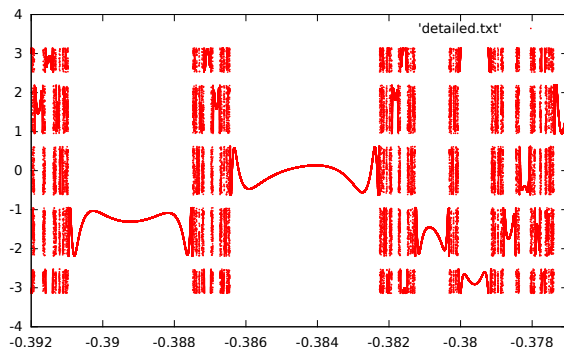


Figura 8: Ángulos de dispersión para $-0,3920 < b < -0,3770$

Donde se varía el parámetro b como $-0,3920 < b < -0,3770$ esto da una región

más estrecha donde se evidencia mejor la dispersión caótica y la sensibilidad que tiene el sistema al cambio de condiciones iniciales.[4]

4. Conclusiones

- Se muestra que para todo movimiento caótico por más pequeña que sea la variación en las condiciones iniciales, su trayectoria es totalmente diferente a las demás.
- Se evidenció que en un movimiento caótico dentro del potencial, los ángulos finales de eyección de la partícula difieren mucho unos de los otros a medida que se varía el parámetro de impacto, así sea mínimamente.
- Se muestra que, es necesario para que haya un movimiento caótico que la fuerza sea de repulsión.

Referencias

- [1] H. J. Korsch, H. Jodl, and T. Hartmann. *Chaos*. Springer, Berlin, 2007.
- [2] R. Fitzpatrick. *Computational Physics*. CreateSpace Independent Publishing Platform, Austin, Texas, 2015.
- [3] R. H. Landau, M. J. Paez, and C. C. Bordeianu. *Computational Physics - Problem Solving with Python*. WILEY-VCH, Weinheim, Germany, 2015.
- [4] E Ott and T. Tél. *Chaotic scattering: An introduction*. Institute of Theoretical Physics, Eötvös University, Budapest, Hungary, 1993.