COURS

LOGIQUE COMBINATOIRE

1) Définitions

a) Variable binaire

Une variable binaire est une variable qui ne peut prendre que deux valeurs distinctes : 0 ou 1.

Elle est désignée par une lettre, un nom ou une abréviation.

b) Etat logique – Niveau logique

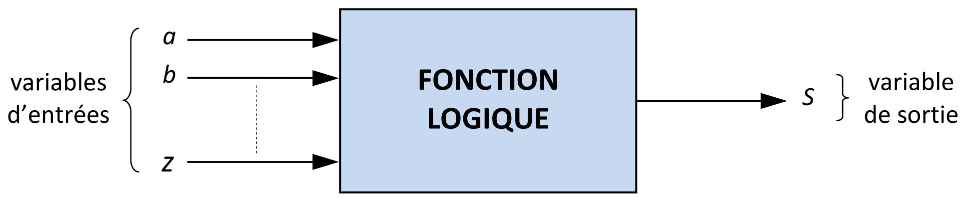
Un état logique est le nom donné aux deux valeurs (0 ou 1) que peut prendre une variable binaire.

On parle aussi de niveau logique, car un état logique est représenté par un niveau de tension :

- niveau bas (*L* pour *Low*) ↔ 0
- niveau haut (*H* pour *High*) ↔ 1

c) Fonction logique

En logique combinatoire, une fonction logique est une fonction dont l'état logique de la variable de sortie à un instant *t* dépend de l'état logique des variables d'entrées à ce même instant.



d) Opérateur logique

Les opérateurs logiques permettent de réaliser des fonctions logiques.

On distingue les opérateurs élémentaires OUI, NON, ET, OU.

e) Porte logique

Les portes logiques sont des composants électroniques constitués de transistors et permettant de mettre en œuvre les opérateurs logiques.

Les circuits numériques, comme les microprocesseurs par exemple, sont constitués de millions de portes logiques intégrés sur une même puce.

COURS

LOGIQUE COMBINATOIRE

2) Diverses représentations utilisées en logique combinatoire

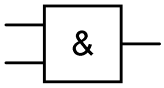
a) Symbole logique

Un symbole logique est la représentation schématique normalisée d'un opérateur logique.

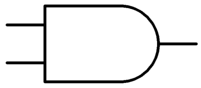
Il y a deux normes de représentation des opérateurs logiques :

- la norme NFC03 (norme française)
- la norme ANSI (norme américaine)

Exemples :



Norme NFC03



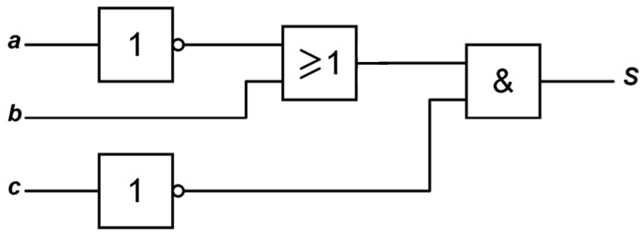
Norme ANSI

b) Logigramme

Un logigramme est la représentation schématique normalisée d'une fonction logique.

Il est réalisé en associant plusieurs symboles d'opérateurs logiques.

Exemple :



c) Table de vérité

Une table de vérité est un tableau qui donne l'état logique d'une variable de sortie pour toutes les combinaisons d'états logiques des variables d'entrées.

Le nombre de combinaisons dépend du nombre de variables d'entrées :

Nombre de combinaisons = $2^{\text{nombre de variables d'entrées}}$

Exemple :

a	*b*	*S*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

d) Equation logique

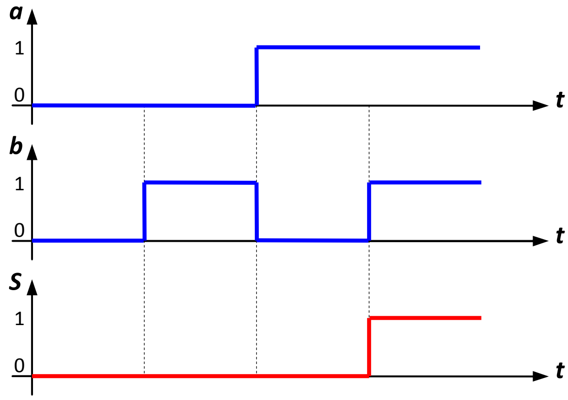
Une équation logique est la représentation algébrique d'un opérateur ou d'une fonction logique.

Exemple : $S = (a + b).\overline{c}$

e) Chronogramme

Un chronogramme est une représentation graphique qui permet de visualiser, en fonction du temps, l'état logique des variables d'entrées et de sorties d'un opérateur ou d'une fonction logique.

<u>Exemple</u> :



f) Schéma à contacts

Un schéma à contacts est la représentation d'un opérateur ou d'une fonction logiques sous forme de schéma électrique. Les variables d'entrées sont représentées par des interrupteurs et les variables de sorties par des lampes.

On utilise deux types d'interrupteur :

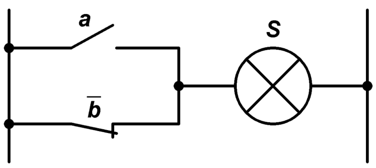
- l'interrupteur à contact normalement ouvert (NO)  : il se ferme quand on l'actionne
- l'interrupteur à contact normalement fermé (NF)  : il s'ouvre quand on l'actionne

<u>Principe de fonctionnement</u> :

- lorsqu'une variable d'entrée est à l'état 0, l'interrupteur correspondant reste au repos
- lorsqu'une variable d'entrée est à l'état 1, l'interrupteur correspondant est actionné
- si la lampe reste éteinte, alors la variable de sortie correspondante est à l'état 0
- si la lampe s'allume, alors la variable de sortie correspondante est à l'état 1

<u>Exemple</u> :

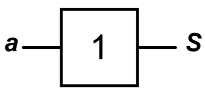
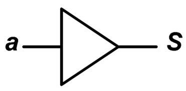
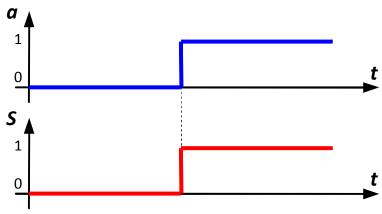
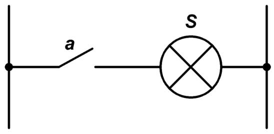
a		*b*		*S*	
Etat logique	Etat contact	Etat logique	Etat contact	Etat logique	Etat lampe
0	Ouvert	0	Fermé	1	Allumée
0	Ouvert	1	Ouvert	0	Eteinte
1	Fermé	0	Fermé	1	Allumée
1	Fermé	1	Ouvert	1	Allumée



3) Description des divers opérateurs logiques

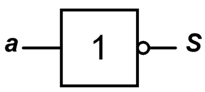
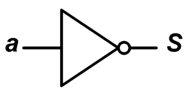
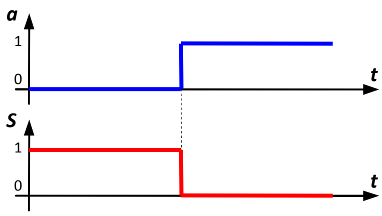
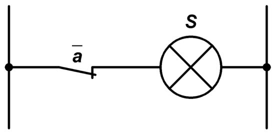
a) Opérateur identité : OUI

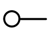
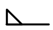
L'état de la variable de sortie de cet opérateur est égal à l'état de la variable d'entrée.

<table>
<tr><th>Symboles</th><th>Equation</th><th>Table de vérité</th><th>Chronogramme</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Norme NFC03 :

Norme ANSI :
</td><td>$S = a$</td><td><table><tr><th>a</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><th colspan="2">Schéma à contacts</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

b) Opérateur complément : NON

L'état de la variable de sortie de cet opérateur prend l'état contraire de la variable d'entrée.

<table>
<tr><th>Symboles</th><th>Equation</th><th>Table de vérité</th><th>Chronogramme</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Norme NFC03 :

Norme ANSI :
</td><td>$S = \overline{a}$
Lue « a barre »</td><td><table><tr><th>a</th><th>S</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><th colspan="2">Schéma à contacts</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

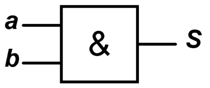
Remarque : le symbole  permet de représenter une sortie complémentée (variante : ).

c) Opérateur ET (*AND*)

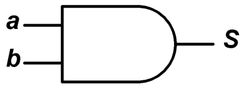
La variable de sortie de cet opérateur est à l'état 1, si toutes les variables d'entrées sont à l'état 1.

Symboles

Norme NFC03 :



Norme ANSI :



Equation

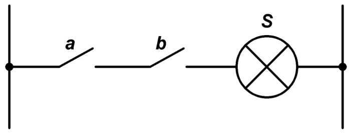
$S = a \cdot b$

Lue « S = a et b »

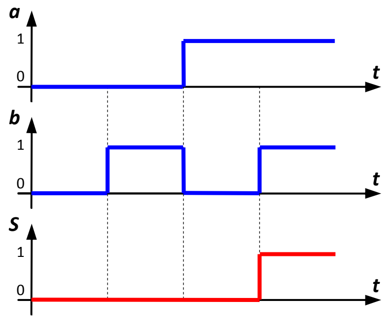
Table de vérité

a	*b*	*S*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schéma à contacts



Chronogramme

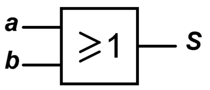


d) Opérateur OU (*OR*)

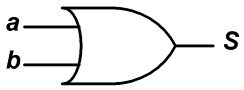
La variable de sortie de cet opérateur est à l'état 1, si au moins une variable d'entrée est à l'état 1.

Symboles

Norme NFC03 :



Norme ANSI :



Equation

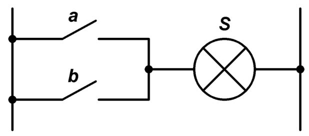
$S = a + b$

Lue « a ou b »

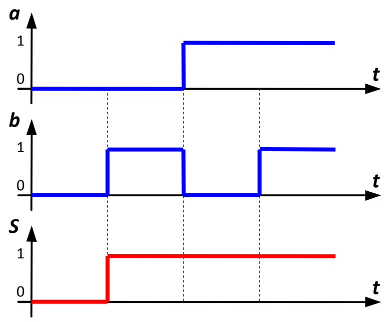
Table de vérité

a	*b*	*S*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Schéma à contacts



Chronogramme



4) Algèbre booléenne (ou algèbre de BOOLE)

L'algèbre booléenne est un système algébrique imaginé par George BOOLE en 1854.

Principales propriétés de l'algèbre booléenne

Règles de priorité des opérateurs	En l'absence de parenthèse, l'opérateur ET est prioritaire par rapport à l'opérateur OU.	
Commutativité	$a \cdot b = b \cdot a$	$a + b = b + a$
Associativité	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
Distributivité	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

COURS

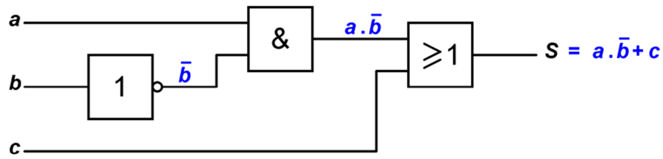
LOGIQUE COMBINATOIRE

5) Transformations

a) Passage du logigramme à l'équation logique

Cette opération permet de déterminer l'équation de la variable de sortie d'un logigramme. Cela consiste à écrire l'équation de sortie de chaque opérateur logique, en progressant des entrées vers la sortie.

Exemple : Déterminer l'équation logique de la variable de sortie du logigramme suivant.

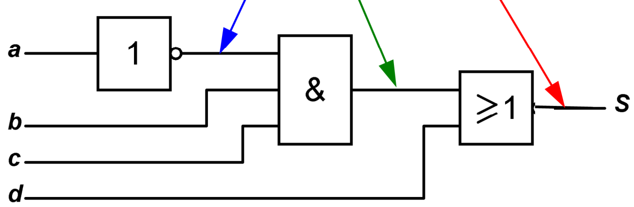


b) Passage de l'équation logique au logigramme

Il s'agit de l'opération inverse de la précédente. Le dessin du logigramme se fait en partant du niveau de plus forte priorité de l'équation logique.

Exemple : Dessiner le logigramme correspondant à l'équation logique S = ā.b.c + d

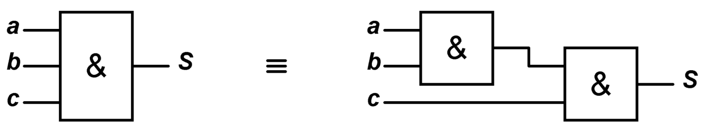
$$S = \boxed{\boxed{\boxed{\bar{a}} \cdot b \cdot c} + d}$$



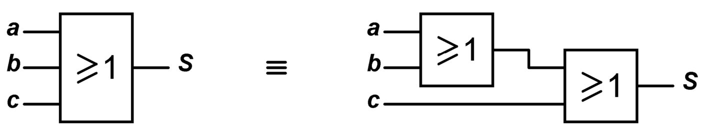
Utilisation d'opérateurs logiques possédant 2 entrées au maximum :

Il est possible de remplacer des opérateurs logiques ET, OU, NON-ET et NON-OU à 3 entrées (ou plus) par des opérateurs logiques à deux entrées au maximum.

$S = a \cdot b \cdot c$ $\qquad$ $S = (a \cdot b) \cdot c$



$S = a + b + c$ $\qquad$ $S = (a + b) + c$



c) Passage de la table de vérité à l'équation logique

La table de vérité donne l'état logique de la variable de sortie pour toutes les combinaisons d'états logiques des variables d'entrées. L'équation logique de la variable de sortie est obtenue à partir des diverses combinaison d'états des variables d'entrées pour lesquelles la sortie est à l'état logique 1.

Exemple : Déterminer l'équation logique de la variable de sortie.

a	*b*	*S*
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Pour ces 2 combinaisons d'état des variables d'entrées, la sortie est à l'état logique 1.

$\bar{a} \cdot b$

$a \cdot b$

$$S = \underbrace{\bar{a} \cdot b}_{\text{2ème ligne}} + \underbrace{a \cdot b}_{\text{4ème ligne}}$$

d) Passage de l'équation logique à la table de vérité (ou à l'une de ses combinaisons)

A partir de l'équation logique, on peut déterminer l'état logique de la variable de sortie pour une combinaison d'états des variables d'entrées. Pour cela, il faut réécrire l'équation en remplaçant les variables binaires par leur état logique, puis résoudre.

Exemple : Soit l'équation $S = (a+b).\bar{c}$

Déterminer l'état logique de la variable de sortie *S* pour *a* = 0, *b* = 1 et *c* = 0.

$S = (0+1).\bar{0} = 1.1 \quad \Rightarrow \quad S = 1$

e) Passage du logigramme à la table de vérité (ou à l'une de ses combinaisons)

A partir du logigramme, on peut déterminer l'état logique de la variable de sortie pour une combinaison d'états des variables d'entrées. Pour cela, il faut indiquer sur le logigramme l'état de la sortie de chaque opérateur logique, en progressant des entrées vers la sortie, jusqu'à obtenir l'état logique de la variable de sortie.

Exemple : Déterminer l'état logique de la variable de sortie du logigramme ci-dessous, pour *a* = 1, *b* = 0 et *c* = 0.